Aufgabe 17

Zeige: $\|A\| \geq \|K\|_\infty$. Sei $x \in [0,1]$.

Setze $K_\varepsilon(y) := \dfrac{K(x,y)}{|K(x,y)|+\varepsilon} < 1 \quad \forall y$

$$A(K_\varepsilon)(x) = \int_0^1 \frac{K(x,y)^2}{|K(x,y)|+\varepsilon}\,dy > \int_0^1 \frac{K(x,y)^2-\varepsilon^2}{|K(x,y)|+\varepsilon}\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(|K(x,y)|-\varepsilon\right) dy$$

$\varepsilon \to 0$
$$\Rightarrow A(K_\varepsilon)(x) \geq \|K(x,\cdot)\|_1$$

$$\Rightarrow \|A(K_\varepsilon)\|_\infty \geq \sup_x \|K(x,\cdot)\|_1$$

$$\Rightarrow \|A\|_{C^0 \to C^0} = \sup_x \|K(x,\cdot)\|_1$$

Zu Aufgabe 17:

~~$A: C^0([0,1]) \to L^1([0,1])$~~

$$\cancel{\|Au\|_1 = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,y)\, u(y)\, dy \right| dx}$$

$$\cancel{\le \int_0^1 \|K(x,\cdot)\|_\infty \|u\|_1 \, dx}$$

$$Au(x) - Au(y) = \int (K(x,z) - K(y,z))\, u(z)\, dz$$

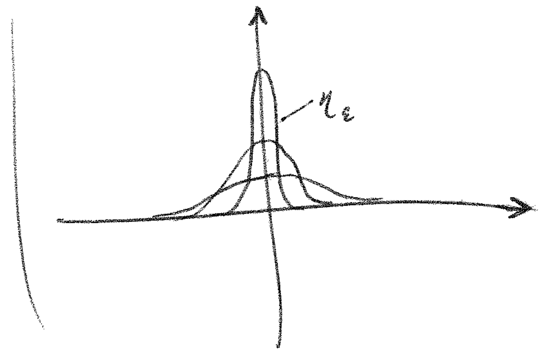
$$\le \|K(x,\cdot) - K(y,\cdot)\|_\infty \|u\|_1$$

$$K(x_n, y)\, u \le \|K\|_\infty u \quad \forall n$$

Frage: Was, wenn $A: L^1([0,1]) \to C^0([0,1])$?

$A: L^1 \to C^0$

$$\left.\begin{aligned} \|Au\|_\infty &= \sup_x \int_0^1 K(x,y)\, u(y)\, dy \\ &\le \sup_x \|K(x,\cdot)\|_\infty \|u\|_1 \\ &= \|K\|_\infty \|u\|_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \|A\| \le \|K\|_\infty$$



Sei $u = \eta_\varepsilon \to \delta_{y_0}$, mit $K(x_0, y_0) = \max(K)$

Dann
$$\|Au\|_\infty = \|A\eta_\varepsilon\|_\infty = \sup_x \int_0^1 K(x,y)\, \eta_\varepsilon(y)\, dy$$

$$\ge \int_0^1 K(x_0, y)\, \eta_\varepsilon(y)\, dy$$

$$\to K(x_0, y_0)$$

$$= \|K\|_\infty$$

Aufgabe 18

(i) $A : D(A) \to X$, $B : X \to X$

A abg., B stetig $\Longrightarrow$ $A + B : D(A) \to X$ abg.

Bew:

Gelte $x_n \to x \in X$, $x_n \in D(A) \; \forall n$

und $(A+B)x_n \to y$.

$\Longrightarrow \; Ax_n \to y - Bx$

A abg. $\Longrightarrow$ $x \in D(A)$ und $Ax = y - Bx$

$\Longleftrightarrow$ $y = (A+B)x$

$\Longrightarrow$ $A + B$ abg.

(ii) $A : D(A) \to X$ bijektiv, $A^{-1} : X \to X$ stetig

Gelte $x_n \in D(A) \; \forall n$, $x_n \to x \in X$ und $Ax_n \to y \in X$.

Dann: $A^{-1}(Ax_n) \to A^{-1}y$

$\Longleftrightarrow$ $x_n \to A^{-1}y$

$\Longrightarrow$ $x = A^{-1}y$

$\Longrightarrow$ $x \in \operatorname{Im}(A^{-1}) = D(A)$ und $Ax = y$

$\Longrightarrow$ A abg.

Raum: $C([0,T],X) := \{u:[0,T] \to X \text{ stetig}\}$ mit Norm $\|u\|_{C([0,T],X)} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|$

Sei $F: X \to X$ lokal Lipschitz: $\forall R>0 \; \exists L>0$:

$$\|F(x)-F(y)\| \le L\,\|x-y\| \qquad \forall x,y \in B_R(0)$$

Für $x \in X$, betrachte folgendes Problem:

$$(*) \qquad \begin{cases} u'(t) = A u(t) + F(u(t)) \\ u(0) = x \end{cases}, \qquad A \text{ erz. Kontraktionshalbgr.}$$

"Schwache Formulierung":

$$u(t) = e^{tA} x + \int_0^t e^{(t-s)A} F(u(s))\,ds \qquad (**)$$

<u>Lemma:</u>

$T>0$, $x\in X$, $u,v \in C([0,T],X)$ lösen $(**)$.

Dann $u = v$.

<u>Bew:</u>

$M := \sup_{t\in[0,T]} \max\{\|u(t)\|, \|v(t)\|\}$. Es gilt:

$$\|u(t)-v(t)\| \le \int_0^t \|F(u(s))-F(v(s))\|\,ds \cdot \|e^{(t-s)A}\|$$

$$\le C\cdot L \cdot \int_0^t \|u(s)-v(s)\|\,ds ,$$

Setze $\varphi(t) = \|u(t)-v(t)\|$.

$\rightsquigarrow \varphi'(t) \le C\varphi(t)$

$\Leftrightarrow \varphi'(t) - C\varphi(t) \le 0$

$\Leftrightarrow (\varphi'(t) - C\varphi(t))e^{-ct} \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\varphi(t)e^{-ct}) \le 0$

$\Rightarrow \varphi(t)e^{-ct}$ fallend, ≥ 0 und verschwindet bei 0

$\Rightarrow \varphi e^{-ct} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ $\square$

Satz:

$R > 0$, $x \in \overline{B_R(0)}$. Dann:

$\exists$ eind. Lösung $u \in C([0,T], X)$ von

$$u(t) = e^{tA}x + \int_0^T e^{(t-s)A} F(u(s))\, ds$$

Beweis:

Setze $\quad T := \dfrac{1}{2L(2R + \|F(0)\|) + 2}$

$$K := 2R + \|F(0)\| .$$

Sei $\quad \mathbb{B} := \{ u \in C([0,T], X) \mid \|u(t)\|_X \leq K \ \forall t \in [0,T] \}$

$\qquad = \text{Kugel vom Radius } K \text{ in } C([0,T], X)$

Setze: $\quad \Phi_u(t) := e^{tA} x + \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A} F(u(s))\, ds \quad , \quad u \in E,\ t \in [0,T]$.

$$\begin{aligned}
\|F(u(s))\| &\leq \|F(0)\| + \|F(u(s)) - F(0)\| \\
&\leq \|F(0)\| + LK \\
&\leq \frac{R + \|F(0)\|}{T}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Longrightarrow \|\Phi_u(t)\| &\leq \|x\| + \int_0^t \|F(u(s))\|\, ds \\
&\leq R + t\, \frac{R + \|F(0)\|}{T} \\
&\leq K
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Phi_u \in \mathbb{B}$$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_v(t) - \Phi_u(t)\| &\leq L \int_0^t \|v(s) - u(s)\|\, ds \\
&\leq LT \|v - u\|_{C^0([0,T],X)} \\
&\leq \tfrac{1}{2} \|v - u\|_{C^0(\ldots)} \qquad \Longrightarrow \Phi \text{ hat Fixpunkt.}
\end{aligned}$$