Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD. Dr. Armin Schikorra
M.Sc. Frank Rösler

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen
Serie 8 vom 10.01.2017

Aufgabe 29 Zeigen Sie:

- $$u_*(x) := \sup\{\tilde{u}(x) : \ \tilde{u} \leq u, \quad \tilde{u} \text{ unterhalbstetig}\}$$
  ist unterhalbstetig.
- Ist $(u_\alpha)_\alpha$ eine Familie von oberhalb stetigen Funktionen, so ist $u := \inf_\alpha u_\alpha$ oberhalb stetig
- Ist $(u_\alpha)_\alpha$ eine Familie von unterhalb stetigen Funktionen, so ist $u := \sup_\alpha u_\alpha$ unterhalb stetig
- überlegen Sie sich ein Beispiel einer Familie von oberhalb stetigen Funktionen, so dass $u := \sup_\alpha u_\alpha$ beschränkt ist, aber *nicht* oberhalb stetig ist.

Aufgabe 30 Zeigen Sie, dass der *upper semicontinuous envelope* $u^*(x)$ für eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,definiert als

$$u^*(x) := \lim_{r\to 0_+} \sup_{|y-x|<r} u(y),$$

tatsächlich die kleinste oberhalbstetige Funktion oberhalb u ist. Dazu zeigen Sie:

- Für jedes feste $x \in \mathbb{R}^n$ und jede Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt
  $$\limsup_{y\to x} u(y) = \lim_{r\to 0_+} \sup_{|y-x|<r} u(y)$$
- $u^*(x) \geq u(x)$
- $u^*(x)$ ist oberhalb stetig
- Für jedes oberhalbstetige v mit $v \geq u$ gilt $v \geq u^*$.

Aufgabe 31 Zeigen Sie Proposition V.1.5 (ii) aus der Vorlesung:
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von (Viskositäts-)Unterlösungen auf $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen von

$$\partial_t u - F(t, x, Du, D^2u) = 0. \tag{1}$$

Definiere den oberen relaxierten Limes $\overline{u}$ als

$$\overline{u}(t, x) := \limsup_{(s,y)\to(t,x)} \limsup_{n\to\infty} u_n(s, y).$$

Ist $\overline{u}(t, x) < \infty$ auf Q, dann ist $\overline{u}$ wieder eine Unterlösung von (1).
Hinweis: Gehen Sie vor wie im Teil (i).

Aufgabe 32 Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $0 < \lambda < \Lambda$. Die Pucci operatoren $\mathcal{P}^+$ und $\mathcal{P}^-$ sind definiert als

$$\mathcal{P}^+(M) := \sup_A \left(- \sum_{i,j=1}^n A_{ij} M_{ij} \right),$$

und

$$\mathcal{P}^-(M) := \inf_A \left(- \sum_{i,j=1}^n A_{ij} M_{ij} \right),$$

wobei das supremum bzw. infimum jeweils über symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ geht, welche $\lambda I \leq A \leq \Lambda I$ erfüllen (wobei I die Identitätsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^{n \times n}_{symmetrisch} \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig elliptisch* mit Elliptizitätskonstanten λ, Λ, falls für alle symmetrischen $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\mathcal{P}^-(X - Y) \leq F(X) - F(Y) \leq \mathcal{P}^+(X - Y).$$

Zeigen Sie:

(i) Wir haben die folgende Darstellung

$$\mathcal{P}^+(M) := -(\lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \Lambda \sum_{e_i < 0} e_i)$$

$$\mathcal{P}^-(M) := -(\Lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \lambda \sum_{e_i < 0} e_i)$$

wobei e_i die Eigenverte der Matrix M sind.

(ii) Es gilt immer $\mathcal{P}^+(A - B) \geq P^+ A - P^+ B$.

(iii)

$$\mathcal{P}^-(A) + \mathcal{P}^-(B) \leq \mathcal{P}^-(A + B) \leq \mathcal{P}^-(A) + \mathcal{P}^+(B)$$

und

$$\mathcal{P}^+(A) + \mathcal{P}^-(B) \leq \mathcal{P}^+(A + B) \leq \mathcal{P}^+(A) + \mathcal{P}^+(B)$$

(iv) Ist $A \geq 0$, so gilt (fuer die Hilbert-Schmidt-Norm $\|\cdot\|$)

$$-n\Lambda \|A\| \leq \mathcal{P}^+(A) \leq \mathcal{P}^+(A) \leq -\lambda \|A\|$$

(v) Es gilt

$$\mathcal{P}^+(M) = -\mathcal{P}^-(-M).$$

(vi) $\mathcal{P}^+$ und $\mathcal{P}^-$ sind *gleichmäßig elliptisch* mit Elliptizitätskonstanten $\lambda, n\Lambda$.

(vii) Ist F *gleichmäßig elliptisch* mit Elliptizitätskonstanten λ, Λ, so ist F auch *degeneriert elliptisch* im Sinne von Kapitel 5 (siehe (5.0.24)).