Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

Übungen zur
Reellen Analysis
Serie 10 vom 20.11.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5	
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist vernünftig lang (1), viel zu lang (5)	□	□	□	□	□	
Wieviel Stunden haben Sie für die Übung gebraucht?	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	...?
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□	
Kommentare zur Verbesserung:						

Aufgabe 36 Sei μ immer ein Radon-Maß auf einem μ-messbaren $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen, ggf. unter Verwendung der Hölder-Ungleichung, Lemma 5.31.

(i) Sei $1 \leq r, p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, und seien $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mu)$. Dann gilt

$$\|fg\|_{L^r(\Omega,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \, \|g\|_{L^q(\Omega,\mu)}.$$

(ii) Gilt $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und jedes $f \in L^q(\Omega, \mu)$,

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega,\mu)}$$

Hinweis: Wenden Sie (i) an: $f = f\chi_\Omega$

(iii) Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ und $r \geq \frac{1}{p}$ gilt für jedes $f \in L^{pr}(\Omega, \mu)$,

$$\||f|^r\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \|f\|^r_{L^{pr}(\Omega,\mu)}.$$

(iv) Gilt $|f| \leq |g|$ μ-a.e. und $g \in L^p(\Omega, \mu)$, so gilt

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} \leq \|g\|_{L^p(\Omega,\mu)}$$

Aufgabe 37 In dieser Aufgabe arbeiten wir mit dem Lebesgue-Maß. Wir schreiben $L^p(\Omega) \equiv L^p(\Omega, \mathcal{L}^n)$ und $|A| \equiv \mathcal{L}^n(A)$. Berechnen Sie für alle $1 \leq p \leq \infty$ die $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$-Norm $\|f\|_{L^p(\Omega,\mathcal{L}^n)}$ von

(i) $f := \chi_A$ für $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar und $|A| < \infty$

(ii) $f := \chi_A$ für $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar und $|A| = \infty$

(iii) Dirichlet-Funktion $f := \chi_{\mathbb{Q}}$ auf $\mathbb{R}^1$

(iv) Heaviside-Funktion $f := \chi_{(0,\infty)}$ auf $\mathbb{R}^1$

(v) Zeigen Sie: Ist f stetig und gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash K$ für ein kompaktes K, so ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $1 \leq p \leq \infty$.

Aufgabe 38 Zeigen Sie, dass $L^\infty([0,1]) \equiv L^\infty([0,1],\mathcal{L}^1)$ *nicht* separabel ist (vgl. Definition 5.35). Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Für $0 < t < 1$ setzen wir $f_t := \chi_{[0,t]}$. Zeigen Sie:

$$\|f_t - f_s\|_{L^\infty([0,1])} = 1 \quad \forall s \neq t.$$

(ii) Zeigen Sie: Sei $(g_k)_{k=1}^\infty \subset L^\infty(\Omega)$ eine *abzählbare* Menge von Funktionen. Dann existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ *höchstens* ein $t \in (0,1)$ mit

$$\|f_t - g_k\|_{L^\infty([0,1])} < \frac{1}{2}.$$

(iii) Zeigen Sie: Es existiert *keine abzählbare* Menge von Funktionen $(g_k)_{k=1}^\infty \subset L^\infty(\Omega)$ mit

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \|f_t - g_k\|_{L^\infty([0,1])} < \frac{1}{2} \quad \forall t \in (0,1). \tag{1}$$

(iv) Schließen Sie: $L^\infty([0,1])$ ist *nicht* separabel.

Aufgabe 39 Der Raum $l^p(\mathbb{N})$ ist der Raum aller Folgen $(a_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ mit

$$\left\|(a_k)_{k=1}^\infty\right\|_{l^p} := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^\infty |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} & p \in [1,\infty), \\ \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| & p = \infty. \end{cases}$$

Sei $\delta_\mathbb{N} : 2^\mathbb{R} \to [0,\infty)$ gegeben als

$$\delta_\mathbb{N}(A) := \#(A \cap \mathbb{N}),$$

wobei # wie üblich das Zählmaß ist (vgl. Aufgabe 11). Zeigen Sie, dass $l^p(\mathbb{N})$ isometrisch isomorph zu $L^p(\mathbb{R},\delta_\mathbb{N})$ ist. Dazu zeigen Sie jeweils für $1 \le p \le \infty$

(i) $\delta_\mathbb{N}$ ist ein Radon-Maß.

Hinweis: Für die Borel-Regularität können Sie wie folgt vorgehen: Zeigen Sie, dass für jede Menge $A \subset \mathbb{R}$ die Menge $B := \overline{A} \backslash (A^c \cap \mathbb{N})$ eine Borel-Menge ist und es gilt $B \supset A$ sowie $B \cap \mathbb{N} = A \cap \mathbb{N}$.

(ii) Charakterisieren Sie die $\delta_\mathbb{N}$-Nullmengen, d.h. finden Sie alle Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\delta_\mathbb{N}(A) = 0$.

(iii) Für $f \in L^p(\mathbb{R},\delta_\mathbb{N})$ sei $\phi(f)$ eine Folge, gegeben durch

$$\phi(f) := (f(i))_{i=1}^\infty = (f(1), f(2), \ldots, f(i), \ldots).$$

Zeigen Sie: ϕ ist linear, d.h. es gilt $\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g)$ für alle $f, g \in L^p(\mathbb{R},\delta_\mathbb{N})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(iv) Zeigen Sie: $f \in L^p(\mathbb{R},\delta_\mathbb{N}) \Leftrightarrow \phi(f) \in l^p(\mathbb{N})$ und ϕ ist eine Isometrie, d.h.

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R},\delta_\mathbb{N})} = \|\phi(f)\|_{l^p}.$$

(v) Zeigen Sie: ϕ ist injektiv, d.h. falls $\phi(f) = \phi(g)$ für $f, g \in L^p(\mathbb{R},\delta_\mathbb{N})$, so gilt $f = g$ im $L^p(\mathbb{R},\delta_\mathbb{N})$-Sinne. (d.h. $\delta_\mathbb{N}$-fast überall).

(vi) Zeigen Sie: ϕ ist surjektiv, d.h. falls $(a_k)_{k=1}^\infty \in l^p(\mathbb{N})$ so gibt es ein $f \in L^p(\mathbb{R},\delta_\mathbb{N})$ mit $\phi(f) = (a_k)_{k=1}^\infty$.