Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

Übungen zur
Reellen Analysis
Serie 11 vom 27.11.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5	
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist vernünftig lang (1), viel zu lang (5)	□	□	□	□	□	
Wieviel Stunden haben Sie für die Übung gebraucht?	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	...?
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□	
Kommentare zur Verbesserung:						

Aufgabe 40 Sei $n = k + \ell$. Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^\ell$ ist die Menge $A \times B \subset \mathbb{R}^n$ definiert als

$$A \times B := \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell : a \in A,\ b \in B\right\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^\ell$ und alle $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^\ell$

(ii) Sind A, B offene Mengen in $\mathbb{R}^k$ bzw. $\mathbb{R}^\ell$, so ist auch $A \times B$ offen in $\mathbb{R}^n$.

(iii) Ist $A \times B$ offen in $\mathbb{R}^n$, so sind A, B offene Mengen in $\mathbb{R}^k$ bzw. $\mathbb{R}^\ell$.

(iv) Sind $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^k$ disjunkt, so sind auch $A_1 \times B$ und $A_2 \times B$ disjunkt für jedes $B \subset \mathbb{R}^\ell$.

(v) Sind $A_1 \times B_1$ und $A_2 \times B_2 \subset \mathbb{R}^n$ disjunkt, so sind A_1 und A_2 disjunkt.

(vi) Jede Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ kann geschrieben werden als $S = A \times B$ für $A \subset \mathbb{R}^k$ und $B \subset \mathbb{R}^\ell$

(vii) Gilt $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$, so gilt $A \times B = \bigcup_{i,j} A_i \times B_j$. Sind die $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sowie die $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ jeweils paarweise disjunkt, so sind auch $(A_i \times B_j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt.

(viii) Für jedes Intervall $Q \subset \mathbb{R}^n$ finden wir zwei Intervalle $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^\ell$ mit $Q = A \times B$.

(ix) Jede offene Menge S kann geschrieben werden als abzählbare *disjunkte* Vereinigung $S = \bigcup_{i=1}^\infty (A_i \times B_i)$ für Intervalle $A_i \subset \mathbb{R}^k$ und $B_i \subset \mathbb{R}^\ell$.

Hinweis: Vgl. Satz 3.23

Aufgabe 41 Sei $n = k + \ell$. Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^{k+\ell} = \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^\ell$ auf $\mathbb{R}^n$. Dabei ist das Produktmaß $\mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^\ell$ auf $\mathbb{R}^n$ wie in Definition 6.1: Für ein $S \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^\ell(S) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty \mathcal{L}^k(A_i) \cdot \mathcal{L}^\ell(B_i) : \quad (A_i)_{i=1}^\infty \subset 2^{\mathbb{R}^k}\ \mathcal{L}^k\text{-messbar},\ (B_i)_{i=1}^\infty \subset 2^{\mathbb{R}^\ell}\ \mathcal{L}^\ell\text{-messbar, mit } S \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i \times B_i \right\}$$

Zeigen Sie dazu:

(i) Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^\ell(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty \mathcal{L}^n(A_i \times B_i) : \quad (A_i)_{i=1}^\infty \subset 2^{\mathbb{R}^k}\ \mathcal{L}^k\text{-messbar},\ (B_i)_{i=1}^\infty \subset 2^{\mathbb{R}^\ell}\ \mathcal{L}^\ell\text{-messbar, mit } S \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i \times B_i \right\}$$

(ii) Für alle $S \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathcal{L}^n(S) \leq \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^\ell(S)$.

(iii) Für alle *offenen* $S \subset \mathbb{R}^n$, gilt $\mathcal{L}^n(S) \geq \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^\ell(S)$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 40 und Satz 3.11.

(iv) Schließen Sie mit Korollar 3.25, dass $\mathcal{L}^n(S) \geq \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^\ell(S)$ für *alle* $S \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 42 Sei $f(x, y)$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{y} & 0 < y \leq 1 \text{ und } 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie

(i) f ist $\mathcal{L}^2$-messbar auf $\mathbb{R}^2$

(ii) Die Abbildung $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$ ist $\mathcal{L}^1$-messbar und $\mathcal{L}^1$-integrierbar

Hinweis: Berechnen Sie den Ausdruck mit Korollar 5.17

(iii) Die Abbildung $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ ist $\mathcal{L}^1$-messbar, aber *nicht einmal uneigentlich* $\mathcal{L}^1$-integrierbar

(iv) Wieso ist dies kein Widerspruch zum Satz von Fubini (Satz 6.3)?

(v) Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Fubini das folgende Integral: Sei $Q = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$.

$$\int_Q \sin(x_1) e^{\sin(\log(\pi + |x_2|^2))}\,dx$$

Dabei ist $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $dx = d\mathcal{L}^2$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(x_1, x_2) \mapsto \sin(x_1) e^{\sin(\log(\pi + |x_2|^2))} \in L^\infty(Q) \subset L^1(Q)$

Aufgabe 43 Sei $\mu : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ ein Radon-Maß, dass zudem *translationsinvariant* ist. D.h. es gelte für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ und jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, dass $\mu(p + A) = \mu(A)$. Dabei ist

$$p + A = \{x \in \mathbb{R}^n : x = p + a \quad \text{für ein } a \in A\}.$$

Zeigen Sie: Setzen wir für eine μ-integrable Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ und ein $p \in \mathbb{R}^n$ die Translation $f_p(x) := f(x + p)$, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_a\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu.$$

In anderen Worten: Für jedes translationsinvariante Radonmaß μ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x + a)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,d\mu(x)$$
