Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

# Übungen zur
# Reellen Analysis
# Serie 12 vom 04.12.2015

**Aufgabe 44** Zeigen Sie, dass die Hölderungleichung per Induktion auch folgende Ungleichung impliziert: Seien $1 \leq r, p_i \leq \infty$ für $i = 1, \ldots, N$, mit $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}$. Dann gilt für Funktionen $f_i \in L_i^p(\Omega, \mu)$

$$\|f_1 \cdot f_2 \ldots \cdot f_N\|_{L^r(\Omega,\mu)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega,\mu)} \cdot \|f_2\|_{L^{p_2}\cdot(\Omega,\mu)} \cdot \ldots \cdot \|f_N\|_{L^{p_N}(\Omega,\mu)}$$

---

**Aufgabe 45** Im Folgenden betrachten wir immer das Lebesgue-Maß. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist *radial*, falls ein $\tilde{f} : [0, \infty] \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert mit $f(x) = \tilde{f}(|x|)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Häufig identifiziert man $\tilde{f}$ mit $f$ und schreibt einfach "$f(x) = f(|x|)$".

Im Beispiel 7.3 haben wir für den $\mathbb{R}^2$ die Polarkoordinaten-Formel hergeleitet: Für jedes messbare $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mathcal{L}^2 = \int_{r=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} r \, f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \, d\theta \, dr.$$

Zeigen Sie:

(i) Die charakteristische Funktion $\chi_{B_\rho(0)}$ eines Balles $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit Radius $\rho > 0$ zentriert in der 0 ist radial.

(ii) Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ radial so sind auch $|f|$, $\max\{f, g\}$, $f \cdot g$ sowie $\lambda f + \mu g$ radial für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(iii) Angenommen $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$ ist eine messbare und radiale Funktion. Zeigen Sie dann die $\mathbb{R}^2$-Polarkoordinaten-Formel für radiale Funktionen:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mathcal{L}^2 = 2\pi \int_{r=0}^{\infty} r \, \tilde{f}(r) \, dr.$$

Im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, wird die Polarkoordinaten-Formel für radiale Funktionen zu

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mathcal{L}^n = \omega_{n-1} \int_{r=0}^{\infty} r^{n-1} \, \tilde{f}(r) \, dr$$

Dabei ist $\omega_{n-1} > 0$ eine Konstante, welche gleich der Oberfläche der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre in $\mathbb{R}^n$ ist.

(iv) Sei $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$ wie in (i). Berechnen Sie für alle Dimensionen $n \in \mathbb{N}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ den Ausdruck

$$\int_{B_\rho(0)} |x|^\alpha \, dx. \tag{1}$$

---

Aufgabe 46 Sei $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, also $\eta$ unendlich oft differenzierbar und $\eta \equiv 0$ außerhalb einer kompakten Menge. Sei weiterhin $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \le p \le \infty$. Mit $\eta * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x-y)\, f(y)\, dy$ bezeichnen wir die Faltung aus §6.2. Zeigen Sie

(i) Sei $\partial_i$ die Ableitung in die $i$-te Komponente. Zeigen Sie: Es gilt $\partial_i \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Es gilt $\eta * f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ für alle $q \in [p, \infty]$

(iii) Zeigen Sie $\partial_i(\eta * f)(x) = (\partial_i \eta * f)(x)$. Insbesondere gilt $\eta * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Hinweis:* Vgl. Korollar 5.22.

---

Aufgabe 47 Der Satz von Fubini, siehe Satz 6.3 (ii), impliziert insbesondere das *Cavalieri-Prinzip/Slicing*: Für jedes $\mathcal{L}^n$-messbare $S \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}^n(S) < \infty$ und für jedes $n = k + \ell$ gilt

$$\mathcal{L}^n(S) = \int_{\mathbb{R}^\ell} \mathcal{L}^k(S_z)\, d\mathcal{L}^\ell(z), \tag{2}$$

wobei $S_z = \{x \in \mathbb{R}^k : (x,z) \in S\}$ für ein $z \in \mathbb{R}^\ell$. Berechnen Sie damit das Volumen $\mathrm{vol}(E) = \mathcal{L}^3(E)$ eines Rotationsellipsoides

$$E_{\mu,\lambda} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2+y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\mu^2} \le 1\right\}$$

für $\infty > \lambda \ge \mu > 0$. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die kompakte Menge $K$

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le f(z)^2 \quad \text{mit } z \in [a,b],\ x,y \in \mathbb{R}\right\}$$

Anschaulich kann man sich $K \subset \mathbb{R}^3$ als einen Rotationskörper vorstellen, welcher durch Rotation des Graphen der Funktion $z \mapsto f(z)$ um die $z$-Achse im $\mathbb{R}^3$ ensteht. Beweisen Sie mit Hilfe des Cavalieri-Prinzip (2) für $k = 2$, $\ell = 1$ die Formel

$$\mathrm{vol}_3(K) \equiv \mathcal{L}^3(K) = \pi \int_a^b f(z)^2\, dz.$$

*Hinweis:* Für die Berechnung von $\mathcal{L}^2(K_z)$ beachten Sie, dass wir in Aufgabe 45 insbesondere gezeigt haben, dass $\mathcal{L}^2(B_\rho) \equiv \int_{B_\rho} 1\, d\mathcal{L}^2 = \pi\rho^2$ für eine zwei-dimensionale Kreisscheibe $B_\rho$ mit Radius $\rho \ge 0$.

(ii) Fassen Sie $E_{\mu,\lambda}$ als Rotationskörper $K$ mit einer geeigneten stetigen Funktion $f : [a,b] \to [0,\infty)$ auf.

---