Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

Übungen zur
Reellen Analysis
Serie 2 vom 25.09.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzten Vorlesungen waren unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung waren langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 4 Sei $C^\ell(\mathbb{T})$ der Raum der 2π-periodischen und ℓ-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Zeigen Sie, dass für alle $f \in C^\ell(\mathbb{T})$ die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) $\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m \hat{f}(k)$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $m = 0, \dots, \ell$. Dabei ist $f^{(m)}$ die m-te Ableitung von f.

(ii) $\hat{f}(k) = o(|k|^{-\ell})$ für $|k| \to \infty$.

(iii) Falls $f \in C^2(\mathbb{T})$, so gilt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$.

Aufgabe 5 Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Betrachten Sie dazu den Wert der Fourier-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4}$ für $x \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 6 Nehmen Sie an, dass $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ eine *Hölder-stetige* Funktion zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$ ist, d.h. es gibt eine Konstante $C \geq 0$, so dass $|f(x+t) - f(x)| \leq C|t|^\alpha$ für alle $x, t \in \mathbb{R}$ gilt.

Zeigen Sie, dass es ein $K > 0$ gibt, abhängig nur von α und f, so dass

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{K}{|k|^\alpha} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(\widehat{f - f_{\pi/k}})(k) = 2\hat{f}(k)$, wobei $f_{\pi/k}(x) := f(x + \pi/k)$.

Aufgabe 7 Nehmen Sie an, dass $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ eine *Lipschitz-stetige* Funktion ist, d.h. es gibt eine Konstante $C \geq 0$, so dass $|f(x+t) - f(x)| \leq C|t|$ für alle $x, t \in \mathbb{R}$ gilt.

Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe von f punktweise gegen f konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} S_n[f](x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Verfahren Sie wie im Beweis zum Satz von Dirichlet (Satz 1.10).
