Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

Übungen zur
Reellen Analysis
Serie 3 vom 02.10.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 9 In Aufgabe 5 haben wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ berechnet. Berechnen Sie diesmal

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

Betrachten Sie dazu wieder die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4}$ für $x \in [0, 2\pi]$.

Wir haben das L^2-"Skalarprodukt" eingeführt. Für $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ist

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt.$$

Wir sagen, dass zwei Abbildungen $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ *orthogonal* zueinander sind, $f \perp g$, falls $\langle f, g \rangle = 0$

Aufgabe 10 Seien $f_k(t) := \sin(kt)$, $g_k(t) := \cos(kt)$ und $h_k(t) := e^{ikt}$ für.

(i) Für welche $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt $f_k \perp f_\ell$?

(ii) Für welche $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt $f_k \perp g_\ell$?

(iii) Für welche $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt $h_k \perp h_\ell$?

Sei X eine beliebige Menge und 2^X die Potenzmenge von X. Ein *Maß* (engl. *measure*) auf X ist eine Abbildung $\mu : 2^X \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ mit den folgenden zwei Bedingungen

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ für alle Teilmengen $A, A_1, A_2, \ldots \subset X$ sofern $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Aufgabe 11 Zeigen Sie, dass die Abbildungen μ_1 und μ_2 auf jeder beliebigen Menge X ein Maß sind:

(i) (Zählmaß) $\mu_1(A) := \#A$ (die Anzahl der Elemente von A),

(ii) $\mu_2(\emptyset) = 0, \mu_2(A) = 1$ für alle $A \neq \emptyset$.

(iii) * Zeigen Sie außerdem, dass das äußere Jordansche Maß auf $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mu_3(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{N} |a_k - b_k| : \quad N \in \mathbb{N}_0,\ (a_k, b_k) \text{ paarweise disjunkt, und } \bigcup_{k=1}^{N} (a_k, b_k) \supset A \right\}$$

kein Maß im obigen Sinne ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge $A := \mathbb{Q} \cap [0,1]$, berechnen Sie $\mu_3(A)$. Berechnen Sie auch $\mu(\{x\})$ für eine Punktmenge $\{x\}$. Bringen Sie dies zum Widerspruch mit der zweiten Bedingung für Maße.

Aufgabe 12 Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von Maßen μ:

(i) $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ für alle Mengen $A_1, A_2, \ldots \subset X$.

(ii) (Monotonie) Falls $A \subset B$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$
