Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

Übungen zur
Reellen Analysis
Serie 4 vom 09.10.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Sei X eine Menge und μ ein Maß auf X. Eine Menge $A \subset X$ heißt *messbar* (engl. *measurable*) falls gilt

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A) \quad \text{für alle } B \subseteq X$$

Aufgabe 13

Sei X eine nichtleere Menge und μ_1, μ_2 aus Aufgabe 11. Zeigen Sie

(i) Jede Menge ist μ_1-messbar.

(ii) Eine Menge $A \subset X$ ist genau dann μ_2-messbar, falls $A = \emptyset$ oder $A = X$.

Aufgabe 14

Sei $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$, und sei $\lambda : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ gegeben durch

$$\lambda(\emptyset) = 0, \quad \lambda(X) = 1$$

(i) Zeigen Sie, dass λ ein Prämaß ist.

(ii) Ist λ auch σ-endlich?

(iii) Berechnen Sie das durch λ induzierte Maß μ auf X (vgl. Satz 3.16) definiert als

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) : \quad A_j \in \mathcal{A} \quad \& \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset A \right\}.$$

Zeigen Sie insbesondere $\mu([0, \frac{1}{2}]) = 1$.

(iv) Berechnen Sie die σ-Algebra Σ der μ-messbaren Mengen (vgl. Aufgabe 13).

(v) Das (später in Def. 3.22 definierte) Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1$ auf X erfüllt $\mathcal{L}^1(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$, $\mathcal{L}^1([0,1]) = \lambda([0,1]) = 1$, aber auch

$$\mathcal{L}^1([0, \frac{1}{2}]) = \frac{1}{2} \neq 1 = \mu([0, \frac{1}{2}]).$$

Warum ist dies *kein* Widerspruch zu Satz 3.20?

Aufgabe 15 Seien $X, Y \neq \emptyset$ und $\mathcal{A} \subset 2^X$, $\mathcal{B} \subset 2^Y$ eine σ-Algebra auf X, bzw. Y. Sei weiterhin eine Abbildung $f : X \to Y$ gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Dann ist die Familie $\tilde{\mathcal{B}} \subset 2^X$ gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{B}} := f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : \quad B \in \mathcal{B}\}$$

immer auch eine σ-Algebra auf X.

(ii) Dann ist die Familie $\tilde{\mathcal{A}} \subset 2^Y$ gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{A}} := f(\mathcal{A}) := \{f(A) : \quad A \in \mathcal{A}\}$$

immer auch eine σ-Algebra auf Y.

Aufgabe 16 Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und die Menge $\mathcal{A} \subset 2^{\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{N} : \quad A \text{ ist endlich oder } A^c = \mathbb{N} \backslash A \text{ ist endlich}\}.$$

Sei weiterhin $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiert als

$$\lambda(A) := \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} \quad \text{für } A \text{ endlich}, \quad \lambda(A) := 2 - \sum_{n \notin A} \frac{1}{n^2} \quad \text{für } A^c \text{ endlich.}$$

(i) Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra?

(ii) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra?

(iii) Zeigen Sie, dass λ *kein* Prämaß ist.