Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

Übungen zur Reellen Analysis Serie 5 vom 16.10.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5	
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist vernünftig lang (1), viel zu lang (5)	□	□	□	□	□	
Wieviel Stunden haben Sie für die Übung gebraucht?	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	...?
Kommentare zur Verbesserung:						

In $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Borelsche σ-Algebra: die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen von $\mathbb{R}^n$ enthält. Eine Menge gehört also zu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn sie sich durch Komplementbildung und abzählbar viele Vereinigungen aus offenenen Mengen konstruieren lässt. Sei $\mathcal{L}^n : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ immer das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 17 Zeigen Sie

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gehört die Menge $\{x\}$ zur Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\mathcal{L}^n(\{x\}) = 0$.

(ii) $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und es gilt $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$. *Hinweis:* Benutzen Sie (i) und dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

(iii) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n) = \infty$.

In Satz 3.28 der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ genau dann $\mathcal{L}^n$-messbar ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $G \supset A$ gibt mit $\mathcal{L}^n(G\backslash A) < \varepsilon$. Beweisen Sie mit dieser Aussage Folgerung 3.29:

Aufgabe 18 Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{L}^n$-messbar

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge G und eine abgeschlossene Menge F mit $F \subset A \subset G$ und

$$\mathcal{L}^n(G\backslash A) + \mathcal{L}^n(A\backslash F) < \varepsilon.$$

(iii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge G und eine abgeschlossene Menge F mit $F \subset A \subset G$ und

$$\mathcal{L}^n(G\backslash F) < \varepsilon.$$

Hinweis für $(i) \Rightarrow (ii)$: Wenden Sie Satz 3.28 auf A und auf $A^c = \mathbb{R}^n\backslash A$ an.

Aufgabe 19 Zeigen Sie Satz 3.32: Die Vitali-Menge V aus Lemma 2.1 ist nicht $\mathcal{L}^1$-messbar.

Hinweis: Gehen Sie dazu vor wie in Lemma 2.2. Ersetzen Sie die dort verwendeten Bedingungen (M1), (M2), (M3) durch Satz 3.11 (i), Satz 3.31 und $\mathcal{L}^1([0, 1)) = 1$.

Aufgabe 20 Die *Cantor-Menge* ist ein Fraktal und wie folgt definiert: Aus dem Intervall $A_0 := [0,1]$ entfernt man das mittlere Drittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Es bleibt die Menge

$$A_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Aus den beiden Teilintervallen von A_1 entfernt man jeweils wieder die mittleren Drittel, also $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ und $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$.

$$A_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Nach dieser Methode erhält man im k-ten Schritt eine Menge A_k, welche die Vereinigung von 2^k disjunkten, kompakten Intervallen der Länge 3^{-k} ist. Durch Wegnahme der mittleren Drittel dieser Teilintervalle entsteht A_{k+1}.

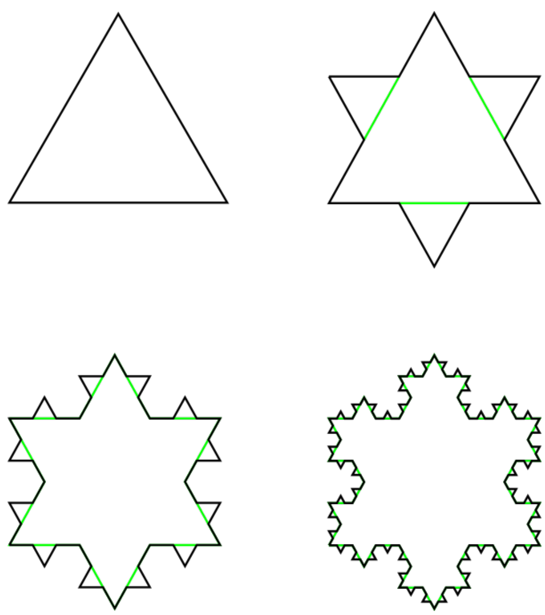
Die ersten sieben Iterationen $A_0, \dots, A_6$ der Cantor-Mengen Konstruktion. Quelle: Wikipedia

Die *Cantor-Menge* (auch *Cantorsches Diskontinuum*) ist definiert als

$$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Man kann zeigen, dass C eine überabzählbare Menge ist.

Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge eine $\mathcal{L}^1$-Nullmenge ist, dass also gilt $\mathcal{L}^1(C) = 0$.



Ein Fraktal im $\mathbb{R}^2$: Die Koch-Kurve (Koch-Snowflake). Die (Hausdorff-)Dimension beträgt $\frac{\log 4}{\log 3}$. Quelle: Wikipedia