Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

Übungen zur Reellen Analysis Serie 6 vom 23.10.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5	
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist vernünftig lang (1), viel zu lang (5)	□	□	□	□	□	
Wieviel Stunden haben Sie für die Übung gebraucht?	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	...?
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□	
Kommentare zur Verbesserung:						

Ein Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt *Radon-Maß*, falls μ Borel-regulär und $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 21

Zeigen Sie

(i) Das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^n$ ist ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

(ii) Für $0 \leq s < n$ ist das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^s$ *kein* Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

(iii) Ist μ ein Radon-Maß und $A \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge, so ist $\mu \llcorner A$ definiert für Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$ als

$$\mu \llcorner A(B) := \mu(B \cap A)$$

ein Maß, und für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mu \llcorner A(K) < \infty$.

In Satz 3.44 der Vorlesung wurde insbesondere gezeigt, dass für jedes Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu(A) = \inf_{G \supset A, G \text{ offen}} \mu(G).$$

Aufgabe 22

Zeigen Sie: Für ein Radonmaß μ auf $\mathbb{R}^n$ und jedes $A \subset \mathbb{R}^n$ ist das folgende äquivalent:

(i) A ist μ-messbar

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists G \supset A$, G offen und $\mu(G \backslash A) < \varepsilon$.

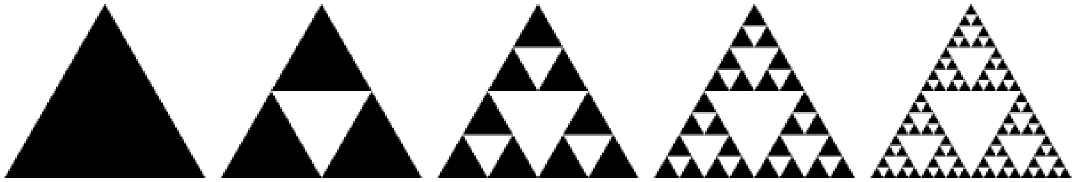
Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von Satz 3.28 vor. Anstelle von Korollar 3.25 verwenden Sie dann den Satz 3.44.

Aufgabe 23

Ändern Sie (mit Beweis!) die Konstruktion der Cantor-Menge in Beispiel 3.41 (bzw. in Aufgabe 20) so ab, dass eine Menge C ensteht, welche die Hausdorff-Dimension $\mathcal{H} - \dim(C) = \frac{1}{2}$ besitzt.

Hinweis: $\frac{1}{2} = \frac{\log 2}{\log 4}$.

Weitere fraktale Mengen:

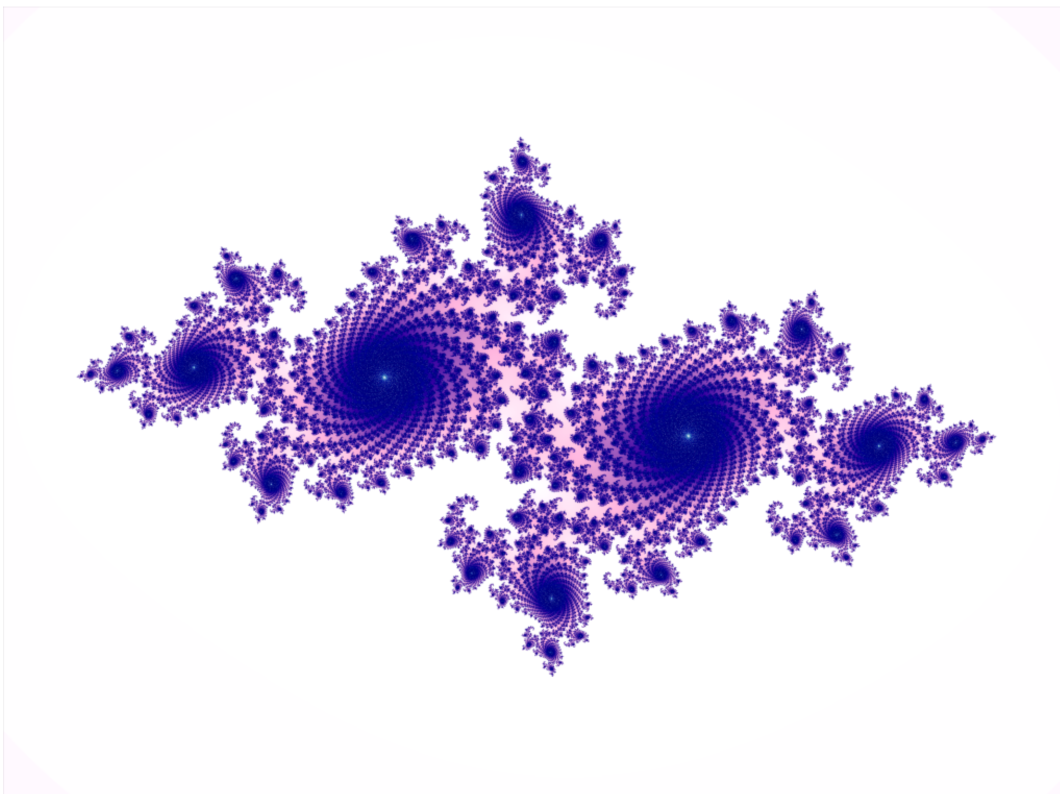


Das Sierpinski-Dreieck wird z.B. verwendet um “fraktale Antennen” (fractal antenna) zu bauen:

“The Sierpinski antenna is the first reported example of a fractal shape antenna with a multiband behavior. That is, an antenna that keeps a similar behavior (radiation patterns and input parameters) through several bands. The number of bands and their positions are strongly related to the antenna geometry, which demonstrates the tight link between the fractal nature of the antenna and its electromagnetic behavior.”

http://www.tsc.upc.es/fractalcoms/fractals/gallery/spk60.html

(Bild: Wikipedia)



Eine Julia-Menge. (Bild: Wikipedia)