Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

Übungen zur Reellen Analysis Serie 7 vom 30.10.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5	
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist vernünftig lang (1), viel zu lang (5)	□	□	□	□	□	
Wieviel Stunden haben Sie für die Übung gebraucht?	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	...?
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□	

Kommentare zur Verbesserung:

Wir schreiben $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge. Eine Abbildung $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist ist *μ-messbar* (engl. μ-measurable), falls

(i) $f^{-1}(\{+\infty\})$ und $f^{-1}(\{-\infty\})$ sind μ-messbare Mengen in $\mathbb{R}^n$,

(ii) $f^{-1}(U)$ ist μ-messbar für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$.

Wir erinnern uns an die folgende Konvention. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, so bezeichnen wir mit χ_A die *charakteristische Funktion von A*:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A, \end{cases}$$

Aufgabe 24

Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge. Zeigen Sie:

(i) Sei $A \subset \Omega$ eine μ-messbare Menge. Definieren wir die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}$ als $f := \chi_A$ so ist f eine μ-messbare Funktion.

(ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die sogenannte *Dirichlet*-Funktion, die auf den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eins und sonst null ist: $g(x) := \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Dann ist g $\mathcal{L}^1$-messbar.

(iii) Sei $V \subset \mathbb{R}$ die Vitali-Menge aus Lemma 2.1 (vgl. auch Aufgabe 19 bzw. Satz 3.32). Dann ist die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) := \chi_V(x)$ *nicht* $\mathcal{L}^1$-messbar.

(iv) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & x > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist eine $\mathcal{L}^1$-messbare Funktion.

Aufgabe 25 Sei $z \in \mathbb{R}^n$, dann definieren wir das *Dirac-Maß bezüglich* z, δ_z, durch

$$\delta_z(A) := \begin{cases} 1 & z \in A, \\ 0 & z \notin A. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) δ_z ist ein Radon-Maß.

(ii) Jede Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist δ_z-messbar.

Aufgabe 26 Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge, es gelte also $\mathcal{L}^n(N) = 0$. Zeigen Sie:

(i) Jeder Ball $B_r(x)$ mit $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ hat positives $\mathcal{L}^n$-Maß, d.h. $\mathcal{L}^n(B_r(x)) > 0$.

(ii) N hat ein leeres Inneres, $\operatorname{int}(N) = \emptyset$, d.h. es gibt *keinen* noch so kleinen Ball $B_r(x)$ der ganz in N enthalten ist.

(iii) Für jedes $x \in N$ und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $y \in \mathbb{R}^n \backslash N$ mit $|x - y| < \varepsilon$.
Hinweis: Fixieren Sie x und bringen Sie die Negation der Behauptung in Widerspruch zu (ii).

Eine Aussage $A(x)$ gilt für *μ-fast alle* $x \in \Omega$, bzw. *μ-fast überall* (engl. μ-almost everywhere, μ-a.e.), falls

$$\mu(\{x \in \Omega; A(x) \text{ gilt nicht}\}) = 0.$$

In anderen Worten: Falls es eine μ-Nullmenge $N \subset \Omega$ gibt, $\mu(N) = 0$, so dass $A(x)$ wahr ist für alle $x \in \Omega \backslash N$.
Ist μ-das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^n$, so schreiben wir häufig einfach "fast überall" anstatt von "$\mathcal{L}^n$-fast überall".

Aufgabe 27 Zeigen oder widerlegen Sie: Sei Ω immer μ-messbar.

(i) Sei $g := \chi_{\mathbb{Q}}$ wie in Aufgabe 24 definiert. Dann gilt $g(x) = 0$ $\mathcal{L}^1$-fast überall.

(ii) Sei $g := \chi_{\mathbb{Q}}$ wie in Aufgabe 24 definiert. Dann gilt $g(x) = 1$ $\mathcal{L}^1$-fast überall.

(iii) Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Heaviside Funktion $H(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$. Dann gilt: H ist fast überall differenzierbar und $H' \equiv 0$ $\mathcal{L}^1$-fast überall.

(iv) Seien $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist f μ-messbar und gilt $f(x) = g(x)$ μ-fast überall, so ist auch g μ-messbar.

(v) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion mit $f(x) = 0$ für *$\mathcal{L}^n$-fast* alle $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt $f(x) = 0$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^n$. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 26).

(vi) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für Funktionen $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die Relation $\sim_\mu$. Wir definieren $f \sim_\mu g$ gilt genau dann, falls

$$f(x) = g(x) \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega.$$

Dann definiert $\sim_\mu$ eine *Äquivalenz*relation auf der Menge der Funktionen auf Ω,

$$\left\{ f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} \right\}.$$
