Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

Übungen zur
Reellen Analysis
Serie 8 vom 06.11.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5	
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist vernünftig lang (1), viel zu lang (5)	□	□	□	□	□	
Wieviel Stunden haben Sie für die Übung gebraucht?	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	...?
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□	
Kommentare zur Verbesserung:						

Sei μ immer ein Radonmaß und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ immer μ-messbar.

Aufgabe 28

Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei μ-messbare ($\sigma-$)Treppenfunktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir stellen f und g wie folgt dar: Für $a_k, b_k \in \overline{\mathbb{R}}$ und für $A_k, B_k \subset \mathbb{R}^n$ mit $A_k \cap A_j = \emptyset = B_k \cap B_j$ für $j \neq k$, $\bigcup_{k=1}^\infty A_k = \bigcup_{k=1}^\infty B_k = \Omega$ sei

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k\, \chi_{A_k}(x), \quad g(x) = \sum_{k=1}^\infty b_k\, \chi_{B_k}(x).$$

Zeigen Sie:

(i) Ist f uneigentlich μ-integrabel, so ist auch λf uneigentlich μ-integrabel. In diesem Fall gilt $\int_\Omega \lambda f d\mu = \lambda \int_\Omega f d\mu$.

(ii) Es gilt $\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu = \int_\Omega (f+g) d\mu$, wenn immer diese Integrale wohldefiniert sind.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $f(x) + g(x) = \sum_{k,\ell=1}^\infty (a_k + b_\ell)\chi_{A_k \cap B_\ell}$.

(iii) Falls $f \leq g$ μ-a.e., dann $\mu\left(f^{-1}(a) \cap g^{-1}(b)\right) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b$.

(iv) Falls $f \leq g$ μ-a.e., dann gilt für jedes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$a\,\mu\left(g^{-1}(a)\right) \geq \sum_{\ell=1, b_\ell \neq 0}^\infty b_\ell\, \mu\left(g^{-1}(a) \cap f^{-1}(b_\ell)\right).$$

(v) Falls $f \leq g$ μ-a.e und f, g uneigentlich μ-integrabel sind, so gilt

$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu.$$

(vi) Zeigen Sie die Konsistenz der Integralbegriffe aus Definition 5.2 und Definition 5.4 für Treppenfunktionen:

$$\int_\Omega f d\mu = \underline{\int_\Omega} f d\mu = \overline{\int_\Omega} f d\mu \quad \forall f \text{uneigentlich } \mu\text{-integrable } \sigma\text{-Treppenfunktion.}$$

Beachten Sie insbesondere auch die Fälle $\int_\Omega f^+ d\mu = \infty$ und $\int_\Omega f^- d\mu = \infty$!

Aufgabe 29 Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei μ-integrable Funktionen gemäß Definition 5.7 und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Dann ist $f + g$ eine integrable Funktion, und es gilt $\int_\Omega (f + g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$

(ii) Dann ist λf eine integrable Funktion, und es gilt $\int_\Omega \lambda f d\mu = \lambda \int_\Omega f d\mu$.

(iii) Beweisen Sie Satz 5.9: Ist $f = g$ μ-a.e., so gilt $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu$.

Aufgabe 30 In Aufgabe 24(iv) war die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & x > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) f ist *uneigentlich* $\mathcal{L}^1$-integrabel.

Hinweis: Vgl. Beispiel 5.5.

(ii) f ist *nicht* $\mathcal{L}^1$-integrabel.

Hinweis: Finden Sie eine geeignete (z.B. stückweise konstante), messbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g \leq f$ und $\int_\mathbb{R} g dx = +\infty$. Dann verwenden Sie Satz 5.6.

Aufgabe 31 Beweisen Sie die Tchebychev-Ungleichung (Satz 5.10): Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrabel. Dann gilt

$$\forall a > 0 : \mu\left(\{x \in \Omega : \ |f(x)| \geq a\}\right) \leq a^{-1} \int_\Omega |f| \, d\mu.$$

Hinweis: Setzen Sie $f_1 := a^{-1}|f|$ und $f_2 := \chi_{\{x \in \Omega : |f(x)| \geq a\}}$ und wenden Sie Satz 5.6 an.

Henri Lebesgue über den Unterschied zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral

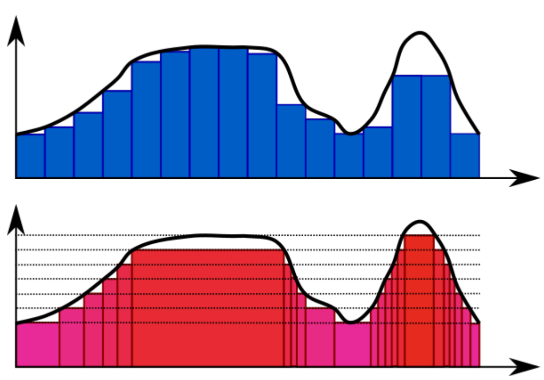

Abbildung 1: Illustration der Grenzwertbildung beim Riemann-Integral (blau) und beim Lebesgue-Integral (rot) (Quelle: Wikipedia)

“Man kann sagen, dass man sich bei dem Vorgehen von Riemann verhält wie ein Kaufmann ohne System, der Geldstücke und Banknoten zählt in der Reihenfolge, wie er sie in die Hand bekommt; während wir vorgehen wie ein umsichtiger Kaufmann, der sagt:

Ich habe $\mu(E_1)$ Münzen zu einer Krone, macht $1 \cdot \mu(E_1)$,

ich habe $\mu(E_2)$ Münzen zu zwei Kronen, macht $2 \cdot \mu(E_2)$,

ich habe $\mu(E_3)$ Münzen zu fünf Kronen, macht $5 \cdot \mu(E_3)$,

usw.,

ich habe also insgesamt $S = 1 \cdot \mu(E_1) + 2 \cdot \mu(E_2) + 5 \cdot \mu(E_3) + \ldots$ Kronen.

Die beiden Verfahren führen sicher den Kaufmann zum gleichen Resultat, weil er – wie reich er auch sei – nur eine *endliche* Zahl von Banknoten zu zählen hat; aber für uns, die wir *unendlich* viele Indivisiblen zu addieren haben, ist der Unterschied zwischen beiden Vorgehensweisen wesentlich.”

(Quelle: Wikipedia/J. Elstrodt)