Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra

Übungen zur
Reellen Analysis
Serie 9 vom 13.11.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5	
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□	
Diese Übung ist vernünftig lang (1), viel zu lang (5)	□	□	□	□	□	
Wieviel Stunden haben Sie für die Übung gebraucht?	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$	$6h$	...?
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□	
Kommentare zur Verbesserung:						

Aufgabe 32 Sei $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$f_k(x) := -\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_k(0))}\chi_{B_k(0)},$$

wobei $B_k(0)$ der Ball mit Radius k um den Ursprung sei.

(i) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^n} f_k\, dx$.

(ii) Für $x \in \mathbb{R}^n$ berechnen Sie $\liminf_{k\to\infty} f_k(x)$ und $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$.

(iii) Wieso ist dies *kein* Widerspruch zu Fatou's Lemma (Satz 5.18)?

(iv) Wieso ist dies *kein* Widerspruch zum Satz über die dominierte Konvergenz (Satz 5.21)?

Aufgabe 33 Wenden Sie die Konvergenzsätze (Sätze 5.20, 5.21) an:

(i) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n\ \sin(x/n)}{x(1+x^2)}\, dx$.

(ii) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, dx$.

(iii) Sind $(A_k)_{k=1}^\infty$ paarweise disjunkte, μ-messbare Mengen und ist $f \geq 0$ μ-integrierbar, so gilt $\sum_{k=1}^\infty \int_\Omega f\chi_{A_k}\, d\mu = \int_\Omega f\chi_{\bigcup_{k=1}^\infty A_k}\, d\mu$.

Hinweis zu (ii): Die Bernoullische Ungleichung $(1+x^2)^n \geq 1 + nx^2$ für $x \geq 0$ hilft eine geeignete Majorante zu finden.

Aufgabe 34 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{L}^n$-messbare Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen

(i) Ist $f = g$ $\mathcal{L}^n$-fast überall und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall stetig, dann ist f stetig $\mathcal{L}^n$-fast überall.

(ii) Ist f stetig $\mathcal{L}^n$-fast überall, dann gibt es eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass $f = g$ $\mathcal{L}^n$-fast überall.

Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Dirichlet-Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ oder die Heaviside-Funktion $\chi_{(0,\infty)}$ aus Aufgabe 27.

Aufgabe 35 Sei μ ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μ-messbar und sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ μ-integrabel. Wie üblich bezeichnen wir mit Σ_μ die σ-Algebra der μ-messbaren Mengen in $\mathbb{R}^n$. Für jedes μ-messbare $A \in \Sigma_\mu$ setzen wir

$$\tilde{\nu}(A) := \int_A f \, d\mu, \quad A \in \Sigma_\mu.$$

(i) Zeigen Sie: $\tilde{\nu}$ definiert auf Σ_μ ein Prä-Maß gemäß Def. 3.18 und Satz 3.19 ist anwendbar.

Hinweis: Verwenden Sie Lemma 5.14 und Aufgabe 33.

(ii) Bezeichnen wir nun mit ν die Caratheodory-Hahn Erweiterung von $\tilde{\nu}$ nach Satz 3.19.

Zeigen Sie: $\nu(A) < \infty$ für alle $A \subset \mathbb{R}^n$.

(iii) Zeigen Sie ν ist Borelsch.

Hinweis: Das folgt sofort aus Satz 3.19 und den Eigenschaften von μ!

(iv) Zeigen Sie: ν ist ein Radonmaß.

Hinweis: Für die verbliebene Borel-Regularität von ν können Sie wie folgt vorgehen: Zunächst existiert für jede μ-messbare Menge $A \in \Sigma_\mu$ ein Borelsches $B \supset A$ mit $\nu(A) = \nu(B)$ (beachten Sie: $\nu = \tilde{\nu}$ auf Σ_μ!). Dann benutzen Sie die Definition der Caratheodory-Hahn-Erweiterung um dies auch für allgemeine $A \subset \mathbb{R}^n$ zu zeigen.

(v) Wir schreiben $\nu = \mu \llcorner f$. In Aufgabe 21 haben wir bereits $\mu \llcorner B$ definiert für eine μ-messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, $\mu \llcorner B = \mu \llcorner \chi_B$ (wobei χ_B wie immer die charakteristische Funktion von B ist).

(vi) Es gilt $\nu \ll \mu$: Gilt für ein $A \subset \mathbb{R}^n$ dass $\mu(A) = 0$ so folgt auch $\nu(A) = 0$.