Armin Schikorra[1]

Erhaltungssätze in der Regularitätstheorie nichtlinearer elliptischer Systeme in 2 Dimensionen

November 2007

An der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Mathematikers
vorgelegte

Diplomarbeit

in Mathematik

Angefertigt am Institut für Mathematik bei
Professor Dr. Heiko von der Mosel

[1] armin.schikorra@post.rwth-aachen.de

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Schwach harmonische Abbildungen des Einheitsballs $D^n \subset \mathbb{R}^n$ auf die Sphäre $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ sind kritische Punkte der DIRICHLET-Energie

$$E(v) := \int_{D^n} |\nabla v|^2 \tag{1.1}$$

definiert auf dem Funktionenraum

$$W^{1,2}(D^n, S^{m-1}) := \{v \in W^{1,2}(D^n, \mathbb{R}^m) : \; v(x) \in S^{m-1} \text{ für fast alle } x \in D^n\}.$$

Sie erfüllen das folgende System von Differentialgleichungen

$$-\triangle u = u|\nabla u|^2 \quad \text{in } D^n, \tag{1.2}$$

was sich aus dem Verschwinden der ersten Variation

$$\delta E(u, \varphi) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} E\left(\frac{u + t\varphi}{|u + t\varphi|}\right) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^n, \mathbb{R}^m)$$

ergibt. Die rechte Seite der partiellen Differentialgleichung (1.2) ist in L^1, und somit sind wir zunächst nicht in der Lage höhere Regularität oder zum Beispiel Stetigkeit von u zu zeigen.
Für $n = 2$ bewies J. SHATAH in [Sha88], dass $u \in W^{1,2}(D^2, S^{m-1})$ genau dann eine Lösung von (1.2) ist, wenn der folgende Erhaltungssatz erfüllt ist:

$$\operatorname{div}(u^i \nabla u^j - u^j \nabla u^i) = 0 \qquad \text{für } i, j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{1.3}$$

Wenig später benutzte F. HÉLEIN in [Hél90] die Tatsache, dass

$$\sum_{j=1}^m u^j \; \nabla u^j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \nabla(u^j u^j) = \frac{1}{2} \nabla \underbrace{|u|^2}_{\equiv 1} = 0,$$

und schrieb damit das System (1.2) in der Form

$$-\triangle u^i = \sum_{j=1}^m u^i \nabla u^j \cdot \nabla u^j = \sum_{j=1}^m (u^i \nabla u^j - u^j \nabla u^i) \cdot \nabla u^j \qquad \text{für } i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{1.4}$$

Aus (1.3) folgt mit dem POINCARÉ-Lemma für Differentialformen die Existenz von Abbildungen $B_{ij} \in W^{1,2}_{loc}(D^2)$, $1 \le i, j \le m$, mit

$$\nabla^\perp B_{ij} = \begin{bmatrix} -\partial_y \\ \partial_x \end{bmatrix} B = u^i \nabla u^j - u^j \nabla u^i \quad \text{in } D^2 \qquad \text{für } 1 \le i, j \le m.$$

Eingesetzt in (1.4) erhält man

$$-\triangle u^i = \sum_{j=1}^n \nabla^\perp B_{ij} \cdot \nabla u^j \quad \text{in } D^2 \quad \text{für } 1 \le i \le m. \tag{1.5}$$

Das Produkt auf der rechten Seite hat eine etwas bessere Regularität als L^1 und impliziert dass u^i stetig ist. Dieses Phänomen wurde zuerst im Jahre 1969 von H. WENTE [Wen69] entdeckt und 1984 von H. BREZIS und J.M. CORON in [BC84] und mit einer alternativen Methode von L. TARTAR in [Tar84] allgemein bewiesen. 1993 zeigten R. COIFMAN, P.L. LIONS, Y. MEYER und S. SEMMES in [CLMS93], dass Produkte dieser Art tatsächlich im lokalen HARDY-Raum $\mathscr{H}^1_{loc}$ liegen, nachdem S. MÜLLER diese Aussage schon in [Mül90] unter etwas stärkeren Voraussetzungen erhalten hatte. Die hier entscheidende Eigenschaft der HARDY-Räume ist, dass das Inverse des LAPLACE-Operators von HARDY-Distributionen in $W^{2,1}_{loc}$ liegt[2], ein Raum, der in 2 Dimensionen stetig nach C^0 einbettet[3]. Also sind kritische Punkte der DIRICHLET-Energie (1.1) in zwei Dimensionen stetig. Mit Regularitätssätzen aus [HW75], [LU68] und [Mor66] folgt dann, dass solche Abbildungen analytische Funktionen sind.

[2] siehe Theorem 6.23
[3] siehe Theorem 6.27

Wenn man anstelle der Sphäre $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ als Zielmannigfaltigkeit allgemeiner eine k-dimensionale, kompakte C^2-Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^m$ wählt, schlägt der obige Ansatz fehl. Sei $\Pi_{\mathcal{N}} : V\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ die orthogonale Projektion[4] von einer tubularen Umgebung $V\mathcal{N}$ auf $\mathcal{N}$. Die kritischen Punkte $u \in W^{1,2}(D^2, \mathcal{N})$ der Dirichlet-Energie $\int_{D^2} |\nabla u|^2$ für alle Störungen der Form $\Pi_{\mathcal{N}}(u+t\Phi)$ für glatte Abbildungen $\Phi : D^2 \to \mathbb{R}^m$ mit kompaktem Träger sind gerade die schwach harmonischen Abbildungen von D^2 nach $\mathcal{N}$. In [Hél91] zeigte Hélein über die sogenannte moving-frame-Technik die Stetigkeit dieser Abbildungen. Wir betrachten einen anderen Ansatz: Solche kritischen Punkte lösen die folgenden Euler-Lagrange-Gleichungen[5]

$$-\triangle u^i = \sum_{l=1}^{n} A^i_{jl}(u) \nabla u^j \cdot \nabla u^l \quad \text{in } D^2, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{1.6}$$

wobei $A(y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ die zweite Fundamentalform der Einbettung von $\mathcal{N}$ in $\mathbb{R}^m$ am Punkte $y \in \mathcal{N}$ ist und $A^i_{jl}(y) := \langle A(y)(e_j, e_l), e_i \rangle$ für die Einheitsvektoren $(e_k)_{k=1}^m$ in $\mathbb{R}^m$. $(A^j_{il}(u))_{j=1}^m$ steht senkrecht auf $T_u\mathcal{N}$ und deshalb gilt $A^j_{il}(u)\nabla u^j = 0$. Folglich lässt sich (1.6) in

$$-\triangle u^i = \sum_{l=1}^{n} (A^i_{jl}(u) - A^j_{il}(u)) \nabla u^l \cdot \nabla u^j \quad \text{in } D^2 \quad \text{ für } 1 \leq i \leq m$$

umschreiben. Definiert man $\Omega_{ij} := (A^i_{jl}(u) - A^j_{il}(u))\nabla u^l \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$, so erhält man

$$-\triangle u^i = \Omega_{ij} \cdot \nabla u^j \quad \text{in } D^2 \quad \text{für } 1 \leq i \leq m. \tag{1.7}$$

T. Rivière entdeckte 2006, dass für die Stetigkeit von u die *Antisymmetrie* von Ω entscheidender ist, als die Divergenzfreiheit von $(u^i \nabla u^j - u^j \nabla u^i)_{ij}$ in (1.4), welche in der jetzigen Situation nicht mehr auftritt. In [Riv07a] zeigte Rivière, dass $W^{1,2}$-Lösungen solcher Systeme mit $\Omega \in L^2$ in zwei Dimensionen stetig sind:
Mit einer *nichtlinearen* Hodge-*Theorie* welche aus der nichtabelschen Eichtheorie stammt und mithilfe der von K. Uhlenbeck in [Uhl82] entwickelten Methode auf den vorliegenden Fall angepasst wird, zerlegt man Ω in

$$\Omega = P\ \nabla^\perp \xi\ P^T - (\nabla P)P^T,$$

wobei ξ, $P \in W^{1,2}(D^2, M(m))$, ξ punktweise fast überall eine antisymmetrische Matrix und P punktweise fast überall eine orthogonale Matrix und damit beschränkt ist. Aus dieser Zerlegung konstruiert man wiederum ein $A \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, GL(m))$ mit $A^{-1} \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, GL(m))$ und ein $B \in W^{1,2}(D^2, M(m))$, so dass

$$\nabla A - A\Omega = \nabla^\perp B \quad \text{in } D^2,$$

und erhält daraus einen verallgemeinerten *Erhaltungssatz* für Lösungen von (1.7)

$$\operatorname{div}(A\nabla u + B\nabla^\perp u) = 0 \quad \text{in } D^2.$$

Dieser impliziert das folgende System

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\nabla u) = -\nabla B \cdot \nabla^\perp u & \text{in } D^2, \\ \operatorname{curl}(A\nabla u) = \nabla^\perp A \cdot \nabla u & \text{in } D^2. \end{cases}$$

Die rechte Seite dieses Systems liegt wieder im lokalen Hardy-Raum $\mathscr{H}^1_{loc}$ und mit Resultaten aus der harmonischen Analysis folgt daraus, dass $A\nabla u \in W^{1,1}_{loc}$. Wegen $A^{-1} \in W^{1,2} \cap L^\infty$ impliziert dies $u \in W^{2,1}_{loc}$. In zwei Dimensionen bettet $W^{2,1}$ stetig in C^0 ein, und es folgt die Stetigkeit von u.
Ist Ω nicht antisymmetrisch, so gilt dies nicht und u muss nicht einmal beschränkt sein, wie das folgende Gegenbeispiel aus [Riv07a] zeigt: Seien $u_1(x)$, $u_2(x) := \log\log\frac{2}{|x|}$, dann ist $u = (u_1, u_2)$ Lösung von

$$-\triangle u = \begin{pmatrix} \nabla u_1 & 0 \\ 0 & \nabla u_2 \end{pmatrix} \cdot \nabla u \quad \text{in } D^2.$$

Hier ist Ω nicht antisymmetrisch und u ist weder stetig noch beschränkt in D^2.
Insbesondere kann man mit dieser Technik eine Vermutung von E. Heinz, vgl. [Hei86], beweisen: Sei $u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^3)$ die Lösung von

$$-\triangle u = -2H(u)\partial_x u \wedge \partial_y u \quad \text{in } D^2$$

[4]Zur Existenz einer solcher Projektionen siehe Theorem 11.26
[5]vgl. Lemma 11.33

für eine Abbildung $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. $H(u) : D^2 \to \mathbb{R}$ kann man als die mittlere Krümmung der Fläche $u(D^2)$ interpretieren. Unter der Voraussetzung, dass $\|H\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \infty$, schreibt man diese Differentialgleichung um: Man setzt

$$\Omega := H(u) \begin{pmatrix} 0 & \nabla^\perp u^3 & -\nabla^\perp u^2 \\ -\nabla^\perp u^3 & 0 & \nabla^\perp u^1 \\ \nabla^\perp u^2 & -\nabla^\perp u^1 & 0 \end{pmatrix},$$

und schließt dann wegen

$$-\triangle u = \Omega \cdot \nabla u,$$

dass $u \in C^0(D^2)$.

Auch eine Vermutung von S. Hildebrandt (vgl. [Hil82],[Hil83]) kann nun bestätigt werden: Kritische Punkte konform invarianter Variationsfunktionale mit elliptischem C^2-Integranden in zwei Dimensionen sind stetig. Mit Resultaten von M. Grueter aus [Grü84] erhält man, dass solche kritischen Punkte die folgende Euler-Lagrange-Gleichung lösen

$$\triangle u^j + A^i_{kl}(u)\nabla u^k \cdot \nabla u^l + \lambda^j_{kl}(u)\partial_x u^k \partial_y u^l = 0 \quad \text{in } D^2 \quad \text{ für } 1 \le j \le m,$$

wobei λ beschränkt und A die zweite Fundamentalform ist. Dieses System lässt sich umschreiben zu

$$\triangle u^j + \underbrace{\left[(A^j_{kl}(u) - A^l_{kj}(u))\nabla u^k + \frac{1}{4}(\lambda^j_{kl}(u) - \lambda^l_{kj}(u))\nabla^\perp u^k\right]}_{=:\Omega_{jl}} \cdot \nabla u^l = 0 \quad \text{in } D^2 \quad \text{ für } 1 \le j \le m,$$

woraus die Stetigkeit von u folgt.

Dem Ansatz von [Riv07a] folgend präsentierten Rivière und M. Struwe in [RivS07] einen neuen Beweis für die partielle Regularität von harmonischen Abbildungen von Gebieten der Dimension $m \ge 3$ in C^2-reguläre Mannigfaltigkeiten. Dieses Ergebnis war für stärkere Regularitätsvoraussetzungen bereits in [Eva91] und [Bet93] erzielt worden.

Mit einem zu [Riv07a] ähnlichen Ansatz zeigten T. Lamm und Rivière in [LRiv07] die Stetigkeit von Lösungen $u \in W^{2,2}(D^4, \mathbb{R}^m)$ von Gleichungen folgenden Typs:

$$\triangle^2 u = \triangle(V \cdot \nabla u) + \operatorname{div}(v \nabla u) + \Omega \cdot \nabla u \quad \text{in } D^4 \subset \mathbb{R}^4,$$

wobei V, v und Ω Potentiale in $W^{1,2}$, L^2 bzw. $(W^{1,2})^*$ sind und Ω antisymmetrisch ist.In [Riv07b] fand Rivière eine neue Darstellung der Euler-Lagrange-Gleichung des Willmore-Funktionals für im $\mathbb{R}^n$ eingebettete Flächen. Weiterhin bewies er die Hebbarkeit von Singularitäten von Willmore-Einbettungen $\Phi : D^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^m$ und zeigte mithilfe dieses Ergebnisses ein schwaches Kompaktheitsresultat für Willmore-Einbettungen kleiner Energie. Mit [Riv07c] veröffentlichte Rivière einen Übersichtsartikel über die in [Riv07a] und [Riv07b] erhaltenen Ergebnisse.

Zu dem vorliegenden Text. Die vorliegende Arbeit soll eine möglichst vollständige Herleitung der [Riv07a] zu Grunde liegenden Resultate bieten. Dazu werden in Teil I die hierfür nötigen Ergebnisse aus der Analysis vorgestellt. Neben der linearen Hodge-Zerlegung wird die für das Verständnis des Wente-Effektes notwendige Harmonische Analysis und schließlich die sogenannte Wente-Ungleichung selbst präsentiert. Im Teil II wird dann über eine nichtlineare Hodge-Zerlegung die Konstruktion des für das Hauptergebnis in [Riv07a] essentiellen Erhaltungssatzes sowie als Anwendung der Beweis der Stetigkeit kritischer Punkte konform invarianter Variationsfunktionale von Riemannschen Flächen in kompakte Mannigfaltigkeiten vorgestellt.

Teil I. Nach Festlegung der Notationen und Konventionen in **Abschnitt 2** wiederholen wir im **Abschnitt 3** einige bekannte Sätze aus der Funktional- und Fourieranalysis. Im **Abschnitt 4** stellen wir dann Ergebnisse aus dem Bereich der Sobolev-Räume und der partiellen Differentialgleichungen vor, insbesondere auch im Hinblick auf schwache, homogene Neumann-Randwerte, welche in den meisten Standardwerken zu Partiellen Differentialgleichungen eher beiläufig betrachtet werden. Eine ausführlichere Behandlung findet man z.B. in [Fol76], [Tay96] und [Weh04]. Neben Existenzsätzen und der L^2-Theorie, welche wir für den Fall von Dirichlet-Randwerten nur zitieren, etablieren wir nützliche Approximationen von $W^{2,2}(D^2)$ mit homogenen Neumannoder DIRICHLET-Randdaten. Im Anschluss daran behandeln wir im **Abschnitt 5** die lineare HODGE-Zerlegung. Ziel dabei ist es, Abbildungen f von Gebieten in $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ in der Form

$$f = \nabla F + \nabla^{\perp} G \tag{1.8}$$

darzustellen. Weiterhin finden wir notwendige Bedingungen, welche garantieren, dass die vereinfachten Darstellungen

$$f = \nabla F \tag{1.9}$$

oder

$$f = \nabla^{\perp} G \tag{1.10}$$

gültig sind. Zunächst erhalten wir die Existenz der Stammfunktionen F in (1.9) bzw. G in (1.10) *lokal* aus dem POINCARÉ-Lemma (Lemma 5.12) für L^q-Abbildungen mit $1 < q < \infty$. Ist f auf der Einheitskreisscheibe D^2 definiert, lösen wir

$$\triangle F = \operatorname{div} f \quad \text{in } D^2$$

und

$$\triangle G = \operatorname{curl} f \quad \text{in } D^2,$$

um eine Darstellung

$$f = \nabla F + \nabla^{\perp} G + H \quad \text{in } D^2$$

mit einer harmonischen Abbildung $H : D^2 \to \mathbb{R}^2$ zu erhalten. Um $H = 0$ zu garantieren, fordern wir $\langle H, \nu \rangle = 0$ oder $\langle H, \tau \rangle = 0$ auf ∂D^2 (Lemma 5.18), wobei ν die Einheitsnormale und τ eine Einheitstangente an ∂D^2 ist, und daraus die lineare HODGE-Zerlegung erhalten (Theorem 5.19).
Eine nützliche Anwendung der HODGE-Zerlegung ist einerseits, dass man aus gewissen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnungen konstruieren kann, über welche dann Regularitätseigenschaften bewiesen werden können. So folgt zum Beispiel aus $f \in L^2(D^2, \mathbb{R}^2)$ und $\operatorname{div} f \in \mathscr{H}^1_{loc}$, $\operatorname{curl} f = \partial_y f^1 - \partial_x f^2 \in \mathscr{H}^1_{loc}$ durch die Zerlegung $f = \nabla F + \nabla^{\perp} G$ für F, $G \in W^{1,2}(D^2)$, dass $\triangle F \in \mathscr{H}^1_{loc}$, $\triangle G \in \mathscr{H}^1_{loc}$. Hierbei ist $\mathscr{H}^1_{loc}$ der in Abschnitt 6 behandelte lokale HARDY-Raum. Mit Hilfsmitteln der harmonischen Analysis folgt dann F, $G \in W^{2,1}_{loc}(D^2)$ und somit $f \in W^{1,1}_{loc}(D^2, \mathbb{R}^2)$. Diese Rechnung wenden wir in Theorem 10.8 an, um aus dem Erhaltungssatz $\operatorname{div}(A\nabla u + u\nabla^{\perp} B) = 0$ die Stetigkeit von u zu schließen.
Andererseits lässt sich mit der HODGE-Zerlegung die Existenz von Lösungen gewisser partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zeigen: Unter der Voraussetzung $\operatorname{div} f = 0$ und gewissen Randwerten von $f \in L^2$ können wir so die Gleichung

$$\begin{cases} \nabla^{\perp} g = f & \text{in } D^2, \\ g = 0 & \text{auf } \partial D^2 \end{cases}$$

lösen.
Im **Abschnitt 6** behandeln wir einige Grundlagen der harmonischen Analysis, welche wir für das tiefere Verständnis des von WENTE entdeckten Effektes benötigen. Insbesondere präsentieren wir gemäß den Ausführungen in [Sem94] den Beweis, dass für Distributionen u mit $\triangle u \in \mathscr{H}^1$ folgt, dass $\nabla^2 u \in L^1_{loc}$ ist. Dabei ist $\mathscr{H}^1$ der HARDY-Raum auf $\mathbb{R}^n$, definiert als Raum aller messbaren Abbildungen f, so dass

$$\sup_{t>0} \sup_{\phi \in \mathcal{T}} |\phi_t * f(\cdot)| \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\mathcal{T}$ ein geeigneter Raum von Testfunktionen in $C_0^\infty(B_1(0))$ ist. Dieser Raum $\mathscr{H}^1$ ist echt enthalten in L^1 und besitzt - im Gegensatz zu L^1 - eine gewisse Verträglichkeit mit CALDERON-ZYGMOND-Operatoren, was den Aufbau einer Art L^1-Theorie zulässt. Dies führen wir im Abschnitt 6.3.1 nach den Darstellung [Sch03] und [Ste93] aus. Zuvor zeigen wir in Abschnitt 6.2 die von [Mül90] und [CLMS93] entdeckten notwendigen Bedingungen für die Zugehörigkeit zu $\mathscr{H}^1$: Sind E, $F \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und ist $\operatorname{div} E = 0$ und $\operatorname{curl} F = 0$, so liegt $E \cdot F \in \mathscr{H}^1$. Setzen wir für a, $b \in W^{1,2}(D^2)$ die Abbildungen $E := \nabla^{\perp} a$ und $F := \nabla b$, so erhalten wir $\nabla^{\perp} a \cdot \nabla b \in \mathscr{H}^1$, was einen Hinweis auf das analytische Fundament der WENTE-Ungleichung liefert, welche wir in **Abschnitt 7** vorstellen. Dort folgen wir dem Vorgehen von Brezis und Coron [BC84] und der Darstellung in [Hél02]: Ist für a, $b \in W^{1,2}(D^2)$

$$\begin{cases} \triangle u = \nabla a \cdot \nabla^{\perp} b & \text{in } D^2, \\ u = 0 & \text{auf } \partial D^2, \end{cases}$$

so ist u stetig, und wir erhalten die Abschätzung

$$\|u\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(D^2)} \leq C\|\nabla a\|_{L^2(D^2)}\ \|\nabla b\|_{L^2(D^2)}. \tag{1.11}$$

Die Grundlage des Beweisansatzes in [BC84] bildet die für einen beliebigen Vektor $c \in \mathbb{R}^2$ gültige Abschätzung

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \log|c-y|\ \nabla a \cdot \nabla^\perp b\ \mathbf{d}y \right| \leq \|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

aus der man über die GREENsche Darstellung von u die Abschätzung (1.11) ableiten kann. Zusätzlich stellen wir auch die alternative Beweismethode über LORENTZ-Räume und FOURIER-Transformationen von L. TARTAR aus [Tar84] vor. Für den Fall von homogenen NEUMANN-Randdaten,

$$\begin{cases} \triangle u = \nabla a \cdot \nabla^\perp b & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} u = 0, \end{cases}$$

gehen wir analog zu [BC84] und den Ausführungen in [Hél02] vor, wobei wir die GREENsche Darstellung aus [DiB95] übernehmen.
Im **Abschnitt 8** wiederholen wir kurz die Definitionen der FRECHÉT-Ableitung, betrachten die Regularität der Exponentialfunktion von $W^{2,2}(D^2, M(m))$ nach $W^{2,2}(D^2, M(m))$ (Lemma 8.9) und beweisen, dass für Matrixfunktionen $A \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m))$ mit kleiner L^∞-Norm die Inverse von $I - A$ in $W^{1,2} \cap L^\infty$ liegt (Lemma 8.14).

Teil II. Zunächst führen wir in **Abschnitt 9** RIVIÈREs Abwandlung der UHLENBECKschen Methode aus [Uhl82] vor, um für $\Omega \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit hinreichend kleiner L^2-Norm die nichtlineare Zerlegung

$$\Omega = P\ \nabla^\perp \xi\ P^T - (\nabla P) P^T \tag{1.12}$$

für orthogonales P und schiefsymmetrisches ξ zu erhalten. Dabei sind $so(m) \otimes \mathbb{R}^2$ die schiefsymmetrischen Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}^2$. Die Notwendigkeit der Schiefsymmetrie liegt darin begründet, dass die Exponentialfunktion schiefsymmetrische Matrizen auf orthogonale Matrizen abbildet. Der Beweis läuft über eine Kontinuitätsmethode. Man zeigt, dass

$$[0,1] = J := \{t \in [0,1] \mid \text{Für } t\Omega \text{ existiert eine Darstellung wie in (1.12)}\}.$$

Die Abgeschlossenheit von J ist vergleichsweise einfach zu zeigen, und da 0 (1.12) für $P = I$ und $\xi = 0$ erfüllt, bleibt nur noch die Offenheit von U zu zeigen. Dazu fixiert man ein $\tilde{\Omega}$ mit einer Darstellung wie in (1.12) für ein $\tilde{\xi}$ und $\tilde{P}$ und benutzt den Satz über implizite Funktionen, um zu zeigen, dass eine stetige Abbildung $\Psi : W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2) \to W^{2,2}(D^2, so(m))$ existiert, so dass

$$\operatorname{div}(e^{-\Psi(\lambda)} \nabla e^{\Psi(\lambda)} + e^{-\Psi(\lambda)}(\nabla^\perp \tilde{\xi} + \lambda) e^{\Psi(\lambda)}) = 0 \quad \text{in } D^2$$

für alle kleinen $\lambda \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$. Über die lineare HODGE-Zerlegung erhalten wir daraus eine Stammfunktion Γ_λ mit

$$\nabla^\perp \Gamma_\lambda = e^{-\Psi(\lambda)} \nabla e^{\Psi(\lambda)} + e^{-\Psi(\lambda)}(\nabla^\perp \tilde{\xi} + \lambda) e^{\Psi(\lambda)} \quad \text{in } D^2.$$

Aus der Darstellung (1.12) für $\tilde{\Omega}$ hat man $\tilde{P}^T\ \tilde{\Omega}\ \tilde{P} + \tilde{P}^T \nabla \tilde{P} = \nabla^\perp \tilde{\xi}$. Daraus ergibt sich

$$\nabla^\perp \Gamma_\lambda = Q_\lambda^T\ \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T(\tilde{\Omega} + Q_\lambda \lambda Q_\lambda^T) Q_\lambda \quad \text{in } D^2,$$

wobei die orthogonale Matrixfunktion Q_λ stetig von λ abhängt. Man hat also eine Darstellung wie (1.12) für $\tilde{\Omega} + Q_\lambda \lambda Q_\lambda^T$ und schließt daraus die Existenz der besagten Darstellung für alle $\tilde{\Omega} + \mu$ für kleine μ. Dies impliziert die Offenheit von U.
Im **Abschnitt 10** führen wir mit dieser Zerlegung RIVIÈREs Beweis vor, dass Lösungen von (1.7) stetig sind. Dazu leitet man aus der in Abschnitt 9 erhaltenen Zerlegung von Ω zunächst die Darstellung $\nabla A - A\Omega = \nabla^\perp B$ her und erhält daraus den Erhaltungssatz $\operatorname{div}(A \nabla u + B \nabla^\perp u) = 0$. Mit Ergebnissen der harmonischen Analysis und der HODGE-Zerlegung ergibt sich die Stetigkeit von u.
Im **Abschnitt 11** behandeln wir zunächst kurz die für die nachfolgenden Argumente relevanten Fakten der

Differentialgeometrie. Insbesondere wiederholen wir die Beweise bezüglich der Existenz der orthogonalen und nichtorthogonalen Projektion einer tubularen Umgebung einer kompakten Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. Wir gehen dabei für den orthogonalen Fall nach [Sim96] vor, während wir für die um eine Regularitätsklasse bessere nichtorthogonale Projektion die Anleitungen aus [Hél02] ausführen. Dann stellen wir Theorem I.2 aus [Riv07a] in abgeschwächter Form vor, welches mit den Ergebnissen aus [Grü84] impliziert, dass kritische Punkte gewisser konform invarianten Variationsfunktionale stetig sind. Genauer zeigen wir die Stetigkeit von kritischen Punkten $u \in W^{1,2}(D^2, \mathcal{N})$ des Funktionals

$$F(u) = \int_{D^2} [|\nabla u|^2 + \omega(u)(\partial_x u, \partial_y u)],$$

wobei $\mathcal{N}$ eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^m$ und ω eine 2-Form auf $\mathcal{N}$ ist.

Von Seiten des Autors wird keinerlei Anspruch auf Originalität erhoben; alle Aussagen in dem vorliegenden Text sind bereits bekannt und beruhen nicht auf Arbeiten an denen der Autor beteiligt war. Soweit möglich und bekannt wurden die Quellen, auf deren Grundlage die jeweiligen Beweise ausgeführt wurden, explizit benannt.
Der Autor möchte Herrn Professor H. von der Mosel für die ausführliche Betreuung danken. Weiterhin ist er der Studienstiftung des Deutschen Volkes zu Dank verpflichtet, von der er während seines Studiums gefördert wurde.

Teil I.
Analytische Grundlagen

In diesem Teil stellen wir bekannte Ergebnisse und Definitionen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik vor, welche wir für das Verständnis von [Riv07a] benötigen. Die Theoreme sind nicht immer in ihrer allgemeinsten Version aufgeführt und bewiesen, um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen. Grundlegende oder weiterführende Quellen für die einzelnen Gebiete sind in den Abschnitten und Theoremen angegeben.

2. Definitionen, Bezeichnungen und Konventionen

Zunächst wollen wir einige Schreibweisen und Definitionen vereinbaren, welche wir häufig verwenden werden.

2.1 Konvention (Einstein'sche Summenkonvention)
Für zwei Folgen $(a_i)_{1\le i\le n}$, $(b_i)_{1\le i\le n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte die Einsteinsche Summenkonvention, d.h.

$$a_i b_i := \sum_{1\le i\le n} a_i b_i.$$

2.2 Definition (Einheitskreisscheibe, $\mathbb{R}^+$)
Wir definieren als D^2 den (bezüglich $\mathbb{R}^2$) offenen $\mathbb{R}^2$-Einheitsball, häufig auch Disk genannt, d.h.

$$D^2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Weiter setzen wir $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Wir definieren einige Matrizentypen, welche uns häufiger begegnen werden:

2.3 Definition (Matrixbezeichnungen)
Wir definieren die Matrizen der Dimension $m \times m$

$$M(m) := \{A \in \mathbb{R}^{m\times m}\},$$

die schiefsymmetrischen Matrizen,

$$so(m) := \{A \in M(m);\ A^T = -A\},$$

die orthogonalen Matrizen

$$O(m) := \{A \in M(m);\ A^T A = I = AA^T\}$$

und die invertierbaren Matrizen

$$GL(m) := \{A \in M(m);\ \det A \neq 0\}.$$

2.4 Konvention (Abkürzungen)
Wir definieren hier Abkürzungen, welche wir sporadisch verwenden, um Platz zu sparen:
RHS *(Right Hand Side): Rechte Seite einer Gleichung.*
LHS *(Left Hand Side): Linke Seite einer Gleichung.*
Weiter schreiben wir für ein $\lambda > 0$ und ein festes $C > 0$, dass eine Aussage für $\lambda \gg C$ gilt (meistens ist dabei $C = 1$), wenn ein $\lambda_0 > C$ existiert, so dass für alle $\lambda > \lambda_0$ die Aussage erfüllt ist.
Analog schreiben wir, dass eine Aussage für $\lambda \ll C$ gilt, falls ein $\lambda_0 > 0$ existiert, so dass die Aussage für alle $\lambda > 0$ mit $\lambda < \lambda_0$ gilt.
In Worten sagen wir, dass die Aussage für λ hinreichend groß, bzw. hinreichend klein, gilt.

2.5 Konvention (Lebesgue-Maß, L^p, $\mathcal{M}$)
Sei ab sofort $\mathscr{L}^n$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ und für $1 \le p \le \infty$ und eine $\mathscr{L}^n$-messbare Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die Menge der messbaren Funktionen mit Definitionsbereich Ω als $\mathcal{M}(\Omega)$. Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ definieren wir die $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$-Norm

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(y)|^p \,\mathbf{d}\mathscr{L}^n(y)\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } 1 \le p < \infty \\ \operatorname{esssup}_{y\in\Omega} |f(y)| & \text{falls } p = \infty \end{cases},$$

wobei wir statt $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ *auch* $\|\cdot\|_{L^p}$ *schreiben, wenn dadurch keine Verwirrung auftritt.*
Der Raum $L^p(\Omega)$ *enthält dann alle messbaren Funktionen* $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ *mit* $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$.

2.6 Definition (Sobolev-Räume)
Für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in [1, \infty]$ *und ein Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *definieren wir den* SOBOLEVraum $W^{k,p}(\Omega)$ *als den Raum der Abbildungen* $f \in L^p(\Omega)$, *so dass die schwachen Ableitungen* $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega)$ *für alle Multiindizes* α *mit* $|\alpha| \leq k$. *Insbesondere definieren wir* $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$.

2.7 Definition (Div, Curl, ∇, $\nabla^\perp$)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein offenes Gebiet und* $u: \Omega \to \mathbb{R}$ *eine (*LEBESGUE-*) messbare Funktion. Seien weiter* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *die gewählten Basisvektoren in* $\mathbb{R}^n$. *Dann bezeichnen wir die* partielle Ableitung *in Richtung* e_i *mit*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} u \equiv \partial_{x_i} u \equiv \partial_i u.$$

Der Gradient *ist dann definiert als*

$$\nabla u := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} u \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Ist $n = 2$, *so definieren wir*

$$\nabla^\perp u := \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_1} u \\ \frac{\partial}{\partial x_2} u \end{pmatrix}.$$

Ist $V \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, *so definieren wir*

$$\operatorname{div} V := \sum_{k=1}^{n} \partial_k V^k$$

und

$$\operatorname{curl} V := (\partial_i V^j - \partial_j V^i)_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Ist $V \in L^2(\Omega)$, *so definieren wir* div *schwach, d.h.*

$$\operatorname{div} V[\varphi] := \int_\Omega V \nabla \varphi \quad \text{für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir sagen weiter, dass $\operatorname{curl} V = 0$, *falls*

$$\int_{\mathbb{R}^n} V^i\, \partial_j \varphi - V^j\, \partial_i \varphi = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

In $\mathbb{R}^2$ *definieren wir* $\operatorname{curl} V$ *schwach als*

$$\operatorname{curl} V[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^2} V \nabla^\perp \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

2.8 Bemerkung
Ist $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ *ein offenes Gebiet und* $V \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, *dann gilt (stark)*

$$\operatorname{curl} V = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 V^2 - \partial_2 V^1 \\ \partial_2 V^1 - \partial_1 V^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\partial_1 V^2 - \partial_2 V^1).$$

Ist für ein $f \in C^0(\overline{\Omega})$ *schwach*

$$\operatorname{curl} V = f \quad \text{in } \Omega,$$

d.h. gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int V\ \nabla^\perp \varphi = -\int f \varphi,$$

so folgt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (vgl. z.B. [GH96], Chapter 1, §2.3, Lemma 3, Seite 32)

$$\partial_1 V^2 - \partial_2 V^1 = f \quad \text{punktweise in } \Omega,$$

und somit gilt (stark)

$$\operatorname{curl} V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} f \quad \textit{punktweise in } \Omega.$$

Ist andererseits $U \in C^0(\overline{\Omega}, so(m))$ *und gilt*

$$\operatorname{curl} V = U \quad \textit{punktweise in } \Omega,$$

so lässt sich wegen $U(x) \in so(m)$ *punktweise*

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} f$$

schreiben, für $f := \partial_1 V^2 - \partial_2 V^1 \in C^0(\Omega)$ *und es gilt*

$$\int V \ \nabla^\perp \varphi = -\int f \ \varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

also gilt schwach

$$\operatorname{curl} V = f \quad \textit{in } \Omega.$$

2.9 Definition (Faltung)
Seien $\varphi, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *zwei Abbildungen.*
Dann ist die Faltung $\varphi * f$ *definiert durch*

$$\varphi * f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \ f(y) \ \mathbf{d}y,$$

wann immer dieser Ausdruck sinnvoll ist.

2.10 Konvention (Mittelwertintegral)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein offenes Gebiet. Das* Mittelwertintegral *ist dann wie folgt definiert*

$$⨍_\Omega f(x) \ \mathbf{d}x := \frac{1}{\mathscr{L}^n(\Omega)} \int_\Omega f(x) \ \mathbf{d}x.$$

2.11 Definition (Träger, kompakter Träger, kompakt enthalten)
(vgl. auch [Alt99], Definition 1.4, p.38)
Der Träger *einer Abbildung* $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *wird mit* $\operatorname{supp} \varphi$ *bezeichnet, d.h.*

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Er ist also insbesondere im Allgemeinen nur modulo Nullmengen definiert.
Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist in* $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt enthalten, *in Symbolen*

$$A \subset\subset B,$$

falls der Abschluss $\overline{A}$ *kompakt (d.h. A beschränkt) ist und* $\overline{A} \subset B$.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein offenes Gebiet und* $\varphi \in C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $0 \leq k \leq \infty$. *Wir schreiben* $\varphi \in C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, *falls*

$$\operatorname{supp} \varphi \subset\subset \Omega.$$

2.12 Definition ($\{u, v\}$)
(vgl. [Hél02], Kapitel 3, Seite 115; Poisson*-Klammer)*
Wir definieren

$$\{u, v\} := \frac{\partial}{\partial x} u \ \frac{\partial}{\partial y} v - \frac{\partial}{\partial y} u \ \frac{\partial}{\partial x} v,$$

wann immer dieser Ausdruck sinnvoll ist.

2.13 Konvention (Stetige lineare Abbildungen)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ *und* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *zwei normierte Vektorräume. Wir bezeichnen dann mit* $L(X, Y)$ *den Raum aller stetigen linearen Abbildungen* $\varphi : X \to Y$.
Ist $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y)$, *so schreiben wir* $L(X) \equiv L(X, X)$. *Weiter bezeichnen wir den Raum der stetigen, linearen Funktionale von* X *mit* $X^* = L(X, \mathbb{R})$.

2.14 Konvention (Konvergenz)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter, linearer Raum,* $(x_n)_n \subset X$ *eine Folge und* $x_0 \in X$*. Wir sagen, dass* x_n *in* X *für* $n \to \infty$ *gegen* x_0 *konvergiert und schreiben*

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0,$$

wenn $\|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *in* $\mathbb{R}$*. Weiterhin sagen wir, dass* x_n *schwach in* X *für* $n \to \infty$ *gegen* x_0 *konvergiert und schreiben*

$$x_n \rightharpoonup x_0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

wenn

$$f^*[x_n] \xrightarrow{n\to\infty} f^*[x_0] \quad \text{für alle Funktionale } f^* \in X^*.$$

2.15 Konvention (Konstanten)
Im folgenden werden wir Konstanten meistens mit C *oder* $C(\ldots)$ *bezeichnen. Diese Konstanten können sich von Zeile zu Zeile ändern, ohne das darauf explizit hingewiesen wird.*

3. Funktionalanalytische Grundlagen

In diesem Abschnitt wollen wir einige klassische Resultate der Funktionalanalysis wiederholen.

3.1. Fourier-Analysis

Zunächst führen wir im folgenden die Hauptresultate der FOURIERanalysis auf, eine ausführlichere Behandlung ist z.B. in [Gra04], Kapital 2.2.b., S.98ff zu finden.

3.1 Definition (Schwartz-Raum)
(vgl. [Gra04], Definition 2.2.1, S.96)
Wir definieren den Schwartz-Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *als den Raum der schnell abfallenden, glatten Funktionen. Genauer definieren wir zunächst für eine Funktion* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und für Multiindizes* α, β *der Länge* n *mit Einträgen in* $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\rho_{\alpha,\beta} f := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \ \partial^\beta f(x) \right|,$$

wobei wir

$$x^\alpha := \Pi_{i=1}^m (x_i)^{\alpha_i}$$

für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *und* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *und*

$$\partial^\beta f := \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_n^{\beta_n} \ f$$

für $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *definieren.*
Dann sagen wir $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *genau dann, wenn* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und für alle Multiindizes* α, β *der Länge* n *mit Einträgen in* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *ein* $C = C(\alpha, \beta)$ *existiert, so dass*

$$\rho_{\alpha,\beta} f \leq C.$$

3.2 Definition (FOURIER-Transformation und Umkehrtransformation)
Sei f *im Schwartz-Raum* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*. Dann definieren wir*

$$f^\wedge(\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \ e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \ \mathbf{d}x$$

die FOURIERtransformation *und*

$$f^\vee(x) \equiv \check{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \ e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} \ \mathbf{d}\xi$$

die umgekehrte FOURIERtransformation.
Die FOURIERtransformation und die umgekehrte FOURIERtransformation sind dann linear und stetig auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *bezüglich der* L^2*-Norm, und somit lassen sich diese Transformation von* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *auf* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *fortsetzen. Auch für* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *existieren die FOURIERtransformationen*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \ e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \ \mathbf{d}x, \quad f^\vee(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \ e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \ \mathbf{d}\xi.$$

Die L^2*-FOURIERtransformationen, für* $f \in L^2$ *gegeben durch*

$$\widehat{f}(\xi) := \lim_{\rho \to \infty} \int_{B_\rho(0)} f(x) \ e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \ \mathbf{d}x, \quad f^\vee(x) := \lim_{\rho \to \infty} \int_{B_\rho(0)} f(\xi) \ e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \ \mathbf{d}\xi,$$

stimmen auf $L^1 \cap L^2$ *mit den* L^1*-FOURIERtransformationen überein.*

3.3 Proposition (Eigenschaften der FOURIER-Transformation)
(vgl. [Gra04], Proposition 2.2.11, S.100 und Exercise 2.2.6(a), S. 106)
Es gilt für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(i) $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$, $\|f^\vee\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$,

(ii) $(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$,

(iii) $\widehat{f}$, $f^\vee \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

(iv) $\widehat{\partial_k f}(\xi) = (2\pi i \xi_k)\widehat{f}(\xi)$ *für* $k = 1, \ldots, n$,

(v) $(\partial_k(\widehat{f}))(\xi) = ((-2\pi i(\cdot)_k)f(\cdot))^\wedge(\xi)$ *für* $k = 1, \ldots, n$,

(vi) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$, $(f * g)^\vee = f^\vee g^\vee$ *und*

(vii) ist $f \in L^1$ *so ist* $\widehat{f}$ *und* $f^\vee \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

Aussage (i), (ii), (vi) gelten auch für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

3.4 Theorem (Satz von Plancherel)
(vgl. [Gra04] Theorem 2.2.14, S. 103)
Für $f, g, h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\, \mathbf{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\, \mathbf{d}x$,

(ii) Fourier-*Inversion:*

$$(\widehat{f})^\vee = f = \widehat{f^\vee} \quad \textit{und}$$

(iii) die Plancherel-*Identität*

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f^\vee\|_{L^2}.$$

3.2. Sätze über die Umkehrabbildung und Fredholmalternative

Wir stellen im Folgenden einige wichtige Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis vor. Zunächst wollen wir in den nächsten Theoremen verschiedene Versionen des Satzes über implizite Funktionen wiederholen.

3.5 Theorem (Satz über die implizite Funktion)
(vgl. z.B. [Zei95], §4.8, Theorem 4.E, Seite 250)
Seien E, F, G reelle Banach-*Räume und sei* $T \in C^k(U \times V, G)$, $1 \leq k \leq \infty$ *mit offenen Umgebungen* $U \subset E$ *und* $V \subset F$.
Sei $(a, b) \in U \times V$ *mit*

$$T(a, b) = 0.$$

Weiter sei das Differential $(dT^a)_b$ *von* $T^a(y) := T(a, y)$ *an der Stelle b ein Isomorphismus zwischen F und G. Dann existiert eine offene Menge* $U' \subset U$ *mit* $a \in U'$, *sowie eine Abbildung* $\psi \in C^k(U', V)$, *so dass*

$$T(x, \psi(x)) = 0 \quad \textit{für alle } x \in U'.$$

Weiterhin ist ψ eindeutig in dem Sinne, dass aus $T(x, y) = 0$ *und* $x \in U'$ *folgt* $y = \psi(x)$.

Eine äquivalente Aussage zu Theorem 3.5 liefert

3.6 Theorem (Satz über die inverse Funktion)
(vgl. z.B. [Zei95], §4.10, Theorem 4.F, Seite 259)
Seien E, F reelle Banach-*Räume und sei* $S \in C^k(U, F)$, $1 \leq k \leq \infty$ *mit einer offenen Umgebungen* $U \subset E$.
Sei $a \in U$, $b \in F$ *mit*

$$S(a) = b.$$

Weiter sei das Differential $(dS)_a$ *von S an der Stelle a ein Isomorphismus zwischen E und F.*
Dann existieren offene Mengen $U' \subset U$ *mit* $a \in U'$ *und* $V \subset F$ *mit* $b \in V$ *sowie eine Abbildung* $T^{-1} \in C^k(V, U)$, *so dass*

$$T(T^{-1}(v)) = 0 \quad \textit{für alle } v \in V.$$

und

$$T^{-1}(T(u)) = 0 \quad \textit{für alle } u \in U'.$$

Eine hinreichende Bedingung, dass aus der Bijektivität einer linearen und stetigen Abbildung auch die Stetigkeit der Umkehrabbildung folgt, betrachten wir im folgenden

3.7 Theorem (Satz von Banach über die Beschränktheit der Umkehrabbildung)
(vgl. z.B. [Alt99], Satz 5.8, Seite 205)Sind X und Y Banach-Räume und $T : X \to Y$ ein beschränkter, linearer Operator, d.h. $T \in L(X,Y)$, und T bijektiv, dann ist T^{-1} beschränkt, also $T^{-1} \in L(X,Y)$.

Um die Existenz einer Lösung von partiellen Differentialgleichungen nachzuweisen, wird uns der folgende Satz sehr nützlich sein.

3.8 Lemma (Fredholm-Alternative)
(vgl. z.B. [Eva98], Appendix D, Theorem 5, S. 641 und Remark danach)
Sei H ein reeller Hilbert-Raum und $K : H \to H$ ein kompakter, linearer und stetiger Operator.
Dann gilt für die Identität $I : H \to H$

(i) $\dim(\mathrm{Ker}(I-K)) < \infty$,

(ii) $\mathrm{Im}(I-K)$ *ist abgeschlossen,*

(iii) $\mathrm{Im}(I-K) = (\mathrm{Ker}(I-K^*))^\perp$, *wobei wir mit K^* die adjungierte Abbildung zu K bezeichnen, und*

(iv) $\mathrm{Ker}(I-K) = 0$ *genau dann, wenn* $\mathrm{Im}(I-K) = H$.

Insbesondere erfüllt K entweder (α) oder (β):

(α) *Für alle $f \in H$ existiert genau ein $u \in H$ mit $u - K(u) = f$, d.h. $I - K$ ist bijektiv.*

(β) *Es existiert ein $\tilde{u} \neq 0$ mit $\tilde{u} - K\tilde{u} = 0$, d.h. $I - K$ ist nicht injektiv.*

Beweis. zum ersten Teil:

(i) $\dim(\mathrm{Ker}(I-K)) < \infty$:
Angenommen $\dim(\mathrm{Ker}(I-K)) \not< \infty$, dann existiert (nach Gram-Schmidt-Verfahren) ein unendliches Orthonormalsystem $(u_k)_{k=1}^\infty \subset \mathrm{Ker}(I-K)$.
Also gilt

$$(I-K)u_k = 0$$

also $u_k = Ku_k$ für alle k.
Andererseits gilt auch $\|u_k\| = 1$ und $u_k \perp u_j$ für $k \neq j$, und somit

$$\begin{aligned}\|u_k - u_j\|^2 &= \|u_k\|^2 + \|u_j\|^2 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\|u_k - u_j\| = \sqrt{2} \quad \text{für alle } k \neq j,$$

d.h. es existiert keine konvergente Teilfolge von $u_k = Ku_k$. Da aber $\|u_k\| = 1$ für alle k, ist dies ein Widerspruch zur Kompaktheit von K.

(ii) $\mathrm{Im}(I-K)$ ist abgeschlossen:
Zunächst beweisen wir eine

Zwischenbehauptung. *Es existiert ein $\gamma > 0$, so dass für alle $u \in (\mathrm{Ker}(I-K))^\perp$ gilt*

$$\|u - Ku\| \geq \gamma\|u\|. \tag{3.1}$$

Denn angenommen, dies wäre falsch, dann existiert eine Folge $(u_k) \subset (\mathrm{Ker}(I-K))^\perp$ mit

$$\|u_k - Ku_k\| < \frac{1}{k}\|u_k\|.$$

Seien o.B.d.A. $\|u_k\| = 1$ (sonst definieren wir $\tilde{u}_k := \frac{u_k}{\|u_k\|}$ und arbeiten mit $\tilde{u}_k$). Man erhält also

$$\|u_k - Ku_k\| < \frac{1}{k} \tag{3.2}$$

und
$$\|u_k\| = 1 \quad \text{für alle } k.$$
Somit ist (u_k) gleichmäßig beschränkt, und es existiert deshalb (H ist HILBERT-Raum und somit reflexiv) eine Teilfolge (o.B.d.A. wieder (u_k)) mit
$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{schwach in } H.$$
Mit der Kompaktheit von K folgt (über das Teilfolgenprinzip), dass
$$Ku_k \xrightarrow{k\to\infty} Ku.$$
Weiter folgt aus der Abschätzung (3.2), dass
$$u_k - Ku_k \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$
Somit erhalten wir
$$\|u_k - Ku\| \leq \|u_k - Ku_k\| + \|Ku_k - Ku\| \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$
also zusammen
$$u_k \xrightarrow{k\to\infty} Ku$$
und
$$u_k \rightharpoonup u$$
also (wegen der Eindeutigkeit des schwachen Limes)
$$Ku = u,$$
also
$$u \in \operatorname{Ker}(I-K).$$
Andererseits waren die u_k so gewählt dass
$$u_k \in (\operatorname{Ker}(I-K))^{\perp}$$
und $(\operatorname{Ker}(I-K))^{\perp}$ ist schwach abgeschlossen, also gilt
$$u = Ku \in (\operatorname{Ker}(I-K))^{\perp} \cap \operatorname{Ker}(I-K) = \{0\}$$
und damit $u = 0$.
Da $K(u) = u = 0$ folgt somit
$$u_k \xrightarrow{k\to\infty} Ku = 0$$
wobei
$$\|u_k\| = 1,$$
was ein Widerspruch ist, womit wir die Zwischenbehaupung bewiesen haben. ||

Also existiert ein $\gamma > 0$, so dass für alle $u \in (\operatorname{Ker}(I-K))^{\perp}$ gilt
$$\|u - Ku\| \geq \gamma\|u\|. \tag{3.1}$$
Seien also $(v_k)_{k=1}^{\infty} \subset \operatorname{Im}(I-K)$ mit $v_k \xrightarrow{k\to\infty} v \in H$.
Für alle $w \in \operatorname{Im}(I-K)$ existiert ein $\tilde{z} \in H$ mit $(I-K)\tilde{z} = w$. Da H ein HILBERT-Raum ist, lässt sich $\tilde{z}$ in $\tilde{z} = z_1 + z_2$ zerlegen mit $z_1 \in \overline{\operatorname{Ker}(I-K)} = \operatorname{Ker}(I-K)$ (wegen der Stetigkeit von K und I) und $z_2 \in (\operatorname{Ker}(I-K))^{\perp}$.
Somit gilt
$$(I-K)(\tilde{z}) = (I-K)z_1 + (I-K)z_2 = (I-K)z_2.$$
Es lässt sich also für $w \in \operatorname{Im}(I-K)$ immer ein $z \in (\operatorname{Ker}(I-K))^{\perp}$ finden, so dass
$$w = (I-K)z.$$
Wir wählen solche $u_k \in (\operatorname{Ker}(I-K))^{\perp}$ für die gewählten v_k.
Dann gilt mit der Abschätzung (3.1) aus der Zwischenbehauptung oben, für ein gewisses $\gamma > 0$ unabhängig von k
$$\|v_k\| = \|u_k - Ku_k\| \geq \gamma\|u_k\|$$

und deshalb (mit $u_k - u_l \in (\mathrm{Ker}(I-K))^\perp$)

$$\|v_k - v_l\| = \|(u_k - u_l) - K(u_k - u_l)\| \geq \gamma \|u_k - u_l\|$$

und daher ist $(u_k)_k$ eine CAUCHY-Folge und da H ein HILBERT-Raum ist folgt

$$u_k \xrightarrow{k\to\infty} u \in H.$$

Somit gilt mit der Stetigkeit von $(I-K)$

$$v \xleftarrow{k\to\infty} v_k = (I-K)u_k \xrightarrow{k\to\infty} (I-K)u,$$

also

$$(I-K)u = v$$

und damit ist $v \in \mathrm{Im}(I-K)$ und es gilt $\mathrm{Im}(I-K)$ ist abgeschlossen.

(iii) Es gilt $\mathrm{Im}(I-K) = (\mathrm{Ker}(I-K^*))^\perp$:
Zunächst gilt für jeden stetigen, linearen Operator $T \in L(H)$

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Ker}(T^*)^\perp$$

bzw. äquivalent (wir beachten, dass $\mathrm{Ker}(T^*)$ abgeschlossen ist, da T^* stetig ist, da T stetig ist)

$$\mathrm{Im}(T)^\perp = \mathrm{Ker}(T^*).$$

Dies gilt,da für jedes $x \in \mathrm{Ker}\, T^*$ und für jedes $y \in H$ gilt

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, T^*x\rangle = 0.$$

also gilt $x \in \mathrm{Im}(T)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(T)}^\perp$.
Ist andererseits $x \in \overline{\mathrm{Im}(T)}^\perp = \mathrm{Im}(T)^\perp$, so gilt für alle $y \in H$

$$\langle y, T^*x\rangle = \langle Ty, x\rangle = 0$$

und somit $x \in \mathrm{Ker}(T^*)$.
Also gilt

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Ker}(T^*)^\perp.$$

Weiter gilt natürlich $(I-K)^* = I - K^*$, denn für alle $x, y \in H$ gilt

$$\langle (I-K)x, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle Kx, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, K^*y\rangle = \langle x, (I-K^*)y\rangle.$$

Also folgt mit *(ii)*

$$\mathrm{Im}(I-K) = \overline{\mathrm{Im}(I-K)} = (\mathrm{Ker}(I-K^*))^\perp$$

und *(iii)* ist bewiesen.

(iv) $\mathrm{Ker}(I-K) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(I-K) = H$:

$\Rightarrow$ Sei also $\mathrm{Ker}(I-K) = \{0\}$. Angenommen $\mathrm{Im}(I-K) \subsetneq H$.
Wir definieren $H_k := (I-K)^k(H) = (I-K)H_{k-1}$ (wobei $H_0 := H$).
Dann ist $H_1 = \mathrm{Im}(I-K)$ nach *(ii)* abgeschlossen, und somit wiederum selbst ein HILBERT-Raum, womit per Induktion folgt, dass $H_k = \mathrm{Im}(I-K)$ in H_{k-1} abgeschlossen ist in H_{k-1}, also schließlich per Induktion H_k abgeschlossen in H.
Weiter gilt, dass $H_2 = (I-K)H_1 \subsetneq H_1$, denn falls $f \in H \backslash H_1$, dann gilt

$$H_1 \ni (I-K)f \neq (I-K)g \quad \text{für alle } g \in H_1,$$

denn sonst würde wegen $(I-K)(f-g)=0$ nach vorausgesetzter Injektivität gelten $f=g$, also $f \in H_1$.
Also ist

$$H_2 = (I-K)(H_1) = (I-K)^2(H) \subsetneq H_1.$$

Per Induktion folgt mit genau dem gleichen Argument für alle $f \in H_{k-1} \backslash H_k$, dass

$$H_k \ni (I-K)f \neq (I-K)g \quad \text{für alle } g \in H_k,$$

also folgt $H_{k+1} \subsetneq H_k$.
Deshalb existiert für alle $k \geq 0$ ein $u_k \in H^k \cap (H^{k+1})^\perp$, denn aus

$$H^{k+1} \subsetneq H^k$$

folgt (da H^k, H^{k+1} abgeschlossen)

$$(H^{k+1})^\perp \supsetneq (H^k)^\perp$$

und somit

$$(H^{k+1})^\perp \backslash (H^k)^\perp \neq \emptyset.$$

Wir wählen ein $\tilde{u}_k \in (H^{k+1})^\perp \backslash (H^k)^\perp$ und zerlegen es eindeutig in

$$\tilde{u}_k = u_k + u_\perp$$

mit $u_k \in H^k$ und $u_\perp \in (H^k)^\perp$. Dann gilt $u_k \neq 0$, da $\tilde{u}_k \notin (H^k)^\perp$, und außerdem gilt wegen $u_\perp \in (H^k)^\perp \subset (H^{k+1})^\perp$, dass $u_k = \tilde{u}_k - u_\perp \in (H^{k+1})^\perp$, also zusammen

$$u_k \in H^k \cap (H^{k+1})^\perp.$$

Ohne Einschränkung (da $u_k \neq 0$, wählen wir sonst $\overline{u}_k := \frac{u_k}{\|u_k\|}$) gilt $\|u_k\| = 1$.

Sei $k > 1$, dann gilt

$$Ku_k - Ku_l = -(u_k - Ku_k) + (u_l - Ku_l) + (u_k - u_l),$$

und es gilt

$$u_k - Ku_k \in H^{k+1} \subsetneq H^k \subset H^{l+1},$$
$$u_l - Ku_l = (I-K)u_l \in H^{l+1}$$
$$u_k \in H^k \subset H^{l+1},$$

und

$$u_l \in (H^{l+1})^\perp,$$

also

$$Ku_k - Ku_l = w_{l+1} - u_l$$

mit

$$w_{l+1} \in H^{l+1}.$$

Also gilt, da $w_{l+1} \perp u_l$

$$\|Ku_k - Ku_l\|^2 = \|w_{l+1}\|^2 + \|u_l\|^2 \geq \|u_l\|^2 = 1.$$

Also existiert keine konvergente Teilfolge in $(K(u_k))_k$, dies ist aber ein Widerspruch zu $\|u_k\| = 1$ und K kompakt, also muss gelten $H_1 = H$ und somit

$$\mathrm{Im}(I-K) = H.$$

$\Leftarrow$ Sei $\mathrm{Im}(I-K) = H$.
Mit (iii) gilt $(\mathrm{Ker}(I-K^*))^\perp = \mathrm{Im}(I-K) = H$.Weiter gilt, dass K^* kompakt ist, denn für $\|u_k\| \leq C$ existiert (H reflexiv, da Hilbert-Raum) eine schwach konvergente Teilfolge, wieder mit u_k bezeichnet, mit $u_k \rightharpoonup u$ in H. Dann gilt mit der Cauchy-Schwarz-Abschätzung und der Tatsache, dass K

als kompakter Operator schwachkonvergente Folgen in starkkonvergente Folgen, und K^* als (bisher nur) stetiger Operator schwach konvergente Folgen in schwach konvergente Folgen abbildet,

$$\begin{aligned}
\|K^*u_k - K^*u\|^2 &= \langle K^*u_k - K^*u, K^*(u_k - u)\rangle \\
&= \langle KK^*u_k - KK^*u, u_k - u\rangle \\
&\leq \|K(K^*u_k) - K(K^*u)\| \, \|u_k - u\| \\
&\leq \|K(\tilde{u}_k) - K(\tilde{u})\| \, C \\
&\xrightarrow{k\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Also ist K^* kompakt.
Aus $\operatorname{Ker}(I-K^*)^\perp = H$ folgt nun, dass $\operatorname{Ker}(I-K^*) = \{0\}$, und deshalb mit (iv)"$\Rightarrow$“ von oben, dass $\operatorname{Im}(I-K^*) = H$, also wiederum mit (iii) (denn $K^{**} = K$) folgt wieder

$$(\operatorname{Ker}(I-K))^\perp = \operatorname{Ker}(I-K^{**})^\perp \overset{(iii)}{=} \operatorname{Im}(I-K^*) = H,$$

also

$$\operatorname{Ker}(I-K) = \{0\}.$$

Damit ist die Äquivalenz bewiesen.

Fehlt nur noch
der letzte Teil:
Aus (β) folgt $\neg(\alpha)$:
Sei $\tilde{u} \neq 0$ mit $\tilde{u} - K(\tilde{u}) = 0$. Wir wählen ein beliebiges $f \in H$. Entweder es existiert kein $u \in H$, so dass $u - K(u) = f$ (und somit gilt $\neg(\alpha)$), oder es existiert ein solches u, dann ist es aber wegen $u + \tilde{u} - K(u + \tilde{u}) = f$ nicht eindeutig, und es gilt $\neg(\alpha)$.

Aus $\neg(\beta)$ folgt (α):
Sei also $\operatorname{Ker}(I-K) = \{0\}$, dann gilt mit (iv), dass $\operatorname{Im}(I-K) = H$, und somit existiert für jedes f (mindestens) ein u mit $(I-K)u = f$. Weiter folgt aus der Injektivität und Linearität von $(I-K)$, dass dieses u auch eindeutig ist. Damit gilt (α). □

Um lokale Abschätzungen auf ein größeres Gebiet zu übertragen benötigt man häufig eine Zerlegung der Eins. In Theorem 9.5 werden wir eine etwas stärkere Regularität für die Zerlegung benötigen, nämlich dass auch $(\eta_j)^{\frac{1}{2}}$ noch glatt ist. Um dieses Ergebnis zu etablieren, werden wir die Adaption des Beweises von [Alt99], S. 103ff, vorführen.

3.9 Lemma (Zerlegung der Eins)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, und $(U_j)_{j=1}^m$ eine endliche, offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$, wobei $U_j \subset\subset \mathbb{R}^n$.
Dann existieren $\eta_j \in C_0^\infty(U_j \cap \overline{\Omega})$ mit $0 \leq \eta_j \leq 1$ und

$$\sum_{j=1}^m \eta_j(x) = 1 \quad \textit{für alle } x \in \overline{\Omega}.$$

Weiter lassen sich diese η_j so wählen, dass auch

$$\eta_j^{\frac{1}{2}} \in C_0^\infty(U_j \cap \overline{\Omega})$$

Beweisskizze. Wir gehen analog zu [Alt99] 2.18 (Abschneidefunktion), S. 103ff vor.
Schritt 1:
Sei $K \subset B_\delta(K) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, K kompakt, $\delta > 0$ und Ω offen. Dann existiert eine Abschneidefunktion $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$

mit $\eta^{\frac{1}{2}} \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \eta \leq 1$ und $\eta = 1$ auf K.
Denn wählen wir ein $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$, so definieren wir zunächst analog zu [Alt99]

$$\tilde{\eta}_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * \chi_{B_{\frac{\delta}{2}}(K)},$$

wobei $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$.
Dann ist für $\varepsilon := \frac{\delta}{4}$ zum einen $\tilde{\eta}_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, und zum anderen gilt $\tilde{\eta}_\varepsilon = 1$ auf K, da

$$\tilde{\eta}_\varepsilon(x) = \int_{B_1(0)} \varphi(y)\ \chi_{B_{\frac{\delta}{2}}(K)}(x + \varepsilon y)\ \mathbf{d}y = \int_{B_1(0)} \varphi(y)\ 1\ \mathbf{d}y = 1 \quad \text{für } x \in K.$$

Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (wir beachten $\varphi \geq 0$)

$$\tilde{\eta}_\varepsilon = \int_{B_1(0)} \varphi(y)\ \underbrace{\chi_{B_{\frac{\delta}{2}}(K)}(x + \varepsilon y)}_{\leq 1}\ \mathbf{d}y \leq 1$$

und wegen $\varphi \geq 0$ und $\chi \geq 0$ folgt sofort $\tilde{\eta}_\varepsilon \geq 0$.

Definieren wir nun

$$\eta := (\tilde{\eta}_{\frac{\delta}{4}})^2$$

so folgt $0 \leq \eta \leq 1$ und $\eta \equiv 1$ auf K, sowie $\eta^{\frac{1}{2}},\ \eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

Schritt 2:
Nun zur Zerlegung der 1.
Analog zu [Alt99], Seite 104 und 105, seien $N := \{1, \ldots, m\}$ und $N_0 := \{j |\ U_j \cap \Omega \neq \emptyset\}$.
Weiter definieren wir

$$D := \bigcup_{j \in N} U_j, \quad A := \bigcup_{j \in N_0} \overline{U_j}.$$

Ohne Einschränkung (ggf. unter Hinzunahme weiter Mengen U_j, vgl. [Alt99]) gilt

$$A \subset D,$$

und da A kompakt ist, können wir (analog zu [Alt99]) offene Mengen $V_j \subset\subset U_j$ finden, so dass

$$A \subset \bigcup_{j \in N} V_j.$$

Nun existiert aus Schritt 1 zu jedem $K_j := \overline{V_j}$ ein $\tilde{\eta}_j$ mit $\tilde{\eta}_j, (\tilde{\eta}_j)^{\frac{1}{2}} \in C_0^\infty(U_j)$, $\tilde{\eta}_j = 1$ in $\overline{V_j}$ und $0 \leq \tilde{\eta}_j \leq 1$.
Wir setzen nun

$$\sigma := \sum_{j \in N} \tilde{\eta}_j.$$

Dann gilt $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\sigma \geq 1$ auf $A \supset \overline{U_j}$ für alle $j \in N_0$.
Also ist für $j \in N_0$

$$\eta_j := \frac{\tilde{\eta}_j}{\sigma} \in C_0^\infty(U_j)$$

und

$$(\eta_j)^{\frac{1}{2}} \in C_0^\infty(U_j).$$

Weiter gilt

$$\sum_{j \in N_0} \eta_j = 1 \quad \text{in } \Omega.$$

Letzteres gilt, da $\Omega \cap U_j =$ genau dann, wenn $j \in N \backslash N_0$ und somit $\eta_j(x) = 0$ für alle $j \notin N_0$, $x \in \Omega$. Daher ist

$$\sigma(x) = \sum_{j \in N} \eta_j(x) = \sum_{j \in N_0} \eta_j(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Somit haben wir die gesuchte Zerlegung der 1 gefunden, wenn wir noch $\eta_j := 0$ für $j \notin N_0$ setzen. ||

4. Partielle Differentialgleichungen und Sobolev-Räume

In diesem Abschnitt wiederholen wir einige Resultate zu (schwachen) Partiellen Differentialgleichungen, und SOBOLEVräumen. Weiterhin werden wir mehrer kleinere Rechnungen durchführen, deren Ergebnisse wir im folgenden immer wieder benutzen werden.

4.1. Abschätzungen und Gaußsche Integralformel für Sobolevfunktionen

Das folgende Lemma ist eine Vereinigung der POINCARÉ-Ungleichung und des SOBOLEV-Einbettungssatzes.

4.1 Lemma (SOBOLEV-Poincaré-Ungleichung)
(vgl. z.B. [Alt99] Satz 6.15, Seite 223 (Allgemeine POINCARÉ-*Ungleichung))*
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Sei desweiteren $K \subset W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, eine bezüglich $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ abgeschlossene Menge, welche Kegeleigenschaften besitzt, d.h. mit

(i) $f, g \in K$, *dann auch* $f + g \in K$,

(ii) $f \in K$, *dann auch* $\lambda f \in K$ *für jedes* $\lambda \geq 0$ *und*

(iii) *falls* $\nabla f \equiv 0$, $f \in K$, *dann ist* $f \equiv 0$.

Für ein p mit $1 \leq p < n$ existiert dann eine Konstante $C = C(p, n, \Omega)$, so dass für jedes $u \in K$ gilt

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

wobei $p^* := \frac{np}{n-p}$ der sogenannte SOBOLEV-Exponent *ist.*
Ist $p \geq n$ so gilt für jedes $q \in (1, \infty)$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, n, q, \Omega)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4.1}$$

$C(p, n, q, \Omega)$ ist in beiden Fällen unabhängig von konstanten Verschiebungen des Definitionsbereich, d.h. $C(\Omega) = C(\Omega + x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Sei zunächst $p < n$. Nun zeigen wir als erstes die Ungleichung

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

also die "Standard"-POINCARÉ-Ungleichung:
Angenommen die Ungleichung wäre falsch, dann existiert also für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $u_m \in K$ mit

$$\|u_m\|_{L^p} > m\|\nabla u_m\|_{L^p}. \tag{4.2}$$

Nun ist ohne Einschränkung $\|u_m\|_{L^p} = 1$, denn aus (4.2) folgt insbesondere, dass $\|u_m\|_{L^p} > 0$ und somit wählen wir ansonsten $\tilde{u}_m := \frac{u_m}{\|u_m\|_{L^p}}$.
Also folgt

$$\frac{1}{m} > \|\nabla u_m\|_{L^p},$$

und es gilt

$$\nabla u_m \xrightarrow{m\to\infty} 0 \quad \text{in } L^p.$$

Auf der anderen Seite folgt aus (4.2) und $\|u_m\|_{L^p} = 1$, dass $\|u_m\|_{W^{1,p}} \leq C$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
Mit der kompakten Einbettung von $W^{1,p}$ in L^p (Satz von RELLICH; da $W^{1,p}$, $p > 1$ reflexiv ist und $\delta\Omega \in C^{0,1}$, existiert eine schwach konvergente Teilfolge, so dass wir den Satz von RELLICH anwenden können), $p > 1$, dass es eine Teilfolge gibt, der Übersicht halber wieder als u_m bezeichnet, welche in L^p konvergiert.
Dieses $(u_m)_m$ ist dann eine CAUCHY-Folge in $W^{1,p}$, da $(u_m)_m$ eine CAUCHY-Folge in L^p ist und $\nabla u_m \xrightarrow{m\to\infty} 0$ in L^p, und somit konvergent gegen ein $u \in W^{1,p}$.
Wegen der L^p-Konvergenz $0 \xleftarrow{m\to\infty} \nabla u_m \xrightarrow{m\to\infty} \nabla u$ folgt dann

$$\nabla u \equiv 0.$$

Da K abgeschlossen ist, gilt $u \in K$, und somit $u \equiv 0$.
Damit gilt aber $\|u\|_{L^p} = 0$, was einen Widerspruch zu $\|u_m - u\|_{L^p} < \varepsilon$ für hinreichend großes m darstellt.

Mit der SOBOLEV-Einbettung (vgl. z.B. [Alt99], Satz 8.9, p.314) gilt wegen $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $1 - \frac{n}{p} = 0 - \frac{n}{p^*}$ und dem obigen Ergebnis, dass

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p^*}} &\leq C(p,n,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}} \\ &\leq C(p,n,\Omega)(\|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}) \\ &\leq C(p,n,\Omega)\|\nabla u\|_{L^p}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

womit die behauptete Ungleichung bewiesen ist.

Ist $p \geq n$, gilt diese Ungleichung für alle $q \in (1,\infty)$, da wir ein kleines $\delta > 0$ finden können, so dass für $p' := n - \delta$ einerseits $(p')^* > q$ und andererseits $p \geq n > p'$ gilt. Da Ω beschränkt ist gilt dann $L^{(p')^*}(\Omega') \hookrightarrow L^q(\Omega)$ und $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega')$, und somit erhalten wir die Ungleichung (4.1) durch Anwendung der SOBOLEV-POINCARÉ-Ungleichung (4.3) auf p' und der Anwendung der Einbettungen.

Dass $C = C(p,n,\Omega)$ unabhängig von Verschiebungen von Ω ist, folgt durch direktes Einsetzen und Transformationsregel. □

4.2 Theorem (Gaußscher Integralsatz)
(vgl. [For99], §15, Satz 3)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit $\partial A \in C^\infty$. Sei weiterhin $\nu: \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld und $U \supset A$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F: U \to \mathbb{R}^n$

$$\int_A \operatorname{div} F(x)\,\mathbf{d}x = \int_{\partial A} F(x)\cdot\nu(x)\,\mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(x).$$

4.3 Korollar (Partielle Integration)
Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und seien $\operatorname{supp} f$ oder $\operatorname{supp} g$ kompakt enthalten in einer Menge $A \subset\subset \mathbb{R}^n$. Sei weiterhin $\nu: \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld.
Dann gilt

$$\int_A f\ (\partial^i\ g) = \int_{\partial A} f\ g\ \nu^i - \int_A (\partial^i f)\ g.$$

Beweis. Wir definieren zunächst $\psi := (\psi^k)_{1\leq k\leq n}$ durch

$$\psi^k = \begin{cases} g, & \text{falls } k = i \\ 0, & \text{falls } k \neq i \end{cases}.$$

Dann gilt mit der Definition von ψ und Produktregel

$$\operatorname{div}(f\ \psi) = \sum_{k=1}^n \partial_k(f\ \psi^k) = \partial_i(f\ g) = f\ \partial_i g + \partial_i f\ g$$

also

$$f\ \partial_i g = \operatorname{div}(f\ \psi) - (\partial_i f)\ g.$$

Somit gilt mit dem Gauß'schen Integralsatz, Theorem 4.2, und der Definition von ψ

$$\begin{aligned} \int_A f\ (\partial^i g) &= \int_A (\operatorname{div}(f\ \psi) - \partial_i f\ g) \\ &= \int_A \operatorname{div}(f\ \psi)\ - \int_A (\partial_i f)\ g \\ &= \int_{\partial A} (f\psi)\cdot\nu\ - \int_A (\partial_i f)\ g \\ &= \int_{\partial A} f\ g\ \nu^i\ - \int_A (\partial_i f)\ g, \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

4.4 Lemma (Abschätzung des Randintegrals)
Sei $f \in C^\infty(\overline{D^2})$. Dann gilt für ein C unabhängig von f

$$\int_{\partial D^2} |f| \leq C\|f\|_{W^{1,1}(D^2)}.$$

Beweis. Sei also $f \in C^\infty(\overline{D^2})$. Wir wählen ein $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \eta \leq 1$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B_{\frac{1}{4}}(\partial D^2)$ und $\eta \equiv 0$ auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$.
Wir setzen $g := \eta f \in C^\infty(\overline{D^2})$. (Wir schneiden also f um die 0 ab).
Es gilt dann mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D^2} |g| &= \int_{\theta=0}^{2\pi} |g(\cos\theta, \sin\theta)| \cdot 1 \, \mathbf{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} |g(\cos\theta, \sin\theta) - g(0,0) + 0| d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left| \int_{r=0}^{1} \frac{d}{dr} g(r\cos\theta, r\sin\theta) \, \mathbf{d}r \right| \mathbf{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left| \int_{r=0}^{1} \nabla g \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \mathbf{d}r \right| \mathbf{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left| \int_{r=\frac{1}{2}}^{1} \nabla g \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \mathbf{d}r \right| \mathbf{d}\theta \\
&\leq 2\int_{\theta=0}^{2\pi} \left| \int_{r=\frac{1}{2}}^{1} r\nabla g \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \mathbf{d}r \right| \mathbf{d}\theta \\
&\leq 2\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=\frac{1}{2}}^{1} r|\nabla g| \cdot 1 \, \mathbf{d}r \, \mathbf{d}\theta \\
&\leq 2\int_{D^2} |\nabla g| \\
&= 2\|\nabla g\|_{L^1(D^2)}.
\end{aligned}$$

Damit folgt wegen $\eta \equiv 1$ um ∂D^2

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D^2} |f| &= \int_{\partial D^2} |g| \\
&\leq 2\|\nabla g\|_{L^1(D^2)} \\
&\leq 2\|\nabla \eta \, f + \eta \, \nabla f\|_{L^1(D^2)} \\
&\leq 2(\|\nabla\eta\|_{L^\infty} + \|\eta\|_{L^\infty})\|f\|_{W^{1,1}(D^2)},
\end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

4.5 Lemma (Gaußscher Integralsatz (schwach))
Sei $f \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)$ und es gelte (α) oder (β):

(α) $\langle f, \tau\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$,

(β) $\langle f, \nu\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$.

Dabei ist $\nu(x,y) := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *die Einheitsnormale an* ∂D^2 *und* $\tau(x,y) := \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ *die Einheitstangente gegen den Uhrzeigersinn an* ∂D^2.
Dann gilt für alle $\varphi \in W^{1,2}(D^2)$ *im Fall* (α)

$$\int_{D^2} \operatorname{curl} f \ \varphi = -\int_{D^2} f \ \nabla^\perp \varphi$$

und im Fall (β)

$$\int_{D^2} \operatorname{div} f \ \varphi = -\int_{D^2} f \ \nabla \varphi.$$

Beweis. <u>von C^∞ nach $W^{1,2}$:</u>
Angenommen die Behauptung gilt für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$, d.h. für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$ gilt im Fall (α)

$$\int_{D^2} \operatorname{curl} f \ \varphi = -\int_{D^2} f \nabla^\perp \varphi$$

und im Fall (β)

$$\int_{D^2} \operatorname{div} f \ \varphi = -\int_{D^2} f \ \nabla \varphi.$$

Dann folgt für $v \in W^{1,2}(D^2)$ mit einer Approximation $v_m \in C^\infty(\overline{D^2})$ und $v_m \xrightarrow{m\to\infty} v \in W^{1,2}(D^2)$ (Existenz, da $\partial D^2 \in C^\infty$) im Fall (α)

$$\begin{aligned} \left| \int_{D^2} \operatorname{curl} f \ v + f \ \nabla^\perp v \right| &\le \left| \int_{D^2} \operatorname{curl} f \ (v - v_m) \right| + \left| \int_{D^2} f \ \nabla^\perp (v - v_m) \right| + 0 \\ &\le \|f\|_{W^{1,2}} \ \|v - v_m\|_{W^{1,2}} \\ &\xrightarrow{m\to\infty} 0, \end{aligned}$$

und somit gilt die Aussage auch für alle $v \in W^{1,2}(D^2)$. Entsprechendes folgt für den Fall (β).

<u>Aussage für C^∞:</u>
Zunächst zeigen wir den Fall (α):Sei $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$. Wegen $f \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)$ findet man ein $f_m \in C^\infty(\overline{D^2}, \mathbb{R}^2)$ mit

$$f_m \xrightarrow{m\to\infty} f \quad \text{in } W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2);$$

Wegen $\langle f, \tau \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ existiert ein $g_m \in C_0^\infty(D^2)$ mit

$$g_m \xrightarrow{m\to\infty} \langle f, \tau \rangle \quad \text{in } W^{1,2}.$$

Dann gilt mit starkem Gauß, Theorem 4.2,

$$\begin{aligned} \int_{D^2} \operatorname{curl}(f_m) \varphi &= -\int_{D^2} f_m \nabla^\perp \varphi + \int_{\partial D^2} \langle f_m, \tau \rangle \varphi \\ &= -\int_{D^2} f_m \nabla^\perp \varphi + \int_{\partial D^2} (\langle f_m, \tau \rangle - g_m) \varphi, \end{aligned}$$

da $g_m \equiv 0$ auf ∂D^2.

Somit gilt mit Lemma 4.4 und der Einbettung $W^{1,2} \hookrightarrow W^{1,1}$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{D^2} \operatorname{curl} f_m\varphi + \int_{D^2} f_m\nabla^\perp\varphi\right| &= \left|\int_{\partial D^2} (\langle f_m,\tau\rangle - g_m)\varphi\right| \\
&\leq \int_{\partial D^2} |\langle f_m,\tau\rangle - g_m|\ |\varphi| \\
&\leq C\ \|(\langle f_m,\tau\rangle - g_m)\varphi\|_{W^{1,1}(D^2)} \\
&\leq C(\varphi)\|\langle f_m,\tau\rangle - g_m\|_{W^{1,1}} \\
&\leq C(\varphi)\|\langle f_m,\tau\rangle - g_m\|_{W^{1,2}} \\
&\leq C(\varphi)(\|\langle f_m,\tau\rangle - \langle f,\tau\rangle\|_{W^{1,2}} + \|g_m - \langle f,\tau\rangle\|_{W^{1,2}}) \\
&\leq C(\varphi)(\|f_m - f\|_{W^{1,2}} + \|g_m - \langle f,\tau\rangle\|_{W^{1,2}}) \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit gilt nun

$$\begin{aligned}
\left|\int_{D^2} \operatorname{curl} f\ \varphi + f\ \nabla^\perp\varphi\right| &\leq \int_{D^2} |\operatorname{curl} f - \operatorname{curl} f_m||\varphi| + \int_{D^2} |f_m - f||\nabla^\perp\varphi| + \left|\int_{D^2} \operatorname{curl} f_m\varphi + \int_{D^2} f_m\nabla^\perp\varphi\right| \\
&\leq C(\varphi)(\|\operatorname{curl} f - \operatorname{curl} f_m\|_{L^2} + \|f_m - f\|_{L^2}) + \left|\int_{D^2} \operatorname{curl} f_m\varphi + \int_{D^2} f_m\nabla^\perp\varphi\right| \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt (α).
Im Fall (β) ersetzen wir oben curl durch div, $\nabla^\perp$ durch ∇ und τ durch ν und wir erhalten die Aussage (β). □

4.6 Lemma (Sphärische Koordinaten)
(siehe [Gra04], Appendix D1, D2, Seite A19, A20)
Sei $S^{n-1} = S_1^{n-1}$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt bekanntlich folgende Formel für jedes $R > 0$

$$\int_{S_R^{n-1}} f(x)\mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(x) = \int_{\varphi_1=0}^{\pi} \cdots \int_{\varphi_{n-2}=0}^{\pi} \int_{\varphi_{n-1}=0}^{2\pi} f(x(\varphi))\ J(n,R,\varphi)\ \mathbf{d}\varphi_{n-1}\ \cdots\ \mathbf{d}\varphi_1,$$

wobei

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos(\varphi_1) \\
x_2 &= R\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\
x_3 &= R\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_3) \\
&\cdots \\
x_{n-1} &= R\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\sin(\varphi_3)\cdots\sin(\varphi_{n-2})\cos(\varphi_{n-1}) \\
x_{n-1} &= R\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\sin(\varphi_3)\cdots\sin(\varphi_{n-2})\sin(\varphi_{n-1})
\end{aligned}$$

und $0 \leq \varphi_1, \ldots \varphi_{n-2} \leq \pi$, $0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi$,

$$x(\varphi) = (x_1(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}), x_2(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}),\cdots,x_n(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}))$$

und

$$J(n,R,\varphi) = R^{n-1}(\sin(\varphi_1)^{n-2}\ \cdots\ \sin(\varphi_{n-3})^2\ sin(\varphi(n-2)$$

gilt.

4.2. Homogene Neummanrandwerte

4.7 Definition (Lösungen des homogenen Neumann-Randwertproblems)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, $\partial\Omega \in C^{0,1}$, mit Einheitsnormale ν an $\partial\Omega$. Sei weiter $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$ und $f \in L^q(\Omega)$, $q \geq 1$. Dann sagen wir, dass die folgende PDE

$$\begin{cases} \triangle v = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = f & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

schwach von u erfüllt wird, bzw. dass u eine schwache Lösung von $\triangle v = f$ mit schwachen homogenen Neumannranddaten *ist, wenn*

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi = -\int_\Omega f\ \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

4.8 Definition ($\mathbf{W^{2,2}_{\text{Neu}}}$)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet. Wir definieren den Raum von Funktionen in $W^{2,2}(\Omega)$ mit homogenen Neumann-Randwerten, $W^{2,2}_{\text{Neu}}(\Omega)$, durch

$$W^{2,2}_{\text{Neu}}(\Omega) := \left\{ u \in W^{2,2}(\Omega) \middle| \ \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ gilt } \int_\Omega \triangle u\ \varphi = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \right\}.$$

4.9 Bemerkung

- *Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$, so folgt aus*

$$\begin{cases} \triangle u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

  mit partieller Integration, Korollar 4.3,

$$\int_\Omega f\ \varphi = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega \triangle u\ \varphi - \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle\ \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4.4}$$

  Folglich gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f\ \varphi = \int_\Omega \triangle u\ \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

  und somit über das Fundamentallemma der Variationsrechnung

$$\triangle u = f \quad \text{punktweise in } \Omega.$$

  Deshalb folgt aus (4.4)

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle\ \varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

  Daraus folgt wieder mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung auf dem Rand

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle = 0 \quad \text{punktweise auf } \partial\Omega.$$

  Wir erhalten also insbesondere, dass $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap W^{2,2}_{\text{Neu}}(\Omega)$ dann und nur dann, wenn $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\frac{\partial}{\partial \nu} u = 0$ auf $\partial\Omega$.
  Für eine ähnliche aber schwächere Aussage vergleiche auch Theorem 4.32.

- *Es gilt per Definition $u \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(\Omega)$ genau dann, wenn $u \in W^{2,2}(\Omega)$, $\triangle u = f$ punktweise fast überall für ein $f \in L^2(\Omega)$ und schwach gilt*

$$\begin{cases} \triangle u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

  also für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega \triangle u\ \varphi.$$

4.10 Lemma ($\mathbf{W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}}$-Charakterisierung)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^\infty$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(*i*) $f \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(\Omega)$,

(*ii*) $f \in W^{2,2}(\Omega)$ *und* $\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla\varphi = -\int_\Omega \triangle f\ \varphi$ *für alle* $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$,

(*iii*) $f \in W^{2,2}(\Omega)$ *und* $\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g = -\int_\Omega \triangle f\ g$ *für alle* $g \in W^{1,2}(\Omega)$.

Beweis. (i) und (ii) sind per Definition äquivalent und aus (iii) folgt (ii) trivialerweise.
Sei nun (ii) erfüllt und wegen $\partial\Omega \in C^\infty$ können wir $\varphi_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ finden, mit $\varphi_m \xrightarrow{m\to\infty} g$ in $W^{1,2}$. Dann gilt

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla(g - \varphi_m) - \int_\Omega \triangle f\ (\varphi_m - g) - \int \triangle f\ g$$

und die ersten beiden Integral konvergieren gegen 0. □

4.11 Lemma (Abgeschlossenheit von $\mathbf{W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}}$)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{2,2}(\Omega)$.

Beweis. Da die Gleichung

$$\int_\Omega \triangle u\ \varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$$

unter $W^{2,2}$-Konvergenz erhalten bleibt, ist der Beweis trivial.

4.3. Existenz- und Regularitätstheorie für lineare elliptische Dirichlet- und Neumannprobleme

4.12 Definition (Elliptizität)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei weiter eine messbare Funktion $(a_{ij}) : \ \Omega \to M(m)$ gegeben. Dann nennen wir $(a_{ij})_{ij}$ elliptisch *mit Konstante $\Lambda > 0$, falls gilt*

$$\frac{1}{\Lambda} \le a_{ij}\xi^i\xi^j \le \Lambda \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^m \text{ mit } |\xi| = 1.$$

Als Folgerung des Lemmas von Lax-Milgram (vgl. [Alt99], Satz 4.3) unter Anwendung der POINCARÉ-Ungleichung, Lemma 4.1, erhalten wir das folgende

4.13 Lemma (Lösung des homogenen DIRICHLET-Problems)
(vgl. z.B. [Alt99], Existenzsatz 4.8, Seite 153; [GT83], Theorem 8.3, Seite 181)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Für jedes $f \in (W^{1,2}_0(\Omega))^*$ existiert ein $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$, so dass für jedes $\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = -f[\varphi],$$

d.h. es existiert genau eine (schwache) Lösung von

$$\begin{cases} \triangle u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}.$$

Weiter gilt dann

$$\|w\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le C(\Omega, n)\ \|f\|_{(W^{1,2}_0(\Omega))^*}.$$

4.14 Lemma (Lösungen des homogenen NEUMANN-Randwertproblems)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, zusammenhängendes Gebiet und $\partial\Omega \in C^{0,1}$.
Wir betrachten die Gleichung

$$\triangle u = f \quad \text{in } \Omega \tag{4.5}$$

für ein $f \in (W^{1,2}(\Omega))^*$.
Dann besitzt (4.5) genau dann (mindestens) eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit homogenen Neumannrandwerten, d.h.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = f[\varphi] \quad \textit{für alle } \varphi \in W^{1,2}(\Omega),$$

wenn

$$f(c) = 0 \quad \textit{für alle konstanten Funktionen } c.$$

In diesem Fall existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\int_\Omega u = 0$. Für dieses u gilt dann

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, n)\|f\|_{(W^{1,2}(\Omega))^*}.$$

Beweis. $\Rightarrow$ Es gelte $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = f[\varphi]$ für alle $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Wir wählen $\varphi := const \in W^{1,2}(\Omega)$, dann folgt

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = f[const].$$

$\Leftarrow$ Wir definieren $W := \{v \in W^{1,2}(\Omega),\ \int_\Omega v = 0\}$ und $B(\cdot,\cdot) : W \times W \to \mathbb{R}$ durch

$$B(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Dann ist $B(\cdot,\cdot)$ bilinear und W ist ein abgeschlossener Kegel in $W^{1,2}$ wie im Poincaré-Lemma 4.1, da Ω zusammenhängend ist.

Mit der Poincaré-Ungleichung (Lemma 4.1) folgt dann $B(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq c_0\|u\|^2_{W^{1,2}}$, also ist $B(\cdot,\cdot)$ koerziv und wegen $B(u,v) \leq C\|u\|_{W^{1,2}}\ \|v\|_{W^{1,2}}$ auch beschränkt.
Es gilt $f \in (W^{1,2}(\Omega))^*$ und somit existiert nach dem Satz von Lax-Milgram (vgl. [Alt99], Satz 4.3) genau ein $u \in W$ mit $B(u,v) = f[v]$ für alle $v \in W$, d.h.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = f[v] \quad \text{für jedes } v \in W. \tag{4.6}$$

Sei nun $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$; wir definieren $v := \varphi - \fint_\Omega \varphi$. Dann ist $v \in W$ und somit wegen (4.6) und der Voraussetzung $f[const] = 0$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = f[v] = f[\varphi] - f[\fint_\Omega \varphi] = f[\varphi] + 0.$$

Zur Abschätzung testen wir die PDE mit u selbst, wobei wir $\int_\Omega u = 0$ beachten, dann gilt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u = f[u] \leq \|f\|_{(W^{1,2}(\Omega))^*}\ \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Wegen Ω zusammenhängend und $\int_\Omega u = 0$ gilt die Poincaré-Ungleichung, Lemma 4.1, und es folgt

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega, n)\|f\|_{(W^{1,2}(\Omega))^*}\ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wir erhalten also

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega, n)\|f\|_{(W^{1,2}(\Omega))^*}$$

und somit wiederum durch die Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, n)\|f\|_{(W^{1,2}(\Omega))^*}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

4.15 Bemerkung
Insbesondere gilt für $g \in L^2$, dass eine Lösung des homogenen Neumman-Randwertproblems

$$\triangle u = g$$

dann und nur dann existiert, wenn $\int_\Omega g = 0$. Wir erhalten für eine Lösung u mit $\int_\Omega u = 0$ die Abschätzung

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(\Omega, n)\ \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ein klassisches Resultat über höhere Regularität für sogennante sehr schwach harmonischen Funktionen liefert das folgende

4.16 Lemma (Lemma von Weyl)
(vgl. z.B. [Jos98], Korollar 1.2.1, Seite 19)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gelte

$$\int_\Omega u(x)\ \triangle\varphi(x) = 0.$$

Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$ und $\triangle u = 0$.

4.17 Lemma (Cauchy-Abschätzungen)
(vgl. [GT83], Theorem 2.10)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet und $u \in C^\infty(\Omega)$ harmonisch, d.h. $\triangle u = 0$ in Ω. Dann existiert für jeden Multiindex α mit $k := |\alpha|$ eine Konstante $C = C(n,k)$, so dass für alle $x_0 \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset \Omega$ gilt

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \le \frac{C(n,k)}{r^{n+k}}\ \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

4.18 Theorem (Friedrichs-Regularität für Dirichlet-Randbedingungen)
(vgl. [GT83], Theorem 8.13, Seite 187f.)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$, $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $f \in W^{k-2,2}(\Omega)$, $k \ge 2$ und es gelte

$$\triangle u = f \quad \text{schwach in } \Omega,$$

d.h. es gelte

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\ \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann ist $u \in W^{k,2}_{loc}(\Omega)$, es gilt

$$\triangle u(x) = f(x), \quad \text{für fast alle } x \in \Omega,$$

und für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$ existiert ein $C = C(\Omega,\Omega',k,n)$ mit

$$\|u\|_{W^{k,2}(\Omega')} \le C\left(\|f\|_{W^{k-2,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Existiert außerdem ein $\psi \in W^{k,2}(\Omega)$, so dass $u-\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (also schwach $u = \psi$ auf $\partial\Omega$), dann ist $u \in W^{k,2}(\Omega)$ und es existiert ein $C = C(\Omega,k,n)$ mit

$$\|u\|_{W^{k,2}(\Omega)} \le C\left(\|f\|_{W^{k-2,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{W^{k,2}(\Omega)}\right).$$

Ein ähnliches Ergebnis für homogene Neumann-Randdaten liefert das folgende

4.19 Theorem (Existenz und Regularität für Lösungen mit homogenen Neumann-Randdaten)
(vgl. [Weh04], Chapter 1, Theorem 1.5, S. 20; [Tay96], Chapter 5, Proposition 7.4; [Fol76], Theorem 7.29)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^\infty$ mit der äußeren Einheitsnormalen ν, $k \ge 0$ und $f \in W^{k,2}(\Omega)$. Dann existiert eine Lösung $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ von

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial\nu} u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.7}$$

also

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = \int f\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

dann und nur dann, wenn $\int_\Omega f = 0$. Weiterhin existiert eine Konstante $C = C(\Omega,n,k)$, so dass

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \le C(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.8}$$

Beweisskizze. Die Existenz einer Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von (4.7) folgt aus Lemma 4.14. Man muss also nur die Regularität von u zeigen. Dabei folgen wir der Darstellung des Beweises in [Fol76], Abschnitt 7F: Wegen der Randregularität von Ω reicht es, die folgende Behauptung für jedes elliptische $a_{ij} \in C^\infty(\overline{B_r(0)^+})$, $r > 0$ zu zeigen. Dabei ist $B_r(0)^+ = B_r(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$.

★ *Sei $r>0$ und $f\in W^{k,r}(B_r(0)^+)$. Sei $X(B_r(0)^+)$ der Raum aller Abbildungen $v\in W^{1,2}(B_r(0)^+)$, so dass es ein $\rho<r$ gibt, für das $v=0$ punktweise fast überall in $B_r(0)^+\backslash B_\rho(0)^+$. Gilt für $u\in W^{1,2}(B_r(0)^+)$, dass*

$$D(u,v):=\int_{B_r(0)^+} a_{ij}\ \partial_i u\ \partial_j v=\int_{B_r(0)^+} f\ v \quad \textit{für alle } v\in X(B_r(0)^+), \tag{4.9}$$

so gilt für jedes $\rho<r$, dass $u\in W^{k+2,2}(B_\rho(0)^+)$, und es existiert eine Konstante $C(\rho,r,k)>0$, so dass

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(B_\rho(0)^+)}\le C(\rho,r,k)(\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)}+\|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}). \tag{4.10}$$

Durch Testen von (4.7) mit $\varphi=u$ erhält man

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\le\|f\|_{L^2(\Omega)}\ \|u\|_{L^2(\Omega)}\le\frac{1}{2}(\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Daraus folgt $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\le C(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)})$. Also impliziert (4.10) die Abschätzung (4.8).
Den Beweis der obigen Behauptung folgt hauptsächlich aus der folgenden Ungleichung:

★ ★ *Ist $\rho<r$, $j\le k+1$ und γ ein Multiindex*[6] *mit $|\gamma|=j$ und $\gamma_n=0$, so ist $\partial^\gamma u\in W^{1,2}(B_\rho(0)^+)$ und es existiert eine Konstante $C(\rho,r,j)$, so dass*

$$\|\partial^\gamma u\|_{W^{1,2}(B^+_\rho(0))}\le C(\rho,r,j)(\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)}+\|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}). \tag{4.11}$$

Wir führen eine Induktion nach j durch. Der Fall $j=0$ ist trivial. Sei also die Behauptung wahr für alle $0,\dots,j-1$. Wir wählen σ und $\tau>0$, so dass $\rho<\sigma<\tau<r$. Mit der Induktionsvoraussetzung für ρ ersetzt durch τ erhalten wir $\partial^\delta u\in W^{1,2}(B^+_\tau(0))$ für alle Multiindizes δ mit $|\delta|\le j-1$ und $\delta_n=0$ und die Abschätzung

$$\|\partial^\delta u\|_{W^{1,2}(B_\tau(0)^+)}\le C(\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)}+\|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}). \tag{4.12}$$

Dabei wählen wir C als die größte Konstante aus der Induktionsbehauptung für $1,\dots,j-1$ für ρ durch τ ersetzt. Also hängt C nur von j, r und ρ ab, da wir τ in Abhängigkeit von ρ und r gewählt haben.
Nun fixieren wir ein $\eta\in C_0^\infty(B_\sigma(0))$ mit $\eta\equiv1$ in $B_\rho(0)$. Für einen Multiindex γ mit $|\gamma|=j$ und $\gamma_n=0$ wollen wir den Differenzenquotien $\triangle^\gamma_H(\eta u)$ betrachten. Für $|H|<\tau-\sigma$ ist $\triangle^\gamma_H(\eta u)\in X(B^+_\tau(0))$. Wir wählen ein $i<n$, so dass $\gamma_i\neq0$, und zerlegen den Differenzenquotient $\triangle^\gamma_H$ in $\triangle^\gamma_H=\triangle^i_h\triangle^{\gamma'}_{H'}$. Wir wollen jetzt die folgende Ungleichung zeigen:

$$|D(v,\triangle^\gamma_H(\eta u))|\le C(\rho,j)\|v\|_{W^{1,2}(B_\tau(0)^+)}\ (\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)}+\|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)})\quad \text{für alle } v\in X(B_\tau(0)^+). \tag{4.13}$$

Dazu definieren wir für Abbildungen $\Phi,\varphi:B_r(0)^+\to\mathbb{R}$ den Operator

$$[\Phi,\triangle^\gamma_H]\varphi:=\Phi\ \triangle^\gamma_H\varphi-\triangle^\gamma_H(\Phi\varphi),$$

und bezeichnen mit (Φ,φ) das $L^2(B_r(0)^+)$-Skalarprodukt

$$(\Phi,\varphi):=\int_{B_r(0)^+}\Phi(x)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x.$$

Mit diesen Abkürzungen berechnet man

$$\begin{aligned}D(v,\triangle^\gamma_H(\eta u))&\overset{(4.9)}{=}(\partial^\alpha v,\ a_{\alpha\beta}\ \partial^\beta(\triangle^\gamma_H(\eta u)))\\&=(\partial^\alpha v,\ \triangle^\gamma_H(a_{\alpha\beta}\ \partial^\beta(\eta u)))+\underbrace{(\partial^\alpha v,\ [a_{\alpha\beta},\triangle^\gamma_H]\partial^\beta(\eta u))}_{E_1}\end{aligned}$$

[6] Für einen Multiindex $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n$ setzen wir $|\gamma|:=\sum_{i=1}^n\gamma_i$. Für ein $h\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ und eine Abbildung $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ setzen wir den Differenzenquotienten $\triangle^l_hf:=\frac{f(\cdot+he_l)-f(\cdot)}{h}$, $1\le l\le n$, wobei e_l der l-te Einheitsvektor von $\mathbb{R}^n$ sei. Für $\tilde H=(H_1,\dots,H_q)\in(\mathbb{R}\backslash\{0\})^q$ definieren wir $(\triangle^l_{\tilde H}f)^q=\triangle^l_{H_1}\dots\triangle^l_{H_q}f$. Hierbei besagt diese Schreibweise die Hintereinanderausführung der Differenzenquotienten.
Mit dieser Notation definieren wir $\triangle^\gamma_Hf$ für ein $H=(\tilde H_1,\dots,\tilde H_n)$, wobei $\tilde H_l\in(\mathbb{R}\backslash\{0\})^{\gamma_l}$ für alle $1\le l\le n$

$$\triangle^\gamma_Hf:=(\triangle^1_{\tilde H_1})^{\gamma_1}\dots(\triangle^n_{\tilde H_n})^{\gamma_n}f.$$

$$
\begin{aligned}
&= (\partial^\alpha v, \triangle_H^\gamma(a_{\alpha\beta}\ \eta\ \partial^\beta u)) + E_1 + \underbrace{(\partial^\alpha v, \triangle_H^\gamma(a_{\alpha\beta}((\partial^\beta \eta)u)))}_{E_2} \\
&= (-1)^j(\eta\ \triangle_{-H}^\gamma \partial^\alpha v,\ a_{\alpha\beta}\partial^\beta u) + E_1 + E_2 \\
&= (-1)^j(\partial^\alpha(\eta\ \triangle_{-H}^\gamma v),\ a_{\alpha\beta}\partial^\beta u) + E_1 + E_2 + \underbrace{-(-1)^j((\partial^\alpha \eta)\ \triangle_{-H}^\gamma v,\ a_{\alpha\beta}\partial^\beta u)}_{E_3} \\
&= (-1)^j D(\eta\ \triangle_{-H}^\gamma v,\ u) + E_1 + E_2 + E_3 \\
&\overset{(4.9)}{=} \underbrace{(-1)^j(\eta\ \triangle_{-H}^\gamma v, f)}_{E_4} + E_1 + E_2 + E_3 \\
&= E_1 + E_2 + E_3 + E_4.
\end{aligned}
$$

Nun zeigen wir die Abschätzung (4.13) für $E_1, \ldots, E_4$. Zu E_1 betrachten wir zunächst folgende Behauptung für ein festes $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ein $1 \le l \le n$ und ein $E \subset\subset \mathbb{R}^n$

$$\lim_{h\to 0} \|\Phi(\cdot + he_l)\triangle_h^l w - \Phi(\cdot)\triangle_h^l w\|_{L^2(E)} = 0 \quad \text{für alle } w \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Um dieses Ergebnis zu beweisen, approximiert man w durch $w_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. und rechnet dann für $|h| \ll 1$

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(\cdot + he_l)\triangle_h^l w \quad &- \quad \Phi(\cdot)\triangle_h^l w\|_{L^2(E)} = \|\Phi(\cdot + he_l) - \Phi(\cdot))\triangle_h^l w\|_{L^2(E)} \\
&\le \quad \|(\Phi(\cdot + he_l) - \Phi(\cdot))\triangle_h^l(w - w_m)\|_{L^2(E)} + \|(\Phi(\cdot + he_l) - \Phi(\cdot))\triangle_h^l w_m\|_{L^2(E)} \\
&= \quad \|(\triangle_h^l \Phi)(w - w_m + w_m(\cdot + he_l) - w(\cdot + he_l))\|_{L^2(E)} + \|(\Phi(\cdot + he_l) - \Phi(\cdot))\triangle_h^l w_m\|_{L^2(E)} \\
&\le \quad 4\|\partial^l \Phi\|_{L^\infty(B_1(E))}\ \|w - w_m\|_{L^2(B_1(E))} + \|\Phi(\cdot + he_l) - \Phi\|_{L^\infty(E)}\|\triangle_h^l w_m\|_{L^2(E)}.
\end{aligned}
$$

Ist ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählt man zunächst ein $m \gg 1$, so dass $\|w - w_m\|_{L^2(B_1(E))} \le \frac{\varepsilon}{8\|D\Phi\|_{L^\infty(B_1(E))}}$. Danach wird h so klein gewählt, dass $\|\triangle_h^l w_m\|_{L^2(E)} \le 2\|\partial^l w_m\|_{L^2(E)}$ und $\|\Phi(\cdot + h) - \Phi(\cdot)\|_{L^\infty(E)} \le \frac{\varepsilon}{4\|\partial^l w_m\|_{L^2(E)}}$. Dann erhält man $\|\Phi(\cdot + he_l)\triangle_h^l w - \Phi(\cdot)\triangle_h^l w\|_{L^2(E)} \le \varepsilon$ und die Behauptung ist gezeigt.
Wir beachten nun, dass $\Phi\triangle_h^l w - \triangle_h^l(\Phi w) = \Phi\triangle_h^l w - \Phi(\cdot + he_l)\triangle_h^l w - (\triangle_h^l \Phi)w$ und benutzen dann die obige Technik, um zu schließen, dass für alle $|H| \ll 1$

$$\|[a_{\alpha\beta}, \triangle_H^\gamma]\partial^\beta(\eta u)\|_{L^2(B_r(0)^+)} \le C(a_{ij}) \sum_{\substack{|\gamma'|<|\gamma| \\ \gamma'_n=0}} \|\partial^{\gamma'}(\eta u)\|_{W^{1,2}(B_\tau(0)^+)},$$

wobei man beachtet, dass η eine Abschneidefunktion in $B_\sigma(0)$ ist und sich die Differenzenquotienten $\triangle_H^\gamma$ nur in Richtung $e_1, \ldots, e_{n-1}$ bewegen.
Daraus ergibt sich für E_1 die Abschätzung für alle $|H| << 1$

$$
\begin{aligned}
|E_1| \quad &\le \quad C(a_{ij})\ \|v\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)} \sum_{\substack{|\gamma'|<|\gamma| \\ \gamma'_n=0}} \|\partial^{\gamma'}(\eta u)\|_{W^{1,2}(B_\tau(0)^+)} \\
&\overset{(4.12)}{\le} \quad C(a_{\alpha,\beta}, \eta)\ \|v\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}\ (\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)} + \|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}).
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

Unter Beachtung, dass man wegen $|\gamma| = j$ für Multiinidzes $|\gamma'| < |\gamma|$ mit $\gamma'_n = 0$ die Induktionsvoraussetzung (4.12) anwenden kann, erhält man für E_2

$$
\begin{aligned}
|E_2| \quad &\le \quad C(a_{ij}, \eta)\|v\|_{W^{1,2}} \sum_{\substack{|\gamma'|<|\gamma| \\ \gamma'_n=0}} \|\partial^{\gamma'} u\|_{W^{1,2}(B_\tau(0)^+)} \\
&\overset{(4.12)}{\le} \quad C(a_{\alpha,\beta}, \eta)\ \|v\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}\ (\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)} + \|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}).
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Dabei benutzen wir, dass $\|\partial^\gamma u\|_{L^2} \leq \sum_{\substack{|\gamma'|<|\gamma| \\ \gamma'_n=0}} \|\partial^{\gamma'} u\|_{W^{1,2}}$. Durch Überwälzen des Differenzenquotienten erhalten wir für E_3

$$\begin{aligned} |E_3| &= \left|(\triangle^i_{-h} v, \triangle^{\gamma'}_{H'}(a_{\alpha\beta})(\partial^\alpha \eta)\partial^\beta u)\right| \\ &\overset{(4.12)}{\leq} C(a_{\alpha,\beta}, \eta)\ \|v\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}\ (\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)} + \|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Schließlich erhalten wir für E_4, wobei wir $|\gamma| = j \leq k+1$ benutzen

$$\begin{aligned} |E_4| &\leq (\triangle^i_{-h} v, \triangle^{\gamma'}_{-H'}(\eta f)) \\ &\leq C(\eta)\|v\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}\ \|f\|_{W^{|\gamma|-1,2}(B_r(0)^+)} \\ &\leq C(\eta)\|v\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Aus (4.14), (4.16), (4.16) und (4.17) ergibt sich (4.13).Setzen wir in (4.13) $v = \triangle^\gamma_H(\eta u) \in X(B_r(0)^+)$, so erhalten wir mit der Elliptizität von a_{ij}

$$\begin{aligned} \|\nabla(\triangle^\gamma_H(\eta u))\|^2_{L^2(B_\tau(0)^+)} &\overset{(E)}{\leq} C|D(\triangle^\gamma_H(\eta u), \triangle^\gamma_H(\eta u))| \\ &\overset{(4.13)}{\leq} C(a_{\alpha,\beta}, \eta)\|\triangle^\gamma_H(\eta u)\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}\ (\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)} + \|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}). \end{aligned}$$

Nun gilt für alle $g \in W^{1,2}$

$$\|g\|^2_{W^{1,2}} \leq C(\|\nabla g\|^2_{L^2} + \|g\|^2_{L^2}) \leq (\|\nabla g\|^2_{L^2} + \|g\|_{L^2}\ \|g\|_{W^{1,2}}).$$

Mit dieser Rechnung erhalten wir

$$\|\triangle^\gamma_H(\eta u)\|^2_{W^{1,2}(B_\tau(0)^+)} \leq C(a_{\alpha\beta}, \eta)\|\triangle^\gamma_H(\eta u)\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}\ (\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)} + \|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)} + \|\triangle^\gamma_H(\eta u)\|_{L^2}).$$

Weiter haben wir für alle $|H| \ll 1$

$$\begin{aligned} \|\triangle^\gamma_H(\eta u)\|_{L^2(B_\tau(0)^+} &\leq 2\|\partial^{\gamma'}(\eta u)\|_{W^{1,2}(B_\tau(0)^+)} \\ &\overset{(4.12)}{\leq} C(\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)} + \|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}). \end{aligned}$$

Deshalb folgt die Abschätzung

$$\|\triangle^\gamma_H(\eta u)\|^2_{W^{1,2}(B_\tau(0)^+)} \leq C(a_{\alpha\beta}, \eta)\|\triangle^\gamma_H(\eta u)\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}\ (\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)} + \|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}),$$

und somit

$$\|\triangle^\gamma_H(\eta u)\|_{W^{1,2}(B_\tau(0)^+)} \leq C(a_{\alpha\beta}, \eta)(\|f\|_{W^{k,2}(B_r(0)^+)} + \|u\|_{W^{1,2}(B_r(0)^+)}).$$

Mit dem Satz von Rellich erhält man dann die $L^2(B_\tau(0)^+)$-Konvergenz von $\triangle^\gamma_H(\eta u)$ und wegen $\eta \equiv 1$ auf $B_\rho(0)$ und der Unterhalbstetigkeit der Norm bezüglich der schwachen $W^{1,2}$-Konvergenz erhalten wir die Behauptung (4.11).

Um die volle $W^{k+2,2}$-Norm von u abzuschätzen, benutzt man den folgenden Gedanken

$$\partial^{nn} u = \frac{1}{a_{nn}}\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial^\alpha a_{\alpha\beta}\ \partial^\beta u + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ (\alpha,\beta)\neq(n,n)}}^{n} a_{\alpha\beta}\partial^{\alpha\beta}\tilde{u}\Big).$$

Dabei beachtet man, dass wegen der Elliptizität $\frac{1}{a_{nn}} \in C^\infty(\overline{B_r(0)^+})$. ||

4.4. div und curl für Sobolevfunktionen

In diesem Unterabschnitt betrachten wir einige Ergebnisse über den schwachen Divergenz- und Rotationsoperator.

4.20 Lemma (Div und Curl: Produktregel und Vertauschung)
Seien $u, v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$, für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt schwach

(a) $\operatorname{div}(\nabla u\ v) = \operatorname{curl}(\nabla^\perp u\ v)$ *in* Ω *und*

(b) $\operatorname{div}(\nabla^\perp u\ v) = \nabla^\perp u \nabla v$ *in* Ω.

Beweis. (a) Die Behauptung folgt sofort aus der folgenden Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u\ v \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega \partial_x u\ v\ \partial_x\varphi + \partial_y u\ v\ \partial_y\varphi = \int_\Omega \nabla^\perp u\ v \cdot \nabla^\perp\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

(b) Sei zunächst $u, v \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt mit partieller Integration und dem Satz von Schwarz

$$\begin{aligned}
\int \nabla^\perp u\ v \cdot \nabla\varphi &= \int_\Omega -\partial_y u\ v\ \partial_x\varphi + \partial_x u\ v\ \partial_y\varphi \\
&= -\int_\Omega (\partial_x(-\partial_y u\ v) + \partial_y(\partial_x u\ v))\,\varphi \\
&= -\int_\Omega (-\partial_{xy}u\ v - \partial_y u\ \partial_x v + \partial_{yx}u\ v + \partial_x u\ \partial_y v)\,\varphi \\
&= -\int_\Omega (-\partial_y u\ \partial_x v + \partial_x u\ \partial_y v)\,\varphi \\
&= -\int_\Omega \nabla^\perp u \cdot \nabla v\ \varphi,
\end{aligned}$$

womit die PDE

$$\operatorname{div}\ \nabla^\perp u\ v = \nabla^\perp u \cdot \nabla v$$

für $u, v \in C^\infty$ bewiesen ist.
Sei $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$, $v \in C^\infty$. Dann existiert $u_n \in C^\infty$ mit $\|u_n - u\|_{W^{1,2}}, \le \frac{1}{n}$.
Es gilt dann für $\varphi \in C_0^\infty$ mit der Hölder-Ungleichung

$$\left|\int_\Omega \nabla^\perp u\ v \cdot \nabla\varphi + \nabla^\perp u \cdot \nabla v\ \varphi\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \Big|\int_\Omega \underbrace{\nabla^\perp u_n\ v\ \nabla\varphi + \nabla^\perp u_n\ \nabla v\ \varphi}_{=0} - \nabla^\perp(u_n - u)\ v\ \nabla\varphi + \nabla^\perp(u - u_n)\ \nabla v\ \varphi\Big| \\
&\le (\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla\varphi\|_{L^\infty})\ \|\nabla(u - u_n)\|_{L^2}\ (\|v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2}) \\
&\le C\frac{1}{n}\,(\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla\varphi\|_{L^\infty})\,\|v\|_{W^{1,2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

womit die Behauptung auch für $u \in W^{1,2}, v \in C^\infty$ bewiesen ist.
Zum Schluss seien noch $u, v \in W^{1,2}$ und wir approximieren v durch v_n mit $\|v - v_n\|_{W^{1,2}} \le \frac{1}{n}$. Analog zu der Gleichung oben folgt nun

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \nabla^\perp u\ v \cdot \nabla\varphi + \nabla^\perp u \cdot \nabla v\ \varphi\right| &\le (\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla\varphi\|_{L^\infty})\ \|\nabla(v - v_n)\|_{L^2}\ (\|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}) \\
&\le C\frac{1}{n}\,(\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla\varphi\|_{L^\infty})\,\|u\|_{W^{1,2}} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

womit schließlich auch die Behauptung selbst bewiesen ist □

4.21 Lemma (Div-Curl-Rechnung im $\mathbb{R}^n$)
Sei $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $v \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ und es gelte $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Weiterhin sei $\operatorname{div}\ v = 0$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} v\nabla\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt

$$\operatorname{div}(vu) = v\nabla u, \quad \text{im schwachen Sinne in } \mathbb{R}^n,$$

das heißt

$$\int_{\mathbb{R}^n} v\ u\ \nabla\varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} v\nabla u\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Angenommen $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\nabla(u\varphi) = (\nabla u)\varphi + u(\nabla\varphi),$$

also

$$u(\nabla\varphi) = \nabla(u\varphi) - (\nabla u)\varphi.$$

Damit folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v \cdot \nabla\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} v\ \nabla(u\varphi) - \int_{\mathbb{R}^n} v\ (\nabla u)\ \varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} v\ (\nabla u)\ \varphi,$$

wegen $\operatorname{div}\ v = 0$ und $u\varphi \in C_0^\infty$.
Sei nun $u \in W^{1,p}_{loc}$. Wir wählen ein $\varphi \in C_0^\infty$ beliebig, aber fest. Dann ist $u \in W^{1,p}$ und $v \in L^q$ auf einem Ball, der $\operatorname{supp}\ \varphi$ kompakt enthält. Wir betrachten im folgenden alle Funktionenräume über diesem Ball (bzw. sei ohne Einschränkung $u \in W^{1,p}$, $v \in L^q$).Dann existiert eine Folge $u_n \in C^\infty$, so dass $\|u - u_n\|_{W^{1,p}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Dann gilt mit der obigen Rechnung

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} v\ u\ \nabla\varphi + v\ \nabla u\ \varphi\right| &= \left|\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} v\ u_n\ \nabla\varphi + v\ \nabla u_n\ \varphi}_{=0} + \int_{\mathbb{R}^n} v\ (u-u_n)\ \nabla\varphi + v\ \nabla(u-u_n)\ \varphi\right| \\
&\leq \|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\ \|v\|_{L^q}\ \|u-u_n\|_{L^p} + \|\varphi\|_{L^\infty}\ \|v\|_{L^q}\ \|\nabla(u-u_n)\|_{L^p} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

und damit ist die Behauptung gezeigt. □

4.22 Proposition (Integrale werden 0)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^\infty$.

(i) Falls $\Omega = D^2$, sei $f \in W^{1,2}(D^2)$, $g \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\langle \nu, g\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$, wobei $\nu = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ die äußere Einheitsnormale an D^2 ist.
Dann gilt

$$\int_{D^2} \operatorname{div}(fg) = 0.$$

(ii) Falls $n = 2$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $v \in W^{1,2}(\Omega)$, dann gilt[7]

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla^\perp v = -\int_\Omega \nabla^\perp u \cdot \nabla v = 0.$$

(iii) Sei $\psi \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(\Omega)$, dann gilt

$$\int_\Omega \triangle\psi = 0.$$

[7] Dies bedeutet, dass $\operatorname{div}(\nabla^\perp v) = 0$ bzw. $\operatorname{curl}(\nabla v) = 0$ im schwachen Sinn in Ω.

Beweis. (*i*) Wegen $f, g \in W^{1,2}$ ist $\operatorname{div}(f \cdot g)$ punktweise fast überall definiert, und es gilt

$$\operatorname{div}(f \cdot g) = \langle \nabla f, g \rangle + f \cdot \operatorname{div} g \in L^1(D^2),$$

also

$$\int_{D^2} \operatorname{div}(fg) = \int_{D^2} \nabla f \ g + \int_{D^2} f \ \operatorname{div} g.$$

Nun existiert eine Approximation $f_m \xrightarrow{m\to\infty} f$ in $W^{1,2}(D^2)$, $f_m \in C^\infty(\overline{D^2})$. (Wir beachten, dass $\partial D^2 \in C^\infty$.) Weiter existiert ein $g_m \xrightarrow{m\to\infty} g$ in $W^{1,2}$ mit $g_m \in C^\infty(\overline{D^2}, \mathbb{R}^2)$. Wegen $\langle \nu, g \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ existiert allerdings auch ein $\varphi_m \xrightarrow{m\to\infty} \langle \nu, g \rangle$ mit $\varphi_m \in C_0^\infty(D^2)$. Nun gilt

$$\int_{D^2} f \operatorname{div} g = \int_{D^2} (f - f_m) \ \operatorname{div} g + \int_{D^2} f_m \ \operatorname{div}(g - g_m) + \int_{D^2} f_m \ \operatorname{div} g_m,$$

wobei die ersten beiden Integrale wegen der $W^{1,2}$-Konvergenzen gegen Null konvergieren.
Mit dem klassischem Gaußschen Integralsatz, Theorem 4.2, und wegen $\varphi_m = 0$ auf dem Rand ∂D^2 folgt

$$\begin{aligned}
\int_{D^2} f_m \ \operatorname{div} g_m &= \int_{\partial D^2} f_m \ \langle g_m, \nu \rangle - \int_{D^2} \nabla f_m \ g_m \\
&= \int_{\partial D^2} f_m(\langle g_m, \nu \rangle - \varphi_m) + \int_{\partial D^2} f_m 0 - \int_{D^2} \nabla (f_m - f) \ g_m - \int_{D^2} \nabla f (g_m - g) - \int_{D^2} \nabla f \ g \\
&\xrightarrow{m\to\infty} - \int_{D^2} \nabla f \ g,
\end{aligned}$$

denn die letzten beiden Terme konvergieren wegen den Approximationen gegen 0 und nach Lemma 4.4 gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial D^2} f_m(\langle g_m, x \rangle - \varphi_m) \right| &\leq C \| f_m(\langle g_m, x \rangle - \varphi_m) \|_{W^{1,1}(D^2)} \\
&\leq C(\|f_m\|_{L^2} \ \|\langle g_m, \nu \rangle - \varphi_m\|_{L^2} + \|\nabla f_m\|_{L^2} \ \|\langle g_m, \nu \rangle - \varphi_m\|_{L^2} \\
&\qquad + \|f_m\|_{L^2} \|\nabla(\langle g_m, \nu \rangle - \varphi_m)\|_{L^2}) \\
&\leq C \|f_m\|_{W^{1,2}} \ \|\langle g_m, \nu \rangle - \varphi_m\|_{W^{1,2}} \\
&\leq C \|f\|_{W^{1,2}} \ (\|\langle g_m, \nu \rangle - \langle \nu, g \rangle\|_{W^{1,2}} + \|\langle \nu, g \rangle - \varphi_m\|_{W^{1,2}}) \\
&\leq C \|f\|_{W^{1,2}} \ (\|g_m - g\|_{W^{1,2}} + \|\langle \nu, g \rangle - \varphi_m\|_{W^{1,2}}) \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich also

$$\left| \int_{D^2} f \ \operatorname{div} g + \int_{D^2} \nabla f \ g \right| = o(1) \quad \text{für } m \to \infty,$$

und damit folgt

$$\int_{D^2} f \operatorname{div} g = - \int_{D^2} \nabla f \ g$$

bzw.

$$\int_{D^2} \operatorname{div}(fg) = 0.$$

(*ii*) Schritt 1:
Zunächst seien $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$.
Zunächst rechnen man einfach nach, dass $\nabla u \cdot \nabla^\perp v = -\nabla^\perp u \cdot \nabla v$. Dann folgt mit partieller Integration (Korollar 4.3)

$$-\int_\Omega \nabla^\perp u \cdot \nabla v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla^\perp v \overset{K.4.3}{=} -\int_\Omega (-\partial_x \ \partial_y v + \partial_y \ \partial_x v) u.$$

Schritt 2:
Nun approximieren wir $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ durch $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ und $v \in W^{1,2}(\Omega)$ durch $v_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (möglich, da $\partial\Omega$ hinreichend glatt).
Dann gilt nach Schritt 1

$$\int_\Omega \nabla u_m \ \nabla^\perp v_m = 0$$

Damit berechnen wir für ein beliebiges fixiertes $k > 0$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \nabla u_k \ \nabla^\perp v\right| &\leq \left|\int_\Omega \nabla u_k \ \nabla^\perp (v_m - v)\right| + 0 \\ &\leq \|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} \ \|\nabla^\perp (v_m - v)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\xrightarrow{m\to\infty} 0,\end{aligned}$$

also

$$\int_\Omega \nabla u_k \ \nabla^\perp v = 0.$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla^\perp v\right| &\leq \left|\int_\Omega \nabla (u - u_k) \ \nabla^\perp v\right| + 0 \\ &\leq \|\nabla (u - u_k)\|_{L^2(\Omega)} \ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 0,\end{aligned}$$

also folgt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla^\perp v = 0.$$

Analog (oder wegen $\nabla^\perp u \cdot \nabla v = -\nabla u \cdot \nabla^\perp v$) erhalten wir auch

$$\int_\Omega \nabla^\perp u \cdot \nabla v = 0.$$

(*iii*) Es gilt bekanntlich $1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ und $\nabla 1 = 0$, und somit gilt, wegen $\psi \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(\Omega)$

$$\int \triangle\psi \ \cdot 1 = -\int \nabla\psi \cdot \nabla 1 = 0$$

womit (*ii*) schon bewiesen ist. □

4.23 Proposition ($\int$ div $= 0$)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

(*i*) *Sei* $f \in W^{2,2}(\Omega)$ *und* $g \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(\Omega)$.
Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f \ \nabla g) = 0.$$

(*ii*) *Es gilt für alle* $f \in W^{1,2}(D^2)$, $\xi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)$

$$\int_{D^2} \operatorname{div}(f \nabla^\perp \xi) = 0.$$

Beweis. (*i*) Der Beweis folgt aus Lemma 4.10:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div}(f\nabla g) &= \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g + \int f \ \triangle g \\ &\overset{L.4.10}{=} -\int f \ \triangle g + \int_\Omega f \ \triangle g \\ &= 0,\end{aligned}$$

da
$$\operatorname{div}(f\ \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g\ + f\ \triangle g \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega.$$

(ii) Es gilt
$$\int_{D^2} \operatorname{div}(f\nabla^\perp \xi) = \int_{D^2} \nabla f \cdot \nabla^\perp \xi \overset{P.4.22}{=} 0.$$

□

4.5. Spezielle Approximationen in $W^{2,2}$

Bekanntermaßen entspricht für ein Gebiet $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand der Raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ den Abbildungen $W^{1,2}(\Omega)$ mit schwachen Nullrandwerten. Ebenso entspricht der Raum $W^{2,2}\cap W_0^{1,2}(\Omega)$ dem Raum von $W^{2,2}$-Abbildungen mit schwachen Nullrandwerten. Um Eigenschaften dieser Räume zu zeigen, ist es nützlich klassische Funktionenräume zu finden, welche dicht enthalten sind. Im Fall $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist dies $C_0^\infty(\Omega)$, welches bezüglich der $W^{1,2}$-Norm dicht ist. Im Falle $W^{2,2}\cap W_0^{1,2}(\Omega)$ ist zu erwarten, dass die Menge der Abbildungen $C^\infty(\overline{\Omega})$ mit Nullrandwerten auf $\partial\Omega$ dicht bezüglich der $W^{2,2}$-Norm liegt. Um dies zu zeigen, approximieren wir $f\in W^{2,2}\cap W_0^{1,2}(\Omega)$ zum Beispiel über Faltungen durch $g_m\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ in der $W^{2,2}$-Norm. Um nun die gewünschten Approximationen f_m zu erhalten, lösen wir

$$\begin{cases} \triangle f_m = \triangle g_m & \text{in } \Omega, \\ f_m = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und betrachten den Limes für $m\to\infty$.

4.24 Lemma (Approximationen für $\mathbf{W^{2,2}\cap W_0^{1,2}}$)
Sei $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^n$ offen, $\partial\Omega\in C^\infty$ und $f\in W^{2,2}\cap W_0^{1,2}(\Omega)$, dann existieren

$$g_m \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$
$$g_m \equiv 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega$$

mit $g_m \xrightarrow{m\to\infty} f$ in $W^{2,2}$.

Beweis. Da $f\in W^{2,2}(\Omega)$, existieren $f_m\in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $(\partial\Omega\in C^\infty)$
$$f_m \xrightarrow{m\to\infty} f \quad \text{in } W^{2,2}.$$

Wir wählen $g_m\in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass
$$\triangle g_m = \triangle f_m \quad \text{schwach in } \Omega. \tag{4.18}$$

Dies ist möglich, da $f_m\in C^\infty(\overline{\Omega})\subset L^2(\Omega)$.
Mit dem Satz von Friedrichs für das globale Dirichlet-Problem, Theorem 4.18, gilt dann
$$g_m \in C^\infty\cap W_0^{1,2}(\overline{\Omega})$$

Dann folgt (siehe z.B. [Alt99] Theorem A 6.6, Seite 249 und Lemma A 6.10, Seite 255), dass
$$g_m = 0 \quad \text{punktweise auf } \partial\Omega.$$

Weiterhin erhalten wir
$$\triangle(g_m - f) = \triangle g_m - \triangle f \overset{(4.18)}{=} \triangle(f_m - f) \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega.$$

Damit folgt (wir beachten, dass $f\in W^{2,2}\cap W_0^{1,2}(\Omega)$ und somit gültige Testfunktion)
$$\int_\Omega \nabla(g_m - f)\ \nabla(g_m - f) = -\int_\Omega \triangle(f_m - f)\ (g_m - f),$$

also gilt
$$\|\nabla(g_m - f)\|_{L^2}^2 \le \|\triangle(f_m - f)\|_{L^2}\ \|g_m - f\|_{L^2}.$$

Da $g_m - f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ sind die Voraussetzungen der POINCARÉ-Ungleichung, Lemma 4.1, erfüllt und als Konsequenz erhalten wir

$$\|\nabla(g_m - f)\|_{L^2}^2 \leq C\|\triangle(f_m - f)\|_{L^2}\ \|\nabla(g_m - f)\|_{L^2},$$

was wiederum

$$\|\nabla(g_m - f)\|_{L^2} \leq C\|\triangle(f_m - f)\|_{L^2} \leq C\|f_m - f\|_{W^{2,2}} \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

impliziert. Es ergibt sich folglich

$$g_m \xrightarrow{m\to\infty} f \quad \text{in } W^{1,2}(\Omega).$$

Um die $W^{2,2}$-Konvergenz zu erhalten, benutzen wir noch einmal den Satz von FRIEDRICHS, Theorem 4.18, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\|g_m - f\|_{W^{2,2}(\Omega)} &\leq C(\|\triangle(f_m - f)\|_{L^2} + \|g_m - f\|_{L^2})\\ &\leq C(\|f_m - f\|_{W^{2,2}} + \|g_m - f\|_{W^{1,2}})\\ &\xrightarrow{m\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$g_m \xrightarrow{m\to\infty} f \quad \text{in } W^{2,2}(\Omega).$$

und damit ist die Behauptung bewiesen. □

Mit der gleichen Idee beweisen wir ein ähnliches Resultat für Funktionen mit homogene Neumannrandwerten:

4.25 Lemma (Approximationen für $\mathbf{W}^{2,2}_{\mathrm{Neu}}$)
Sei $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$. Sei weiter $f \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(\Omega)$. Dann existieren $f_m \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(\Omega)$ mit $f_m \xrightarrow{m\to\infty} f$ in $W^{2,2}$. Ist $\int_\Omega f = 0$, so erhält man auch $\int_\Omega f_m = 0$.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\int_\Omega f = 0$:
Falls dies nämlich nicht der Fall ist, so setzen wir $g := f - \int_\Omega f$. Angenommen es existiert für g schon eine approximierende Folge $g_m \to g \in W^{2,2}(\Omega)$, $g_m \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(\Omega)$. Dann approximieren wir f durch $\varphi_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $\varphi_m \xrightarrow{m\to\infty} f$ in $W^{2,2}$ (möglich, da $\partial\Omega$ glatt) und setzen $f_m := g_m + \int_\Omega \varphi_m$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|f - f_m\|_{W^{2,2}(\Omega)} &\leq \|(f - \int_\Omega f) - g_m\|_{W^{2,2}} + \|\int_\Omega f - \int_\Omega \varphi_m\|_{W^{2,2}}\\ &\leq \|g - g_m\|_{W^{2,2}} - C\int_\Omega |f - \varphi_m|\\ &\xrightarrow{m\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Nun gilt $\nabla f_m = \nabla g_m$ und damit ist die Behauptung auch für f mit $\int_\Omega f \neq 0$ gezeigt.

Sei also $\int_\Omega f = 0$. Wir wählen $g_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g_m \xrightarrow{m\to\infty} g$ in $W^{2,2}$.
Insbesondere gilt dann

$$\int_\Omega \triangle g_m \to \int_\Omega \triangle f \overset{P.4.22}{=} 0. \tag{4.19}$$

Es existiert ein $f_m \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(\Omega)$, $\int_\Omega f_m = 0$, schwache Lösung von

$$\triangle f_m := \triangle g_m - \fint_\Omega \triangle g_m \quad \text{in } \Omega,$$

da $\int_\Omega \triangle g_m - \int_\Omega \fint_\Omega \triangle g_m = 0$ und da die rechte Seite $\triangle g_m - \fint_\Omega \triangle g_m \in L^2(\Omega)$ liegt.
Dann gilt zunächst mit dem Satz von FRIEDRICHS für homogene Neumannrandwerte, Theorem 4.19, da f_m,

$f \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(\Omega)$ und $\triangle(f_m - f) = \triangle g_m - \fint_\Omega g_m - \triangle f$, dann mit der POINCARÉ-Ungleichung (wir beachten: $\int_\Omega f = \int_\Omega f_m = 0$)

$$\begin{aligned}
\|f_m - f\|_{W^{2,2}} &\leq C(\|f_m - f\|_{L^2} + \|\triangle g_m - \int_\Omega \triangle g_m - \triangle g\|_{L^2}) \\
&\leq C(\|\nabla(f_m - f)\|_{L^2} + \|\triangle(g_m - f)\|_{L^2} + \int_\Omega |\triangle g_m|) \\
&\leq C(\|\nabla(f_m - f)\|_{L^2} + \|g_m - f\|_{W^{2,2}} + \int_\Omega |\triangle g_m|).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Nun testen wir die PDE

$$\triangle f_m - f = \triangle g_m - \triangle f - \fint_\Omega \triangle g_m \quad \text{in } \Omega$$

mit der Testfunktion $\varphi := f_m - f$ (geeignet, da die PDE schwach homogene Neumannrandwerte hat):

$$\begin{aligned}
\|\nabla(f_m - f)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \triangle(f_m - f)\ (f_m - f) \\
&= -\int \triangle(g_m - f - \fint_\Omega \triangle g_m)\ (f_m - f) \\
&\leq (\|g_m - f\|_{W^{2,2}} + C\int_\Omega |\triangle g_m|)\ \|f_m - f\|_{L^2},
\end{aligned}$$

also mit der POINCARÉ-Ungleichung

$$\|\nabla(f_m - f)\|_{L^2} \leq C(\|g_m - f\|_{W^{2,2}} + \int_\Omega |\triangle g_m|).$$

Damit folgt aus der Abschätzung (4.20) unter Benutzung von (4.19)

$$\begin{aligned}
\|f_m - f\|_{W^{2,2}(\Omega)} &\leq C(\|\nabla(f_m - f)\|_{L^2} + \int_\Omega |\triangle g_m| + \|g_m - f\|_{W^{2,2}}) \\
&\leq C(\|g_m - f\|_{W^{2,2}} + \int_\Omega |\triangle g_m|) \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Konvergenz gezeigt. □

4.6. Produktregeln für Sobolev-Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Produktregeln von SOBOLEV-Funktionen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die SOBOLEVeinbettung (für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand)

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega)$$

für $k \geq l$ und $k - \frac{n}{p} \geq l - \frac{n}{q}$ und die MORREY-Einbettung

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})$$

für $k > l$, $0 < \alpha < 1$ und $k - \frac{n}{p} \geq l + \alpha$. Hierbei ist $C^{l,\alpha}(\overline{\Omega})$ der Raum der l-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass für alle Multiindizes γ mit $|\gamma| \leq l$ gilt

$$\sup_{\substack{x,y\ \in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|\partial^\gamma f(x) - \partial^\gamma f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Insbesondere gilt für $n = 2$, $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
W^{k,2}(\Omega) &\hookrightarrow W^{k-1,4}(\Omega), \\
W^{k,1}(\Omega) &\hookrightarrow W^{k-1,2}(\Omega) \quad \text{und} \\
W^{2,2}(\Omega) &\hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

4.26 Proposition **($(W^{1,2}\cap L^\infty)\cdot(W^{1,2}\cap L^\infty)$, $\operatorname{supp}\subset\subset\Omega$)**
Seien u, $v\in W^{1,2}\cap L^\infty(\Omega)$ für ein Gebiet $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega\in C^\infty$ und es gelte weiter $\operatorname{supp}(v)\subset\subset\Omega$. Dann ist $u\cdot v\in W_0^{1,2}\cap L^\infty(\Omega)$.

Beweis. Da $\operatorname{supp}(v)\subset\subset\Omega$ lässt sich v durch Faltungen v_m so approximieren, dass $v_m\in C_0^\infty(\Omega)$ und (für den Faltungskern η)

$$|v_m(x)|\le\int_\Omega|\eta(y)||v(x+ty)|\le\|v\|_{L^\infty}C(\eta).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\nabla v\ u+v\ \nabla u-\nabla v_m\ u+v_m\ \nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\le \|\nabla(v-v_m)\|_{L^2}\ \|u\|_{L^\infty}+\|(v-v_m)\nabla u\|_{L^2}\\ &\xrightarrow{m\to\infty}0,\end{aligned}$$

denn $(v-v_m)\nabla u\xrightarrow{m\to\infty}0$ punktweise fast überall in Ω, da $v-v_m\xrightarrow{m\to\infty}0$ in L^2. Weiter gilt $|(v-v_m)\nabla u|\le 2C\ |v||\nabla u|\in L^2(\Omega)$ und somit folgt die Behaupung aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz. □

4.27 Lemma ($\mathbf{W^{1,1}\cdot(W^{1,2}\cap L^\infty)\subset W^{1,1}}$, $\mathbf{n=2}$)
Sei $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega\in C^\infty$. Sei weiter $f\in W^{1,1}(\Omega)$ und $g\in W^{1,2}\cap L^\infty$. Dann ist

$$f\cdot g\in W^{1,1}(\Omega).$$

Beweis. Angenommen es gilt schon

$$\nabla(fg)=\nabla f\ g+f\ \nabla g\quad\text{im Distributionssinn},$$

dann gilt offenbar, wegen $\nabla f\in L^1$, $g\in L^\infty$, $f\in W^{1,1}\subset L^2$ und $\nabla g\in L^2$, dass

$$\nabla(fg)\in L^1.$$

Weiter gilt für $f_m\xrightarrow{m\to\infty}f$, $f_m\in C^\infty$ (wir beachten, dass für $W^{1,2}\cdot C^\infty$ schon die Produktregel gilt) für alle $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}|\int_\Omega fg\nabla\varphi+\int_\Omega(\nabla f\ g+f\ \nabla g)\varphi| &\le\int|f-f_m||g||\nabla\varphi|+\int|\nabla(f-f_m)|\ |g|\ |\varphi|+\int|f-f_m||\nabla g||\varphi|\\ &\le C\|f-f_m\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}+\|\nabla(f-f_m)\|_{L^1}\ \|g\|_{L^\infty}\ \|\varphi\|_{L^\infty}\\ &\quad+\|f-f_m\|_{L^2}\ \|\nabla g\|_{L^2}\ \|\varphi\|_{L^\infty}\\ &\le C\|f-f_m\|_{W^{1,1}}(\|g\|_{L^\infty}+\|\nabla g\|_{L^2})(\|\varphi\|_{L^\infty}+\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\\ &\xrightarrow{m\to\infty}0,\end{aligned}$$

wobei wir die Einbettung $W^{1,1}(\Omega)\hookrightarrow L^2$ für $n=2$ benutzen. □

4.28 Lemma ($\mathbf{(W_0^{1,2}\cap W^{2,2})\cdot W^{1,2}\subset W_0^{1,2}}$, $\mathbf{n=2}$)
Sei $f\in W_0^{1,2}\cap W^{2,2}(D^2)$ und $g\in W^{1,2}(D^2)$. Dann ist $f\cdot g\in W_0^{1,2}(D^2)$.

Beweis. Wir wählen $g_m\in C^\infty$ mit $g_m\xrightarrow{m\to\infty}g$ in $W^{1,2}$.
Da $f\in W^{2,2}$ ist f insbesondere stetig, und somit gilt (vgl. z.B. [Alt99] Theorem A 6.6, Seite 249 und Lemma A 6.10, Seite 255)

$$f=0\quad\text{auf }\partial D^2$$

punktweise.
Da $g_m\in C^\infty(\overline{D^2})$, gilt somit

$$f\cdot g_m\equiv 0\quad\text{auf }\partial D^2$$

also gilt

$$f\cdot g_m\in W_0^{1,2}(D^2).$$

Weiter gilt dann

$$\begin{aligned}
\|fg_m - fg\|_{W^{1,2}} &\leq \|f\|_{L^\infty}\ \|g_m - g\|_{L^2} + \|f\|_{L^\infty}\ \|g_m - g\|_{W^{1,2}} + \|\nabla f\|_{L^4}\ \|g_m - g\|_{L^4} \\
&\leq C\|f\|_{W^{2,2}}\ \|g_m - g\|_{W^{1,2}} \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $fg_m \xrightarrow{m\to\infty} fg$ in $W^{1,2}$, und da $W_0^{1,2}$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{1,2}$ und $fg_m \in W_0^{1,2}$, gilt $fg \in W_0^{1,2}(D^2)$. □

4.29 Lemma (Multiplikation in $\mathbf{W^{2,2}}$, $\mathbf{W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}}$, $\mathbf{n=2}$)
Seien a, b in $W^{2,2}(\Omega)$ mit $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in C^\infty$. Dann gilt

$$a\cdot b \in W^{2,2}(\Omega).$$

Sind $a, b \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}$, so gilt auch

$$a\cdot b \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(\Omega).$$

Beweis. Es gilt nach SOBOLEVeinbettung und MORREY-Einbettung:

$$W^{2,2} \hookrightarrow C^{0,\alpha} \hookrightarrow L^\infty$$

stetig für $0 < \alpha < 1$ und

$$W^{2,2} \hookrightarrow W^{1,4}.$$

Dann gilt zunächst

$$\nabla(ab) = \nabla a \underbrace{b}_{L^\infty} + \underbrace{a}_{L^\infty} \nabla b \in L^2.$$

und

$$\partial_{ij}(ab) = \partial_{ij}a\ b + a\ \partial_{ij}b + \partial_i a\ \partial_j b + \partial_j a\ \partial_i b$$

im Distributionssinne, wie sich leicht durch Approximation von a durch $a_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ zeigen lässt. Dies impliziert

$$\|\partial_{ij}(ab)\|_{L^2} \leq \|\nabla^2 a\|_{L^2}\|b\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty}\|\nabla^2 b\|_{L^2} + 2\|\nabla a\|_{L^4}\ \|\nabla b\|_{L^4} < \infty.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.
Wir zeigen noch die Neumannrandwerte: Für $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ gilt (wir beachten, dass nach Lemma 4.10 auch $W^{2,2}$-Funktionen als Testfunktionen zugelassen sind)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(ab)\cdot\nabla\varphi &= \int \nabla a\cdot(b\nabla\varphi) + \int \nabla b\cdot(a\nabla\varphi) \\
&= \int \nabla a\cdot\nabla(b\varphi) + \int \nabla b\cdot\nabla(a\varphi) - \int \nabla a\cdot\nabla b\varphi - \int \nabla b\cdot\nabla a\varphi \\
&= -\int \triangle a\ b\varphi - \int \triangle b\ a\varphi - 2\int \nabla a\cdot\nabla b\varphi \\
&= -\int_\Omega \triangle(ab)\varphi.
\end{aligned}$$

Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung bewiesen. □

4.30 Lemma ($\mathbf{W^{1,2}\cdot W^{2,2} \subset W^{1,2}}$, $\mathbf{n=2}$)
Sei $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und sei weiter $f \in W^{1,2}(\Omega)$, $g \in W^{2,2}(\Omega)$.
Dann ist $fg \in W^{1,2}(\Omega)$.

Beweis. Es gilt punktweise

$$\nabla(fg) = (\nabla f)\ g + f\nabla g \in L^2,$$

da aus der MORREY-Einbettung $W^{2,2} \hookrightarrow C^{0,\alpha}$ für ein kleines $\alpha > 0$ folgt, dass $g \in L^\infty$ und man aus der SOBOLEV-Einbettung ∇g, $f \in W^{1,2} \subset L^4$ erhält. □

4.7. Schwache $W^{1,2}$-Randwerte bei homogenen Dirichlet- und Neumannranddaten

In diesem Abschnitt stellen wir zwei Ergebnisse zu Funktionen mit schwach homogenen DIRICHLET- bzw. NEUMANNranddaten vor: Für eine glatte Funktion $u: D^2 \to \mathbb{R}$ mit 0-Randwerten ist die Ableitung am Rand in Richtung einer Tangente konstant 0. Ein ähnliches Ergebnis wollen wir auch für schwache 0-Randwerte erhalten. Mit der gleichen Idee, zeigen wir dann, dass schwache homogene Neumannrandwerte nichts anderes bedeuten, als dass die Funktion $\langle \nabla f, \nu \rangle$ schwache 0-Randwerte annimmt - vorausgesetzt, dass diese Aussage sinnvoll ist, d.h. dass f mindestens in $W^{2,2}$ liegt, da schwache Randwerte von nur punktweise fast überall definierten L^2-Funktionen-Klassen keinen Sinn machen. Im folgenden bezeichnen wir mit

$$\nu(x,y) := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x,y \in \mathbb{R}^2$$

die äußere Einheitsnormale an D^2 und mit

$$\tau(x,y) := \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \quad x,y \in \mathbb{R}^2$$

die Einheitstangente gegen den Uhrzeigersinn an D^2.

4.31 Theorem (Gradient von $W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$-Abbildungen steht senkrecht auf Tangentialraum)
Sei $u \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)$. Dann ist $\langle \nabla^\perp u, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$.

Beweis. Sei zunächst $\underline{u \in C^\infty(\overline{D^2})}$, $u = 0$ auf ∂D^2.
Wir definieren die Kurve $c(t) := (\cos(t), \sin(t))^T$. Dann ist $c \in C^\infty((0,2\pi), \mathbb{R}^2)$ und es gilt

$$u(c(t)) \equiv 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Also gilt

$$0 \equiv \frac{d}{dt} u(c(t)) = -u_x \sin(t) + u_y \cos(t) = -\langle (\nabla^\perp u(\cos(t), \sin(t)), \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \rangle$$

für alle $t \in (0, 2\pi)$. Wegen der Stetigkeit von ∇u folgt dies auch für $t = 0$. Dann gilt für alle x, y mit $(x,y) \in \partial D^2$

$$\langle \nabla^\perp u, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rangle = 0.$$

Also gilt

$$\langle \nabla^\perp u, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rangle \in W_0^{1,2}(D^2).$$

Sei nun $\underline{u \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)}$.
Nach Lemma 4.24 existiert eine Approximation $u_m \in C^\infty(\overline{D^2})$ mit $u_m \xrightarrow{m \to \infty} u$ in $W^{2,2}$ und u_m punktweise gleich 0 auf ∂D^2. Somit gilt

$$\| \langle \nabla^\perp u, \nu \rangle - \langle \nabla^\perp u_m, \nu \rangle \|_{W^{1,2}} \leq C \| \nabla u - u_m \|_{W^{1,2}} \leq C \| u - u_m \|_{W^{2,2}} \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

Also gilt wegen der Abgeschlossenheit von $W_0^{1,2}$ unter der $W^{1,2}$-Norm, dass

$$\langle \nabla^\perp u, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$$

und damit ist der Satz bewiesen. □

4.32 Theorem (Homogener NEUMANN-Randwert für $W^{2,2}$-Funktionen)
Sei $f \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2)$. Dann gilt

$$\langle \nabla f, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2).$$

Dies bedeutet im schwachen Sinne $\frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$ auf ∂D^2.

Beweis. Sei zunächst ohne Einschränkung
$$\int_{D^2} f = 0,$$
denn falls nicht, gilt auch
$$g := f - \int_{D^2} f \in W^{2,2}_{\text{Neu}},$$
da Konstanten egal sind, und es gilt
$$\nabla g = \nabla f.$$
Also reicht es, die Behauptung für $\int_{D^2} f = 0$ zu zeigen.
Nach Lemma 4.25 existiert jetzt ein $f_m \in C^\infty(\overline{D^2})$ mit
$$\langle \nabla f_m, \nu \rangle = 0 \quad \text{auf } \partial D^2.$$
Dann gilt
$$\langle \nabla f_m, \nu \rangle \in W^{1,2}_0(D^2),$$
und somit folgt wegen
$$\|\langle \nabla f_m, \nu \rangle - \langle \nabla f, \nu \rangle\|_{W^{1,2}_0} \leq C \|f_m - f\|_{W^{2,2}} \xrightarrow{m \to \infty} 0$$
und mit der Abgeschlossenheit von $W^{1,2}_0$ unter $W^{1,2}$-Konvergenz, dass
$$\langle \nabla f, \nu \rangle \in W^{1,2}_0(D^2).$$

5. Lineare Hodge-Zerlegung

In diesem Abschnitt wollen wir Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ darstellen als Summe von Gradienten, z.B.

$$f = \nabla F + \nabla^{\perp} G \quad \text{in } \Omega.$$

Insbesondere werden wir Bedingungen suchen, dass

$$f = \nabla F \quad \text{in } \Omega$$

oder

$$f = \nabla^{\perp} G \quad \text{in } \Omega$$

mit gewissen Randwerten für F bzw. G erfüllt ist.

5.1. Differentialformen und Poincaré-Lemma

Wir werden das so genannte POINCARÉ-Lemma benötigen. Dazu führen wir zunächst einige dazu nötige Begrifflichkeiten ein. Wir werden dabei nach [For99], §19 vorgehen. Für eine allgemeinere Einführung auf Mannigfaltigkeiten siehe Abschnitt 11.

Sei im folgenden V ein n-dimensionaler, reeller Vektorraum und $V^k = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \text{ mal}}$. Sei weiter eine orthonormale Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V fest gewählt.

5.1 Definition (Schiefsymmetrische k-Form)
Eine Abbildung $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ nennen wir eine schiefsymmetrische (alternierende) k-Form *oder auch kurz k-Form, wenn folgendes gilt:*

- *ω ist multilinear, d.h. linear in jedem Eintrag und*
- *für eine Permutation σ von $(1, \ldots, k)$ mit Vorzeichen $\operatorname{sgn} \sigma$ gilt*

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = \operatorname{sgn} \sigma \; \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

Die Menge aller solchen alternierenden k-Formen bildet einen Vektorraum, den wir mit $\Lambda^k V$ bezeichnen. Insbesondere ist dann $\Lambda^1 V = V^*$ und wir setzen $\Lambda^0 V := \mathbb{R}$.

5.2 Definition (Äußeres Produkt)
Sei $\omega_1 \in \Lambda^k V$ und $\omega_2 \in \Lambda^l V$. Wir definieren das äußere Produkt *von k- und l-Formen*

$$\wedge : \; \Lambda^k V \times \Lambda^l V \to \Lambda^{k+l} V$$

$$\wedge(\omega_1, \omega_2) \equiv \omega_1 \wedge \omega_2$$

für Vektoren $v_1, \ldots, v_{k+l} \in V$:

- *Zunächst definieren wir für 1-Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \Lambda^1 V$, und für Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$, wobei $m \geq 1$,*

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m(v_1, \ldots, v_m) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \ldots & \varphi_1(v_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_m(v_1) & \ldots & \varphi_m(v_m) \end{pmatrix}.$$

  Es lässt sich dann zeigen, vgl. zum Beispiel [DC94] §1, dass für eine Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von V^*

$$\{\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$$

  eine Basis von $\Lambda^k V$ ist.

- *Für $f \in \Lambda^k V$ und $g \in \Lambda^l V$ mit der Darstellung*

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq p} f_{i_1,\ldots,i_k}\ \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$$

und

$$g = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq p} g_{j_1,\ldots,j_l}\ \varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_l}$$

definieren wir dann

$$f \wedge g := \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq p \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq p}} f_{i_1,\ldots,i_k}\ g_{j_1,\ldots,j_l}\ \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_l}.$$

5.3 Proposition (Eigenschaft des äußeren Produktes)
(vgl. Bemerkung 11.12 für diese Aussage im Kontext von Mannigfaltigkeiten.)
Seien $\omega \in \Lambda^k V$ und $\psi \in \Lambda^l V$. Dann gilt$\omega \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \omega$.

5.4 Definition (Duale Basis)
Wir definieren die zu $e_1, \ldots, e_n$ duale Basis $\mathbf{d}x^1, \ldots, \mathbf{d}x^n$ *in V^* durch*

$$\mathbf{d}x^j(e_i) := \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i, \\ 0, & \text{falls } j \neq i. \end{cases}$$

Da $(e_i)_{i=1}^n$ eine Basis von V ist, lassen sich die Abbildungen $\mathbf{d}x^j$ dann eindeutig linear auf ganz V fortsetzen.

5.5 Bemerkung
Aus Proposition 5.3 folgt dann

$$\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = -\mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^i, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

also insbesondere

$$\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

5.6 Proposition (Basisdarstellung von $\Lambda^k V$)
Es gilt, dass

$$\{\mathbf{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$$

eine Basis von $\Lambda^k V$ ist.

5.7 Definition (Differentialformen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet und $\omega : U \to \Lambda^k V$ eine Abbildung.
Nach Proposition 5.6 lässt sich dann ω eindeutig darstellen als

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)\ \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{i_k}, \quad x \in U.$$

*Wir nennen ω eine C^l-k-*Differentialform *auf U, $l \geq 1$, wenn $\omega_{i_1 \ldots i_k} \in C^l(U)$ für alle $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.*

5.8 Definition (Äußere Ableitung)
Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ für ein offenes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir die äußere Ableitung *oder das* Differential $\mathbf{d}f$ *von f als*

$$\mathbf{d}f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \mathbf{d}x^j.$$

Dann gilt $\mathbf{d}f : U \to \Lambda^1 V$.
Sei ω ein C^1-k-Differentialform auf U mit der Darstellung

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k}(x)\ \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{i_k} \quad x \in U.$$

Dann definieren wir die äußere Ableitung *oder das* Differential *von* ω *als*

$$\mathbf{d}\omega(x) := \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \mathbf{d}\omega_{i_1\ldots i_k}(x) \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{i_k} \quad x \in U.$$

5.9 Definition (Sternförmige und konvexe Mengen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Wir sagen, dass U sternförmig *ist, falls es einen Punkt $\overline{x} \in U$ gibt, so dass für alle Punkte $y \in U$ gilt*

$$\lambda\overline{x} + (1-\lambda)y \in U \quad \text{für alle } \lambda \in [0,1].$$

Weiter nennen wir dann $\overline{x}$ einen Sternpunkt *von U.*
Ist jeder Punkt in U ein Sternpunkt, so nennen wir U konvex.

5.10 Proposition (Umgebungen und Ausschöpfung sternförmiger Mengen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Dann gilt:

(i) *Ist U sternförmig, so ist $U_\delta := B_\delta(U)$ ist sternförmig für alle $\delta > 0$.*

(ii) *Ist U konvex, so ist $U_{-\delta} := U \cap \{x \in \mathbb{R}^n |\ \operatorname{dist}(x, \partial U) > \delta\}$ konvex für alle δ mit $U_{-\delta} \neq \emptyset$.*

(iii) *Insbesondere lässt sich jede offene, konvexe Menge U ausschöpfen durch offene, konvexe Mengen $(U_m)_{m=1}^\infty$ mit*

$$U_m \subset\subset U_{m+1} \subset\subset U \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

und

$$\bigcup_{m=1}^\infty U_m = U;$$

(iv) *Jede offene, sternförmige Menge U lässt sich durch offene, sternförmige Mengen ausschöpfen.*

5.11 Bemerkung
Die Aussage von Proposition 5.10 (ii) ist falsch für sternförmige Mengen, wie Abbildung 5.1 veranschaulicht.

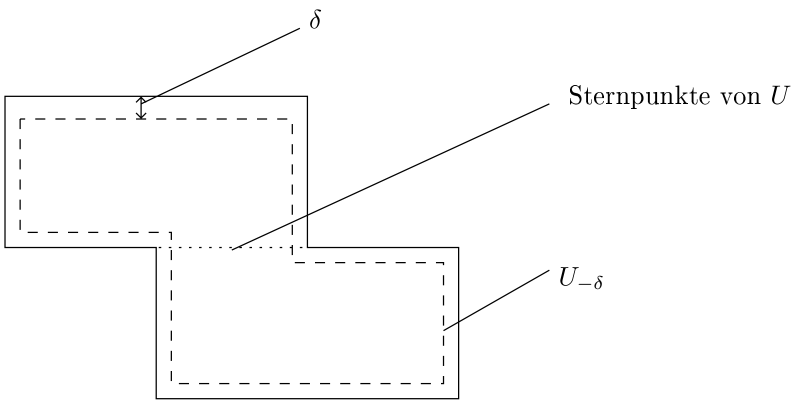

Abbildung 5.1: Ein Beispiel für eine sternförmige Menge U, so dass $U_{-\delta}$ nicht sternförmig ist für alle $\delta > 0$.

Beweis von 5.10: (i) Wir wählen einen Sternpunkt $\overline{x}$ von U. Dann ist dies auch ein Sternpunkt von U_δ, da für $x' \in U_\delta$ ein $x \in U$ existiert mit $|x' - x| < \delta$ und somit gilt

$$|\lambda x' + (1-\lambda)\overline{x} - (\lambda x + (1-\lambda)\overline{x})| \quad \le \quad |\lambda||x' - x| < \delta \quad \forall \lambda \in [0,1],$$

also $\lambda x' + (1-\lambda)\overline{x} \in U_\delta$, da $\lambda x + (1-\lambda)\overline{x}) \in U$.

(ii) Sei also $\delta > 0$ und $U_{-\delta}$ nichtleer. Seien weiter z_1, $z_2 \in U_{-\delta}$ und $\lambda \in (0,1)$ gegeben. Dann setzen wir $\tilde{z} := \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$. Es ist zu zeigen, dass $\tilde{z} \in U_{-\delta}$.
Angenommen es existiert ein $y \in \partial U$ mit $|\tilde{z} - y| \leq \delta$. Dann setzen wir $\overrightarrow{v} := y - \tilde{z}$ und $y_1 := z_1 + \overrightarrow{v}$, $y_2 := z_2 + \overrightarrow{v}$. Wegen $|\overrightarrow{v}| \leq \delta$ gilt $y_1 = z_1 + \tilde{v} \in U$, da $z_1 \in U$ und $\mathrm{dist}(z_1, \partial U) > \delta$ und analog $y_2 \in U$ (siehe Abbildung 5.1). Dann gilt aber $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in U$ und wegen

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \lambda(z_1 + y - \tilde{z}) + (1-\lambda)(z_2 + y - \tilde{z}) = y$$

gilt schließlich $y \in U$, was wegen U offen einen Widerspruch zu $y \in \partial U$ darstellt.

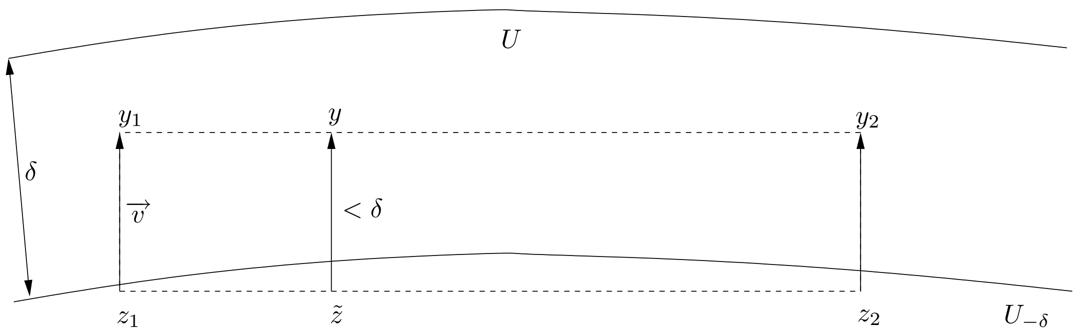

Abbildung 5.2: Zum Beweis, dass $U_{-\delta}$ konvex ist, falls U konvex ist.

(iii) Ist U beschränkt, so wählen wir die Folge $(U_{-\delta})_\delta$ für $\delta \ll 1$ als Ausschöpfung. Dabei beachten wir, dass wegen der Offenheit von U ein $\delta_0 > 0$ existiert, so dass $U_{-\delta} \neq \emptyset$ für alle $\delta < \delta_0$.
Ist U unbeschränkt, so wählen wir als Ausschöpfung die Folge $(U_{-\delta} \cap B_{\frac{1}{\delta}}(0))_{\delta_0 > \delta > 0}$. Dies ist dann eine konvexe Ausschöpfung für δ hinreichend klein.

(iv) Sei U also eine offene und sternförmige Menge. Wir betrachten wieder die Mengen $(U_\delta)_{0<\delta\ll 1}$. Wie Abbildung 5.1 veranschaulicht, sind diese U_δ nicht notwendig sternförmig, also betrachten wir einen sternförmigen Teil von U_δ:
Sei $\overline{z} \in U$ ein Sternpunkt von U. Da U offen ist, existiert ein δ_0, so dass $\overline{z} \in U_{-\delta}$ für alle $\delta < \delta_0$. Sei ab jetzt $\delta < \delta_0$. Wir setzen die Menge $V_\delta \equiv V_\delta(\overline{z})$, als die größte Menge $V_\delta \subset U_{-\delta}$, so dass $\overline{z} \in V_\delta$ und V_δ sternförmig bezüglich $\overline{z}$ ist, also

$$V_\delta := \{x \in U_{-\delta} \mid \forall \lambda \in [0,1]: \quad \lambda x + (1-\lambda)\overline{z} \in U_{-\delta}\}\,.$$

V_δ ist dann offensichtlich sternförmig. Weiter ist V_δ offen, denn sei ein $\overline{x} \in V_\delta$, dann ist

$$\overline{xz} := \{\lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{z} \mid \lambda \in [0,1]\} \subset U_{-\delta}.$$

Nun ist $\overline{xz}$ kompakt und deshalb existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(\overline{xz}) \subset U_{-\delta}$. Ist $y \in B_\varepsilon(\overline{x})$, so gilt

$$|\lambda y + (1-\lambda)\overline{z} - (\lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{z})| \leq \lambda |y - \overline{x}| < \varepsilon, \quad \text{für alle } \lambda \in [0,1].$$

Daraus folgt, dass $B_\varepsilon(\overline{x}) \subset V_\delta$ ist, und somit ist V_δ offen.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $\overline{V_\delta} \subset V_{\delta'}$ für $\delta > \delta'$ und dass $U = \bigcup_{\delta>0} V_\delta$.
Zunächst ist klar, dass $U = \bigcup_{\delta>0} V_\delta$, denn einerseits ist $V_\delta \subset U$ und andererseits gilt für jedes $\overline{x} \in U$, dass $\overline{xz} \subset U$ und wegen der Offenheit von U und der Abgeschlossenheit von $\overline{xz}$ existiert dann ein $U_{-\delta}$, so dass $\overline{xz} \subset U_{-\delta}$.
Seien $\delta > \delta' > 0$ fixiert. Um $\overline{V_\delta} \subset V_{\delta'}$ zu zeigen beachten wir zunächst, dass $V_\delta \subset V_{\delta'}$ und $\overline{U_{-\delta}} \subset U_{-\delta'}$. Sei ein $\overline{x} \in \partial V_\delta$. Dann existiert eine Folge $(x_k)_{k=1}^\infty \subset V_\delta$ mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} \overline{x}$, also gilt

$$|\lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{z} - (\lambda x_k + (1-\lambda)\overline{z})| \leq |\overline{x} - x_k| \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad \text{für alle } \lambda \in [0,1].$$

Wegen $\lambda x_k + (1-\lambda)\overline{z} \in U_{-\delta}$ folgt daraus $\lambda \overline{x} + (1-\lambda)\overline{z} \in \overline{U_{-\delta}} \subset U_{-\delta'}$ für alle $\lambda \in [0,1]$. Damit ist gezeigt, dass $\overline{x} \in V_{\delta'}$, also folgt insgesamt $\overline{V_\delta} \subset V_{\delta'}$.
Daraus können wir eine Ausschöpfung für U konstruieren: Ist U beschränkt, so ist V_δ beschränkt und

somit gilt $V_\delta \subset\subset V_{\delta'}$ für $\delta > \delta'$. Eine mögliche Ausschöpfung in diesem Falle wäre also die Folge $(V_{\frac{1}{k}})_k$. Ist U unbeschränkt, so ist $\overline{V_\delta}$ im Allgemeinen nicht kompakt. Deshalb wählen wir als Ausschöpfung z.B. die Folge $(V_{\frac{1}{k}} \cap B_{\frac{1}{k}}(\overline{z}))_k$.

□

Nun sind wir in der Lage, das POINCARÉ-Lemma für Differentialformen zu formulieren:

5.12 Lemma (Poincaré-Lemma für Differentialformen)
(vgl. [For99], §19, Satz 6, Seite 229 und Definition auf Seite 225)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und ω eine in U stetig differenzierbare k-Form mit $\mathbf{d}\omega = 0$. Dann existiert eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form σ auf U mit $\mathbf{d}\sigma = \omega$.

5.2. Zerlegungssätze

Ein erstes (lokales) Ergebnis, aber noch ohne vorgeschriebene Randwerte, liefert das folgende

5.13 Lemma (Existenz einer Stammfunktion)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, $f \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 < q < \infty$. Es gelte, dass curl $f = 0$ *schwach in Ω, d.h.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j\ \partial_i\varphi - f_i\ \partial_j\varphi = 0, \quad 1 \le i, j \le n, \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.1}$$

Dann gilt:

(*i*) *Ist $\Omega' \subset\subset \Omega$ sternförmig und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann existiert eine* Stammfunktion *$F \in W^{1,q}(\Omega')$, d.h. eine Abbildung $F : \Omega' \to \mathbb{R}$ mit schwacher Ableitung $\nabla F : \Omega' \to \mathbb{R}^n$ und*

$$\nabla F = f \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega'.$$

(*ii*) *Ist Ω sternförmig, so existiert eine Stammfunktion $F \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$.*

Beweis. Zu (*i*): Sei ein $\Omega' \subset\subset \Omega$ sternförmig gegeben. Nun wählen wir ein sternförmiges $\Omega'' \subset\subset \Omega$ mit $\Omega' \subset\subset \Omega''$, z.B. eine Umgebung $\Omega'' := B_\delta(\Omega')$ für ein δ hinreichend klein, so dass $\Omega'' \subset\subset \Omega$ (zur Sternförmigkeit vergleiche Proposition 5.10).
Wir beachten, dass Ω'' somit insbesondere zusammenhängend ist (und deshalb die POINCARÉ-Ungleichung für $u - \fint_{\Omega''} u$ gilt).
Sei $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$ ein Faltungskern, d.h. $0 \le \eta \le 1$, $\int_{B_1(0)} \eta = 1$. Wir definieren wie üblich $\eta_\varepsilon(\cdot) := \frac{1}{\varepsilon^n}\ \eta\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$.
Sei jetzt $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega)$. Wir betrachten $\eta_\varepsilon * f := \begin{bmatrix} \eta_\varepsilon * f^1 \\ \vdots \\ \eta_\varepsilon * f^n \end{bmatrix}$.Dann gilt curl $(\eta_\varepsilon * f) = 0$ punktweise in Ω'', denn für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega'')$

$$\begin{aligned}
\int (\eta_\varepsilon * f)^i \partial_j \varphi &= \int\int \eta_\varepsilon(x-y)\ f^i(y)\ \mathbf{d}y\ \partial_j\varphi(x)\ \mathbf{d}x \\
&= \int\int \eta_\varepsilon(x-y)\ \partial_j\varphi(x)\ \mathbf{d}x\ f^i(y)\ \mathbf{d}y \\
&= -\int\int \partial_{x_j}\eta_\varepsilon(x-y)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x\ f^i(y)\ \mathbf{d}y \\
&= \int\int \partial_{y_j}\eta_\varepsilon(x-y)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x\ f^i(y)\ \mathbf{d}y \\
&\overset{(5.1)}{=} \int\int \partial_{y^i}\eta_\varepsilon(x-y)\ f^j(y)\ \mathbf{d}y\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x \\
&= \cdots = \int (\eta_\varepsilon * f)^j \partial_i \varphi.
\end{aligned}$$

Damit gilt wegen $\eta_\varepsilon * f \in C^\infty(\Omega'')$,

$$\partial_i(\eta_\varepsilon * f)^j - \partial_j(\eta_\varepsilon * f)^i = 0 \quad \text{punktweise in } \Omega'',\ 1 \le i, j \le n,$$

also

$$\operatorname{curl}(\eta_\varepsilon * f) = 0 \quad \text{in } \Omega''.$$

Wir wenden das POINCARÉ-Lemma für Differentialformen, Lemma 5.12, an und definieren dazu

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} (\eta_\varepsilon * f)^i \ \mathbf{d}x^i.$$

Dann ist ω eine stetig differenzierbare 1-Form auf Ω'', welches nach Voraussetzung sternförmig ist, und es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\omega &\overset{B.5.5}{=} \sum_{1\le i\le n} \sum_{j\neq i} \partial_j (\eta_\varepsilon * f)^i \ \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^i \\
&\overset{P.5.5}{=} \sum_{1\le i\le n} \sum_{j>i} (\partial_j (\eta_\varepsilon * f)^i - \partial_i (\eta_\varepsilon * f)^j) \ \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dann gibt es nach Lemma 5.12 eine 0-Form $G^\varepsilon : \Omega'' \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{d}G^\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \partial_k G^\varepsilon \ \mathbf{d}x^k = \omega = \sum_{k=1}^{n} (\eta_\varepsilon * f)^k \ \mathbf{d}x^k.$$

Mit der Eindeutigkeit der Darstellung in der Basis $(\mathbf{d}x_k)_k$ folgt damit

$$\partial_k G^\varepsilon = (\eta_\varepsilon * f)^k, \quad 1 \le k \le n,$$

also, kompakter aufgeschrieben, gilt

$$\nabla G^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f \quad \text{in } \Omega''$$

und $G^\varepsilon \in C^\infty(\Omega'')$. Also ist $G^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega'}) \subset L^1(\Omega')$ (insbesondere ist dann $\int_{\Omega'} G^\varepsilon \in \mathbb{R}$).
Nun definieren wir

$$F^\varepsilon := G^\varepsilon - \fint_{\Omega'} G^\varepsilon$$

Dann gilt $F^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega'}) \subset W^{1,q}(\Omega')$, und für alle $\varepsilon \ll 1$ gilt

$$\nabla F^\varepsilon = \nabla G^\varepsilon - \nabla(\fint_{\Omega'} G^\varepsilon) = \nabla G^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f \quad \text{punktweise in } \Omega'.$$

Nun wollen wir die POINCARÉ-Ungleichung, Lemma 4.1, anwenden. Dazu definieren wir

$$K := \{g \in W^{1,q}(\Omega'), \ \fint_{\Omega'} g = 0\},$$

dann ist $K \subset W^{1,q}(\Omega')$ ein abgeschlossener Kegel. Insbesondere gilt, falls $\nabla g = 0$ und $g \in K$, wegen Ω' zusammenhängend, dass $g \equiv const$ und somit $g = 0$. Es gilt weiter, dass $F^\varepsilon \in K$ für alle $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega)$.
Damit gilt nach der SOBOLEV-POINCARÉ-Ungleichung, Lemma 4.1, wobei wir beachten, dass $q > 1$

$$\|F^\varepsilon\|_{L^q(\Omega')} \le C(\Omega', n, q) \le C\|\nabla F^\varepsilon\|_{L^q(\Omega')} = C\|\eta_\varepsilon * f\|_{L^q(\Omega')} \tag{5.2}$$

und

$$\|F^{\varepsilon_1} - F^{\varepsilon_2}\|_{L^q(\Omega')} \le C\|\nabla F^{\varepsilon_1} - \nabla F^{\varepsilon_2}\|_{L^q(\Omega')} = C\|\eta_{\varepsilon_1} * f - \eta_{\varepsilon_2} * f\|_{L^q(\Omega')}. \tag{5.3}$$

Mit der CAUCHY-Folgeneigenschaft von $(\nabla F^\varepsilon)_\varepsilon = (\eta_\varepsilon * f)_\varepsilon$ in $L^q_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n) \supset L^q(\Omega', \mathbb{R}^n)$ ist auch $(F^\varepsilon)_\varepsilon$ eine CAUCHY-Folge in $L^q(\Omega')$. Deshalb ist $(F^\varepsilon)_\varepsilon$ auch eine CAUCHY-Folge in $W^{1,q}(\Omega')$.
Also konvergiert $F^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} F$ in $W^{1,q}$ für ein $F \in L^{q^*} \cap W^{1,q}(\Omega')$, $\fint_{\Omega'} F = 0$, mit der Abschätzung

$$\|F\|_{L^q(\Omega')} \le C(\Omega', n, q)\|f\|_{L^q(\Omega')}.$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
\|\nabla F - f\|_{L^q(\Omega',\mathbb{R}^n)} &\leq \|\nabla F - \eta_\varepsilon * f\|_{L^q} + \|\eta_\varepsilon * f - f\|_{L^q} \\
&= \|\nabla F - \nabla F^\varepsilon\|_{L^q} + \|\eta_\varepsilon * f - f\|_{L^q} \\
&\leq \|F - F^\varepsilon\|_{W^{1,q}(\Omega')} + \|\eta_\varepsilon * f - f\|_{L^q(\Omega',\mathbb{R}^n)} \\
&\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.
\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\nabla F = f \quad \text{fast überall in } \Omega'.$$

Es folgt also (i).

<u>Zu (ii)</u>. Sei Ω also sternförmig. Nach Proposition 5.10 können wir dann $(\Omega_i)_i$ eine Folge sternförmiger ineinander geschachtelter Mengen wählen, die Ω ausschöpfen, d.h. wir erhalten Ω_i für $i \geq 1$, so dass

- $\Omega_i \subset\subset \Omega$ für alle $i \geq 1$,
- $\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1}$ für alle $i \geq 1$ und
- $\bigcup_{i=1}^\infty \Omega_i = \Omega$.

Nach (i) existieren auf Ω_i jeweils Stammfunktionen $G_i \in W^{1,q} \cap L^{q^*}(\Omega_i)$, $\fint_{\Omega_i} G_i = 0$, also gilt

$$\nabla G_i = f \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega_i.$$

Unser Ziel ist es nun, eine gemeinsame Stammfunktion auf ganz Ω zu bilden. Dazu beobachten wir zunächst, dass in Ω_i gilt

$$\nabla(G_i - G_{i+1}) = f - f = 0.$$

Somit gilt in Ω_i, dass

$$G_i - G_{i+1} = const =: c = \fint_{\Omega_i} c$$

und deshalb

$$c = \fint_{\Omega_i} c = \fint_{\Omega_i} (G_i - G_{i+1}) = 0 - \fint_{\Omega_i} G_{i+1}.$$

Dies impliziert

$$G_{i+1} = G_i + \fint_{\Omega_i} G_{i+1} \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega_i.$$

Wir definieren deshalb eine Folge von Korrekturtermen c_i durch

$$c_1 := 0,$$

$$c_{i+1} := \fint_{\Omega_i} G_{i+1} + c_i \tag{5.4}$$

bzw.

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} \fint_{\Omega_{i-j}} G_{i-j+1}. \tag{5.5}$$

Wir definieren $F_i \in W^{1,q} \cap L^{q^*}(\Omega_i)$ durch

$$F_i := G_i - c_i \quad \text{in } \Omega_i. \tag{5.6}$$

Dann gilt

$$\nabla(F_{i+1} - F_i) = (f - f) = 0 \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega_i.$$

Demzufolge gilt punktweise fast überall in Ω_i (wir beachten: Ω_i ist zusammenhängend)

$$\begin{aligned} F_{i+1} - F_i \equiv c &= \fint_{\Omega_i} c = \fint_{\Omega_i} (F_{i+1} - F_i) \\ &\overset{(5.6)}{=} \fint_{\Omega_i} G_{i+1} - c_{i+1} - \underbrace{\fint_{\Omega_i} G_i}_{=0} + c_i \\ &= \fint_{\Omega_i} G_{i+1} + c_i - c_{i+1} \overset{(5.4)}{=} 0. \end{aligned}$$

Also stimmen F_i und F_{i+1} punktweise fast überall in Ω_i überein, und somit gilt für $k \geq i$ punktweise fast überall in Ω_i (wir beachten: $\Omega_j \supset \Omega_i$ für $j \geq i$)

$$F_k - F_i = \sum_{j=i}^{k-1} \underbrace{F_{j+1} - F_j}_{=0} = 0.$$

Deshalb ist die Funktion F definiert durch

$$F(x) := F_i(x) \quad \text{für ein } i \text{ mit } x \in \Omega_i$$

punktweise fast überall wohldefiniert und $F \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$. □

5.14 Bemerkung

- *Insbesondere erhalten wir die Aussage (ii) für offene und konvexe Mengen Ω.*
- *Ein ähnliches Resultat erhalten wir auch für $\operatorname{div} f = 0$.*

5.15 Lemma (Hodge-Zerlegung ohne harmonischen Term)
(vgl. [IM01], Chapter 10, Gleichung (10.4))
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet, $\partial\Omega \in C^\infty$. Sei weiter ein $f \in W^{k,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $k \geq 0$. Dann existieren h_1, h_2 $\in W^{k+1,2}(\Omega, \mathbb{R})$ mit

$$f = \nabla h_1 + \nabla^\perp h_2 \quad \textit{punktweise fast überall in } \Omega.$$

Beweis. Sei also $f \in W^{k,2}$, $k \geq 0$. Dann existieren Lösungen g^1, g^2 zunächst in $W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ von

$$\triangle g^i = f^i, \quad \text{in } \Omega,\ i = 1, 2.$$

Mit dem Regularitätssatz von Friedrichs, folgt dann, dass $g_1, g_2 \in W^{k+2,2}(\Omega)$ und dass die PDE punktweise fast überall erfüllt ist, d.h. es gilt

$$\partial_{xx} g^1 + \partial_{yy} g^1 = f^1 \quad \text{und}$$

$$\partial_{xx} g^2 + \partial_{yy} g^2 = f^2 \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega.$$

Umgeschrieben ist dies (wir beachten: $\partial_{xy} h = \partial_{yx} h$ für $W^{2,2}$-Abbildungen)

$$\partial_x(\partial_x g^1 + \partial_y g^2) - \partial_y(-\partial_y g^1 + \partial_x g^2) = f^1$$

und

$$\partial_y(\partial_x g^1 + \partial_y g^2) + \partial_x(-\partial_y g^1 + \partial_x g^2) = f^2 \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega.$$

Dies wiederum bedeutet mit

$$h_1 := \partial_x g^1 + \partial_y g^2 = \operatorname{div}(g)$$

und

$$h_2 := -\partial_y g^1 + \partial_x g^2,$$

dass

$$\nabla h_1 + \nabla^\perp h_2 = f \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega$$

und es gilt h_1, $h_2 \in W^{k+2-1,2}(\Omega) = W^{k+1,2}(\Omega)$. □

5.16 Lemma (Hodge-Zerlegung mit harmonischem Term)
Sei $f \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)$, dann existiert ein $F \in W^{2,2}(D^2)$, $G \in W^{2,2}(D^2)$ und ein $H \in C^\infty(D^2, \mathbb{R}^2) \cap W^{1,2}(D^2)$ mit $\operatorname{div} H = 0$, $\operatorname{curl} H = 0$ und $\triangle H = 0$ in D^2, so dass

$$f = \nabla F + \nabla^\perp G + H \quad \text{punktweise fast überall in } D^2 \tag{5.7}$$

Weiter gilt, dass für jede derartige Zerlegung

$$\triangle F = \operatorname{div} f \quad \text{punktweise fast überall in } D^2 \tag{5.8}$$

und

$$\triangle G = \operatorname{curl} f \quad \text{punktweise fast überall in } D^2, \tag{5.9}$$

impliziert, d.h. die Darstellung ist eindeutig für vorgegebene Randwerte von F und G.

Beweis. Wir erhalten F und $G \in W^{2,2}$ durch eine Lösung der PDE

$$\triangle F = \operatorname{div} f \quad \text{in } D^2$$

und

$$\triangle G = \operatorname{curl} f \quad \text{in } D^2$$

indem wir z.B. den schwachen Randwert 0 vorschreiben. Möglich ist dies, da $\operatorname{div} f$, $\operatorname{curl} f \in L^2(D^2)$.
Wir beobachten nun, dass für $H \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)$,

$$H := f - \nabla F - \nabla^\perp G,$$

punktweise fast überall $\operatorname{div} H = 0$ und $\operatorname{curl} H = 0$ gilt.
Daraus folgt punktweise fast überall in D^2

$$\partial_x H^1 = -\partial_y H^2, \quad \text{wegen } \operatorname{div} H = 0 \text{ und}$$
$$\partial_y H^1 = \partial_x H^2, \quad \text{wegen } \operatorname{curl} H = 0.$$

Damit folgt für alle $\varphi \in C_0^\infty(D^2)$ (wir beachten, dass auch $\partial_x \varphi \in C_0^\infty(D^2)$, also gültige Testfunktion für Ableitungen in $W^{1,2}$)

$$\begin{aligned}
\int_{D^2} H^1 \triangle\varphi &= \int_{D^2} H^1\ \partial_x(\partial_x\varphi) + \int_{D^2} H^1\ \partial_y(\partial_y\varphi) \\
&= -\int_{D^2} \partial_x H^1\ \partial_x\varphi - \int_{D^2} \partial_y H^1\ \partial_y\varphi \\
&= +\int_{D^2} \partial_y H^2 \partial_x\varphi - \int_{D^2} \partial_x H^2 \partial_y\varphi \\
&= -\int_{D^2} H^2 \partial_y\partial_x\varphi + \int_{D^2} H^2 \partial_x\partial_y\varphi \\
&= \int_{D^2} H^2 (\partial_y\partial_x\varphi - \partial_x\partial_y\varphi) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

also folgt mit dem Lemma von Weyl, Lemma 4.16, $\triangle H^1 = 0$ und $H^1 \in C^\infty(D^2)$.
Analog folgt $\triangle H^2 = 0$ und $H^2 \in C^\infty(D^2)$ und wir haben eine Darstellung wie in (5.7) gefunden.

Weiter gilt für jede derartige Darstellung (5.7) durch anwenden von div und curl, die PDEs (5.8) und (5.9). □

5.17 Bemerkung
Ist $f \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^z)$ und $\operatorname{div} f = 0$, so finden wir mit Lemma 5.16 ein $G \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)$ und ein $H \in C^\infty(D^2) \cap W^{1,2}(D^2)$, so dass

$$f = \nabla^\perp G + H.$$

Wenden wir das Lemma 5.12 auf H an (wir beachten, dass $\operatorname{div} H = 0$ und gehen wie in Beweis zu Lemma 5.13 vor), so erhalten wir, dass $H = \nabla^\perp \tilde{H}$ in D^2. Nach Definition $\tilde{G} := G + \tilde{H}$ liefert dies

$$f = \nabla^\perp \tilde{G}$$

für ein $\tilde{G} \in W^{2,2}_{loc}(D^2)$. Insbesondere lässt sich a priori für ein solches $\tilde{G}$ keine Aussage über Randwerte treffen, da diese nicht einmal existieren müssen.

Um tatsächlich eine "schöne" Stammfunktion zu bekommen, wollen wir das obige Lemma 5.16 anwenden. Dafür müssen wir Randwerte vorschreiben, die $H = 0$ garantieren:

5.18 Lemma (Verschwinden des harmonischen Terms)
Sei $h \in C^\infty(D^2, \mathbb{R}^2)$ *und* $\operatorname{div} h = 0$ *und* $\operatorname{curl} h = 0$.
Weiter gelte $\langle \nu, h \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ *oder* $\langle \tau, h \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$, *wobei* $\nu(x, y) := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *die äußere Einheitsnormale und* $\tau(x, y) := \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ *eine Tangente an* D^2 *ist.*
Dann ist $h \equiv 0$.

Beweis. Sei also $h \in C^\infty(D^2, \mathbb{R}^2)$ wie in der Voraussetzung gegeben.
Wir betrachten zunächst nur den Fall $\langle \nu, h \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$.Zunächst folgt aus $\operatorname{div} h = 0$ und $\operatorname{curl} h = 0$, dass $\triangle h = 0$ komponenten- und punktweise in D^2, denn es gilt

$$h^1_{xx} + h^1_{yy} = \operatorname{div} \begin{bmatrix} h^1_x \\ h^1_y \end{bmatrix} = \operatorname{div} \begin{bmatrix} -h^2_y \\ h^2_x \end{bmatrix} = -h^2_{xy} + h^2_{yx} = 0$$

und

$$h^2_{xx} + h^2_{yy} = \operatorname{div} \begin{bmatrix} h^2_x \\ h^2_y \end{bmatrix} = \operatorname{div} \begin{bmatrix} h^1_y \\ -h^1_x \end{bmatrix} = h^1_{yx} - h^1_{xy} = 0.$$

Weiter gilt punktweise in D^2

$$\triangle \langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, h \rangle = \triangle (x h^1 + y h^2) = x \cdot \triangle h^1 + 2 h^1_x + y \cdot \triangle h^2 + 2 h^2_y = x \triangle h^1 + y \triangle h^2 + 2 (\operatorname{div} h) = 0.$$

Da aber $\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, h \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$, gilt mit der Eindeutigkeit der Lösung elliptischer Randwertprobleme für vorgegebene (schwache) Dirichlet-Randwerte, dass

$$\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, h \rangle \equiv 0 \quad \text{in } D^2.$$

Wir haben also eine C^∞-Vektorfunktion, für die punktweise in D^2 gilt

$$\operatorname{div} h \equiv 0,$$

$$\operatorname{curl} h \equiv 0,$$

$$\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, h \rangle \equiv 0,$$

das heißt

$$0 = \operatorname{div} h = h^1_x + h^2_y, \tag{5.10}$$

$$0 = \operatorname{curl} h = -h^1_y + h^2_x \tag{5.11}$$

und

$$x h^1 + y h^2 \equiv 0.$$

Damit folgt für $x \neq 0$

$$h^1(x, y) = -\frac{y}{x} h^2(x, y) \tag{5.12}$$

und somit aus (5.10)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x \left(-\frac{y}{x} h^2\right) + h^2_y \\ &= \frac{y}{x^2} h^2 - \frac{y}{x} h^2_x + h^2_y \end{aligned} \tag{5.13}$$

und aus (5.11)

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_y(-\frac{y}{x}h^2) + h^2_x \\ &= \frac{1}{x}h^2 + \frac{y}{x}h^2_y + h^2_x, \end{aligned}$$

also

$$h^2_x = -(\frac{1}{x}h^2 + \frac{y}{x}h^2_y), \tag{5.14}$$

oder (hier müssen wir noch $y \neq 0$ voraussetzen)

$$h^2_y = -(h^2_x + \frac{1}{x}h^2)\frac{x}{y} = -\frac{x}{y}h^2_x - \frac{1}{y}h^2. \tag{5.15}$$

Die Gleichungen (5.14) und (5.15) setzen wir in die Gleichung (5.13) ein:
Für (5.14) eingesetzt in (5.13) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y}{x^2}h^2 + \frac{y}{x}(\frac{1}{x}h^2 + \frac{y}{x}h^2_y) + h^2_y \\ &= 2\frac{y}{x^2}h^2 + (\frac{y^2}{x^2} + 1)h^2_y. \end{aligned}$$

Da $x^2 \neq 0$ folgt

$$0 = 2yh^2 + (x^2 + y^2)h^2_y,$$

also

$$h^2_y = -\frac{2y}{x^2 + y^2}h^2.$$

Nun ist die rechte Seite $v^x(y, h^2) = -\frac{2y}{x^2+y^2}h^2$ für jedes feste $x \neq 0$ eine glatte Abbildung. Somit können wir diese homogene ODE von $h^2(x, \cdot)$ für $x \neq 0$ (bis auf die Multiplikation mit einer Konstanten) eindeutig lösen:

$$h^2(x, y) = C(x)\frac{1}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in D^2,\, x \neq 0.$$

Andererseits ergibt (5.15) eingesetzt in (5.13) für $x, y \neq 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y}{x^2}h^2 - \frac{y}{x}h^2_x + (-\frac{x}{y}h^2_x - \frac{1}{y}h^2) \\ &= (\frac{y}{x^2} - \frac{1}{y})h^2 - (\frac{y}{x} + \frac{x}{y})h^2_x. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $x^2y \neq 0$ erhält man

$$0 = (y^2 - x^2)h^2 - (y^2x + x^3)h^2_x,$$

also

$$h^2_x = \frac{y^2 - x^2}{x(x^2 + y^2)}h^2.$$

Dies ist eine homogene ODE von $h(\cdot, y)$ mit rechter Seite $w^y(x, h^2) = \frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}h^2$. Die rechte Seite ist auf der Menge $(-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2})\backslash\{0\}$ glatt. Somit erhalten wir[8]

$$h^2(x, y) = C(y, \mathrm{sgn}(x))\frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{für alle } (x, y) \in D^2 \text{ mit } x, y \neq 0.$$

[8] Sei dazu $y \in (-1, 1)\backslash\{0\}$ fixiert. Für jedes $\overline{x} \in (-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2})\backslash\{0\}$ existiert eine offenes Intervall $I \subset (-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2})$ um $\overline{x}$ auf dem die rechte Seite Lipschitz-stetig bis auf den Rand ist. Somit existiert eine bis auf eine multiplikative Konstante eindeutige Lösung

$$h^2(x, y) = C(y, I)\frac{x}{x^2 + y^2} \quad x \in \overline{I}. \tag{5.16}$$

Wir erhalten somit die Lösungsschar

$$h^2(x, y) = C^+(y)\frac{x}{x^2 + y^2} \quad x \in (0, \sqrt{1-y^2})$$

und

$$h^2(x, y) = C^-(y)\frac{x}{x^2 + y^2} \quad x \in (-\sqrt{1-y^2}, 0).$$

Auf der Menge $\{x > 0\} \cap \{y \neq 0\} \cap D^2$ müssen diese beiden Funktionen gleich sein, d.h. es muss gelten

$$C(y)\frac{x}{x^2+y^2} = h^2(x,y) = C(x)\frac{1}{x^2+y^2},$$

also

$$C(y) = \frac{C(x)}{x} \quad \text{für alle } (x,y) \in D^2 \text{ mit } x > 0,\, y \neq 0$$

und deshalb

$$C(y) = \frac{C(x)}{x} = const =: C.$$

Also gilt

$$C(y) = C$$

und

$$C(x) = C \cdot x$$

und wir erhalten

$$h^2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \cdot C \qquad \text{für alle } (x,y) \in D^2 \text{ mit } x > 0,\, y \neq 0.$$

Dann ist aber h^2 dann und nur dann stetig in die Null fortsetzbar, wenn $C = 0$ ist.
Analoges erhält man für den Fall $(x < 0,\, y \neq 0)$ und somit folgt wegen der Voraussetzung $h^2 \in C^\infty(D^2)$

$$h^2 \equiv 0,$$

also mit (5.12)

$$h^1 \equiv 0$$

und die Behauptung ist gezeigt für den Fall $\langle h, \nu\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$.

Für den Fall $\langle h, \tau\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ gehen wir wie folgt vor:
Wir definieren $\tilde{h}$ durch

$$\tilde{h}^1 := h^2,$$

und

$$\tilde{h}^2 := -h^1.$$

Dann gilt

$$\langle \nu, \tilde{h}\rangle = x\tilde{h}^1 + y\tilde{h}^2 = xh^2 - yh^1 = \langle \tau, h\rangle$$

und

$$\operatorname{div}(\tilde{h}) = \operatorname{curl}(h) = 0,$$

sowie

$$\operatorname{curl}(\tilde{h}) = -\operatorname{div}(h) = 0.$$

Weiter gilt $\tilde{h} \in C^\infty$, und somit folgt mit obiger Rechnung

$$\tilde{h} \equiv 0$$

und deshalb

$$h \equiv 0.$$

Damit ist auch dieser Teil bewiesen. □

5.19 Theorem (Hodge-Zerlegung für Abbildungen mit vorgeschriebenen Randwerten)
Sei $f \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)$ und es gelte (α) oder (β):

(α) $\langle f, \tau\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ *und* $\int_{D^2} \operatorname{curl} f = 0$,

(β) $\langle f, \nu\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ *und* $\int_{D^2} \operatorname{div} f = 0$.

Dabei ist $\nu(x,y) := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *die Einheitsnormale an* ∂D^2 *und* $\tau(x,y) := \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ *die Einheitstangente gegen den Uhrzeigersinn an* ∂D^2.

Dann existieren $F, G \in W^{2,2}(D^2)$ *mit*

$$f = \nabla F + \nabla^\perp G,$$

wobei im Fall (α) $G \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2)$, $\int_{D^2} G = 0$ *und* $F \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)$ *und*
im Fall (β) $G \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)$ *und* $F \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2)$, $\int_{D^2} F = 0$ *gilt.*

Die jeweilige Darstellung ist eindeutig, und es gilt punktweise fast überall in D^2

$$\triangle F = \operatorname{div} f$$

und

$$\triangle G = \operatorname{curl} f.$$

Weiterhin sind die Abbildungen

$$f \mapsto F$$

und

$$f \mapsto G$$

linear und stetig als Abbildungen

$$\big\{ f \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2) \mid f \text{ erfüllt } (\alpha) \big\} \to W^{2,2}(D^2),$$

beziehungsweise

$$\big\{ f \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2) \mid f \text{ erfüllt } (\beta) \big\} \to W^{2,2}(D^2),$$

und es gelten die Abschätzungen

$$\|F\|_{W^{2,2}(D^2)} \leq C \| \operatorname{div} f\|_{L^2(D^2)} \tag{5.17}$$

und

$$\|G\|_{W^{2,2}(D^2)} \leq C \| \operatorname{curl} f\|_{L^2(D^2)}, \tag{5.18}$$

sowie

$$\|F\|_{W^{1,2}(D^2)} \leq C \|f\|_{L^2(D^2)} \tag{5.19}$$

und

$$\|G\|_{W^{1,2}(D^2)} \leq C \|f\|_{L^2(D^2)}. \tag{5.20}$$

Speziell gilt:

(i) Ist $\operatorname{div} f = 0$ *und* $\langle f, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$, *so ist* $f = \nabla^\perp G$ *für* G *aus dem Fall* (β);

(ii) ist $\operatorname{div} f = 0$, $\langle f, \tau \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ *sowie* $\int_{D^2} \operatorname{curl} f = 0$, *so ist* $f = \nabla^\perp G$ *für* G *aus dem Fall* (α);

(iii) ist $\operatorname{curl} f = 0$ *und* $\langle f, \tau \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$, *so ist* $f = \nabla F$ *für* F *aus dem Fall* (α);

(iv) ist $\operatorname{curl} f = 0$, $\langle f, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ *sowie* $\int_{D^2} \operatorname{div} f = 0$, *so ist* $f = \nabla F$ *für* F *aus dem Fall* (β).

Beweis. Zur Existenz:
Da $f \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)$ ist, existieren $\operatorname{curl} f$ und $\operatorname{div} f$ als L^2-Funktionen.
Wir wählen $F \in W^{2,2}(D^2)$ und $G \in W^{2,2}(D^2)$ durch

(α) $F \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)$ die Lösung von

$$\begin{cases} \triangle F = \operatorname{div} f & \text{in } D^2, \\ F = 0 & \text{auf } \partial D^2 \end{cases} \tag{5.21}$$

und $G \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2)$, $\int_{D^2} G = 0$ die Lösung von

$$\begin{cases} \triangle G = \operatorname{curl} f & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} G = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases} \tag{5.22}$$

Zur Existenz von F und G beachten wir, dass $\operatorname{div} f$, $\operatorname{curl} f \in L^2$ ist und somit $F \in W_0^{1,2}(D^2)$ nach Lemma 4.13 als schwache Lösung von (5.21) und $G \in W^{1,2}(D^2)$ nach Lemma 4.14 als schwache Lösung von (5.22) existieren. Aus Theorem 4.18 folgt nun, dass F auch in $W^{2,2}(D^2)$ und aus Theorem 4.18 folgt, dass $G \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2)$ ist.

(β) Analog zu (α), mit vertauschten Rollen von F und G wählen wir $G \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)$ und $F \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2)$, $\int_{D^2} F = 0$, so dass

$$\begin{cases} \triangle F = \operatorname{div} f & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} F = 0 & \text{auf } \partial D^2 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \triangle G = \operatorname{curl} f & \text{in } D^2, \\ G = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases}$$

Nun definieren wir

$$H := f - \nabla^\perp G - \nabla F.$$

Dann gilt $H \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^2)$ und wie im Beweis zu Lemma 5.16 gilt $H \in C^\infty(D^2, \mathbb{R}^2)$, $\triangle H = 0$, $\operatorname{div} H = 0$ und $\operatorname{curl} H = 0$. Weiter gilt:

(α) Punktweise

$$\begin{aligned} \langle H, \tau \rangle &= \langle f, \tau \rangle - \langle \nabla^\perp G, \tau \rangle - \langle \nabla F, \tau \rangle \\ &= \langle f, \tau \rangle - \langle \nabla G, \nu \rangle + \langle \nabla^\perp F, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Nun gilt nach Theorem 4.32, dass wegen $G \in W^{2,2}_{\text{Neu}}$ auch $\langle \nabla G, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ gilt, sowie nach Theorem 4.31, dass wegen $F \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)$ gilt: $\langle \nabla^\perp F, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$. Mit der Voraussetzung $\langle f, \tau \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ folgt somit

$$\langle H, \tau \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$$

und somit nach Lemma 5.18, dass

$$H \equiv 0.$$

(β) Analog zu (α) gilt punktweise

$$\langle H, \nu \rangle = \langle f, \nu \rangle - \langle \nabla^\perp G, \nu \rangle - \langle \nabla F, \nu \rangle.$$

Aus Theorem 4.32 und Theorem 4.31 folgt wieder, dass $\langle \nabla F, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ und $\langle \nabla^\perp G, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$. Somit folgt auch jetzt

$$\langle H, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$$

und somit nach Lemma 5.18, dass

$$H \equiv 0.$$

Also gilt in beiden Fällen (α) und (β)

$$f = \nabla^\perp G + \nabla F \quad \text{punktweise fast überall in } D^2.$$

Zur Eindeutigkeit:
Nehmen wir zwei Darstellungen

$$f = \nabla^\perp G_1 + \nabla F_1$$

und

$$f = \nabla^\perp G_2 + \nabla F_2$$

mit F_1, F_2, G_1, $G_2 \in W^{2,2}$ und F_1, F_2, sowie G_1, G_2 den gleichen Randwerten aus (α) oder (β).
Dann gilt

$$\nabla^\perp (G_1 - G_2) + \nabla (F_1 - F_2) = 0$$

und somit

$$0 = \operatorname{div}(\nabla^\perp (G_1 - G_2) + \nabla (F_1 - F_2)) = \triangle (F_1 - F_2),$$

woraus wegen der gleichen Randwerte folgt

$$F_1 = F_2$$

und

$$0 = \operatorname{curl}(\nabla^\perp(G_1 - G_2) + \nabla(F_1 - F_2)) = \triangle(G_1 - G_2)$$

und somit wieder

$$G_1 = G_2.$$

Damit ist die Darstellung eindeutig.

Zur Linearität:
Die Linearität folgt sofort aus der Eindeutigkeit, denn im Fall (α) gilt für Funktionen $f_1,\ f_2 \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^z)$, welche ($\alpha$) erfüllen, und $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\langle \tau, \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \rangle = \lambda_1 \langle \tau, f_1 \rangle + \lambda_2 \langle \tau, f_2 \rangle \in W_0^{1,2}(D^2),$$

und analog gilt im Fall (β) für Funktionen $f_1,\ f_2 \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^z)$, welche ($\beta$) erfüllen, und $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\langle \nu, \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \rangle = \lambda_1 \langle \nu, f_1 \rangle + \lambda_2 \langle \nu, f_2 \rangle \in W_0^{1,2}(D^2).$$

Somit gilt für G, F "Lösung" zu $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, G_1, F_1 Lösung zu f_1 und G_2, F_2 Lösung zu f_2

$$\lambda_1 \nabla^\perp G_1 + \lambda_2 \nabla^\perp G_2 + \lambda_1 \nabla F_1 + \lambda_2 \nabla F_2 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \nabla^\perp G + \nabla F,$$

und wegen der Eindeutigkeit folgt

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = G$$

sowie

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = F.$$

Also folgt die Linearität.

Zu den Abschätzungen (5.17) und (5.18):
Zunächst beachten wir, dass in beiden Fällen (α) und (β) die Poincaré-Ungleichung, Lemma 4.1, sowohl auf F als auch auf G angewendet werden kann, da sowohl $W_0^{1,2}(D^2)$ als auch $\{f \in W^{1,2}(D^2) \mid \int_{D^2} f = 0\}$ geeignete Kegel sind. Weiter gilt in beiden Fällen (α), (β), dass wir die definierenden partiellen Differentialgleichungen von F und G mit F bzw. G testen können.
Testen wir die Differentialgleichung von G mit G so erhalten wir

$$\int_{D^2} \nabla G \cdot \nabla G = -\int_{D^2} (\operatorname{curl} f)\ G,$$

also

$$\|\nabla G\|_{L^2}^2 \leq \|\operatorname{curl} f\|_{L^2}\ \|G\|_{L^2},$$

woraus folgt

$$\|G\|_{W^{1,2}(D^2)} \overset{L.4.1}{\leq} C\|\nabla G\|_{L^2} \leq C\|\operatorname{curl} f\|_{L^2(D^2)}.$$

In analoger Weise erhalten wir

$$\|F\|_{W^{1,2}} \leq C\|\operatorname{div} f\|_{L^2}.$$

Mit dem Satz von Friedrichs, Theorem 4.18 bzw. Theorem 4.19, folgt nun

$$\|G\|_{W^{2,2}(D^2)} \leq C(\|\triangle G\|_{L^2(D^2)} + \|G\|_{L^2(D^2)}) \leq C\|\operatorname{curl} f\|_{L^2(D^2)}$$

und analog

$$\|F\|_{W^{2,2}(D^2)} \leq C\|\operatorname{div} f\|_{L^2(D^2)}.$$

Zur den Abschätzungen (5.19) und (5.20) Wir rufen uns in Erinnerung, dass für $f \in W^{1,2}(D^2)$ gilt

$$\int_{D^2} f\ \partial_i \varphi = -\int_{D^2} \partial_i f\ \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(D^2). \tag{5.23}$$

Nun erhalten wir:

(α) Wegen $F \in W_0^{1,2}(D^2)$ und $f \in W^{1,2}(D^2)$ gilt

$$\int_{D^2} (\operatorname{div} f) F \overset{(5.23)}{=} -\int_{D^2} f\ \nabla F.$$

Deshalb gilt, wenn wir die schwache PDE $\triangle F = \operatorname{div} f$ mit F testen (auch hier benutzen wir wieder, dass $F \in W_0^{1,2}(D^2)$)

$$\int_{D^2} \nabla F \cdot \nabla F \overset{PDE}{=} -\int_{D^2} (\operatorname{div} f) F = \int_{D^2} f\ \nabla F$$

und es folgt

$$\|\nabla F\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}\ \|\nabla F\|_{L^2}$$

und somit gilt

$$\|F\|_{W^{1,2}} \overset{L.4.1}{\leq} \|\nabla F\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Mit schwachem Gauß, Lemma 4.5, gilt wegen $\langle f, \tau\rangle \in W_0^{1,2}$ und $G \in W^{1,2}(D^2)$, dass

$$\int_{D^2} (\operatorname{curl} f)\ G = -\int_{D^2} f \nabla^\perp G.$$

Nun testen wir die PDE $\triangle G = \operatorname{curl} f$ mit G

$$\int_{D^2} \nabla G \cdot \nabla G = -\int_{D^2} \operatorname{curl} f\ G = \int_{D^2} f \nabla^\perp G.$$

Also folgt

$$\|\nabla G\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}\ \|\nabla G\|_{L^2}$$

und deshalb mit der Poincaré-Ungleichung

$$\|G\|_{W^{1,2}(D^2)} \leq C\|\nabla G\|_{L^2(D^2)} \leq C\|f\|_{L^2(D^2)}.$$

(β) Wir rechnen analog zu (α) mit vertauschten Rollen von G und F: Wegen $G \in W_0^{1,2}(D^2)$ und $f \in W^{1,2}(D^2)$ gilt

$$\int_{D^2} (\operatorname{curl} f) G = -\int_{D^2} f\ \nabla^\perp G,$$

und durch Testen der PDE $\triangle G = \operatorname{curl} f$ mit G erhalten wir durch Anwendung der Poincaré-Ungleichung

$$\|G\|_{W^{1,2}} \leq \|\nabla G\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Zu F betrachten wir, dass mit schwachem Gauß, Lemma 4.5, wegen $\langle f, \nu\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ und $F \in W^{1,2}(D^2)$, dass

$$\int_{D^2} (\operatorname{div} f)\ F = -\int_{D^2} f \nabla F$$

und somit folgt analog zum Fall (α), dass

$$\|F\|_{W^{1,2}(D^2)} \leq C\|\nabla F\|_{L^2(D^2)} \leq C\|f\|_{L^2(D^2)}.$$

<u>Zum Fall $\operatorname{div} f = 0$ oder $\operatorname{curl} f = 0$:</u>

(i) Ist $\operatorname{div} f = 0$ und $\langle f, \nu\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$, dann ist Fall ($\beta$) erfüllt und wegen $\operatorname{div} f = 0$ gilt wegen der Abschätzung (5.17) $F = 0$, also $f = \nabla^\perp G$.

(ii) Ist $\operatorname{div} f = 0$, $\langle f, \tau\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ sowie $\int_{D^2} \operatorname{curl} f = 0$, dann ist Fall ($\alpha$) erfüllt und wegen $\operatorname{div} f = 0$ gilt wegen der Abschätzung (5.17) $F = 0$, also $f = \nabla^\perp G$.

(iii) Ist $\operatorname{curl} f = 0$ und $\langle f, \tau\rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$, dann ist Fall ($\alpha$) erfüllt und wegen $\operatorname{curl} f = 0$ gilt wegen der Abschätzung (5.18) $G = 0$, also $f = \nabla F$.

(*iv*) Ist $\operatorname{curl} f = 0$, $\langle f, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ sowie $\int_{D^2} \operatorname{div} f = 0$, dann ist Fall ($\beta$) erfüllt und wegen $\operatorname{curl} f = 0$ gilt wegen der Abschätzung (5.18) $G = 0$, also $f = \nabla F$.

Damit ist der Satz bewiesen. □

5.20 Bemerkung
Es lässt sich durch Approximation eine ähnliche Aussage für alle $f \in L^2(D^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\operatorname{div} f = 0$ erhalten, nämlich dass

$$f = \nabla^\perp G$$

für ein $G \in W^{1,2}$, so dass für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$

$$\int_{D^2} \nabla G \cdot \nabla \varphi = \int_{D^2} f \nabla^\perp \varphi.$$

Wir beachten nun, dass daraus <u>nicht</u> folgt, dass

$$\int_{D^2} \nabla G \cdot \nabla \varphi = -\int_{D^2} \operatorname{curl}(f) \varphi,$$

d.h. für $f \in W^{1,2}$, $\operatorname{div} f = 0$, erhalten wir daraus <u>nicht</u> die (stärkere) Aussage

$$f = \nabla^\perp G$$

für ein $G \in W^{2,2}_{\text{Neu}}$, denn es gilt "anschaulich" mit Gauß

$$\int_{D^2} \nabla G \cdot \nabla \varphi = \int_{D^2} f \nabla^\perp \varphi = -\int_{D^2} \operatorname{curl} f \varphi + \int_{\partial D^2} \langle f, \tau \rangle \varphi$$

für die Einheitstangente τ gegen den Uhrzeigersinn an ∂D^2. Somit kommen wir wieder zurück auf die Forderung aus Theorem 5.19, dass $\langle f, \tau \rangle = 0$ auf dem Rand sein muss.

5.21 Korollar (Hodge-Zerlegung bei Mischtermen)
Sei $f \in W_0^{1,2}(D^2)$ und $g \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2)$. Weiter gelte $\operatorname{div}((\nabla f)\ g) = 0$, d.h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(D^2)$ gelte

$$\int_{D^2} (\nabla f)\ g\ \nabla \varphi = 0. \tag{5.24}$$

Dann gibt es ein $G \in W^{1,2}(D^2)$, so dass

$$\nabla^\perp G = (\nabla f) g$$

und

$$\begin{cases} \triangle G = -\nabla^\perp f \cdot \nabla g & \text{in } D^2 \\ \frac{\partial}{\partial \nu} G = 0 & \text{auf } \partial D^2 \\ \int_{D^2} G = 0, \end{cases}$$

das heißt für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$ gilt

$$\int_{D^2} \nabla G \cdot \nabla \varphi = \int_{D^2} \nabla^\perp f \cdot \nabla g\ \varphi.$$

Beweis. Da $f \in W_0^{1,2}(D^2)$ ist, existieren $f_m \in C_0^\infty(D^2)$ mit $f_m \xrightarrow{m \to \infty} f$ in $W^{1,2}(D^2)$.
Dann gilt

$$\nabla f_m\ g \in W^{1,2}(D^2)$$

und

$$\begin{aligned} \|\nabla f_m\ g - \nabla f\ g\|_{L^2(D^2)} &\leq \|g\|_{L^\infty}\ \|\nabla f_m - \nabla f\|_{L^2} \\ &\leq \|g\|_{L^\infty}\ \|f_m - f\|_{W^{1,2}} \\ &\xrightarrow{m \to \infty} 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt für die Einheitstangente τ aus Theorem 5.19, dass

$$\langle \tau, \nabla f_m\ g\rangle = \langle \tau, \nabla f_m\rangle g \in W_0^{1,2}(D^2),$$

da $\langle \tau, \nabla f_m\rangle \in C_0^\infty(D^2)$ und $g \in W^{1,2}$.
Zusätzlich gilt nach Proposition 4.22, da $f_m \in C_0^\infty(D^2) \subset W_0^{1,2}(D^2)$

$$\int_{D^2} \operatorname{curl}((\nabla f_m)\ g) = \int_{D^2} \nabla f_m\ \nabla^\perp g \overset{P.4.22}{=} 0.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 5.19, Fall (α), erfüllt, und es existiert ein $G_m \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2)$, $\int_{D^2} G_m = 0$ sowie $E_m \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)$, so dass gilt

$$\nabla f_m\ g = \nabla^\perp G_m + \nabla E_m,$$

und es gilt punktweise fast überall in D^2

$$\triangle G_m = \operatorname{curl}(\nabla f_m\ g) = \nabla f_m \nabla^\perp g,$$

also insbesondere, wegen $G_m \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}$ für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$

$$\int_{D^2} \nabla G_m\ \nabla\varphi = -\int_{D^2} \triangle G_m\ \varphi = -\int_{D^2} \nabla f_m \nabla^\perp g\ \varphi. \tag{5.25}$$

Analog gilt für E_m

$$\triangle E_m = \operatorname{div}(\nabla f_m\ g),$$

also für alle $\varphi \in C_0^\infty(D^2)$

$$\int_{D^2} \nabla E_m\ \nabla\varphi = -\int_{D^2} \triangle E_m\ \varphi = -\int_{D^2} \operatorname{div}(\nabla f_m\ g)\ \varphi = \int_{D^2} \nabla f_m\ g\ \nabla\varphi. \tag{5.26}$$

Weiter gilt nach Theorem 5.19[9]

$$\|G_m - G_n\|_{W^{1,2}} \le C\|\nabla f_m\ g - \nabla f_n\ g\|_{L^2} \le C\|f_m - f_n\|_{W^{1,2}}\ \|g\|_{L^\infty} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

also ist G_m eine Cauchy-Folge in $W^{1,2}(D^2)$ und wir erhalten daher ein $G \in W^{1,2}(D^2)$ mit

$$G_m \xrightarrow{m\to\infty} G \quad \text{in } W^{1,2}.$$

Somit folgt natürlich auch

$$\int_{D^2} G = 0.$$

Analog gilt mit Theorem 5.19 die Abschätzung

$$\|E_m - E_n\|_{W^{1,2}} \le C\|\nabla f_m\ g - \nabla f_n\ g\|_{L^2} \le \|f_m - f_n\|_{W^{1,2}}\ \|g\|_{L^\infty} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

und daher gilt, wegen $E_m \in W_0^{1,2}(D^2)$, dass ein $E \in W_0^{1,2}(D^2)$ existiert mit

$$E_m \xrightarrow{m\to\infty} E \quad \text{in } W^{1,2}.$$

Dann hat man weiter

$$\begin{aligned}
\|\nabla f\ g \quad &- \quad \nabla^\perp G - \nabla E\|_{L^2} \\
&\le \quad \|\nabla(f - f_m)g\|_{L^2} + \|\nabla^\perp G_m - \nabla^\perp G\|_{L^2} + \|\nabla E_m - \nabla E\|_{L^2} + \|\underbrace{\nabla f_m\ g - \nabla^\perp G_m - \nabla E_m}_{=0}\|_{L^2} \\
&\le \quad \|f - f_m\|_{W^{1,2}}\ \|g\|_{L^\infty} + \|G_m - G\|_{W^{1,2}} + \|E_m - E\|_{W^{1,2}} \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0
\end{aligned},$$

[9] Eine dazu alternative Möglichkeit ist die Anwendung der Wente-Ungleichung, Theorem 7.1.

also erhalten wir die Darstellung

$$\nabla f\ g = \nabla^{\perp} G + \nabla E.$$

Wir zeigen noch, dass $E \equiv 0$ und G die gewünschte PDE erfüllt.
Zu $E \equiv 0$:
Es gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(D^2)$

$$\int_{D^2} \nabla E_m\ \nabla\varphi \overset{(5.26)}{=} \int_{D^2} (\nabla f_m g)\ \nabla\varphi.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{D^2} \nabla E \cdot \nabla\varphi\right| &\leq \int_{D^2} |\nabla E - \nabla E_m|\ |\nabla\varphi| + \underbrace{\left|\int_{D^2} \nabla E_m \nabla\varphi - \nabla f_m g\ \nabla\varphi\right|}_{=0} \\
&\quad + \int_{D^2} |\nabla(f_m - f) g\ \nabla\varphi| + \underbrace{\left|\int_{D^2} \nabla f\ g \cdot \nabla\varphi\right|}_{\overset{(5.24)}{=} 0} \\
&= \int_{D^2} |\nabla E - \nabla E_m|\ |\nabla\varphi| + \int_{D^2} |\nabla(f_m - f) g\ \nabla\varphi| \\
&\leq \|E - E_m\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla\varphi\|_{L^2} + \|\nabla(f_m - f) g\|_{L^2}\ \|\nabla\varphi\|_{L^2} \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

und deshalb gilt

$$\int_{D^2} \nabla E \cdot \nabla\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty.$$

Also ist E harmonisch und wegen $E \in W_0^{1,2}(D^2)$ folgt $E \equiv 0$. Folglich haben wir jetzt gezeigt, dass

$$f = \nabla^{\perp} G.$$

Nun zur PDE für G:
Es gilt für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$

$$\int_{D^2} \nabla G_m\ \nabla\varphi \overset{(5.25)}{=} -\int_{D^2} \nabla f_m \nabla^{\perp} g\ \varphi.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{D^2} \nabla G \cdot \nabla\varphi + \int_{D^2} \nabla f \cdot \nabla^{\perp} g\ \varphi\right| &\leq \int_{D^2} |\nabla G - \nabla G_m||\nabla\varphi| + \int_{D^2} |\nabla f_m - \nabla f||\nabla^{\perp} g||\varphi| \\
&\quad + \underbrace{\left|\int_{D^2} \nabla G_m\ \nabla\varphi + \nabla f_m \nabla^{\perp} g\ \varphi\right|}_{=0} \\
&= \int_{D^2} |\nabla G - \nabla G_m||\nabla\varphi| + \int_{D^2} |\nabla f_m - \nabla f||\nabla^{\perp} g||\varphi| \\
&\leq \|G - G_m\|_{W^{1,2}}\ \|\varphi\|_{W^{1,2}} + \|f_m - f\|_{W^{1,2}}\ \|g\|_{W^{1,2}}\ \|\varphi\|_{L^\infty} \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$

$$\int_{D^2} \nabla G \cdot \nabla\varphi = -\int_{D^2} \nabla f \cdot \nabla^{\perp} g\ \varphi,$$

und damit ist die Behauptung gezeigt. □

5.22 Bemerkung

Man macht sich anhand des Beweises leicht klar, dass die obige Aussage auch für $f_k \in W_0^{1,2}(D^2)$ *und* $g_k \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2)$, $1 \leq k \leq m$ *mit* $\sum_{k=1}^m \operatorname{div}((\nabla f_k)\ g_k) = 0$ *gültig bleibt: Es gibt dann ein* $G \in W^{1,2}(D^2)$ *mit*

$$\nabla^\perp G = \sum_{k=1}^m \nabla f_k\ g_k$$

und

$$\begin{cases} \triangle G = -\sum_{k=1}^m \nabla^\perp f_k\ \nabla g_k & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} G = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} G = 0. \end{cases}$$

6. Harmonische Analysis: Höhere Regularität durch Hardy-Räume

In diesem Abschnitt wollen wir Ergebnisse wiederholen, welche implizieren dass $W^{1,2}$-Lösungen von $\triangle v = f$ für $f \in \mathscr{H}^1 \subset L^1$ tatsächlich in $W^{2,1}_{loc}$ liegen. Zunächst werden wir die Definitionen des Hardyraum $\mathscr{H}^1$ und einige Folgerungen etablieren. Danach werden wir das Ergebnis von [CLMS93] und [Mül90] darstellen, welche notwendige Bedingungen bewiesen, dass eine L^1-Funktion tatsächlich auch in $\mathscr{H}^1$ liegt. Schließlich werden wir gemäß den Ausführungen in [Sem94] die höhere Regularität herleiten.

6.1. Hardy-Räume

Im Bereich der Partiellen Differentialgleichungen tritt das Problem auf, dass sich Ergebnisse der L^p-Theorie für $p > 1$ nicht ohne weiteres auf L^1 übertragen lassen. Der Hardy-Raum $\mathscr{H}^1$ ist ein Unterraum von L^1, in dem sich der L^p-Theorie ähnliche Ergebnisse erhalten lassen, wie wir im Abschnitt 6.3 sehen werden.Eine Übersicht über Hardy-Räume findet sich z.B. in [Ste93], eine Übersicht zur Anwendung von Hardy-Räumen in partiellen Differentialgleichungen gibt z.B. [Sem94].

6.1 Definition (Hardyraum)
(vgl. [Sem94] Seite 280)
Wir definieren eine Klasse $\mathcal{T}$ von normalisierten Testfunktionen *auf $\mathbb{R}^n$ mittels*

$$\mathcal{T} = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)|\ \operatorname{supp}\ \phi \subseteq B_1(0) \quad \textit{und}\ \|\nabla\phi\|_\infty \le 1\}.$$

Weiter definieren wir die "große Maximalfunktion" *(engl. "grand maximal function") f^* von einer messbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch*

$$f^*(x) := \sup_{t>0} \sup_{\phi\in\mathcal{T}} |\phi_t * f(x)|,$$

mit $\phi_t(x) := t^{-n}\phi(t^{-1}x)$, also

$$f^*(x) = \sup_{t>0} \sup_{\phi\in\mathcal{T}} \left| \int \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)\ \mathbf{d}y \right|,$$

wann immer dieser Ausdruck sinnvoll ist.
Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liegt genau dann im Hardy-Raum $\mathscr{H}^1 \equiv \mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$, *falls $f^* \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Norm des Hardy-Raumes ist dann definiert durch*

$$\|f\|_{\mathscr{H}^1} = \|f^*\|_{L^1}.$$

6.2 Bemerkung
Es gilt für alle $\phi \in \mathcal{T}$, dass $\|\phi\|_{L^\infty} \le 2$.
In der Tat wählen wir $e \in \mathbb{R}^n$ einen Einheitsvektor, dann ist $\phi(e) = 0$ wegen $\operatorname{supp}\ \phi \subset\subset B_1(0)$, also gilt

$$|\phi(z)| = |\phi(z) - \phi(e)| = \left| \int_0^1 \nabla\phi(tz + (1-t)e)\cdot(z-e)\mathbf{d}t \right| \le \underbrace{\|\nabla\phi\|_{L^\infty}}_{\le 1 \text{ da } \phi\in\mathcal{T}} \sup_{z\in B_1(0)} |z-e| \le 2.$$

Bisher ist die angegebene Definition von Hardy-Raum nur auf den ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ beschränkt. Einerseits ist f^* nur sinnvoll, wenn die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist, da die Faltung $\phi_t * f$ für beliebig große t auch beliebig weit "ausschmiert". Um eine lokale Definition des Hardy-Raums zu erhalten, erscheint es also sinnvoll, t nach oben zu beschränken.

6.3 Definition (lokaler Hardyraum)
(vgl. [Sem94] Seite 299)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ liegt im lokalen Hardyraum $\mathscr{H}^1_{loc}(U)$, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ ein $\varepsilon = \varepsilon(K, f)$ mit $\operatorname{dist}(K, \partial U) > \varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$\int_K \left(\sup_{0<t<\varepsilon} \sup_{\phi\in\mathcal{T}} |\phi_t * f(x)|\ \mathbf{d}x \right) < \infty.$$

Wir definieren dann

$$|f|_{\mathscr{H}^1(K,\varepsilon)} := \int_K \left(\sup_{0<t<\varepsilon} \sup_{\phi\in\mathcal{T}} |\phi_t * f(x)|\ \mathbf{d}x \right).$$

6.4 Bemerkung
Es ist zu beachten, dass $|f|_{\mathscr{H}^1(K,\varepsilon)}$ *keine Norm ist, da der Parameter* ε *von* f *und* K *abhängt.*

6.5 Definition (Atome)
(vgl. [Ste93], §2.2, Seite 106)
Ein $\mathscr{H}^1$*-Atom* a *ist eine messbare Funktion* $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, so dass gilt*

(*i*) $\operatorname{supp}(a) \subset B$ *für einen Ball* $B \subset \mathbb{R}^n$,

(*ii*) $|a| \leq \mathscr{L}^n(B)^{-1}$ *und*

(*iii*) $\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\mathbf{d}x = 0$.

6.6 Theorem (Äquivalenz von atomarem Hardy-Raum und Hardy-Raum)
(vgl. [Ste93], §2.2, Theorem 2, Seite 107)
Der Raum der unendlichen Linearkombinationen von $\mathscr{H}^1$*-Atomen ist gleich* $\mathscr{H}^1$*:*
Genauer gilt für jede Folge $(a_k)_k$ *von* $\mathscr{H}^1$*-Atomen, und jede Folge von reellen Zahlen* $(\lambda_k)_k$ *mit* $\sum |\lambda_k| < \infty$*, dass*

$$f = \sum_k \lambda_k a_k$$

im Sinne der $\mathscr{H}^1$*-Norm konvergiert, also ein* $f \in \mathscr{H}^1$ *existiert mit*

$$\left\| \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k - f \right\|_{\mathscr{H}^1} \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

Weiter gilt für eine Konstante C *unabhängig von* f, (λ_k) *und* (a_k) *die Abschätzung*

$$\|f\|_{\mathscr{H}^1} \leq C \sum_k |\lambda_k|.$$

Andererseits gilt für jedes $f \in \mathscr{H}^1$*, dass eine solche Folge* (a_k) *von* $\mathscr{H}^1$*-Atomen und eine Folge* (λ_k) *existiert, so dass*

$$\left\| \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k - f \right\|_{\mathscr{H}^1} \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

und die Abschätzung

$$\sum_k |\lambda_k| \leq C \|f\|_{\mathscr{H}^1}$$

für eine von (λ_k), f *und* (a_k) *unabhängige Konstante* C *gilt.*

6.7 Proposition (Eigenschaften von $\mathscr{H}^1$)
(vgl. [Sem94], Proposition 1.38)
Für $f \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

(*i*) $f \in L^1$ *und* $\|f\|_{L^1} \leq C\|f\|_{\mathscr{H}^1}$ *und*

(*ii*) $\int_{\mathbb{R}^n} f = 0$.

Beweis. Sei also ein $f \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

(*i*) Für den Beweis $f \in L^1$ verweisen wir auf [Gra04] Theorem 6.4.3, (b).
Für die Abschätzung benutzt man einen Faltungskern η (d.h. $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$) und wir erhalten

$$\eta_\varepsilon * f \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

und wegen

$$|\eta_\varepsilon * f| = \|\nabla\eta\|_{L^\infty} \left| \left(\frac{\eta}{\|\nabla\eta\|_{L^\infty}} \right)_\varepsilon * f \right| \leq \|\nabla\eta\|_{L^\infty} \quad f^* \in L^1$$

gilt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz

$$\|f\|_{L^1} \leftarrow \|\eta_\varepsilon * f\|_{L^1} \leq \|\nabla\eta\|_{L^\infty} \ \|f^*\|_{L^1} \leq \|\nabla\eta\|_{L^\infty} \ \|f\|_{\mathscr{H}^1}.$$

(*ii*) Wir wählen zuerst ein $\theta \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\theta \equiv 1$ auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$ und $0 \le \theta \le 1$ auf $\mathbb{R}^n$.
Dann gilt

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \theta(\frac{y}{s})\ f(y)\ \mathbf{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y), \tag{6.1}$$

denn es gilt zunächst punktweise

$$\theta(\frac{y}{s})\ f(y) \xrightarrow{s\to\infty} f(y),$$

da für $s \gg 1$ gilt, dass $\frac{y}{s} \in B_{\frac{1}{2}}(0)$ und somit $\theta(\frac{y}{s}) = 1$.
Desweiteren gilt wegen $0 \le \theta \le 1$

$$\left|\theta(\frac{y}{s})\ f(y)\right| \le |f(y)| \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n$$

und wegen $f \in \mathscr{H}^1$ gilt $f \in L^1$ nach (*i*).
Somit folgt nach dem Satz über majorisierte Konvergenz die Behauptung (6.1).

Zwischenbehauptung. *Nun gilt für alle $s > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit $s \ge |x|$, dass*

$$\frac{1}{s^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\frac{y}{s})\ f(y)\ \mathbf{d}y\right| \le C(n,\theta)\ f^*(x).$$

In der Tat sei ein $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $s \ge |x|$.
Sei $\Phi(y) := \theta(\frac{x}{s} - 2y)$, dann ist $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{supp}(\Phi) \subset B_1(0)$ (da für $|y| > 1$ gilt $\left|\frac{x}{s} - 2y\right| \ge 2|y| - \frac{|x|}{s} > 2 - 1 = 1$) und $\|\nabla\Phi\|_{L^\infty} \le 2\|\nabla\theta\|_{L^\infty} = C(\theta)$. (Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit θ außerhalb von $B_1(0)$ durch 0 fortgesetzt.)
Damit folgt für $t := 2s$

$$\begin{aligned}(\Phi_t * f)(x) &= (2s)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\frac{x-y}{2s})\ f(y)\ \mathbf{d}y \\ &= (2s)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\frac{y}{s}) f(y)\ \mathbf{d}y,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} s^{-n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\frac{y}{s})\ f(y)\ \mathbf{d}y\right| &= 2^n |(\Phi_t * f)(x)| \\ &= 2^n\ \|\nabla\Phi\|_{L^\infty}\ \left|\left(\frac{\Phi}{\|\nabla\Phi\|_{L^\infty}}\right)_t * f(x)\right| \\ &\le 2^n\ C(\theta)\ \sup_{t>0}\sup_{\psi\in\mathcal{T}} |(\psi_t * f)(x)| \\ &= C(n,\theta)\|f^*\|_{\mathscr{H}^1},\end{aligned}$$

was die Zwischenbehauptung beweist.

Somit gilt für $s \ge |x|$

$$f^*(x)\cdot|x|^n \ge \frac{1}{C}\frac{|x|^n}{s^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\frac{y}{s})\ f(y)\ \mathbf{d}y\right|$$

und deshalb für $s := |x|$

$$f^*(x)\cdot|x|^n \ge \frac{1}{C}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\frac{y}{|x|})\ f(y)\ \mathbf{d}y\right|.$$

Damit folgt

$$\liminf_{|x|\to\infty} f^*(x)|x|^n \ge \frac{1}{C}\lim_{|x|\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\frac{y}{|x|})\ f(y)\ \mathbf{d}y\right| \overset{(6.1)}{=} \frac{1}{C}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\right|.$$

Angenommen es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f \ne 0$, dann folgt

$$\liminf_{|x|\to\infty} f^*(x)|x|^n \ge \gamma > 0,$$

und deshalb existiert ein $R > 0$, so dass für alle $|x| > R$ gilt

$$f^*(x)|x|^n \geq \frac{1}{2}\gamma > 0.$$

Damit folgt aber (wir beachten: $f^* \geq 0$ nach Definition), dass

$$\|f^*\|_{L^1} \geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} f^* \geq \frac{1}{2}\gamma \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} \frac{1}{|x|^n} = \infty,$$

und somit $f \notin \mathscr{H}^1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
Also gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f = 0$. □

6.8 Proposition (Charakterisierung von $\mathscr{H}^1_{loc}$)
(vgl. [Sem94], Prop. 1.92)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$f \in \mathscr{H}^1_{loc}(U) \tag{i}$$

genau dann, wenn für jedes $\theta \in C_0^\infty(U)$ mit $\int \theta \neq 0$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\theta \cdot (f - \lambda) \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n) \tag{ii}$$

gilt, wobei f außerhalb von U durch 0 fortgesetzt wird.
Dabei ist

$$\lambda = \frac{\int \theta f}{\int \theta}$$

.

Beweis. Schritt 1:
Zunächst zur Eindeutigkeit von λ.
Angenommen für ein $\theta \in C_0^\infty(U)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \theta \neq 0$ existieren λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\theta(f - \lambda_1)$ und $\theta(f - \lambda_2)$ in $\mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$.
Dann gilt

$$\theta(\lambda_1 - \lambda_2) = \theta(f - \lambda_1) - \theta(f - \lambda_2) \in \mathscr{H}^1.$$

Nach Propositon 6.7(ii) gilt dann

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\mathbb{R}^n} \theta = 0$$

und somit wegen $\int_{\mathbb{R}^n} \theta \neq 0$

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Somit ist λ eindeutig.
Schritt 2:
Wir zeigen nun, dass aus der Existenz eines geeigneter λ für (ii) folgt, dass $f \in \mathscr{H}^1_{loc}(U)$:
Sei $K \subset\subset U$ eine kompakte Menge mit positivem Maß. Wir wählen eine Funktion $\theta \in C^\infty$, so dass supp $\theta \subset\subset U$, $\theta \equiv 1$ in einer Umgebung von K und $0 \leq \theta \leq 1$ (insbesondere ist dann $\int \theta \neq 0$).
Nach Voraussetzung existiert dann ein λ, so dass

$$\theta \cdot (f - \lambda) \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n).$$

Dies ist nach Definition von $\mathscr{H}^1$ äquivalent zu

$$\sup_{t>0} \sup_{\phi \in \mathcal{T}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n} \phi\left(\frac{x-y}{t}\right) (f(y) - \lambda)\theta \, \mathbf{d}y \right| \in L^1.$$

Sei $\varepsilon \ll 1$, so dass $B_\varepsilon(K) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon\} \subset\subset \{x \in \mathbb{R}^n : \theta \equiv 1\}$.
Damit gilt dann für alle $0 < t < \varepsilon$, dass supp $\phi\left(\frac{x-\cdot}{t}\right) \subset \{\theta \equiv 1\}$ für jedes $\phi \in \mathcal{T}$ und $x \in K$.
Somit ist dann

$$\phi\left(\frac{x-\cdot}{t}\right)\theta(\cdot) = \phi\left(\frac{x-\cdot}{t}\right),$$

für alle $x \in K$, $0 < t < \varepsilon$ und $\phi \in \mathcal{T}$.
Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_K \sup_{0<t<\varepsilon} \sup_{\phi\in\mathcal{T}} |\phi_t * f| &= \int_K \sup_{0<t<\varepsilon} \sup_{\phi\in\mathcal{T}} |\int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\frac{1}{t^n} f(y)\mathbf{d}y|\mathbf{d}x \\
&= \int_K \sup_{0<t<\varepsilon} \sup_{\phi\in\mathcal{T}} |\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\theta(y)(f(y)-\lambda+\lambda)\mathbf{d}y|\mathbf{d}x \\
&\leq \int_K \Bigg[\underbrace{\sup_{0<t<\varepsilon} \sup_{\phi\in\mathcal{T}} |\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\theta(y)(f(y)-\lambda)\mathbf{d}y|}_{\in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ nach Voraussetzung}} \\
&\qquad + \sup_{0<t<\varepsilon} \sup_{\phi\in\mathcal{T}} |\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\lambda\theta(y)\mathbf{d}y| \Bigg] \mathbf{d}x.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden folgt mit der Transformationsformel, der Wahl von $0 \leq \theta(\cdot) \leq 1$ und der Voraussetzung dass $\operatorname{supp}\phi \subset\subset B_1(0)$

$$\begin{aligned}
|\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y)\ \frac{1}{t^n}\ \phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\mathbf{d}y| &\leq |\lambda|\ \|\theta\|_{L^\infty} |\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\mathbf{d}y| \\
&\leq |\lambda| |\int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)\ \mathbf{d}z| \\
&\leq |\lambda| \int_{B_1(0)} |\phi(z)|\ \mathbf{d}z \\
&\leq |\lambda| \|\phi\|_{L^\infty} C(n).
\end{aligned}$$

Mit Bemerkung 6.2 folgt

$$|\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y)\ \frac{1}{t^n}\ \phi\left(\frac{x-y}{t}\right)| \leq 2\ C(n)\ |\lambda|$$

für alle $0 < t < \varepsilon$ und jedes $\phi \in \mathcal{T}$.
Insgesamt folgt

$$\int_K \sup_{0<t<\varepsilon} \sup_{\phi\in\mathcal{T}} |\phi_t * f| \leq \int_K |(\theta(f-\lambda))^*(x)|\mathbf{d}x + 2\ C(n)\ |\lambda| \mathscr{L}^n(K) < \infty,$$

und somit ist $f \in \mathscr{H}^1_{loc}(U)$, womit Schritt 2 gezeigt worden ist.

Schritt 3:
Nun zeigen wir, dass falls $f \in \mathscr{H}^1_{loc}(U)$, für jedes θ ein geeignetes λ für (ii) existiert:
Sei also $f \in \mathscr{H}^1_{loc}(U)$, $\theta \in C_0^\infty(U)$ mit $\int \theta \neq 0$.
Wegen $f \in \mathscr{H}^1_{loc}$ gilt auch $f \in L^1_{loc}$ (der Beweis dieser Tatsache geht wie in Proposition 6.7 (i)).
Wir setzen $\lambda := (\int \theta f) \cdot \frac{1}{\int \theta}$ (wir beachten: $\int \theta \neq 0$). Dann gilt $\int \theta(x)\ (f(x) - \lambda) = \int \theta(x) f(x)\ \mathbf{d}x - \int \theta(x) f(x)\ \mathbf{d}x \cdot \frac{\int \theta}{\int \theta} = 0$, also ist $\theta(f-\lambda)$ der (mit Schritt 1 einzige) Kandidat für $\mathscr{H}^1$, da $\int h = 0$ für alle $h \in \mathscr{H}^1$, siehe Proposition 6.7.
Wir setzen $g := \theta \cdot (f\ - \lambda)$. Wegen $f \in L^1_{loc}$ und $\theta \in C_0^\infty$ ist dann $g \in L^1$ und es gilt mit der Definition von λ

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^1} &\leq C(\theta)(\|f\|_{L^1(\operatorname{supp}(\theta)} + |\lambda|) \\
&\leq C'(\theta)\ \|f\|_{L^1(\operatorname{supp}(\theta))}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Sei $\Phi \in \mathcal{T}$. Wir wollen $\Phi_t * g$ abschätzen: Wir fixieren dazu zunächst ein beliebiges x und ein $t > 0$.

$$\begin{aligned}
\Phi_t * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right) g(y)\mathbf{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right) \theta(y)\ f(y)\ \mathbf{d}y - \lambda\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right) \theta(y)\ \mathbf{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right) \theta\left(x - t\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) f(y)\ \mathbf{d}y - \lambda\ (\Phi_t * \theta)(x) \\
&= \left(\tilde{\Phi}^{x,t}\right)_t * f(x) - \lambda\ \Phi_t * \theta(x),
\end{aligned}$$

mit $\tilde{\Phi}^{x,t}(\cdot) \equiv \tilde{\Phi}(\cdot) := \Phi(\cdot)\cdot\theta(x - t(\cdot))$ (wir beachten, dass dann $\tilde{\Phi}^{x,t}\left(\frac{x-y}{t}\right) = \Phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\ \theta(y)$).
Dann gilt für $\tilde{\Phi}$:

* supp $\tilde{\Phi} \subset \operatorname{supp}\Phi \subset\subset B_1(0)$, da $\Phi \in \mathcal{T}$,
* $\tilde{\Phi} \in C^\infty$, da sowohl Φ als auch θ in C^∞ sind und
* wegen $\nabla\tilde{\Phi} = \nabla(\Phi(\cdot)\theta(x - t(\cdot))) = \nabla\Phi(\cdot)\theta - t\Phi\nabla\theta(x - t(\cdot)))$ gilt (wir benutzen Bemerkung 6.2)

$$\begin{aligned}
\|\nabla\tilde{\Phi}\|_{L^\infty} &\le \underbrace{\|\nabla\Phi\|_{L^\infty}}_{\le 1}\ \|\theta\|_{L^\infty} + t\underbrace{\|\Phi\|_{L^\infty}}_{\le 2}\ \|\nabla\theta\|_{L^\infty} \\
&\le 2(\|\theta\|_{L^\infty} + t\|\nabla\theta\|_{L^\infty}).
\end{aligned}$$

Mit $C_1(t,\theta) := 2(\|\theta\|_{L^\infty} + t\|\nabla\theta\|_{L^\infty})$ ist dann also $\frac{1}{C_1(t,\theta)}\tilde{\Phi} \in \mathcal{T}$ und es gilt dann für das oben fixierte x und t

$$\begin{aligned}
\sup_{\Phi\in\mathcal{T}} |(\Phi_t * g)(x)| &\le C_1(t,\theta) \sup_{\Phi\in\mathcal{T}} \Big|\underbrace{\frac{1}{C_1(t,\theta)}(\tilde{\Phi}_t^{x,t}}_{\in\mathcal{T}} * f)(x)\Big| + \sup_{\Phi\in\mathcal{T}} \underbrace{|\lambda\ (\Phi_t * \theta)(x)|}_{\le|\lambda|C(\theta,n),\quad \text{s.u.}} \\
&\le C(\theta,n)\left(|\lambda| + C_1(t,\theta)\sup_{\psi\in\mathcal{T}} |(\psi_t * f)(x)|\right),
\end{aligned} \tag{6.3}$$

denn

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\Phi(\frac{x-y}{t})\ \theta(y)\ \mathbf{d}y\right| &= \left|\int_{\operatorname{supp}(\Phi)} \Phi(z)\ \theta(x - tz)\ \mathbf{d}z\right| \\
&\le |\underbrace{\operatorname{supp}(\Phi)}_{\subset B_1(0)}|\ \|\theta\|_{L^\infty}\ \underbrace{\|\Phi\|_{L^\infty}}_{\le 2} \\
&\le C(\theta,n).
\end{aligned}$$

Wir beachten, dass $|\lambda| \le C(\theta,n)\|f\|_{L^1(\operatorname{supp}(\theta))}$ ist, nach Definition von λ.
Wegen $\operatorname{supp}(\theta)\subset\subset U$ existiert ein $\delta_0 = \delta_0(\theta)$, so dass $B_\delta(\operatorname{supp}(\theta))\subset\subset U$ für alle $\delta > 0$ mit $\delta < \delta_0$. Zu jedem dieser $\delta < \delta_0$ existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta,\theta,f)$ und ohne Einschränkung $\varepsilon_0 < \min(\delta,1)$, so dass

$$\int_{\overline{B_\delta(\operatorname{supp}(\theta))}} \left(\sup_{0<t<\varepsilon_0}\ \sup_{\phi\in\mathcal{T}} |\phi_t * f(x)|\right)\ \mathbf{d}x < \infty,$$

nach der Definition von $\mathscr{H}^1_{loc}$, da $f \in \mathscr{H}^1_{loc}$.
Nach Definition von $C_1(t,\theta)$ ist $C_1(t,\theta) \le C_1(t,\theta) \equiv C_1(\theta) \equiv C_1$ für alle $t \le 1$.
Wir fixieren ein $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$.
Wir unterscheiden Fälle der Ordnung zwischen ε, t und $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\theta))$.

(*i*) Falls $\operatorname{dist}(x,\operatorname{supp}(\theta)) \ge t$:
Dann ist $\Phi_t * g(x) = 0$, denn aus $\operatorname{dist}(x,\operatorname{supp}(\theta)) \ge t$ folgt $\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right) = 0$ für alle $y \in \operatorname{supp}(\theta)$, da $\operatorname{supp}(\Phi)\subset\subset B_1(0)$. Somit ist $\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\ \theta(y) = 0$ und somit

$$\Phi_t * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\ g(y)\ \mathbf{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\ \theta(y)(f(y) - \lambda)\ \mathbf{d}y = 0.$$

$(ii)a)$ Fall $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\theta)) < t$ und $t \geq \varepsilon$:
Sei $\psi \in \mathcal{T}$. Dann gilt für ein $y \in \operatorname{supp}(\theta)$ (und somit $|y| \leq C(\theta, n)$)

$$\begin{aligned}\left|\psi\left(\frac{x-y}{t}\right) - \psi\left(\frac{x}{t}\right)\right| &= \left|\int_{s=0}^{1} \nabla\psi\left(\frac{x-y}{t} + s(\frac{x}{t} - \frac{x-y}{t})\right) \cdot \frac{1}{t} y \, \mathbf{d}s\right| \\ &\leq \underbrace{\|\nabla\psi\|_{L^\infty}}_{\leq 1} \frac{|y|}{t} \\ &\leq C(\theta, n)\, \frac{1}{t}.\end{aligned}$$

Wir benutzen dies nun, um eine Abschätzung für $\Phi_t * g(x)$ zu finden.
Wie oben gezeigt (nach Wahl von λ) gilt $\int_{\mathbb{R}^n} g = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}|\Phi_t * g(x)| &= \frac{1}{t^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\, g(y)\, \mathbf{d}y\right| \\ &= \frac{1}{t^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right) - \Phi\left(\frac{x}{t}\right)\right)\, g(y)\, \mathbf{d}y\right| \\ &\leq C(\theta, n)\, \frac{1}{t^{n+1}}\, \|g\|_{L^1},\end{aligned}$$

da $\Phi(\frac{x}{t})$ bezüglich y eine Konstante ist, und somit unter das Integral gezogen werden kann (wegen $\int g = 0$).
Bevor wir diesen Fall abschließend behandeln, betrachten wir folgende

Zwischenbehauptung. *Sei M eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Konstante $L > 0$, so dass für alle $|x| \geq L$ gilt* $\operatorname{dist}(x, M) \geq \frac{1}{2}(1 + |x|)$.

Beweis:
Wir betrachten $\frac{1+|x|}{\operatorname{dist}(x,M)}$ für $|x| \geq C > C_0 := \sup_{y \in M} |y|$ (wegen M beschränkt existiert ein solches C).
Es gilt

$$\operatorname{dist}(x, M) = \inf_{y \in M} |x - y| \geq |x| - \sup_{y \in M} |y| = |x| - C_0$$

und somit

$$\frac{1 + |x|}{\operatorname{dist}(x, M)} \leq \frac{|x| + 1}{|x| - C_0} \xrightarrow{|x| \to \infty} 1.$$

Also gibt es ein $L > 0$, so dass für alle $|x| \geq L$ gilt, dass $\frac{|x|+1}{|x|-C_0} \leq 2$.
Somit gilt auch

$$\frac{1 + |x|}{\operatorname{dist}(x, M)} \leq \frac{|x| + 1}{|x| - C_0} \leq 2 \quad \text{für alle } |x| \geq L.$$

Daraus wiederum folgt sofort die Behauptung. $||$Wir wenden dieses Zwischenresultat auf $M := \operatorname{supp}(\theta)$ an und erhalten für $|x| \geq L = L(\theta)$ und wegen $t \geq \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\theta)) \geq \frac{1}{2}(1 + |x|)$:

$$|(\Phi_t * g)(x)| \leq C \frac{1}{t^{n+1}} \|g\|_{L^1} \leq 2C \frac{1}{(1 + |x|)^{n+1}} \|g\|_{L^1}.$$

Ist $|x| < L$, dann erhalten wir $0 < 1 + |x| \leq 1 + L = C(\theta)$, also $1 \leq C(\theta)\frac{1}{1+|x|}$; benutzt man weiter, dass $t \geq \varepsilon$, erhalten wir $\frac{1}{t^{n+1}} \leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}$ und es folgt

$$|(\Phi_t * g)(x)| \leq C \frac{1}{t^{n+1}} \|g\|_{L^1} \leq C(\theta)\, \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \|g\|_{L^1} \leq C(\theta, n)\, \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{1}{(1 + |x|)^{n+1}} \|g\|_{L^1}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$, unter der Voraussetzung, dass $t \geq \varepsilon$ und $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\theta)) \leq t$, erhalten wir somit die Abschätzung (wir beachten $\varepsilon < 1$)

$$|\Phi_t * g|(x) \leq C(\theta, n) \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\, \|g\|_{L^1}.$$

$(ii)b)$ Fall $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\theta)) \leq \varepsilon$ und $t < \varepsilon < 1$:
Es gilt also $C_1(t,\theta) \leq C_1(\theta)$ und somit (siehe (6.3))

$$\sup_{\Phi \in \mathcal{T}} |\Phi_t * g(x)| \leq \tilde{C}(\theta, n) \left(|\lambda| + \sup_{\psi \in \mathcal{T}} |\psi_t * f(x)| \right).$$

Damit folgt (wir setzen $B := \overline{B_\varepsilon(\operatorname{supp}(\theta))}$ und beachten $|B| \leq C(\operatorname{supp}(\theta), n)$, da $\delta_0 = \delta_0(\operatorname{supp}(\theta))$)

$$\begin{aligned}
\int_B \sup_{0<t<\varepsilon} \sup_{\Phi\in\mathcal{T}} |\phi_t * g(x)| &\leq \tilde{C}(\theta,n) \int_B \sup_{0<t<\varepsilon} \left(|\lambda| + \sup_{\psi\in\mathcal{T}} |\psi_t * f(x)| \right) \\
&\leq C\big[\mathscr{L}^n(B)\, |\lambda| + \underbrace{\int_B \sup_{0<t<\varepsilon} \sup_{\psi\in\mathcal{T}} |\psi_t * f(x)| \,\mathbf{d}x}_{=|f|_{\mathscr{H}^1(B,\varepsilon)} \text{ nach Def. 6.3}} \big] \\
&\leq C(\theta,n) \left[|\lambda| + |f|_{\mathscr{H}^1(B,\varepsilon)} \right].
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$d(x) := \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\theta)),$$
$$B := \overline{B_\varepsilon(\operatorname{supp}(\theta))}$$

und

$$g_t(x) := \sup_{\Phi\in\mathcal{T}} |(\Phi_t * g)(x)|$$

und berechnen unter Ausnutzung der Fälle (i), $(ii)a)$ und $(ii)b)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} g_t(x)\,\mathbf{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\varepsilon>t>0} g_t(x)\,\mathbf{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t\geq\varepsilon} g_t(x)\,\mathbf{d}x \\
&\leq \underbrace{\int_B \sup_{\varepsilon>t>0} g_t(x)\,\mathbf{d}x}_{\leq C(\|f\|+|\lambda|) \text{ nach } (ii)b)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n\setminus B} \sup_{\varepsilon>t>0} g_t(x)\,\mathbf{d}x}_{d(x)\geq\varepsilon \;\Rightarrow\; =0 \text{ nach } (i)} + \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t\geq\varepsilon} \underbrace{g_t(x)}_{=0 \text{ für } t\leq d(x)} \mathbf{d}x \\
&\leq C(\theta,n)(|f|_{\mathscr{H}^1(B,\varepsilon)} + |\lambda|) + \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{t\geq\varepsilon,\\ t\geq d(x)}} \underbrace{\sup_{\Phi\in\mathcal{T}} |(\Phi_t * g)(x)|}_{\leq C\frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} \|g\|_{L^1} \text{ nach } (ii)a)} \mathbf{d}x \\
&\leq C(\theta,n)(|f|_{\mathscr{H}^1(B,\varepsilon)} + |\lambda|) + C(n,\theta)\frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \|g\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}\,\mathbf{d}x \\
&\leq C(\theta,n)(|f|_{\mathscr{H}^1(B,\varepsilon)} + |\lambda| + \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\|g\|_{L^1}).
\end{aligned}$$

Somit ist $g \in \mathscr{H}^1$, wegen Abschätzung (6.2), und es folgt (beachte $\varepsilon < 1$)

$$\|g\|_{\mathscr{H}^1} \leq C(\theta,n)(|f|_{\mathscr{H}^1(B,\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\|g\|_{L^1}).$$

mit der Definition von λ.Wegen $\varepsilon < \varepsilon_0 < \delta$ und somit $B = B_\varepsilon(\operatorname{supp}(\theta)) \subset B_\delta(\operatorname{supp}(\theta))$ folgt dann

$$\|g\|_{\mathscr{H}^1} \leq C(|f|_{\mathscr{H}^1(B_\delta(\operatorname{supp}(\theta)),\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\|f\|_{L^1(\operatorname{supp}(\theta))}),$$

womit die Behauptung von Schritt 3 bewiesen ist. □

6.2. Regularitätsgewinn von L^1 nach $\mathscr{H}^1$

In diesem Abschnitt wollen wir ein weitreichendes Ergebnis von R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer und S. Semmes aus dem Artikel [CLMS93] vorstellen, welches dem Artikel [Mül90] von S. Müller folgte, der dieses Ergebnis unter stärkeren Voraussetzungen erhalten hatte (siehe Theorem 6.14).
Seien $E \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $B \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und $\operatorname{div}\ E = 0$, $\operatorname{curl}\ B = 0$. Dann ist das Skalarprodukt $E \cdot B \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\|E \cdot B\|_{\mathscr{H}^1} \leq C(n,p,q)\|E\|_{L^p}\|B\|_{L^q}.$$

6.2.1. Maximaltheorem

Als eine Vorbereitung auf den Beweis vom Theorem 6.14 benötigen wir das sogenannte *Maximaltheorem* , Theorem 6.12, welches uns L^p-Abschätzungen für einen gewissen Faltungsoperator liefern wird.

6.9 Definition
Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Für $B := B_\delta(x) \subset \mathbb{R}^n$ sei $B^* := \bigcup_{\tilde{B} \in C} \tilde{B}$, wobei $C := \{\tilde{B} = B_\delta(\tilde{x}) |\ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n,\ \tilde{B} \cap B \neq \emptyset\}$ die Menge aller offenen Kugeln in $\mathbb{R}^n$ mit Radius δ und nichtleerem Schnitt mit B ist.

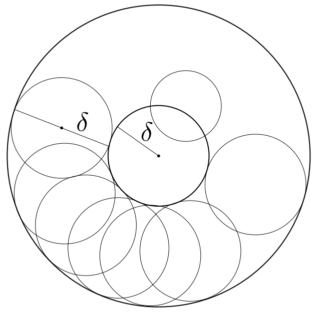

Abbildung 6.1: Es gilt $B^* = B_{3\delta}(x)$.

6.10 Bemerkung
Es gilt $B^* = B_{3\delta}(x)$, insbesondere gilt für jedes $B = B_\delta(x)$ und das zugehörige B^*, definiert wie in Definition 6.9,

$$\mathscr{L}^n(B^*) = 3^n\ \mathscr{L}^n(B_\delta(x)).$$

Beweis. Der Beweis davon läuft über zwei Inklusionen:

„$\supseteq$“ Sei $y \in B_{3\delta}(x)$, also $|y - x| < 3\delta$. Wegen der strikten Ungleichung existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass $|y - x| < 3(\delta - \varepsilon)$. Da $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ ein Hilbert-Raum und $\overline{B_{\delta-\varepsilon}(x)}$ konvex ist, existiert nach dem Projektionslemma (vgl. z.B. [Alt99], 2.2 Projektionssatz) genau ein $\tilde{x} \in \overline{B_{\delta-\varepsilon}(x)}$ mit

$$|\tilde{x} - y| = \operatorname{dist}(y, B_{\delta-\varepsilon}(x)).$$

Wir suchen einen Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $B_\delta(\xi) \ni y, \tilde{x}$.Dazu betrachten wir das Segment zwischen y und x, also die Elemente $\frac{\lambda}{3}y + \frac{3-\lambda}{3}x$, $0 \le \lambda \le 3$.
Für alle $0 \le \lambda \le 1$ liegen diese Punkte in $B_{\delta-\varepsilon}(x)$, wegen

$$\left|\frac{\lambda}{3}y + \frac{3-\lambda}{3}x - x\right| = \frac{\lambda}{3}|y - x| < \frac{\lambda}{3}3(\delta - \varepsilon) \le \delta - \varepsilon.$$

Andererseits gilt für $0 \le \lambda \le 1$

$$\left|\frac{\lambda}{3}y + \frac{3-\lambda}{3}x - y\right| = \left|\frac{\lambda - 3}{3}(y - x)\right| = \frac{3-\lambda}{3}|y - x| < (3 - \lambda)(\delta - \varepsilon).$$

Daraus folgt

$$|y - \tilde{x}| = \operatorname{dist}(y, B_{\delta-\varepsilon}(x)) \le \inf_{0\le\lambda\le1} (3 - \lambda)(\delta - \varepsilon) = 2(\delta - \varepsilon). \tag{6.4}$$

Sei $\xi := \frac{\tilde{x}+y}{2}$ der Mittelpunkt zwischen $\tilde{x}$ und y. Dann folgt

$$|\xi - y| = |\xi - \tilde{x}| = \frac{1}{2}|\tilde{x} - y| \overset{(6.4)}{\le} \delta - \varepsilon < \delta,$$

also $\tilde{x}, y \in B_\delta(\xi)$ (siehe Abbildung 6.2.1).
Es ergibt sich zusammengefasst: $y \in B_\delta(\xi)$ einerseits, $B_\delta(\xi) \cap B_\delta(x) \supseteq \{\tilde{x}\} \neq \emptyset$, womit $y \in B^*$ gezeigt ist.

„$\subseteq$“ Sei $y \in B^*$, dann existiert ein $\tilde{x}$ und ein ξ, so dass $y \in B_\delta(\tilde{x})$ und $B_\delta(\tilde{x}) \cap B_\delta(x) \supseteq \{\xi\} \neq \emptyset$.
Daraus folgt

$$|y - x| \le \underbrace{|y - \tilde{x}|}_{<\delta} + \underbrace{|\tilde{x} - \xi|}_{<\delta} + \underbrace{|\xi - x|}_{<\delta} < 3\delta.$$

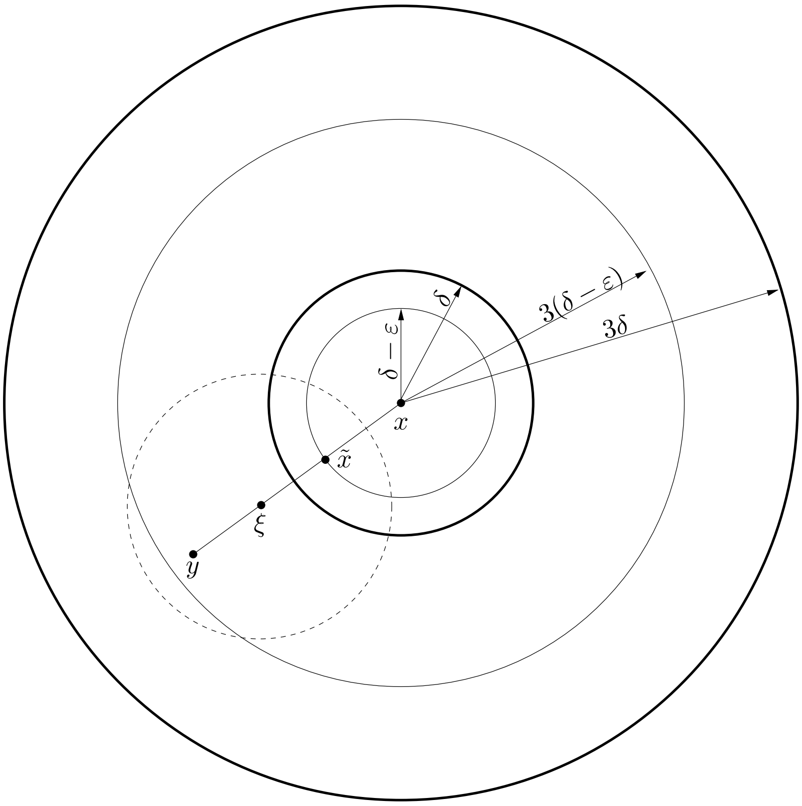

Abbildung 6.2: Durch die Wahl $\xi = \frac{\tilde{x}+y}{2}$ erhält man $y \in B_\delta(\xi)$ und $B_\delta(\xi) \cap B_\delta(x) \neq \emptyset$.

6.11 Lemma (Abgeschätzte Teilfolgen endlicher Überdeckungen)
(vgl. [Ste93], Kap I, §3, Lemma 1)
Es gibt ein $c = c(n) > 0$, so dass für jedes messbare $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mit einer endlichen Überdeckung durch Kugeln $(B_j)_{1\leq j\leq m}$, eine Teilfolge $(B_{j_k})_{1\leq k\leq m'}$ paarweise disjunkter Kugeln existiert, der Übersicht halber mit $(B_k)_k$ bezeichnet, welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\sum_{k=1}^{m'} \mathscr{L}^n(B_k) \geq c\mathscr{L}^n(E).$$

Beweis. Wir definieren

$$C_0 := \{B_{j_0}\}$$

für ein $j_0 \in \{1,\dots,m\}$ mit $\operatorname{diam} B_{j_0} \geq \operatorname{diam} B_j$ für alle $j \in \{1,\dots,m\}$. Sei

$$A_k := \{j \in \{1,\dots,m\} |\ B_j \cap B_i = \emptyset \quad \text{für alle } i \text{ mit } B_i \in C_k\}, \quad k \geq 0,$$

wobei C_k rekursiv definiert ist als

$$C_{k+1} = C_k \cup \{B_{j_k}\}$$

für ein $j_k \in A_k$ mit $\operatorname{diam} B_{j_k} \geq \operatorname{diam} B_j$ für alle $j \in A_k$.
In der Menge C_k ist also eine Teilmenge der Überdeckung von E mit k disjunkten Bällen mit Radien $r_1 \geq r_2 \geq \dots r_k$, so dass für alle anderen Teilmengen $\tilde{C}_k$ mit k paarweise disjunkten Bällen mit den Radien $\tilde{r}_1 \geq \dots \geq \tilde{r}_k$ gilt, dass $(\tilde{r}_1,\dots,\tilde{r}_k) \preceq_L (r_1,\dots,r_k)$ bezüglich der *lexigraphischen Ordnung*[10] $\preceq_L$.Wir setzen $C := \bigcup_k C_k$ und $m' := |C|$; dann besteht C aus disjunkten Bällen.
Andererseits gilt für jeden Ball $B_j \notin C$, dass es ein k_0 gibt mit $B_j \cap B_{k_0} \neq \emptyset$, $\operatorname{diam}(B_j) \leq \operatorname{diam}(B_{k_0})$ und $B_{k_0} \in C$. Nach Definition von $B^*_{k_0}$ ist dann $B_j \subset B^*_{k_0}$. Wir setzen $C^* := \{B^* \mid B \in C\}$.

[10] Die *lexigraphische Ordnung* $\preceq_L$ ist eine totale Ordnung auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$. Für zwei Vektoren $v = (v_1,\dots,v_k)$ und $w = (w_1,\dots,w_k)$ ist $v \preceq_L w$ genau dann, wenn $v = w$ oder wenn ein j_0 mit $k \geq j_0 \geq 1$ existiert, so dass $v_j = w_j$ für alle $1 \leq j < j_0$ und $v_{j_0} < w_{j_0}$.

Mit der Überdeckungseigenschaft der $(B_j)_j$ folgt also, dass E erst recht von den Bällen in C^* überdeckt wird. Daher folgt mit Bemerkung 6.10

$$\mathscr{L}^n(E) \le \sum_{k=1}^{m'} \mathscr{L}^n(B_k^*) \overset{B.6.10}{\le} C(n) \sum_{k=1}^{m'} \mathscr{L}^n(B_k).$$

Dies impliziert mit $c \equiv c(n) := \frac{1}{C(n)}$

$$\sum_{k=1}^{m'} \mathscr{L}^n(B_k) \ge c\mathscr{L}^n(E).$$

□

6.12 Theorem (Maximaltheorem)
(vgl. [Ste93]: p. 13, Th. 1)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, dann ist $M(f)$ definiert durch

$$M(f)(x) := \sup_{t>0} ⨍_{B_t(x)} |f(y)| \mathbf{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

endlich punktweise fast überall in $\mathbb{R}^n$.

(b) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt für jedes $\alpha > 0$

$$\mathscr{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : \ (Mf)(x) > \alpha\}) \le \frac{C(n)}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \mathbf{d}y. \tag{6.5}$$

(c) Falls $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist, $1 < p < \infty$, dann ist $M(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, und es existiert eine Konstante $C = C(p, n)$ mit

$$\|M(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussage (b), aus der (a) und (c) folgen.
Sei also $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$. Anstatt die Maximalfunktion $M(f)$ betrachten wir die *nichtzentrierte Maximalfunktion* $\tilde{M}(f)$, definiert durch

$$\tilde{M}(f)(x) := \sup\left\{⨍_B |f(y)| \ \mathbf{d}y \ \middle| \ B = B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x}), \ \tilde{\delta} > 0, \ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \ B \ni x\right\}.$$

Aus der Definition

$$M(f)(x) := \sup\left\{⨍_B |f(y)| \ \mathbf{d}y \ \middle| \ B = B_{\tilde{\delta}}(x), \ \tilde{\delta} > 0\right\}$$

ist dann ersichtlich, dass

$$M(f)(x) \le \tilde{M}(f)(x), \quad \text{für } \mathscr{L}^n\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Es folgt

$$\mathscr{L}^n(\{x : \ M(f)(x) > \alpha\}) \le \mathscr{L}^n(\{x : \ \tilde{M}(f)(x) > \alpha\}).$$

Es reicht also, die Behauptung (6.5) für $\tilde{M}(f)$ zu zeigen. Wir definieren

$$E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n | \ \tilde{M}(f)(x) > \alpha\}.$$

Dann ist E_α offen, da für $x \in E_\alpha$ eine offene Kugel $B_x \ni x$ existiert, so dass

$$\frac{1}{\mathscr{L}^n(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \mathbf{d}y > \alpha, \tag{6.6}$$

und somit gilt dass $\tilde{M}(f)(y) > \alpha$ für alle $y \in B_x$. (Dies wäre mit $M(f)$ nicht der Fall gewesen).
Sei E kompakt (also insbesondere $\mathscr{L}^n$-messbar) und $E \subset E_\alpha$. Dann ist die Menge

$$\{B_x, \ \text{mit (6.6)}, \ x \in E\}$$

eine offene Überdeckung von E. Da E kompakt ist, existieren folglich endlich viele $(B_{x_j})_j$, die E überdecken. Durch Anwendung von Lemma 6.11 erhalten wir eine endliche Menge von paarweise disjunkten Kugeln $(B_{x_k})_{k=1}^m$, $x_k \in E \subset E_\alpha$ und ein $c = c(n) > 0$ mit

$$\sum_{k=1}^{m} \mathscr{L}^n(B_{x_k}) \geq c\, \mathscr{L}^n(E).$$

Damit folgt unter Beachtung von (6.6) und der Tatsache, dass $(B_{x_k})_k$ aus paarweise disjunkten Mengen besteht,

$$\mathscr{L}^n(E) \leq \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{m} \mathscr{L}^n(B_{x_k}) \overset{(6.6)}{\leq} \frac{1}{c\alpha}\sum_{k=1}^{m}\int_{B_{x_k}} |f(y)|\mathbf{d}y \leq \frac{1}{c\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\mathbf{d}y.$$

Zusammengefasst gilt für jedes $E \subset\subset E_\alpha$ kompakt, dass

$$\mathscr{L}^n(E) \leq C(n)\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\mathbf{d}y,$$

also auch

$$\sup_{E^{comp}\subset E_\alpha} \mathscr{L}^n(E) \leq C(n)\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\mathbf{d}y.$$

Wegen $\mathscr{L}^n(E_\alpha) = \sup_{E\subset\subset E_\alpha} \mathscr{L}^n(E)$ (wir benutzen: E_α ist offen), folgt schließlich

$$\mathscr{L}^n(E_\alpha) \leq C\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\mathbf{d}y,$$

also die Behauptung (b).
Als nächstes beweisen wir die Behauptung (c).
Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Für ein beliebiges $\alpha > 0$ definieren wir f_α durch

$$f_\alpha(x) := f(x)\cdot \chi_{\{|f(x)|>\frac{\alpha}{2}\}}.$$

Dann gilt

$$|f(y)| \leq \left\{\begin{array}{ll} |f_\alpha(y)|, & \text{falls } |f(y)| > \frac{\alpha}{2}, \\ \frac{\alpha}{2}, & \text{falls } |f(y)| \leq \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \leq |f_\alpha(y)| + \frac{\alpha}{2}.$$

Daraus folgt die folgende Abschätzung für $\tilde{M}(f)$:

$$\tilde{M}(f)(x) = \sup_{B\ni x} \fint_B |f(y)|\mathbf{d}y \leq \sup_{B\ni x}\left(\frac{1}{\mathscr{L}^n(B)}\int_B |f_\alpha(y)|\right) + \frac{\alpha}{2} = \tilde{M}(f_\alpha)(x) + \frac{\alpha}{2}.$$

Gilt für ein $x \in \mathbb{R}^n$ die strikte Ungleichung $\tilde{M}(f)(x) > \alpha$, so folgt $\alpha < \tilde{M}(f)(x) \leq \tilde{M}(f_\alpha)(x) + \frac{\alpha}{2}$ und somit $\tilde{M}(f_\alpha)(x) > \frac{\alpha}{2}$. Dies impliziert

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{M}(f)(x) > \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{M}(f_\alpha) > \frac{\alpha}{2}\}. \tag{6.7}$$

Es gilt $f_\alpha \in L^p \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, denn wir haben $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p < \infty$, somit

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^n}|f|^p \geq \int_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}}|f|^p = \int_{\mathbb{R}^n}|f_\alpha|^p,$$

also $f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$, und

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^n}|f|^p \geq \int_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}}|f|^p \geq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \mathscr{L}^n(\{|f| > \frac{\alpha}{2}\}),$$

also $\mathscr{L}^n(\{|f| > \frac{\alpha}{2}\}) < \infty$, woraus mit der Hölder-Ungleichung folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_\alpha| = \int_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}}|f| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, \mathscr{L}^n(\{|f| > \frac{\alpha}{2}\})^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{6.8}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{M}(f)(x) > \alpha\}) &\overset{(6.7)}{\leq} \mathscr{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{M}(f_\alpha) > \frac{\alpha}{2}\}) \\ &\overset{(b)}{\leq} \frac{C}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f_\alpha| \\ &= \frac{C}{\alpha}\int_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}} |f|.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Bevor wir fortfahren, benötigen wir noch eine

Nebenrechnung. Wir wollen für $1 \leq p < \infty$ durch geschicktes Anwenden des Satzes von Fubini eine uns genehmere Darstellung für $\int_{\mathbb{R}^n} g^p(x)\mathbf{d}x$ erhalten, wobei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung mit $g \geq 0$ sei. Es gilt

$$g^p(x) = \int_0^{g(x)} p \cdot \alpha^{p-1}\mathbf{d}\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g^p(x)\mathbf{d}x &= p\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{g(x)} \alpha^{p-1}\mathbf{d}\alpha\ \mathbf{d}x \\ &= p\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{\infty} \alpha^{p-1}\ \chi_{\{g(x)>\alpha\}}(\alpha, x)\mathbf{d}\alpha\ \mathbf{d}x \\ &= p\int_0^{\infty} \alpha^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{g(x)>\alpha\}}\mathbf{d}x\ \mathbf{d}\alpha \\ &= p\int_0^{\infty} \alpha^{p-1}\int_{\{g>\alpha\}} \mathbf{d}x\ \mathbf{d}\alpha \\ &= p\int_0^{\infty} \alpha^{p-1}\mathscr{L}^n(\{g > \alpha\})\mathbf{d}\alpha,\end{aligned} \tag{6.10}$$

falls $p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\mathscr{L}^n(\{g > \alpha\})\mathbf{d}\alpha$ endlich ist[11]. ||

Mit dieser Nebenrechnung, (6.9), $p > 1$ und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{M}(f))^p &\overset{(6.10)}{=} p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\ \mathscr{L}^n(\{\tilde{M}(f) > \alpha\})\ \mathbf{d}\alpha \\ &\overset{(6.9)}{\leq} p\int_0^\infty \frac{C}{\alpha}\alpha^{p-1}\int_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}} |f(y)|\mathbf{d}y\ \mathbf{d}\alpha \\ &= C(p,n)\int_0^\infty \alpha^{p-2}\int_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}} |f(y)|\mathbf{d}y\ \mathbf{d}\alpha \\ &= C(p,n)\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}}|f(y)|\alpha^{p-2}\mathbf{d}y\ \mathbf{d}\alpha \\ &\overset{Fub}{=} C(p,n)\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \chi_{\{|f|>\frac{\alpha}{2}\}}|f(y)|\alpha^{p-2}\mathbf{d}\alpha\ \mathbf{d}y \\ &= C(p,n)\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{2|f|} |f(y)|\alpha^{p-2}\mathbf{d}\alpha\ \mathbf{d}y \\ &\overset{p\geq 1}{=} C(p,n)\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\left[\frac{\alpha^{p-1}}{p-1}\right]_{\alpha=0}^{2|f|}\mathbf{d}y \\ &= C(p,n)\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty,\end{aligned}$$

da der letzte Term existiert (und somit der Satz von Fubini anwendbar war). Damit folgt die Behauptung (c) und die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(f)^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{M}(f)^p \leq C(p,n)\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p$$

[11] Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar ist $\tilde{g} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{g}(x,s) := g(x) - s$ messbar, da für die Projektion π_n von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf $\mathbb{R}^n$ die Abbildung $\tilde{g}+s = g\circ\pi_n$ eine Verknüpfung zweier messbarer Funktionen ist. Daher ist die Abbildung $\chi_{\{g(x)>s\}} = \chi_{\{\tilde{g}(x,s)>0\}}$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ Lebesgue-messbar.

ist bewiesen.

Zum Schluss noch der Beweis zu (a):
Sei $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. Wir betrachten zunächst $f_2 := f \cdot \chi_{\{|f|>1\}}$, dann folgt wie im Beweis zu (c), (6.8), dass $f_2 \in L^1$ ist (da $p < \infty$). (Wir beachten, dass f gegebenenfalls nicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt.)
Mit (b) folgt dann

$$\mathscr{L}^n(\{\tilde{M}(f_2) > \beta\}) \leq \frac{C}{\beta}\int_{\mathbb{R}^n} |f_2| \quad \text{für jedes } \beta > 0.$$

Dies impliziert

$$\limsup_{\beta\to\infty} \mathscr{L}^n(\{\tilde{M}(f_2) > \beta\}) = 0$$

und somit gilt, wegen

$$\mathscr{L}^n(\{\tilde{M}(f_2) > \beta\} \geq \mathscr{L}^n(\{\tilde{M}(f_2) = \infty\}), \quad \text{für jedes } \beta > 0,$$

dass

$$0 = \limsup_{\beta\to\infty} \mathscr{L}^n(\{\tilde{M}(f_2) > \beta\}) \geq \mathscr{L}^n(\{\tilde{M}(f_2) = \infty\}) \geq 0,$$

also

$$\mathscr{L}^n(\{M(f) = \infty\}) \leq \mathscr{L}^n(\{\tilde{M}(f) = \infty\}) = \mathscr{L}^n(\{\tilde{M}(f_2) = \infty\}) = 0,$$

womit schließlich auch (a) bewiesen ist. □

6.2.2. Regularitätsbeweis nach Coifman, Lions, Meyer, Semmes

Im Folgenden sei die $n \geq 2$.

6.13 Lemma
(vgl. [CLMS93], Lemma II.1)
Seien $E \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $B \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, wobei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (und somit notwendig $1 < q < \infty$). Desweiteren gelte (im schwachen Sinne) $\operatorname{div} E = 0$, $\operatorname{curl} B = 0$, d.h

$$\int_{\mathbb{R}^n} E\ \nabla\varphi = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} B_i\partial_j\varphi - B_j\partial_i\varphi = 0, \quad 1 \leq i,j \leq n \text{ und für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{6.11}$$

Sei $h \in \mathcal{T}$ (vgl. Definition 6.1).
Für jedes α, β, welches

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad 1 < \alpha \leq p, \quad 1 < \beta \leq q \tag{6.12}$$

erfüllt, existiert dann ein $C \equiv C(\alpha, \beta, n)$, so dass

$$|(h_t * (E\cdot B))(x)| \leq C\left(⨍_{B_t(x)} |E|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(⨍_{B_t(x)} |B|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0. \tag{6.13}$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, sternförmiges Gebiet und $E \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $B \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und (6.11) erfüllt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt die Ungleichung (6.13) für alle $x \in \Omega$ und $t < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ mit derselben Konstante $C(n)$. Insbesondere gilt (6.13) auch für $E \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $B \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, falls (6.11) für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ erfüllt ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst den Fall $\mathbb{R}^n$ und skizzieren danach den Beweis im lokalen Fall.
Es gilt $\operatorname{curl} B = 0$. Dann existiert nach Lemma 5.13(ii) ein $\pi \in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $\nabla\pi = B$. Es gilt mit den Rechenregeln aus Lemma 4.21 im schwachen Sinn

$$\operatorname{div}(E\pi) = E\ \nabla\pi = E \cdot B,$$

d.h. es gilt

$$-\int_{\mathbb{R}^n} E\cdot B\ \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \pi\ E\cdot\nabla\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Damit folgt für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $t > 0$ (wir beachten: $h_t(x - \cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$)

$$h_t * (E \cdot B)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h_t(x-y)\ E \cdot B(y)\mathbf{d}y = -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y(h_t(x-y)) \cdot E(y)\pi(y)\mathbf{d}y.$$

Nun gilt

$$\nabla_y h_t(x-y) = -\frac{1}{t^{n+1}}\nabla h\left(\frac{x-y}{t}\right). \tag{6.14}$$

Zum anderen gilt wegen $\operatorname{div} E = 0$, dass für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(y)\nabla\varphi(y)\ \mathbf{d}y = 0,$$

und deshalb auch für die Wahl $\varphi(y) := h_t(x-y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y h_t(x-y)\ E(y)\ \mathbf{d}y = 0,$$

also insbesondere

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y h_t(x-y)\ E(y)\ \left(⨍_{B_t(x)} \pi\right)\ \mathbf{d}y = 0.$$

Damit führen wir die oben begonnene Rechnung fort:

$$\begin{aligned} h_t * (E \cdot B)(x) &\overset{(6.14)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{n+1}}\ \nabla h\left(\frac{x-y}{t}\right) \cdot E(y)\pi(y)\mathbf{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{n+1}}\nabla h\left(\frac{x-y}{t}\right) \cdot E(y)(\pi(y) - ⨍_{B_t(x)} \pi)\mathbf{d}y. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Es gilt supp $h \subset\subset B_1(0)$ und somit supp $h_t \subset\subset B_t(0)$. Damit können wir das Integrationsgebiet beschränken. Sei außerdem α' definiert durch $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$. Wegen der Voraussetzung $\alpha > 1$ ist $\alpha' < \infty$. Daraus folgt mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |h_t * (E \cdot B)(x)| &\overset{(6.15)}{\leq} \frac{1}{t^{n+1}}\ \underbrace{\|\nabla h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}_{\leq 1,\ h \in \mathcal{T}} \left(\int_{B_t(x)} |E(y)|^\alpha \mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{B_t(x)} |\pi(y) - ⨍_{B_t(x)} \pi|^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\ &= \frac{1}{t^{n+1}}\mathscr{L}^n(B_t(x))^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}} \left(⨍_{B_t(x)} |E(y)|^\alpha \mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(⨍_{B_t(x)} |\pi(y) - ⨍_{B_t(x)} \pi|^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\ &= \frac{\mathscr{L}^n(B_1(x))t^n}{t^{n+1}} \left(⨍_{B_t(x)} |E(y)|^\alpha \mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(⨍_{B_t(x)} |\pi(y) - ⨍_{B_t(x)} \pi|^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\ &= C(n)\frac{1}{t} \left(⨍_{B_t(x)} |E(y)|^\alpha \mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(⨍_{B_t(x)} |\pi(y) - ⨍_{B_t(x)} \pi|^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\ &= C(n) \left(⨍_{B_t(x)} |E(y)|^\alpha \mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(⨍_{B_t(x)} (|\pi(y) - ⨍_{B_t(x)} \pi|\frac{1}{t})^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}. \end{aligned}$$

Jetzt beobachten wir, dass wegen den Voraussetzungen an α, β und n folgendes gilt:

$$\frac{1}{\beta^*} = \frac{n-\beta}{n\beta} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha'},$$

also gilt $\alpha' = \beta^*$ für den Sobolev-Exponenten β^* von β (Wir beachten, dass wegen (6.12) auch $\beta < n$ gilt). Wir wollen jetzt das Sobolev-Poincaré-Lemma, Lemma 4.1, anwenden.
Dazu beobachten wir zunächst, dass $\pi \in W^{1,\beta}(B_t(x))$, $\beta > 1$, gilt, wegen $\beta \leq q$ und $\pi \in W^{1,q}(B_t(x))$. Als Kegel wählen wir die Menge aller $u \in W^{1,\beta}(B_t(x))$ mit $\int_{B_t(x)} u = 0$, welche die Abbildung $\pi - ⨍_{B_t(x)} \pi$ enthält.

Ziel ist es, den Term $\left(⨍_{B_t(x)}(|\pi(y)-⨍_{B_t(x)}\pi|\frac{1}{t})^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}$ gegen ein Integral abzuschätzen, von dem nur der Integrationsbereich von t abhängt.Dabei stören zwei Punkte: Die SOBOLEV-POINCARÉ-Ungleichung liefert eine Abhängigkeit vom Integrationsbereich in der Konstante, andererseits taucht in diesem Term auch noch ein $\frac{1}{t}$ auf. Wie wir zeigen werden, heben sich diese beiden t-Abhängigkeiten gerade auf.

$$\begin{aligned}
\left(⨍_{B_t(x)}(|\pi(y)-⨍_{B_t(x)}\pi|\frac{1}{t})^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} &= \frac{t^{-1}}{\mathscr{L}^n(B_t(x))^{\frac{1}{\alpha'}}}\left(\int_{B_t(x)}|\pi-⨍_{B_t(x)}\pi|^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\\
&= \frac{t^{-1}}{\mathscr{L}^n(B_t(x))^{\frac{1}{\alpha'}}}\left(\int_{B_1(x)}|\pi(t\xi)-⨍_{B_t(x)}\pi(z)\mathbf{d}z|^{\alpha'}t^n\mathbf{d}\xi\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\\
&= \frac{t^{-1}}{t^{\frac{n}{\alpha'}}\mathscr{L}^n(B_1(x))^{\frac{1}{\alpha'}}}\left(\int_{B_1(x)}|\pi(t\xi)-⨍_{B_1(x)}\pi(tz)\mathbf{d}z|^{\alpha'}t^n\mathbf{d}\xi\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\\
&= \frac{t^{-1}}{C(\alpha,n)}\left(\int_{B_1(x)}|\pi(t\xi)-⨍_{B_1(x)}\pi(tz)\mathbf{d}z|^{\alpha'}\mathbf{d}\xi\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\\
&\overset{L.4.1}{\leq} C(\alpha,n,B_1(x))\frac{1}{t}\left(\int_{B_1(x)}|\nabla(\pi(t\xi))|^{\beta}\mathbf{d}\xi\right)^{\frac{1}{\beta}}\\
&= C(\alpha,n,B_1(x))\frac{1}{t}\left(\int_{B_1(x)}|\nabla\pi(t\xi)t|^{\beta}\mathbf{d}\xi\right)^{\frac{1}{\beta}}\\
&= C(\alpha,n,B_1(x))t^{-\frac{n}{\beta}}\left(\int_{B_t(x)}|\nabla\pi(y)|^{\beta}\mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\beta}}\\
&= C(\alpha,n,B_1(x))t^{-\frac{n}{\beta}}\frac{t^{\frac{n}{\beta}}\mathscr{L}^n(B_1(x))^{\frac{1}{\beta}}}{\mathscr{L}^n(B_t(x))^{\frac{1}{\beta}}}\left(\int_{B_t(x)}|\nabla\pi(y)|^{\beta}\mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\beta}}\\
&= C(\alpha,\beta,n,B_1(x))\left(⨍_{B_t(x)}|\nabla\pi(y)|^{\beta}\mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\beta}}\\
&= C(\alpha,\beta,n)\left(⨍_{B_t(x)}|\nabla\pi(y)|^{\beta}\mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\beta}},
\end{aligned}$$

da die Konstante der SOBOLEV-POINCARÉ-Ungleichung, sowie das Volumen sich unter konstanten Verschiebungen nicht ändert.
Damit ergibt sich insgesamt unter Berücksichtigung, dass $\nabla\pi = B$,

$$\begin{aligned}
|h_t*(E\cdot B)(x)| &\leq C(n)\left(⨍_{B_t(x)}|E(y)|^{\alpha}\mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(⨍_{B_t(x)}(|\pi(y)-⨍_{B_t(x)}\pi|\frac{1}{t})^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\\
&\leq C(n,\alpha,\beta)\left(⨍_{B_t(x)}|E(y)|^{\alpha}\mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(⨍_{B_t(x)}|B(y)|^{\beta}\mathbf{d}y\right)^{\frac{1}{\beta}},
\end{aligned}$$

womit der erste Teil des Lemmas 6.13 bewiesen ist.

Analog gehen wir im lokalen Fall vor:
Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ein offenes, sternförmiges Gebiet und $E\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$ und $B\in L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)$ und (6.11) erfüllt für alle $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$. Sei $x\in\Omega$ und $t<\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$. Dann kann man wie im globalen Fall rechnen. Insbesondere hängt die Konstante C nicht von Ω ab, da $C=C(B_1(x),\alpha,\beta)$.
Ist $E\in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ und $B\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ und gilt die Bedingung (6.11) für alle $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so wählen wir für jedes $x\in\mathbb{R}^n$ und $t>0$ einen Ball $B_\rho(0)$, so dass $B_t(x)\subset B_\rho(0)$. Dann gilt $\operatorname{div}E=0$ und $\operatorname{curl}B=0$ auf $B_\rho(0)$ und wir erhalten die Behauptung aus dem Fall eines sternförmigen Gebietes. $\square$

6.14 Theorem
(vgl. [CLMS93], Theorem II.1, Seite 250)
Sei[12] $n \geq 2$ *und seien* $E \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $B \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, *wobei* $1 < p < \infty$ *und* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Desweiteren gelte $\operatorname{div} \ E = 0$, $\operatorname{curl} \ B = 0$.
Dann ist das Skalarprodukt $E \cdot B \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt*

$$\|E \cdot B\|_{\mathscr{H}^1} \leq C(n,p,q)\|E\|_{L^p}\|B\|_{L^q}.$$

Im lokalen Fall, also E, B *nur lokal auf einer offenen und konvexen Menge* Ω *definiert, bzw.* $\operatorname{div} E = 0$ *und* $\operatorname{curl} B = 0$ *nur in* Ω *gilt dann*$E \cdot B \in \mathscr{H}^1_{loc}(\Omega)$ *und für alle Kompakte* $K \subset\subset \Omega$ *und beliebige* $\varepsilon > 0$ *mit* $\varepsilon \leq \operatorname{dist}(K, \Omega)$ *gilt*

$$\|E \cdot B\|_{\mathscr{H}^1(K,\varepsilon)} \leq C(n,p,q,K,\Omega)\|E\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)}\|B\|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. Wir suchen zunächst $1 < \alpha < p$ und $1 < \beta < q$, welche die Voraussetzungen von Lemma 6.13 erfüllen (Die Bedingung $\alpha < p$ und $\beta < q$ benötigen wir später für die Anwendung des Maximaltheorems). Dazu müssen α und β zunächst folgender Gleichung genügen:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{n}.$$

Teile also $\frac{1}{n}$ auf in zwei Teile, welche $\frac{1}{\alpha}$ bzw. $\frac{1}{\beta}$ zugeordnet werden, d.h. wir wählen n_1, n_2 mit $0 < n_1, n_2 < n$, so dass

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{n}$$

gilt und

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{p},$$

und

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{q}.$$

Daraus folgt als eine notwendige Bedingung an α und β

$$0 < \alpha = p\frac{n_1}{p+n_1} < p \quad \text{und} \quad 0 < \beta = q\frac{n_2}{q+n_2} < q.$$

Desweiteren soll $\alpha > 1$ und $\beta > 1$ gelten, also mit $p > 1$ und $q > 1$ (da $p < \infty$)

$$1 < \alpha = \frac{pn_1}{p+n_1} \Leftrightarrow p + n_1 < pn_1 \Leftrightarrow p < (p-1)n_1 \Leftrightarrow \frac{p}{p-1} < n_1$$

und

$$1 < \beta = \frac{qn_2}{q+n_2} \Leftrightarrow q + n_2 < qn_2 \Leftrightarrow q < (q-1)n_2 \Leftrightarrow \frac{q}{q-1} < n_2.$$

Es gilt

$$\frac{1}{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{\frac{q}{q-1}} = \frac{p-1}{p} + \frac{q-1}{q} = 1 + 1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1$$

und somit

$$\frac{1}{n\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{n\frac{q}{q-1}} = \frac{1}{n}.$$

[12] Im Fall $n = 1$ folgt aus $\operatorname{div} E = E' = 0$ und $E \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dass $E \equiv 0$. Somit reduziert sich für $n = 1$ der globale Teil der Aussage von Theorem 6.14 auf $0 \in \mathscr{H}^1$, was offensichtlich stimmt.
Weiter gilt $L^p \subset \mathscr{H}^1_{loc}$: Für $h \in \mathcal{T}$ gilt, dass $|h_t * f| \leq CMf$ für den Maximaloperator M aus dem Maximaltheorem, Theorem 6.12. Setzen wir f außerhalb von Ω durch 0 fort, so gilt also

$$\|f^*\|_{L^1(K)} \leq C(K)\|f^*\|_{L^p(K)} \leq C(K)\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \overset{T6.12}{\leq} C(K,n)\|f\|_{L^p(K)} \quad \text{für } p > 1,\ K \subset\subset \mathbb{R}^n.$$

Also gilt für alle $f \in L^p(\Omega)$ mit $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ und $p > 1$, dass $f \in \mathscr{H}^1_{loc}(\Omega)$. Insbesondere bleibt somit auch die lokale Aussage von Theorem 6.14 wahr, wenn wir $n = 1$ zulassen, denn aus $\operatorname{div} E = 0$ folgt $E \equiv const$, also reduziert sich die Behauptung zu der Aussage, dass $L^q(\Omega) \subset \mathscr{H}^1_{loc}(\Omega)$ für $q > 1$.

Wir wählen also $n_1 = n\frac{p}{p-1}$ und $n_2 = n\frac{q}{q-1}$.
Da $n \geq 2$ lässt sich $\alpha = n\frac{p}{p-1+n}$, $\beta = n\frac{q}{q-1+n}$ wählen, welche die Voraussetzungen von Lemma 6.13 erfüllen. Es gilt dann insbesondere

$$\frac{p}{\alpha} = \frac{p-1+n}{n} = 1 + \frac{p-1}{n} > 1,$$

da $p > 1$ vorausgesetzt. Analog gilt wegen $q > 1$, dass $\frac{q}{\beta} > 1$ ist. Lemma 6.13 liefert dann

$$|h_t * (E \cdot B)(x)| \leq C \left(\fint_{B_t(x)} |E|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\fint_{B_t(x)} |B|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\, t > 0,\, h \in \mathcal{T}.$$

Daraus folgt

$$\sup_{t>0} \sup_{h \in \mathcal{T}} |h_t * (E \cdot B)(x)| \leq C \left(\sup_{t>0} \fint_{B_t(x)} |E|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sup_{t>0} \fint_{B_t(x)} |B|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} = C\; M(|E|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\; M(|B|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Es gilt $|E| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $|B| \in L^q(\mathbb{R}^n)$, somit $|E|^\alpha \in L^{\frac{p}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ und $|B|^\beta \in L^{\frac{q}{\beta}}(\mathbb{R}^n)$.Da nach Wahl von α, β die Quotienten $\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta} > 1$ lässt sich das Maximaltheorem, Theorem 6.12, anwenden.
Dieses liefert zunächst die Aussage, dass $M(|E|^\alpha) \in L^{\frac{p}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ und $M(|B|^\beta) \in L^{\frac{q}{\beta}}(\mathbb{R}^n)$ ist.
Damit wiederum folgt mit der Hölder-Ungleichung, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(|E|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\; M(|B|^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} M(|E|^\alpha)^{\frac{p}{\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} M(|B|^\beta)^{\frac{q}{\beta}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Mit der Abschätzung aus Theorem 6.12 folgt auch, dass

$$\|M(|E|^\alpha)\|^{\frac{1}{\alpha}}_{L^{\frac{p}{\alpha}}} \leq C(p,\alpha) \||E|^\alpha\|^{\frac{1}{\alpha}}_{L^{\frac{p}{\alpha}}} = C(p,\alpha)\|E\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$$

und

$$\|M(|B|^\beta)\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^{\frac{q}{\beta}}} \leq C(q,\beta) \||B|^\beta\|^{\frac{1}{\beta}}_{L^{\frac{q}{\beta}}} = C(q,\beta)\|B\|_{L^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}.$$

Damit schließen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(|E|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\; M(|B|^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \leq C(p,\alpha,q)\; \|E\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \|B\|_{L^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}.$$

Daraus folgt, dass $(E \cdot B)^* = \sup_{t>0} \sup_{h \in \mathcal{T}} |h_t * (E \cdot B)(\cdot)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, womit folgt, dass $E \cdot B \in \mathscr{H}^1$, und es gilt die Abschätzung

$$\|E \cdot B\|_{\mathscr{H}^1} = \|(E \cdot B)^*\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p,q)\|E\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\|B\|_{L^q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}.$$

Die lokale Behauptung folgt analog:
α und β werden gleich gewählt, die Abschätzungen folgen alle analog, wobei für das Maximaltheorem E und B durch 0 fortgesetzt werden müssen. □

6.15 Korollar (Anwendung)
Es seien D, $E \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ schwache Lösungen von

$$\begin{cases} \triangle D = -(\nabla B) \cdot (\nabla^\perp u) & \text{in } D^2, \\ \triangle E = (\nabla^\perp A) \cdot (\nabla u) & \text{in } D^2, \end{cases}$$

wobei $u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ und $B, A \in W^{1,2}(D^2, M(m))$. Die obige PDE ist dabei eine Kontraktionsschreibweise von

$$\begin{cases} \int_{D^2} \nabla D_i \; \nabla\varphi = \int_{D^2} (\nabla B_i^k) \cdot (\nabla^\perp u_k)\; \varphi, & 1 \leq i \leq m, \\ \int_{D^2} \nabla E_i \; \nabla\varphi = -\int_{D^2} (\nabla^\perp A_i^k) \cdot (\nabla u_k)\; \varphi, & 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(D^2)$.
Dann existieren τ_i, $\varsigma_i \in \mathscr{H}^1$, $1 \leq i \leq m$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \triangle D_i\; \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_i\; \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2)$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \triangle E_i \ \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varsigma_i \ \varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2).$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung nur für D, da diese für E analog folgt.
Zunächst setzen wir u, B und A komponentenweise auf $W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ bzw. $W^{1,2}(\mathbb{R}^n, M(m))$ fort. Es ist nur noch zu zeigen, dass komponentenweise $\nabla B \cdot \nabla^\perp u \in \mathscr{H}^1$. Wegen

$$(\nabla B \cdot \nabla^\perp u)_i = \nabla B_i^k \cdot \nabla^\perp u_k, \quad 1 \le i \le m$$

folgt dies, wenn wir zeigen, dass $\nabla B_i^k \cdot \nabla^\perp u_k \in \mathscr{H}^1$ für jedes feste k und i. Es gilt nach Proposition 4.22

$$\int_{D^2} \nabla B_i^k \cdot \nabla^\perp \varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2)$$

und

$$\int_{D^2} \nabla^\perp u \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2),$$

also $\operatorname{curl} \nabla B_i^k = 0$ und $\operatorname{div} \nabla^\perp u = 0$. Also ergibt sich mit Theorem 6.14 für jedes feste k und i, dass $\nabla B_i^k \cdot \nabla^\perp u_k \in \mathscr{H}^1$ und wir haben die Behauptung für D gezeigt. □

6.3. $W^{2,1}_{loc}$-Regularität für Lösungen der Poissongleichung mit rechter Seite in $\mathscr{H}^1$

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis, dass für eine Lösung φ von

$$\triangle \varphi = f$$

mit $f \in \mathscr{H}^1$ folgt, dass $\nabla^2 \varphi \in L^1_{loc}$ ist.

6.3.1. Singuläre Integrale

In diesem Unterabschnitt analysieren wir singuläre Integrale, welche wir für unser Ziel benötigen werden. Zunächst rufen wir ein bekanntes Resultat in Erinnerung:

6.16 Proposition (Young-Ungleichung)
(vgl. [Gra04], Theorem 1.2.12)
Sei $1 \le p, q, r \le \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Dann ist $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Nun beweisen wir einige Ergebnisse über die singulären Integrale von Calderon-Zygmond-Kernen.

6.17 Lemma (Singuläre Integrale und Calderon-Zygmond-Kerne)
Es sei $\Omega : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften (vgl. [Sch03], Satz 7.6 Voraussetzungen)*

($\mathfrak{A}$) Ω *ist positiv homogen vom Grad 0, d.h.* $\Omega(tx) = \Omega(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *und* $t > 0$,

($\mathfrak{B}$) $\int_{\partial B_1(0)} \Omega = 0$ *und*

($\mathfrak{C}$) $\Omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Wir definieren einen Kern K *durch*

$$K(x) := \frac{\Omega(x)}{|x|^n}, \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

und setzen K_ε als

$$K_\varepsilon := K\ \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)}, \quad \varepsilon > 0$$

und $K_{\varepsilon,R}$ als

$$K_{\varepsilon,R} := K\ \chi_{B_R(0)\setminus B_\varepsilon(0)}, \quad 0 < \varepsilon < R < \infty.$$

Falls zusätzlich für

$$\omega(\delta) := \sup_{\substack{|\mu-\nu|\le\delta,\\ |\mu|=|\nu|=1}} |\Omega(\nu) - \Omega(\mu)| \tag{6.16}$$

gilt

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{r}\ \mathbf{d}r \le C(\Omega), \tag{6.17}$$

so erhält man folgende Aussagen:

(*i*) *(vgl. [Sch03], Lemma 4.2, p.45) K ist ein* Calderon-Zygmond-Kern *mit Konstanten $C(\Omega, n)$ und mit der* Dini-Bedingung, *d.h. es gilt: $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, es gelten die* Calderon-Zygmond-*Bedingungen*

$$\int_{B_\sigma(0)} |x|\ |K(x)|\ \mathbf{d}x \le C(\Omega, n)\ \sigma, \quad 0 < \sigma < \infty, \tag{6.18}$$

$$\int_{|x|\ge 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\ \mathbf{d}x \le C(\Omega, n), \tag{6.19}$$

$$\left| \int_{B_\sigma(0)\setminus B_\varrho(0)} K \right| \le C(\Omega, n) \quad \text{für alle } 0 < \varrho < \sigma < \infty, \tag{6.20}$$

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{B_\sigma(0)\setminus B_{\varrho(0)}} K \quad \text{existiert für alle } \sigma > 0, \tag{6.21}$$

und zusätzlich ist die Dini-*Bedingung erfüllt, das heißt es existiert eine monoton steigende Funktion $\tilde\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, so dass für $\mathscr{L}^n$-fast alle x, $y \in \mathbb{R}^n$ mit $2|y| \le |x|$*

$$|K(x-y) - K(x)| \le \tilde\omega\left(\frac{2|y|}{|x|}\right) \frac{1}{|x|^n} \tag{6.22}$$

erfüllt ist und

$$\int_0^1 \frac{\tilde\omega(r)}{r}\ \mathbf{d}r \le C(\Omega, n). \tag{6.23}$$

Tatsächlich gilt sogar

$$\int_{B_\sigma(0)\setminus B_{\varrho(0)}} K = 0 \quad \text{für alle } 0 < \rho < \sigma < \infty,$$

was (6.20) und (6.21) impliziert.

(*ii*) *(vgl. [Sch03], Lemma 3.2) $K_{\varepsilon,R} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $K_{\varepsilon,R}$, K_ε sind* Calderon-Zygmond-*Kerne mit Konstanten $C(\Omega, n)$ unabhängig von ε und R, und es gilt*

$$\|\widehat{K_{\varepsilon,R}}\|_{L^\infty} \le C(\Omega, n). \tag{6.24}$$

(*iii*) *(vgl. [Sch03], Lemma 3.1) Definieren wir für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*

$$(T_{\varepsilon,R}f)(x) := (K_{\varepsilon,R}f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K_{\varepsilon,R}(y)\ f(x-y)\ \mathbf{d}y = \int_{\varepsilon\le|y|\le R} K(y)\ f(x-y)\ \mathbf{d}y,$$

so ist $T_{\varepsilon,R}$ vom schwachen Typ *(1,1) unabhängig von ε und R, d.h.*

$$\mathscr{L}^n(|K_{\varepsilon,R}f| > t) \le C(\Omega, n)\ \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ \frac{1}{t} \quad \text{für alle } t > 0, \tag{6.25}$$

und es gibt eine (lineare und stetige) Erweiterung von $K_{\varepsilon,R}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, für die gilt

$$\|K_{\varepsilon,R}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C(\Omega, n)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{6.26}$$

(iv) *(vgl. [Sch03], Satz 3.1) Setzen wir für* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$(T_\varepsilon f)(x) := (K_\varepsilon f)(x) := \int_{|x-y|\geq\varepsilon} K(x-y)\ f(y)\ \mathbf{d}y,$$

(wir beachten, dass $|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}$ *wegen* ($\mathfrak{A}$) *und* ($\mathfrak{C}$)*), so ist* K_ε *vom schwachen Typ (1,1) und erweitert zum* starken Typ *(2,2), d.h. für* K_ε *gilt*

$$\mathscr{L}^n(|K_\varepsilon f| > t) \leq C(\Omega,n)\ \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ \frac{1}{t} \quad \text{für alle } t>0 \text{ und } f \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{6.27}$$

wir können es linear und stetig fortsetzen auf ganz $L^2(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt*

$$\|K_\varepsilon f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Omega,n)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{6.28}$$

und auf $L^1 \cap L^2$ *stimmt diese Fortsetzung mit dem ursprünglichen Operator überein; man kann also* K_ε *als Abbildung* $K_\varepsilon :\ L^1(\mathbb{R}^n) \cup L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *auffassen, welche auf* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *und* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *jeweils ein linearer Operator ist.*

(v) *Weiter existiert eine Abbildung* $T : L^1(\mathbb{R}^n) \cup L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$*, welche auf* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *und* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *jeweils ein linearer Operator ist und sozusagen*

$$Tf ='' Kf'' ='' \lim_{\varepsilon\to 0}(K_\varepsilon f)''$$

im Maß für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und stark in* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *für* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *erfüllt. Genauer gilt für* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathscr{L}^n(|K_\varepsilon f - Tf| > t) = 0 \quad \text{für alle } t > 0,$$

und für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|K_\varepsilon f - Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Für dieses T *gelten die Abschätzungen wie für* K_ε*, d.h. für* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\mathscr{L}^n(|Tf| > t) \leq C(\Omega,n)\ \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\ \frac{1}{t} \quad \text{für alle } t > 0$$

und für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Omega,n)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Wir nennen Tf *im folgenden* Kf*, da* T *anschaulich betrachtet der Limes von* K_ε *für* $\varepsilon \to 0$ *ist.*

Zusammenfassung:
K, K_ε, $K_{\varepsilon,r}$ *sind wohldefiniert auf* $L^1 \cup L^2$ *mit den entsprechenden Abschätzungen und Konvergenzen in* L^1 *und* L^2 *und mit Gleichheit auf Schnittmengen.*

Beweis. (*i*) Zunächst gilt wegen ($\mathfrak{C}$), dass $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.
Weiter gilt, mit Homogenität ($\mathfrak{A}$), dass $|\Omega(x)| \leq \Lambda$ für alle $x \neq 0$ und für $\Lambda := \|\Omega\|_{L^\infty(\partial B_1(0))}$, also für K

$$|K(x)| = \frac{|\Omega(x)|}{|x|^n} \leq \frac{\Lambda}{|x|^n}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{B_\sigma(0)} |x||K(x)|\ \mathbf{d}x &\leq \Lambda \int_{B_\sigma(0)} \frac{1}{|x|^{n-1}}\ \mathbf{d}x \\
&= C(n)\Lambda \int_{r=0}^{\sigma} 1\ \mathbf{d}r \\
&= C(n)\Lambda\ \sigma \\
&= C(\Omega,n)\ \sigma \quad \text{für alle } \sigma > 0,
\end{aligned}$$

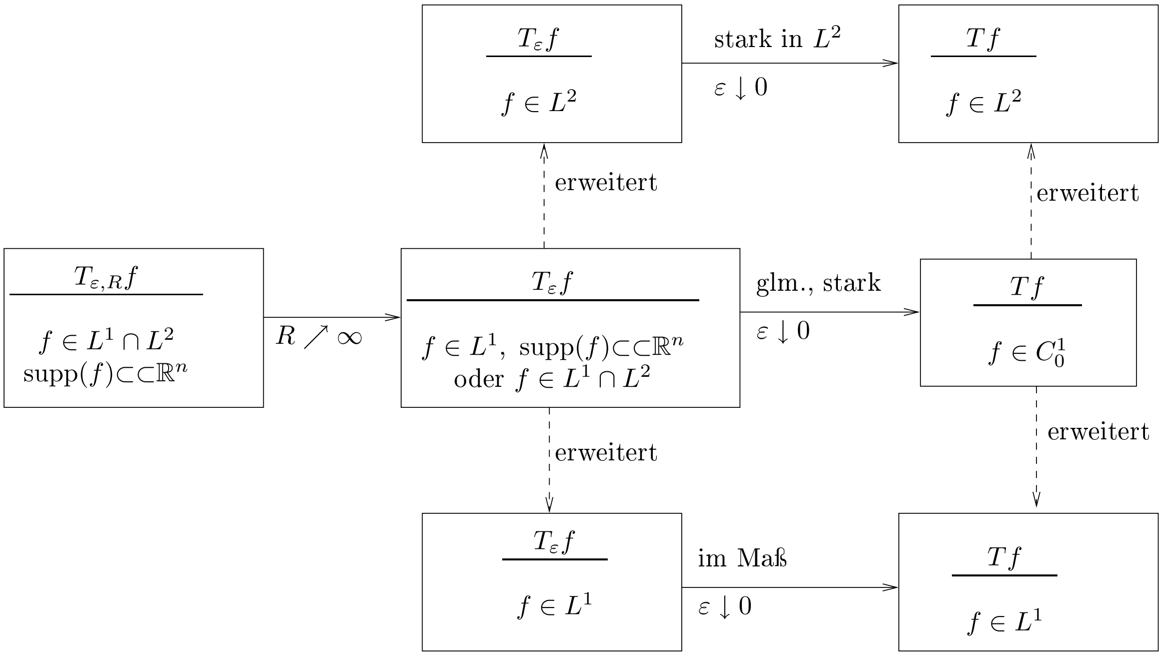

Abbildung 6.3: Übersicht über die Konvergenzen im Beweis von Lemma 6.17.

also ist Ungleichung (6.18) gezeigt.

Ungleichung (6.20) gilt wegen

$$\int_{B_\sigma(0)\setminus B_\rho(0)} K = \int_{r=\rho}^{\sigma} \frac{1}{r} \int_{\partial B_1(0)} \Omega(r\theta)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}\theta\, \mathbf{d}r \overset{(3)}{=} 0, \quad \text{für alle } 0 < \rho < \sigma < \infty.$$

Insbesondere erhät man somit trivialerweise

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{B_\sigma(0)\setminus B_\rho(0)} K = 0,$$

d.h. Gleichung (6.21) ist erfüllt.

Gleichung (6.19) folgt allgemein aus der DINI-Bedingung (6.22), welche wir deshalb zunächst zeigen wollen:
Sei x, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ und $x - y \neq 0$. Es gilt

$$K(x-y) - K(x) = \underbrace{\frac{\Omega(x-y) - \Omega(x)}{|x-y|^n}}_{I} + \underbrace{\Omega(x)\left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right)}_{II}.$$

Zunächst zu I:
Für $m := \min(|x-y|, |x|)$ gilt

$$\left| \frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|} \right| \leq \left| \frac{x-y}{|x-y|} \cdot \frac{|x-y|}{m} - \frac{x}{|x|} \cdot \frac{|x|}{m} \right|, \tag{6.29}$$

denn für alle $\lambda \geq 1$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$, $|u| = |v| = 1$, berechnen wir (wir beachten, dass $|\cdot|$ das euklidische

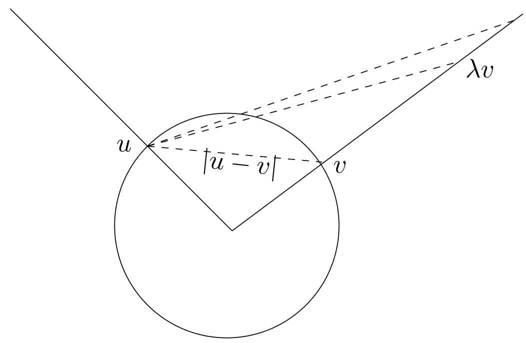

Abbildung 6.4: Der Abstand von Punkten der zwei Strecken $\{\lambda u \,|\lambda \geq 1\}$ und $\{\lambda v \,|\lambda \geq 1\}$ mit $u,\, v \in \partial B_1(0)$ wird genau auf $\partial B_1(0)$ minimal.

Skalarprodukt induziert)

$$\begin{aligned}
|u-\lambda v|^2 &= |u|^2 + |v|^2 + (\lambda^2-1)|v|^2 - 2\langle u,v\rangle - (\lambda-1)2\langle u,v\rangle \\
&= |u-v|^2 + (\lambda-1)((\lambda+1)|v|^2 - 2\langle u,v\rangle + |u|^2 - |u|^2) \\
&= |u-v|^2 + \underbrace{(\lambda-1)}_{\geq 0}(|v-u|^2 + \underbrace{\lambda}_{\geq 1}\underbrace{|v|^2}_{=1} - \underbrace{|u|^2}_{=1}) \\
&\geq |u-v|^2,
\end{aligned}$$

also

$$|u-\lambda v| \geq |u-v| \quad \text{für alle } \lambda \geq 1,\ u,v \in \partial B_1(0),$$

und dies impliziert (6.29), da $\frac{|x-y|}{m} \geq 1$ oder $\frac{|x|}{m} \geq 1$ und die Gleichheit in mindestens einem der beiden Terme eintritt (zur Anschauung vgl. Abbildung 6.4)
Es folgt für $|x| \geq 2|y|$, also $m \geq \frac{1}{2}|x|$

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|}\right| \overset{(6.29)}{\leq} \left|\frac{x-y}{m} - \frac{x}{m}\right| = \frac{|y|}{m} \leq 2\frac{|y|}{|x|}. \tag{6.30}$$

Somit gilt für $|x| \geq 2|y|$, $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
|\Omega(x-y) - \Omega(x)| &\overset{(\mathfrak{A})}{=} \left|\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) - \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \\
&\overset{(6.30)}{\leq} \sup_{\substack{|\mu|=|\nu|=1 \\ |\mu-\nu| \leq \frac{2|y|}{|x|}}} |\Omega(\mu) - \Omega(\nu)| \\
&\overset{(6.16)}{=} \omega\left(\frac{2|y|}{|x|}\right).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt für dieses ω

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{r}\,\mathbf{d}r \overset{(6.17)}{\leq} C(\Omega).$$

Also haben wir für $|x| \geq 2|y| > 0$ (also $|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - \frac{1}{2}|x|$)

$$I = \frac{|\Omega(x-y) - \Omega(x)|}{|x-y|^n} \leq 2^n\,\omega\left(\frac{2|y|}{|x|}\right)\,\frac{1}{|x|^n}.$$

Nun betrachten wir noch II:
Zunächst behaupten wir, dass es ein $\tilde{\gamma} \equiv \tilde{\gamma}(n)$ gibt, so dass für alle $|x| \geq 2|y|$, x, $y \neq 0$ gilt

$$\left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right| \leq \tilde{\gamma} \, \frac{|y|}{|x|} \, \frac{1}{|x|^n}. \tag{6.31}$$

Zum Beweis von (6.31) ist zu zeigen, dass

$$\text{LHS} := \frac{\left| \frac{|x|^n}{|x-y|^n} - 1 \right|}{\frac{|y|}{|x|}} \leq C(n) =: \tilde{\gamma}.$$

Gilt nun, dass für $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 2$ und für x, $y \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$(\lambda+1)|y| \geq |x| \geq \lambda|y|$$

erfüllt ist (also $|x-y| \geq (1-\frac{1}{\lambda})|x|$ und $\frac{|y|}{|x|} \geq \frac{1}{\lambda+1}$) , so gilt

$$\begin{aligned} \text{LHS} &\leq (\lambda+1)\frac{1}{|x-y|^n}\left||x|^n - |x-y|^n\right| \\ &\leq (\lambda+1)\frac{1}{(1-\frac{1}{\lambda})^n}\frac{1}{|x|^n}\left||x|^n - |x-y|^n\right| \\ &= (\lambda+1)\frac{\lambda^n}{(\lambda-1)^n}\frac{1}{|x|^n}\left||x|^n - |x-y|^n\right| \\ &= (\lambda+1)O(1)\frac{1}{|x|^n}\left||x|^n - |x-y|^n\right| \quad \text{für } \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$|x|^n - |x-y|^n \leq \left(1 - \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^n\right)|x|^n = \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda^n - (\lambda-1)^n}{\lambda^{n-1}}|x|^n = \frac{1}{\lambda}\,O(1)\,|x|^n \quad \text{für } \lambda \to \infty;$$

andererseits haben wir

$$\frac{|x-y|^n}{|x|^n} \leq \frac{(|x|+|y|)^n}{\lambda^n|y|^n} \leq \frac{(\lambda+2)^n}{\lambda^n}$$

und damit

$$|x-y|^n - |x|^n \leq (\left(\frac{\lambda+2}{\lambda}\right)^n - 1)|x|^n = \frac{1}{\lambda^n}((\lambda+2)^n - \lambda^n)|x|^n = \frac{1}{\lambda}O(1)|x|^n \quad \text{für } \lambda \to \infty.$$

Dies impliziert

$$\text{LHS} \leq (\lambda+1)\,O(1)\,\frac{1}{|x|^n}\,\frac{1}{\lambda}O(1)|x|^n = O(1) \quad \text{für } \lambda \to \infty.$$

Daraus folgt, dass es ein $C(n)$ und ein λ_0 beide unabhängig von x und y gibt, so dass für alle $\lambda > \lambda_0$ gilt LHS $\leq C(n)$. Auch für die übrigen, endlich vielen $\lambda \leq \lambda_0$ kann man RHS unabhängig von x und y abschätzen, und wir erhalten LHS $\leq \tilde{C}(n)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{N}$ mit $\lambda \geq 2$.
Nun existiert für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \geq 2|y| > 0$ ein $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 2$, so dass $(\lambda+1)|y| \geq |x| \geq \lambda|y|$ und somit haben wir (6.31) gezeigt. ||
Es gilt also

$$II = \Omega(x)\left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}\right) \overset{(6.31)}{\leq} \tilde{\gamma}\|\Omega\|_{L^\infty(\partial B_1(0))}\,\frac{|y|}{|x|}\,\frac{1}{|x|^n}.$$

Setzen wir $\gamma := 2^n + \tilde{\gamma}\|\Omega\|_{L^\infty(\partial B_1(0))}$ und definieren

$$\tilde{\omega}(r) := \gamma(\omega(r) + \frac{r}{2}),$$

so folgt mit den Abschätzungen für I und II

$$|K(x-y) - K(x)| \leq \tilde{\omega}\left(\frac{2|y|}{|x|}\right)\,|x|^{-n},$$

und aus der Monotonie von ω folgt, dass $\tilde{\omega}(\cdot)$ monoton steigend ist. Wegen

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{r} \overset{(6.17)}{\leq} C(\Omega)$$

erhalten wir
$$\int_0^1 \frac{\tilde{\omega}(r)}{r} \leq C(\Omega, n) \tag{6.32}$$
und damit sind (6.22) und (6.23) gezeigt.

Damit folgt auch Gleichung (6.19), denn es gilt (Substituiere schließlich $z := \frac{2|y|}{r}$)

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, \mathbf{d}x &\leq \int_{|x|\geq 2|y|} \tilde{\omega}\left(\frac{2|y|}{|x|}\right) \frac{1}{|x|^n} \, \mathbf{d}x \\
&\leq C(n) \int_{r=2|y|}^{\infty} \tilde{\omega}\left(\frac{2|y|}{r}\right) \frac{1}{r} \, \mathbf{d}r \\
&= -C(\Omega, n) \int_1^0 \tilde{\omega}(z) \frac{1}{z} \, \mathbf{d}z \\
&\overset{(6.32)}{\leq} C(\Omega, n).
\end{aligned}$$

(*ii*) Es ist zunächst klar, dass $K_{\varepsilon,R} \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, da $\Omega \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und sowohl die Singularität von K in der 0 durch $\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)}$ als auch alle Punkte weit weg von der 0 durch $\chi_{B_R(0)}$ weggeschnitten werden.
Bleibt also nur noch zu zeigen, dass K_ε, $K_{\varepsilon,R}$ Calderon-Zygmond-Kerne (CZ-Kerne) sind und die Abschätzung der (nun wohldefinierten) Fourier-Transformation von $K_{\varepsilon,R}$ gilt.
Für den CZ-Kern sind also die Ungleichungen (6.18), (6.19), (6.20), (6.21) zu zeigen zu zeigen.
Wir zeigen dies hier für $K_{\varepsilon,R}$; die Abschätzungen für K_ε folgen analog.Die zu beweisenden Ungleichungen (6.18), (6.19), (6.20) und (6.21) sind nach (*i*) für K selbst erfüllt. Somit folgt sofort (6.18), da

$$\int_{B_\rho(0)} |x| \; |K_{\varepsilon,R}(x)| \, \mathbf{d}x \leq \int_{B_\rho(0)} |x||K(x)| \leq C(\Omega, n) \; \rho \quad \text{für alle } 0 < \varepsilon < R < \infty.$$

Auch (6.20) und (6.21) folgen wie im zugehörigen Beweis zu (*i*).
Zu (6.19) betrachten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\geq 2|y|} |K_{\varepsilon,R}(x-y) - K_{\varepsilon,R}(x)| \, \mathbf{d}x \\
\leq &\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, \mathbf{d}x + \int_{|x|\geq 2|y|,A} |K(x-y) - 0| \mathbf{d}x + \int_{|x|\geq 2|y|,B} |0 - K(x)| \, \mathbf{d}x \\
\overset{(6.19)}{\leq} & \; C(\Omega, n) + \int_{|x|\geq 2|y|,I} |K(x-y)| + \int_{|x|\geq 2|y|,II} |K(x-y)| + \int_{|x|\geq 2|y|,III} |K(x)| + \int_{|x|\geq 2|y|,IV} |K(x)|,
\end{aligned}$$

wobei die Bedingungen A, B, I, II, III, IV stehen für

$$R \geq |x-y| \geq \varepsilon \quad \wedge \quad (|x| < \varepsilon \quad \vee \quad |x| > R), \tag{A}$$

also $K_{\varepsilon,R}(x) = 0$, $K_{\varepsilon,R}(x-y) = K(x-y)$,

$$(R \geq |x| \geq \varepsilon \quad \wedge \quad (|x-y| < \varepsilon \quad \vee \quad |x-y| > R), \tag{B}$$

also $K_{\varepsilon,R}(x-y) = 0$, $K_{\varepsilon,R}(x) = K(x)$,

$$R \geq |x-y| \geq \varepsilon \quad \wedge \quad |x| < \varepsilon, \tag{I}$$

$$R \geq |x-y| \geq \varepsilon \quad \wedge \quad |x| > R, \tag{II}$$

$$|x-y| < \varepsilon \quad \wedge \quad R \geq |x| \geq \varepsilon \tag{III}$$

und

$$|x-y| > R \quad \wedge \quad R \geq |x| \geq \varepsilon. \tag{IV}$$

Es gilt für $|x| \geq 2|y|$ die Ungleichung

$$\frac{3}{2}|x| \geq |x| + |y| \geq |x-y| \geq |x| - |y| \geq \frac{1}{2}|x|.$$

Damit folgt für die Fälle

$$I: \ |x| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \frac{3}{2}\varepsilon > \frac{3}{2}|x| \geq |x-y| \geq \varepsilon,$$

$$II: \ |x| > R \ \Rightarrow \ R \geq |x-y| > \frac{1}{2}R,$$

$$III: \ |x-y| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \varepsilon > \frac{1}{2}|x| \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und}$$

$$IV: \ |x-y| > R \ \Rightarrow \ R \geq |x| > \frac{2}{3}R.$$

Daraus erhalten wir (wobei I, II, III und IV die Bedingung $|x| \geq 2|y|$ ab sofort mit einschließen mögen) mit der Ungleichung (6.18) für K

$$\begin{aligned}
\int_I |K(x-y)| \quad &\leq \quad \int_{\varepsilon \leq |x-y| < \frac{3}{2}\varepsilon} |K(x-y)||x-y| \frac{1}{|x-y|} \\
&\leq \quad \int_{\varepsilon \leq |x-y| < \frac{3}{2}\varepsilon} |K(x-y)||x-y| \ \frac{1}{\varepsilon} \\
&\overset{(6.18)}{\leq} \quad C(\Omega, n) \ \frac{3}{2} \ \varepsilon \ \frac{1}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

$$\int_{II} |K(x-y)| \leq \int_{R \geq |x-y| > \frac{1}{2}R} |K(x-y)||x-y| \ \frac{2}{R} \leq 2C(\Omega, n),$$

$$\int_{III} |K(x)| \leq \int_{2\varepsilon > |x| \geq \varepsilon} |K(x)||x| \ \frac{1}{\varepsilon} \leq 2C(\Omega, n) \quad \text{und}$$

$$\int_{IV} |K(x)| \leq \int_{R \geq |x| > \frac{2}{3}R} |K(x)||x| \frac{3}{2}\frac{1}{R} \leq \frac{3}{2}C(\Omega, n).$$

Wir beachten dabei, dass $C(\Omega, n)$ unabhängig von R, ε ist.
Zusammengesetzt ergibt dies

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K_{\varepsilon,R}(x-y) - K_{\varepsilon,R}(x)| \ \mathbf{d}x \leq \tilde{C}(\Omega, n),$$

und somit ist (6.19) gezeigt und $K_{\varepsilon,R}$ ist ein CZ-Kern mit Konstanten unabhängig von R, ε.

Wir betrachten noch die <u>Fouriertransformation</u> von $K_{\varepsilon,R}$:
Sei $y \neq 0$. Es gilt $K_{\varepsilon,R} \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und somit

$$\begin{aligned}
\widehat{K}_{\varepsilon,R}(y) \quad &= \quad \lim_{\rho \to \infty} \int_{B_\rho(0)} K_{\varepsilon,R}(x) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} \ \mathbf{d}x \\
&= \quad \underbrace{\int_{\varepsilon < |x| \leq \frac{2}{|y|}} K_{\varepsilon,R}(x) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} \ \mathbf{d}x}_{I_1} + \underbrace{\lim_{\rho \to \infty} \int_{\frac{2}{|y|} < |x| < \rho} K_{\varepsilon,R}(x) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} \ \mathbf{d}x}_{I_2(\rho)}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst I_1:
Es gilt mit Ungleichung (6.20)

$$\begin{aligned}
|I_1| \quad &= \quad \left| \int_{\varepsilon \leq |x| \leq \frac{2}{|y|}} K_{\varepsilon,R}(x) \ e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} \ \mathbf{d}x \right| \\
&\leq \quad \int_{\varepsilon \leq |x| \leq \frac{2}{|y|}} |K_{\varepsilon,R}(x)| \ |x| \ \frac{\left| e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} - 1 \right|}{|x|} \ \mathbf{d}x + C(\Omega, n)
\end{aligned}$$

Mit Darstellung von $e^{i\varphi} = \cos + i \sin$ erhalten wir

$$\frac{\left| e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} - e^{-2\pi i \langle 0,y \rangle} \right|}{|x|} \leq C|y|.$$

Damit folgt unter Anwendung von (6.18) für $K_{\varepsilon,R}$

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C(\Omega,n)\frac{2}{|y|}\ C\ |y| + C(\Omega,n) \\ &\leq \tilde{C}(\Omega,n). \end{aligned}$$

Wir betrachten noch $I_2(\rho)$:
Wir setzen $z := \frac{y}{2|y|^2}$. Dann gilt $\langle y,z\rangle = \frac{1}{2}$, also

$$e^{\pm 2\pi i\langle y,z\rangle} = e^{\pm\pi i} = -1$$

und somit

$$e^{-2\pi i\langle x,y\rangle} = e^{-2\pi i(\langle x+z,y\rangle - \langle z,y\rangle)} = e^{-2\pi i\langle x+z,y\rangle}(-1).$$

Dann erhalten wir der mit Transformation $\xi := x+z$

$$\begin{aligned} I_2(\rho) &= \int_{\frac{2}{|y|}\leq|x|<\rho} K_{\varepsilon,R}(x)\ e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\ \mathbf{d}x \\ &= -\int_{\frac{2}{|y|}\leq|x|<\rho} K_{\varepsilon,R}(x)\ e^{-2\pi i\langle x+z,y\rangle}\ \mathbf{d}x \\ &= -\int_{\frac{2}{|y|}\leq|\xi-z|<\rho} K_{\varepsilon,R}(\xi-z)\ e^{-2\pi i\langle\xi,y\rangle}\ \mathbf{d}\xi. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Ist $\xi\in\mathbb{R}^n$, so dass $\frac{2}{|y|}\leq|\xi-z|<\rho$, so gilt eine der drei folgenden Möglichkeiten:

(α) $\frac{2}{|y|}\leq|\xi|<\rho$,

(β) $\frac{2}{|y|}\leq|\xi-z|<\rho$ und $|\xi|\geq\rho$ oder

(γ) $\frac{2}{|y|}\leq|\xi-z|<\rho$ und $|\xi|<\frac{2}{|y|}$.

Im Fall (β) gilt dann wegen $t=\frac{y}{|y|}$

$$|\xi-z|\geq|\xi|-|z|\geq\rho-\frac{1}{2|y|}\geq\rho-\frac{1}{|y|},$$

und im Fall (γ) gilt

$$|\xi-z|\leq|\xi|+|z|<\frac{2}{|y|}+\frac{1}{2|y|}\leq\frac{3}{|y|}.$$

Somit gilt für $\xi\in\mathbb{R}^n$ mit $\frac{2}{|y|}<|\xi-z|\leq\rho$ (mindestens) einer der drei folgenden Fälle

A $\frac{2}{|y|}\leq|\xi|<\rho$,

B $\rho-\frac{1}{|y|}\leq|\xi-z|<\rho$ oder

C $\frac{2}{|y|}\leq|\xi-z|<\frac{3}{|y|}$.

Damit erhalten wir für alle $y\neq 0$ (wir beachten $2|z|<4|z|=\frac{2}{|y|}$ und wenden (6.19) sowie (6.18) für $K_{\varepsilon,R}$ an)

$$|2I_2(\rho)| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\frac{2}{|y|}\leq|x|<\rho} K_{\varepsilon,R}(x)\ e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\ \mathbf{d}x - \int_{\frac{2}{|y|}\leq|x-z|<\rho} K_{\varepsilon,R}(x-z)\ e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\ \mathbf{d}x \right| \\
&\leq \left| \int_A (K_{\varepsilon,R}(x) - K_{\varepsilon,R}(x-z))\ e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\ \mathbf{d}x \right| + \left| \int_{\neg A,\frac{2}{|y|}\leq|x-z|\leq\rho} K_{\varepsilon,R}(x-z) e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\ \mathbf{d}x \right| \\
&\leq \int_{\frac{2}{|y|}\leq|x|<\rho} |K_{\varepsilon,R}(x) - K_{\varepsilon,R}(x-z)|\ \mathbf{d}x + \int_B |K_{\varepsilon,R}(x-z)|\ \mathbf{d}x + \int_C |K_{\varepsilon,R}(x-z)|\ \mathbf{d}x \\
&\leq \int_{2|z|<|x|} |K_{\varepsilon,R}(x) - K_{\varepsilon,R}(x-z)|\ \mathbf{d}x + \int_{\rho>|w|\geq\rho-\frac{1}{|y|}} |K_{\varepsilon,R}(w)|\ \mathbf{d}w + \int_{\frac{3}{|y|}>|w|\geq\frac{2}{|y|}} |K_{\varepsilon,R}(w)|\ \mathbf{d}w \\
&\overset{(6.19)}{\leq} C(\Omega,n) + \frac{1}{\rho-\frac{1}{|y|}} \int_{|w|<\rho} |w|\ |K_{\varepsilon,R}(w)| \mathbf{d}w + \frac{1}{\frac{2}{|y|}} \int_{|w|<\frac{3}{|y|}} |w|\ |K_{\varepsilon,R}(w)|\ \mathbf{d}w \\
&\overset{(6.18)}{\leq} C(\Omega,n)\ (1 + \frac{\rho}{\rho-\frac{1}{|y|}} + \frac{|y|}{2}\ \frac{3}{|y|}) \\
&\leq C(\Omega,n)\ (1+2+\frac{3}{2}) \\
&\leq \tilde{C}(\Omega,n),
\end{aligned}$$

für ρ hinreichend groß in Abhängigkeit von $|y|$, nämlich $\rho > \frac{2}{|y|}$.
Damit gilt also für alle $|y| \neq 0$

$$\lim_{\rho\to\infty} |I_2(\rho)| \leq C(\Omega,n)$$

und somit ergibt sich (6.24), also

$$\|\widehat{K}_{\varepsilon,R}\|_{L^\infty} \leq C(\Omega,n),$$

wobei $C(\Omega,n)$ unabhängig von ε und R ist.

(iii) Wegen ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{C}$) ist $\Omega \in L^\infty$ und somit $K_{\varepsilon,R} \in L^1 \cap L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und es gilt für eine Konstante $C(\Omega,n)$ nach *(ii)*

$$\|\widehat{K}_{\varepsilon,R}\|_{L^\infty} \leq C(\Omega,n). \tag{6.34}$$

Insbesondere ist wegen $K_{\varepsilon,R} \in L^\infty$

$$K_{\varepsilon,R}f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K_{\varepsilon,R}(x-y)\ f(y)\ \mathbf{d}y$$

wohldefiniert für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Sei nun $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, dann gilt wegen $K_{\varepsilon,R} \in L^1 \cap L^2$, dass $K_{\varepsilon,R}f = K_{\varepsilon,R} * f \in L^2$ (Proposition 6.16), es gilt mit Proposition 3.3 *(vi)*

$$\widehat{K_{\varepsilon,R}f}(\xi) = \widehat{K}_{\varepsilon,R}(\xi)\ \widehat{f}(\xi),$$

und mit dem Satz von Plancherel (Theorem 3.4) erhalten wir

$$\|K_{\varepsilon,R}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \overset{T.3.4}{=} \|\widehat{K_{\varepsilon,R}f}\|_{L^2} \overset{P.3.3}{=} \|\widehat{K}_{\varepsilon,R}\ \widehat{f}\|_{L^2} \overset{(6.34)}{\leq} C(\Omega,n)\|\widehat{f}\|_{L^2} \overset{T.3.4}{=} C(\Omega,n)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Somit ist $K_{\varepsilon,R}$ stetig und linear als Abbildung von $L^1 \cap L^2$ nach L^2, und wegen der Dichtheit von $L^1 \cap L^2$ in L^2 lässt sich $K_{\varepsilon,R}$ somit fortsetzen auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt (6.26), also

$$\|K_{\varepsilon,R}f\|_{L^2} \leq C(\Omega,n)\|f\|_{L^2} \quad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

und insbesondere ist die Konstante unabhängig von ε und R.

Nun noch zum schwachen Typ (1,1):
Sei $t > 0$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Wir wählen eine Calderon-Zygmond-*Zerlegung*, d.h. eine Folge von Würfeln $(Q_k)_{k=1}^\infty$ mit paarweise disjunktem Inneren, sowie zwei Abbildungen $g, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass gilt (vgl. z.B. [Gra04], Theorem 4.3.1, Seite 284f)

- $f = g + b$, (g good, b bad)
- $|g| \leq C(n)\ t$,
- $b = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, $\int_{Q_k} b = 0$ und $\fint_{Q_k} |b| \leq 2^{n+1} t$,
- $\|g\|_{L^1}$, $\|b\|_{L^1} \leq 2\|f\|_{L^1}$ und
- $\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(Q_k) \leq \frac{1}{t}\|f\|_{L^1}$.

Wegen der Linearität des Operators $K_{\varepsilon,R} :\ L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (da $K_{\varepsilon,R} \in L^\infty$, vgl. Proposition 6.16) gilt

$$K_{\varepsilon,R} f = K_{\varepsilon,R} g + K_{\varepsilon,R} b$$

und somit

$$\mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon,R} f| > t\} \leq \mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon,R} g| > \frac{t}{2}\} + \mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon,R} b| > \frac{t}{2}\}.$$

Für den "guten" Teil g gilt

$$\mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon,R} g| > \frac{t}{2}\} = \int_{\{|K_{\varepsilon,R} g| > \frac{t}{2}\}} 1 \leq \frac{4}{t^2} \int_{\mathbb{R}^n} |K_{\varepsilon,R} g|^2 \overset{(6.26)}{\leq} \frac{4}{t^2} C(\Omega, n)\ \|g\|_{L^2}^2,$$

da $g \in L^2$, denn

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g|^2 \leq C(n) t \int_{\mathbb{R}^n} |g| = C(n) t \|g\|_{L^1} \leq \tilde{C}(n) t \|f\|_{L^1}.$$

Wir erhalten, dass der gute Term seinen Namen zu recht trägt, wegen

$$\mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon,R} g| > \frac{t}{2}\} \leq C(\Omega, n) \|f\|_{L^1}\ \frac{1}{t}.$$

Nun wenden wir uns dem "schlechten" Term b zu und definieren zu diesem Zweck

$$b_k := b\chi_{Q_k}.$$

Insbesondere gilt dann

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{punktweise fast überall in } \mathbb{R}^n.$$

Sei das Zentrum von einem Q_k definiert als x_k und Q_k habe die Seitenlänge $2\rho_k$, d.h.

$$Q_k = x_k + [-\rho_k, \rho_k]^n.$$

Es gilt für $x \in \mathbb{R}^n$ (wir beachten: $\int_{\mathbb{R}^n} b_k = \int_{Q_k} b = 0$)

$$K_{\varepsilon,R} b_k(x) = \int_{Q_k} K_{\varepsilon,R}(x-y) b(y)\ \mathbf{d}y = \int_{Q_k} (K_{\varepsilon,R}(x-y) - K_{\varepsilon,R}(x-x_k)) b(y)\ \mathbf{d}y. \tag{6.35}$$

Ist $x \not\in B_{2\sqrt{n}\rho_k}(x_k)$, dann gilt für ein $y \in Q_k$

$$|y - x_k| \leq \sqrt{n}\rho_k \leq \frac{1}{2}|x - x_k|,$$

und somit folgt unter Verwendung der Transformation $z := x - x_k$ (dann gilt $|z| \geq 2|y - x_k|$) und (6.19)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2\sqrt{n}\rho}(x_k)} |K_{\varepsilon,R} b_k(x)| &\overset{(6.35)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2\sqrt{n}\rho}(x_k)} \int_{Q_k} |K_{\varepsilon,R}(x-y) - K_{\varepsilon,R}(x-x_k)|\ |b(y)|\ \mathbf{d}y\ \mathbf{d}x \\
&= \int_{Q_k} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2\sqrt{n}\rho}(0)} |K_{\varepsilon,R}(z - (y - x_k)) - K_{\varepsilon,R}(z)|\ \mathbf{d}z\ |b(y)|\ \mathbf{d}y \\
&\leq \int_{Q_k} \int_{|z| \geq 2|y - x_k|} |K_{\varepsilon,R}(z - (y - x_k)) - K_{\varepsilon,R}(z)|\ \mathbf{d}z\ |b(y)|\ \mathbf{d}y \\
&\overset{(6.19)}{\leq} C(\Omega, n) \int_{Q_k} |b(y)|\ \mathbf{d}y \\
&\leq C(\Omega, n) \mathscr{L}^n(Q_k) t
\end{aligned}$$

mit den Eigenschaften von b in der CZ-Zerlegung.

Wir definieren nun noch $\Omega^* := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2\sqrt{n}\rho}(x_k)$.
Dann gilt den mit Eigenschaften der CZ-Zerlegung[13] und dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^*} |K_{\varepsilon,R}b| &\leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^*} |K_{\varepsilon,R}b_k(x)|\,\mathbf{d}x \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} C(\Omega,n)\mathscr{L}^n(Q_k)t \\ &\leq C(\Omega,n)\,\|f\|_{L^1}.\end{aligned} \tag{6.36}$$

Weiterhin gilt auch

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^n(\Omega^*) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(B_{2\rho_k\sqrt{n}}(x^k)) \\ &\leq C(n)\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(Q_k) \\ &\leq \frac{1}{t}C(n)\|f\|_{L^1}.\end{aligned} \tag{6.37}$$

Zusammengesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon,R}b| > \frac{t}{2}\} &\leq \mathscr{L}^n(\Omega^*) + \int_{(\mathbb{R}^n\setminus\Omega^*)\cap\{|K_{\varepsilon,R}b|>\frac{t}{2}\}} 1 \\ &\overset{(6.37)}{\leq} \frac{1}{t}C(n)\|f\|_{L^1} + \frac{1}{t}C\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega^*} |K_{\varepsilon,R}b| \\ &\overset{(6.36)}{\leq} C(\Omega,n)\frac{1}{t}\|f\|_{L^1},\end{aligned}$$

womit auch der "schlechte" Term unter Kontrolle ist und wir erhalten

$$\mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon,R}f| > t\} \leq C(\Omega,n)\|f\|_{L^1}\ \frac{1}{t}$$

für jedes $t > 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also ist (6.25) gezeigt.

(*iv*) Sei zunächst $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir betrachten für $R > 1$

$$|K_{\varepsilon,R}f(x) - K_\varepsilon f(x)| = \left|\int_{|y|\geq R} K(y)\ f(x-y)\ \mathbf{d}y\right| \leq \|K\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\setminus B_1)}\ \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n\setminus B_R(x))} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

da $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Somit gilt

$$K_{\varepsilon,R}f(x) \xrightarrow{R\to\infty} K_\varepsilon f(x) \quad \text{punktweise fast überall in } \mathbb{R}^n.$$

Weiter gilt für $R < R'$, dass

$$\|K_{\varepsilon,R}f - K_{\varepsilon,R'}f\|_{L^\infty} \overset{P.6.16}{\leq} \|K_{R,R'}\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1} \leq \frac{C(\Omega)}{R^n}\|f\|_{L^1}.$$

[13] Wir beachten, dass aufgrund der CZ-Zerlegungseigenschaften $\|b - \sum_{k=1}^{m} b_k\|_{L^1} \xrightarrow{m\to\infty} 0$, denn zunächst haben wir die punktweise Konvergenz nach Konstruktion von b_k; weiter gilt

$$\|\sum_{k=m_1}^{m_2} b_k\|_{L^1} \leq \sum_{k=m_1}^{m_2} \int_{Q_k} |b| \leq \sum_{k=m_1}^{m_2} \mathscr{L}^n(Q_k)2^{n+1}t,$$

und wir haben $\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{L}^n(Q_k) \leq \|f\|_{L^1} < \infty$. Somit ist $(\sum_{k=1}^{m} b_k)_m$ eine Cauchy-Folge in $L^1(\mathbb{R}^n)$, konvergiert also gegen b. Nun ist $K_{\varepsilon,R} :\ L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig und linear, also gilt $\sum_{k=1}^{\infty} K_{\varepsilon,R}b_k = K_{\varepsilon,R}(\sum_{k=1}^{\infty} b_k) = K_{\varepsilon,R}b$.

Somit ist $(K_{\varepsilon,R}f)_R$ eine $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-CAUCHY-Folge für $R \to \infty$. Da der punktweise Limes $K_\varepsilon f$ mit dem L^∞-Limes von $(K_{\varepsilon,R}f)_R$ übereinstimmt, folgt insbesondere, dass $K_\varepsilon f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Mit dem Lemma von FATOU erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^n\{|K_\varepsilon f| > t\} &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{|K_\varepsilon f|>t\}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{R\to\infty} \chi_{\{|K_{\varepsilon,R} f|>t\}} \\
&\leq \liminf_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{|K_{\varepsilon,R} f|>t\}} \\
&= \liminf_{R\to\infty} \mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon,R} f| > t\} \\
&\overset{(6.25)}{\leq} C(\Omega,n)\|f\|_{L^1}\frac{1}{t},
\end{aligned} \tag{6.38}$$

also ist K_ε auf L^1 vom schwachen Typ $(1,1)$ mit der Abschätzung (6.27).
Weiter gilt für $f \in L^1 \cap L^2$, dass $K_\varepsilon f$ wohldefiniert ist und mit dem Lemma von FATOU, der punktweise fast überall Konvergenz $K_{\varepsilon,R}f \xrightarrow{R\to\infty} K_\varepsilon f$ und (iii) folgt

$$\begin{aligned}
\|K_\varepsilon f\|_{L^2}^2 &= \|\lim_{R\to\infty} K_{\varepsilon,R} f\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{R\to\infty} |K_{\varepsilon,R} f|^2 \\
&\leq \liminf_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |K_{\varepsilon,R} f|^2 \\
&\overset{(6.26)}{\leq} C(\Omega,n)^2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.
\end{aligned}$$

Da $L^1 \cap L^2$ dicht in L^2 ist, K_ε stetig und linear, existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung von K_ε auf L^2 und es gilt, dass dieses K_ε auf $L^1 \cap L^2$ gleich dem ursprünglichen Operator ist.

(v) Sei $\varepsilon < 1$. Sei zunächst $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es gilt (wir beachten, dass Voraussetzungen ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$) implizieren, dass $\int_{a\leq|y|\leq b} K(y) = 0$)

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon f(x) &= \int_{|y|\geq\varepsilon} K(y)\ f(x-y)\ \mathbf{d}y \\
&= \int_{|y|\geq 1} K(y)f(x-y)\ \mathbf{d}y + \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} K(y)\ (f(x-y)-f(x))\ \mathbf{d}y + f(x)\int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} K(y)\ \mathbf{d}y \\
&= \int_{|y|\geq 1} K(y)f(x-y)\ \mathbf{d}y + \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1} K(y)\ (f(x-y)-f(x))\ \mathbf{d}y + 0.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Weiter haben wir

$$|f(x-y)-f(x)| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty}\ |y|.$$

Daraus folgt für $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$

$$\begin{aligned}
|(K_{\varepsilon_1}f)(x) - (K_{\varepsilon_2}f)(x)| &\overset{(6.39)}{\leq} \|\nabla f\|_{L^\infty} \int_{\varepsilon_1\leq|y|\leq\varepsilon_2} |K(y)|\ |y|\ \mathbf{d}y \\
&\overset{(6.18)}{\leq} \|\nabla f\|_{L^\infty} C(\Omega,n)\ \varepsilon_2,
\end{aligned}$$

und somit ist $(K_\varepsilon f(x))_{\varepsilon<1}$ eine CAUCHY-Folge bezüglich $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ für jedes feste $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und konvergiert somit punktweise.
Zusätzlich gilt, dass $K_{\varepsilon_1}f(x) - K_{\varepsilon_2}f(x) = 0$ für $x \notin B_1(\operatorname{supp}(f))$, da dort $f(x) = 0$ und $f(x-y) = 0$ für $|y| \leq \varepsilon_2 \leq 1$.
Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|K_{\varepsilon_1}f - K_{\varepsilon_2}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|K_{\varepsilon_1}f - K_{\varepsilon_2}f\|_{L^2(B_1(\operatorname{supp}(f)))} \\
&\leq C(\operatorname{supp}(f))\ \|\nabla f\|_{L^\infty} C(\Omega,n)\ \varepsilon_2
\end{aligned}$$

und somit ist $(K_\varepsilon f)_\varepsilon$ eine CAUCHY-Folge in L^2 für jedes feste $f \in C_0^\infty$. Wir definieren den Operator $Tf:\ C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

$$Tf \equiv Kf := \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon f \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{6.40}$$

Dabei beachten wir, dass aus der L^∞-Konvergenz folgt, dass Tf messbar ist für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiter überträgt sich (6.28) und es gilt somit

$$\|Kf\|_{L^2} \le C(\Omega, n)\|f\|_{L^2} \quad \text{für alle } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Wiederum ist K linear und L^2-stetig auf C_0^∞, und wegen Dichtheit existiert dann eine Fortsetzung K auf L^2 mit

$$\|Kf\|_{L^2} \le C(\Omega, n)\|f\|_{L^2} \quad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{6.41}$$

Für den Nachweis, dass K auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vom schwachen Typ $(1,1)$ ist, benutzen wir zunächst wieder das Lemma von FATOU (wir beachten, dass Kf für $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ insbesondere messbar ist), und wir erhalten analog zu (6.38) für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (für welche der punktweise Limes von $K_\varepsilon f$ durch (6.40) als Kf definiert wurde)

$$\mathscr{L}^n\{|Kf| > t\} \overset{(6.27)}{\le} C(\Omega, n)\|f\|_{L^1}\frac{1}{t} \quad \text{für alle } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ t > 0. \tag{6.42}$$

Wir wollen den Definitionsbereich von $T \equiv K$ auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ erweitern. Sei dazu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen $f_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f_m \xrightarrow{m\to\infty} f$ in L^1 und

$$\|f_m - f_{m+1}\|_{L^1} \le 4^{-m}. \tag{6.43}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^n\{|Kf_m - Kf_{m+1}| > t\} &= \mathscr{L}^n\{|K(f_m - f_{m+1})| > t\} \\ &\overset{(6.42)}{\le} C(\Omega, n)\|f_m - f_{m+1}\|_{L^1}\frac{1}{t} \\ &\le C(\Omega, n)\frac{1}{t}\, 4^{-m} \quad \text{für alle } t > 0. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt mit der Setzung $t = 2^{-m}$

$$\mathscr{L}^n\{|Kf_m - Kf_{m+1}| > 2^{-m}\} \le C(\Omega, n)2^{-m}.$$

Wir definieren nun

$$\mathcal{A}_l := \bigcup_{m=l}^\infty \{|Kf_m - Kf_{m+1}| > 2^{-m}\}$$

und wir erhalten

$$\mathscr{L}^n(\mathcal{A}_l) \le C(\Omega, n)\sum_{k=l}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k \le \tilde{C}(\Omega, n)2^{-l}. \tag{6.44}$$

Gilt für ein $l > 0$, dass $x \notin \mathcal{A}_l$, dann gilt, dass

$$|Kf_m(x) - Kf_{m+1}(x)| \le 2^{-m} \quad \text{für alle } m \ge l,$$

und somit konvergiert $Kf_m(x)$ gegen einen Grenzwert, den wir mit $Kf(x)$ bezeichnen.Dies lässt sich für alle $x \notin \mathcal{A} := \bigcap_{l=1}^\infty \mathcal{A}_l$ machen, und es gilt

$$\mathscr{L}^n(\mathcal{A}) \le \mathscr{L}^n(\mathcal{A}_l) \overset{(6.44)}{\le} \tilde{C}(\Omega, n)2^{-l} \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N},$$

also

$$\mathscr{L}^n(\mathcal{A}) = 0.$$

$Kf_m(x)$ konvergiert also $\mathscr{L}^n$-fast überall gegen einen Wert, welchen wir $Kf(x)$ nennen. Insbesondere ist dann Kf messbar[14], da $Kf_m \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und somit insbesondere messbar ist. Über das Lemma von FATOU erhalten wir dann aus (6.42) die Abschätzung

$$\mathscr{L}^n\{|Kf| > t\} \overset{(6.27)}{\le} C(\Omega, n)\|f\|_{L^1}\frac{1}{t} \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ t > 0. \tag{6.45}$$

[14] vgl. [Alt99] Lemma 1.10, S. 43

Nun zeigen wir zunächst, dass damit Kf für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert ist.
Zunächst gilt für eine approximierende Folge f_m, die (6.43) erfüllt, dass

$$\lim_{m\to\infty} \mathscr{L}^n\{|Kf - Kf_m| > t\} = 0 \quad \text{für alle } t > 0: \tag{6.46}$$

Dazu setzen wir $B_m := \{|Kf - Kf_m| > t\} \backslash \mathcal{A}$.
Da $\mathcal{A}$ eine Nullmenge ist, gilt dann

$$\mathscr{L}^n(B_m) = \mathscr{L}^n(|Kf - Kf_m| > t).$$

Sei $l > 1$ beliebig, aber mindestens so groß, dass $2^{-l} < t$ und sei $x \notin \mathcal{A}_l$. Dann gilt

$$|Kf_m(x) - Kf_{m+1}(x)| \leq 2^{-m} \quad \text{für alle } m \geq l.$$

Damit folgt, dass für alle $m \geq l$ (wir beachten, dass für $x \notin \mathcal{A}_l$: $Kf_m(x)$ konvergiert)

$$\begin{aligned}
|Kf(x) - Kf_m(x)| &\leq \sum_{j=m}^{n} |Kf_{j+1}(x) - Kf_j(x)| + |Kf_{n+1}(x) - Kf(x)| \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \textstyle\sum_{j=m}^{\infty} |Kf_{j+1}(x) - Kf_j(x)| \\
&\leq \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-m} \\
&\leq 2^{-m} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \\
&\leq 2^{-m+1}.
\end{aligned}$$

Somit gilt also für alle l mit $2^{-l} < t$

$$x \notin \mathcal{A}_l \quad \Rightarrow \quad x \notin B_m, \quad \text{für alle } m > l.$$

Die Umkehrung dieses Schlusses liefert: Falls für ein $x \in \mathbb{R}^n$ ein $m > l$ existiert, so dass $x \in B_m$, dann ist $x \in \mathcal{A}_l$.
Definieren wir

$$C_l := \bigcup_{j=l+1}^{\infty} B_j,$$

so folgt also für alle l mit $2^{-l} < t$: Falls $x \in C_l$, dann $x \in \mathcal{A}_l$.
Somit gilt

$$B_{l+1} \subseteq C_l \subseteq \mathcal{A}_l,$$

also

$$\mathscr{L}^n(B_{l+1}) \leq \mathscr{L}^n(C_l) \leq \mathscr{L}^n(\mathcal{A}_l) \overset{(6.44)}{\leq} C(\Omega, n)2^{-l} \xrightarrow{l\to\infty} 0.$$

Daraus folgt

$$\lim_{l\to\infty} \mathscr{L}^n(B_l) = 0,$$

und wir erhalten (6.46).

Wir wählen zwei approximierende Folgen f_m^1, f_m^2 für ein gewisses $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, welche (6.43) erfüllen (wir bezeichnen den punktweisen Limes mit $K^1 f$ und $K^2 f$) und erhalte

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}^n\{\left|K^1 f - K^2 f\right| > t\} \\
\leq\ & \mathscr{L}^n\{\left|K^1 f - Kf_m^1\right| > \frac{t}{3}\} + \mathscr{L}^n\{\left|K^2 f - Kf_m^2\right| > \frac{t}{3}\} + \mathscr{L}^n\{\left|Kf_m^1 - Kf_m^2\right| > \frac{t}{3}\} \\
\overset{(6.42)}{\leq}\ & \mathscr{L}^n\{\left|K^1 f - Kf_m^1\right| > \frac{t}{3}\} + \mathscr{L}^n\{\left|K^2 f - Kf_m^2\right| > \frac{t}{3}\} + C\|f_m^1 - f_m^2\|_{L^1}\frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Nun nehmen wir auf beiden Seiten den Limes superior für $m \to \infty$ und erhalten wegen (6.46)

$$\mathscr{L}^n\{\left|K^1 f - K^2 f\right| > t\} = 0 \quad \text{für alle } t > 0.$$

Somit ist der Limes eindeutig[15].
Ist $f_m \in C_0^\infty$ eine beliebige Approximation an f in $L^1(\mathbb{R}^n)$, so betrachten wir für ein $t > 0$ beliebig die Folgen $(a_m)_m$ mit $a_m := \mathscr{L}^n\{|Kf_m - Kf| > t\}$. Dann existiert für jede Teilfolge $(a_{m'})_{m'}$ eine Teilfolge $m'' \to \infty$, so dass für $(f_{m''})_{m''}$ die Bedingung (6.43) erfüllt ist. Wegen $a_m \geq 0$ konvergiert dann $a_{m''} \xrightarrow{m'' \to \infty} 0$. Also folgt mit dem *Teilfolgenprinzip* $a_m \xrightarrow{m \to \infty} 0$, also die Konvergenz $Kf_m \xrightarrow{m\to\infty} Kf$ im Maß. Insbesondere übeträgt sich auch die Linearität.
Zusammengefasst haben wir also gezeigt, dass der lineare Operator $K : L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert und vom schwachen Typ $(1,1)$ ist.
Es bleibt noch zu zeigen, dass für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Konvergenz $K_\varepsilon f \to Kf$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ bzw. im Maß erfüllt ist und dass K auf $L^1 \cap L^2$ wohldefiniert ist.

Zur starken Konvergenz in L^2:
Dies folgt sofort, da für $f_m \in C_0^\infty \subset L^1 \cap L^2$ Approximation von $f \in L^2$

$$\begin{aligned}\|K_\varepsilon f - Kf\|_{L^2} &\leq \|K_\varepsilon(f - f_m)\|_{L^2} + \|K(f-f_m)\|_{L^2} + \|K_\varepsilon f_m - Kf_m\|_{L^2} \\ &\overset{\substack{(6.28)\\(6.44)}}{\leq} 2C(\Omega, n)\|f - f_m\|_{L^2} + \|K_\varepsilon f_m - Kf_m\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Für jedes $\delta > 0$ wählen wir also m hinreichend groß, so dass $2C(\Omega,n)\|f - f_m\|_{L^2} < \frac{\delta}{2}$. Dann gilt für alle ε hinreichend klein, dass die rechte Seite kleiner als δ ist, da $K_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} K$ stark in $C_0^\infty \cap L^2$.

Zur Konvergenz für L^1 im Maß betrachten wir für eine Approximation $f_m \in C_0^\infty$ in L^1

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}^n\{|K_\varepsilon f - Kf| > t\} \\ \leq\ & \mathscr{L}^n\{|K_\varepsilon f - K_\varepsilon f_m| > \frac{t}{3}\} + \mathscr{L}^n\{|K_\varepsilon f_m - Kf_m| > \frac{t}{3}\} + \mathscr{L}^n\{|Kf_m - Kf| > \frac{t}{3}\} \\ \overset{\substack{(6.27)\\(6.45)}}{\leq}\ & 6C(\Omega,n)\|f - f_m\|_{L^1}\frac{1}{t} + \mathscr{L}^n\{|K_\varepsilon f_m - Kf_m| > \frac{t}{3}\}.\end{aligned}$$

Wählen wir jetzt eine Folge $\varepsilon_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, so dass $\mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon_k} f - Kf| > t\} \xrightarrow{k\to\infty} \limsup_{\varepsilon \to 0}$, so haben wir

$$\mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon_k} f - Kf| > t\} \leq 6C(\Omega,n)\|f - f_m\|_{L^1}\frac{1}{t} + \mathscr{L}^n\{|K_{\varepsilon_k} f_m - Kf_m| > \frac{t}{3}\} \quad \text{für alle } k.$$

Mit $k \to \infty$ links und rechts folgt dann

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathscr{L}^n\{|K_\varepsilon f - Kf| > t\} \overset{(6.40)}{\leq} C\|f - f_m\|_{L^1}\frac{1}{t} \quad \text{für alle } m$$

und somit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{L}^n\{|K_\varepsilon f - Kf| > t\} = 0.$$

[15]Sei g messbar und $\mathscr{L}^n\{|g| > t\} = 0$ für alle $t > 0$. Es gilt

$$\{|g| > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty \left\{|g| > \frac{1}{n}\right\}$$

Wegen der Messbarkeit von g folgt dann

$$\mathscr{L}^n\{|g| > 0\} \leq \sum_{n=1}^\infty \mathscr{L}^n\left\{|g| > \frac{1}{n}\right\} = 0,$$

also ist $g = 0$ punktweise fast überall in $\mathbb{R}^n$.

Ist zuletzt noch $\underline{f \in L^1 \cap L^2}$, so seien K^1, K^2 der L^1 bzw. L^2-"Limes" von K_ε. Wegen der starken Konvergenz in L^2 folgt einerseits die fast überall punktweise Konvergenz $K_\varepsilon f \to K^2 f$, und andererseits

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathscr{L}^n\{\left|K_\varepsilon f - K^2 f\right| > t\} \overset{(6.40)}{=} 0,$$

da $\mathscr{L}^n(\{\left|K_\varepsilon f - K^2 f\right| > t\} \leq \frac{1}{t^2}\|K_\varepsilon f - K^2 f\|_{L^2}^2$ (Чебышёв[16]-Ungleichung), was mit

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathscr{L}^n\{\left|K_\varepsilon f - K^1 f\right| > t\} = 0$$

von oben zusammen

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^n\{\left|K^1 f - K^2 f\right| > t\} &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathscr{L}^n\{\left|K^1 f - K^2 f\right| > t\} \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathscr{L}^n\{\left|K_\varepsilon f - K^1 f\right| > \frac{t}{2}\} + \limsup_{\varepsilon} \mathscr{L}^n\{\left|K_\varepsilon f - K^2 f\right| > \frac{t}{2}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ergibt, womit

$$K^1 f = K^2 f$$

punktweise fast überall gezeigt ist.

□

6.18 Theorem (Singuläre Integrale und $\mathscr{H}^1$)
(vgl. [Ste93], Theorem 3, §III.3, Seite 113f)
Sei $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ein stetiger, linearer Operator mit Norm $\|T\| \equiv \|T\|_{L(L^2,L^2)} < \Lambda$ für ein $\Lambda > 0$. Sei weiter $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ ein Kern, so dass für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$ und für alle $x \notin \operatorname{supp}(f)$ gilt

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\, \mathbf{d}y. \tag{6.47}$$

Zusätzlich gelte für T, dass es auf $\{f \in L^1 \cap L^2 \mid \operatorname{supp} f \subset\subset \mathbb{R}^n\}$ mit Translationen kommutiere, d.h. für jedes $c \in \mathbb{R}^n$ und für jedes $f \in L^1 \cap L^2$, $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$ gelte

$$(Tf)(x-c) = T(f(\cdot - c))(x) \quad \text{für } \mathscr{L}^n\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.48}$$

Desweiteren gelte für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, \mathbf{d}x \leq \Lambda. \tag{6.49}$$

Sei T zudem erweiterbar auf ein T^1 auf $L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass für ein $\Xi > 0$ gilt

$$\mathscr{L}^n\left\{\left|T^1 f\right| > t\right\} \leq \Xi\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\, \frac{1}{t} \quad \text{für alle } t > 0,\ f \in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{6.50}$$

Dann bildet T^1 stetig von $\mathscr{H}^1$ nach L^1 ab[17]; genauer gilt für eine Konstante $C(\Lambda, n)$

$$\|T^1 f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Lambda, n)\|f\|_{\mathscr{H}^1} \quad \text{für alle } f \in \mathscr{H}^1.$$

Beweis. Sei zunächst a ein $\mathscr{H}^1$-Atom , das heißt sei $a \in \mathscr{H}^1$ und es gelte für einen Ball $B \subset \mathbb{R}^n$ (vgl. Definition 6.5)

(*i*) $\operatorname{supp}(a) \subset B$,

(*ii*) $|a| \leq \mathscr{L}^n(B)^{-1}$ und

[16] Tschebyschow, Čebyšëv, Tschebyscheff, Tschebyschew oder Tschebyschev

[17] Mit [Ste93], §III.3, Theorem 4 lässt sich unter etwas stärkeren Voraussetzungen an den Kern K erreichen, dass $T^1 : \mathscr{H}^1 \to \mathscr{H}^1$ stetig ist.

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,\mathbf{d}x = 0$.

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |a|^2 \leq \int_{\mathrm{supp}(a)} |a|\,|a| \leq \mathscr{L}^n(B)^{-2}\mathscr{L}^n(\mathrm{supp}(a)) \leq \mathscr{L}^n(B)^{-1},$$

also a in L^2 und

$$\|a\|_{L^2} \leq \mathscr{L}^n(B)^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.51}$$

Sei $B^* = 2B$ der konzentrische Ball mit dem doppelten Radius von B. Dann gilt (wir beachten $a \in L^2$)

$$\begin{aligned}
\int_{B^*} |Ta(x)|\,\mathbf{d}x \quad &\leq \quad \mathscr{L}^n(B^*)^{\frac{1}{2}}\,\|Ta\|_{L^2(B^*)} \\
&\leq \quad \mathscr{L}^n(B^*)^{\frac{1}{2}}\,\|Ta\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \quad \|T\|\,\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\mathscr{L}^n(B^*)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(6.51)}{\leq} \quad \|T\|\,\mathscr{L}^n(B)^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^n(B^*)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad 2^{\frac{n}{2}}\Lambda.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt für $x \notin \mathrm{supp}(a)$ (wir beachten $a \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger; zusätzlich erinnern wir uns, dass $\int a = 0$)

$$\begin{aligned}
(Ta)(x) \quad &\overset{(6.47)}{=} \quad \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\,a(y)\,\mathbf{d}y \\
&= \quad \int_B K(x-y)\,a(y)\,\mathbf{d}y \\
&= \quad \int_B (K(x-y) - K(x))\,a(y)\,\mathbf{d}y.
\end{aligned}$$

Damit folgern wir unter Anwendung des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus B^*} |Ta(x)|\,\mathbf{d}x \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^n\setminus B^*}\int_B |K(x-y) - K(x)|\,|a(y)|\,\mathbf{d}y\,\mathbf{d}x \\
&= \quad \int_B \int_{\mathbb{R}^n\setminus B^*} |K(x-y) - K(x)|\,\mathbf{d}x\,|a(y)|\,\mathbf{d}y.
\end{aligned}$$

Nehmen wir zunächst an, dass B, B^* in der 0 ihr Zentrum haben, dann gilt für $x \in \mathbb{R}^n\setminus B^*$, $y \in B$, dass

$$|x| \geq \mathrm{radius}(B^*) = 2\,\mathrm{radius}(B) > 2|y|$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus B^*} |Ta(x)|\,\mathbf{d}x \quad &= \quad \int_B \int_{\mathbb{R}^n\setminus B^*} |K(x-y) - K(x)|\,\mathbf{d}x\,|a(y)|\,\mathbf{d}y \\
&\overset{(6.49)}{\leq} \quad \Lambda \int_B |a(y)|\,\mathbf{d}y \\
&\leq \quad \Lambda\|a\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also für alle $\mathscr{H}^1$-Atome a mit B zentriert in der 0, dass (wir beachten, dass aus Eigenschaft *(ii)* für a folgt: $\|a\|_{L^1} \leq \mathscr{L}^n(B)\|a\|_{L^\infty} \leq \mathscr{L}^n(B)\mathscr{L}^n(B)^{-1} = 1$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Ta| = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B^*} |Ta| + \int_{B^*} |Ta| \leq \Lambda + \Lambda 2^{\frac{n}{2}} =: C(\Lambda, n). \tag{6.52}$$

Ist a ein $\mathscr{H}^1$-Atom mit einem beliebigen Zentrum z, definieren wir die Translation τ_z durch $(\tau_z f)(\cdot) := f(\cdot - z)$. Dann gilt

$$\|Ta\|_{L^1} = \|\tau_z Ta\|_{L^1} \overset{(6.48)}{=} \|T(\tau_z a)\|_{L^1} \overset{(6.52)}{\leq} C(\Lambda, n),$$

da T translationsinvariant ist und $\tau_z a$ ein $\mathscr{H}^1$-Atom mit Zentrum in der 0 ist.

Somit wurde für alle Atome a gezeigt, dass

$$\|Ta\|_{L^1} \leq C(\Lambda, n).$$

Sei $f \in \mathscr{H}^1$. Nach Theorem 6.6 existieren Atome a_k und eine Folge $(\lambda_k)_k \subset \mathbb{R}$ mit

$$f = \sum_k \lambda_k \; a_k,$$

das heißt

$$\|f - \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k\|_{\mathscr{H}^1} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

und es gilt

$$\sum_k |\lambda_k| \leq C\|f\|_{\mathscr{H}^1}.$$

Wir definieren $f_n \in \operatorname{span}(Atome)$ durch

$$f_n := \sum_{k=1}^n \lambda_k \; a_k.$$

Dann ist $(f_n)_n$ eine CAUCHY-Folge in $\mathscr{H}^1$, $f_n \in L^1 \cap L^2$ und es gilt

$$\|Tf_n\|_{L^1} \leq C(\Lambda, n) \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq \tilde{C}(\Lambda, n)\|f\|_{\mathscr{H}^1}, \tag{6.53}$$

sowie für $m > n$

$$\|T(f_n - f_m)\|_{L^1} \leq \sum_{k=n+1}^m \|Ta_k\|_{L^1} \leq C(\Lambda, n) \sum_{k=n+1}^m |\lambda_k|,$$

und somit ist $(T(f_n))_n$ eine CAUCHY-Folge in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und besitzt also einen Grenzwert $\Upsilon f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wegen (6.53) gilt

$$\|\Upsilon f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(\Lambda, n)\|f\|_{\mathscr{H}^1}. \tag{6.54}$$

Wir wollen zeigen, dass $\Upsilon f = T^1 f$. Nach Proposition 6.7(i) gilt $f_m \xrightarrow{m\to\infty} f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und wir betrachten für ein $t > 0$

$$\mathscr{L}^n\{|T^1 f - \Upsilon f| > t\} \quad \leq \quad \mathscr{L}^n\{|T^1 f - T^1 f_m| > \frac{t}{2}\} + \mathscr{L}^n\{|Tf_m - \Upsilon f| > \frac{t}{2}\}, \tag{6.55}$$

wobei wir $T^1 f_m = Tf_m$ benutzen, was aus $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt. Weiter wissen wir, dass $\|Tf_m - \Upsilon f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m\to\infty} 0$, nach der Definition von Υf, womit wir durch Anwendung der TSCHEBYSCHEFF-Ungleichung das folgende erhalten:

$$\lim_{m\to\infty} \mathscr{L}^n\{|Tf_m - \Upsilon f| > \frac{t}{2}\} = 0 \quad \text{für alle } t > 0.$$

Da T^1 von schwachem Typ (1,1) ist, folgt zudem

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^n\{|T^1 f - T^1 f_m| > \frac{t}{2}\} \quad &= \quad \mathscr{L}^n\{|T^1(f - f_m)| > \frac{t}{2}\} \\
&\overset{(6.50)}{\leq} \quad \Xi \frac{1}{t} \; \|f - f_m\|_{L^1} \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt aus (6.55)

$$\mathscr{L}^n\{|T^1 f - \Upsilon f| > t\} = 0 \quad \text{für alle } t > 0,$$

also $T^1 f = \Upsilon f$. Es gilt somit $\Upsilon f = T^1 f$ auf $\mathscr{H}^1$ und die Behauptung folgt somit aus (6.54). □

6.19 Korollar (Anwendung)
Sei $n \geq 2$ und $\Omega_{ij} : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j \leq n$ eine Funktion definiert durch

$$\Omega(z) := \Lambda \; \frac{\delta_i^j |z|^n - n \; z_i \; z_j \; |z|^{n-2}}{|z|^n}.$$

Wir definieren $K_{ij}(z) := \frac{\Omega_{ij}(z)}{|z|^n}$.
Dann existiert für jedes $\tau \in \mathscr{H}^1$ ein $h_{ij} \equiv h_{ij}(\tau) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|z| > \varepsilon} K_{ij}(z) \tau(\xi - z) \; \mathbf{d}z \; \varphi(\xi) \; \mathbf{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} h_{ij}(\xi) \; \varphi(\xi) \; \mathbf{d}\xi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \; 1 \leq i, j \leq n,$$

und weiter gilt

$$\|h_{ij}\|_{L^1} \leq C(\Omega_{ij}, n) \|\tau\|_{\mathscr{H}^1}.$$

Beweis. Wir fixieren i und j, $1 \leq i, j \leq n$ und setzen $\Omega \equiv \Omega_{ij}$, $K \equiv K_{ij}$. Es gilt

- $\Omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$,
- $\Omega(tz) = \Omega(z)$ für $t > 0$, $z \neq 0$
- und
$$\int_{\partial B_1(0)} \Omega = 0:$$
In der Tat folgt dies aus der Anwendung von Polarkoordinaten (vgl. Lemma 4.6), wobei wir ohne Einschränkung annehmen, dass $i = 1$ und $j = 2$ für den Fall $i \neq j$ und $i = j = 1$ für den Fall $i = j$:
Für den Fall $i = 1$ und $j = 2$ gilt
$$\Omega(y) = \Omega_{12}(y) = -\Lambda n y_1 y_2 \quad \text{für alle } y = (y_1, \ldots, y_n) \in \partial B_1(0).$$
In Polarkoordinaten ergibt sich also
$$\int_{\partial B_1(0)} \Omega(y) = -\Lambda n \int \cdots \int \int_{\varphi_1 = 0}^{\pi} \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_1)^{n-2} \; \mathbf{d}\varphi_1 \; J'(\varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}) \mathbf{d}\varphi_2 \; \cdots \; \mathbf{d}\varphi_{n-1} = 0,$$
wobei $J'(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ alle nicht von φ_1 abhängigen Terme der Jakobischen der Transformation bezeichne.
Dies folgt aus dem folgenden Argument:
Wegen $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos \varphi$ und $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin \varphi$ gilt
$$\int_0^\pi \cos \varphi \;\; \sin^{n-1} \varphi = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \;\; \cos^{n-1} \varphi.$$
Nun ist $\sin(-\varphi) \;\; \cos^{n-1}(-\varphi) = -\sin \varphi \;\; \cos^{n-1} \varphi$ und somit erhalten wir
$$\int_0^\pi \cos \varphi \;\; \sin^{n-1} \varphi = 0.$$
Für den Fall $i = j = 1$ ergibt sich, dass $\Omega(y) = \Omega_{11} = \Lambda(1 - n y_1^2)$ ist und somit
$$\int_{\partial B_1(0)} \Omega(y) = \Lambda \int \cdots \int \int_{\varphi_1 = 0}^{\pi} (1 - n \cos^2(\varphi_1)) sin(\varphi_1)^{n-2} \; \mathbf{d}\varphi_1 \; J'(\varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}) \mathbf{d}\varphi_2 \; \cdots \; \mathbf{d}\varphi_{n-1} = 0,$$
denn es gilt
$$\int_0^\pi \sin^n \varphi = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi,$$
und deshalb
$$\int_0^\pi (1 - n \cos^2 \varphi) \sin^{n-2} \varphi = \int_0^\pi (1 - n) \sin^{n-2} \varphi + \int_0^\pi n \frac{n-1}{n} \sin^{n-2} \varphi = 0,$$
was impliziert, dass $\int_{\partial B_1(0)} \Omega(y) = 0$ für alle $n \geq 2$.

- Für $|\mu| = |\nu| = 1$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}\Omega(\mu) - \Omega(\nu) &= \Lambda\left(\frac{\delta_i^j - n\mu_i\mu_j}{1} - \frac{\delta_i^j - n\nu_i\nu_j}{1}\right)\\ &= -n\Lambda(\mu_i\mu_j - \nu_i\nu_j).\end{aligned}$$

Also folgt (wir beachten, dass ggf. $i = j$)

$$\begin{aligned}|\Omega(\mu) - \Omega(\nu)| &\leq n\Lambda\left(|\mu_i\mu_j - \mu_i\nu_j| + |\mu_i\nu_j - \nu_i\nu_j|\right)\\ &= n\Lambda(\underbrace{|\mu_i|}_{\leq 1}|\mu_j - \nu_j| + \underbrace{|\nu_j|}_{\leq 1}|\mu_i - \nu_i|)\\ &\leq 2n\Lambda\sum_{k=1}^{n}|\mu_k - \nu_k| \\ &= 2n\Lambda|\mu - \nu|_1\\ &\leq \tilde{C}(\Lambda, n)|\mu - \nu|_2.\end{aligned} \tag{6.56}$$

Hierbei seien mit $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2 \equiv |\cdot|$ die in $\mathbb{R}^n$ äquivalenten Normen $\sum_{i=1}^n |(\cdot)_i|$ bzw. $\left(\sum_{i=1}^n |(\cdot)_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ bezeichnet.Definieren wir $\omega(\delta)$ durch

$$\omega(\delta) := \sup_{\substack{\mu,\nu\in\partial B_1(0),\\ |\mu-\nu|\leq\delta}} |\Omega(\nu) - \Omega(\mu)|,$$

so gilt $\omega(\delta) \leq C(\Lambda, n)\delta$ nach (6.56) und

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{r}\mathbf{d}r \leq C(\Lambda, n)\int_0^1 \frac{r}{r} = C(\Lambda, n).$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 6.17 erfüllt. Wir definieren K durch

$$K(z) := \frac{\Omega(z)}{|z|^n} \quad z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

und K_ε durch

$$K_\varepsilon(z) := \frac{\Omega(z)}{|z|^n}\chi_{\{|z|>\varepsilon\}}(z) \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Nach Lemma 6.17(iv) ist dann

$$T_\varepsilon f(\xi) := \int_{|y|>\varepsilon} K(y)f(\xi - y)\,\mathbf{d}y \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

wohldefiniert, und T_ε erweitert auf einen stetigen und linearen Operator von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit den Abschätzungen

$$\|T_\varepsilon f\|_{L^2} \leq C(\Omega, n)\|f\|_{L^2} \quad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\mathscr{L}^n\{|T_\varepsilon f| > t\} \leq C(\Omega, n)\,\frac{1}{t}\,\|f\|_{L^1} \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ t > 0.$$

Nach Lemma 6.17(v) konvergiert T_ε auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ im Maß gegen eine Abbildung $T:\ L^1(\mathbb{R}^n) \cup L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ stark bezüglich der $L^2(\mathbb{R}^n)$-Norm. Für dieses T gelten die Abschätzungen

$$\|Tf\|_{L^2} \leq C(\Omega, n)\|f\|_{L^2} \quad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\mathscr{L}^n\{|Tf| > t\} \leq C(\Omega, n)\,\frac{1}{t}\,\|f\|_{L^1} \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ t > 0.$$

Da wir das Theorem 6.18 anwenden wollen, bezeichnen wir im Folgenden mit T_ε bzw. T nur noch T_ε bzw. T auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ eingeschränkt und mit T^1_ε bzw. T^1 den auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ eingeschränkten Operator T_ε bzw. T. Insbesondere sind mit dieser Konvention T^1 und T eingeschränkt auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gleich.
Unser Ziel ist es nun, Theorem 6.18 anzuwenden, welches uns liefern wird, dass T^1 und T^1_ε beide stetig von $\mathscr{H}^1$ nach $L^1(\mathbb{R}^n)$ abbilden, und es mit einer Konstante unabhängig von ε gelten wird, dass

$$\|T^1 f\|_{L^1}, \|T^1_\varepsilon f\|_{L^1} \leq C(\Omega, n)\|f\|_{\mathscr{H}^1}.$$

Um dies zu erreichen, benötigen wir einerseits Translationsinvarianz von T bzw. T_ε (d.h. auf L^2) und andererseits einen Kern, der T "teilweise darstellt".

<u>Zum Kern:</u>
Sei $f \in L^1 \cap L^2$ mit $\mathrm{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $x \notin \mathrm{supp}(f)$, dass es ein $\varepsilon_x > 0$ gibt, so dass $f(y) = 0$ für $|x-y| \leq \varepsilon_x$. Somit gilt wegen der starken L^2-Konvergenz von T_ε nach T (und somit punktweise fast überall), da irgendwann $\varepsilon < \varepsilon_x$

$$(Tf)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon_x} K(x-y)\ f(y)\ \mathbf{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\ f(y)\ \mathbf{d}y,$$

also ist (6.47) für T erfüllt.
Für T_ε wählen wir den Kern K_ε und erhalten

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x-y) f(y).$$

Nach Lemma 6.17 (i) und (ii) erfüllen sowohl K als auch K_ε die Ungleichung (6.19) mit einer von ε unabhängigen Konstante und somit ist die Bedingung (6.49) von Theorem 6.18 sowohl für K und als auch für K_ε erfüllt. Weiter gilt, dass auch die Operatornorm von T, $T_\varepsilon :\ L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ nach Lemma 6.17(iv) und (v) gleichmäßig durch $C(\Omega, n)$ beschränkt sind.

<u>Zur Translationsinvarianz:</u>Für T_ε gilt für $f \in L^1 \cap L^2$

$$(T_\varepsilon f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y) f(x-y)\ \mathbf{d}y.$$

Hier ist klar, dass

$$(T_\varepsilon f)(x+c) = (T_\varepsilon f(\cdot + c))(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Für beliebige $f \in L^2$ wählen wir eine approximierende Folge $f_m \in L^1 \cap L^2$ und erhalten (für f_m gilt schon die Translationsinvarianz)

$$\begin{aligned}
\|(T_\varepsilon f(\cdot + c)) - (T_\varepsilon f)(\cdot + c)\|_{L^2} &\leq \|(T_\varepsilon f(\cdot + c)) - (T_\varepsilon f_m(\cdot + c))\|_{L^2} + \|(T_\varepsilon f_m(\cdot + c)) - (T_\varepsilon f_m)(\cdot + c)\|_{L^2} \\
&\quad + \|(T_\varepsilon f_m)(\cdot + c) - (T_\varepsilon f)(\cdot + c)\|_{L^2} \\
&= \|T_\varepsilon(f(\cdot + c) - f_m(\cdot + c))\|_{L^2} + \|T_\varepsilon(f_m - f)\|_{L^2} \\
&\xrightarrow{m \to \infty} 0,
\end{aligned}$$

da $f_m(\cdot + c) \xrightarrow{m \to \infty} f(\cdot + c)$ in L^2. Somit ist T_ε translationsinvariant für alle ε.
Nun gilt nach Lemma 6.17(v), dass T_ε stark in L^2 nach T konvergiert für $f \in L^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|(Tf(\cdot + c)) - (Tf)(\cdot + c)\|_{L^2} &\leq \|(Tf(\cdot + c)) - (T_\varepsilon f(\cdot + c))\|_{L^2} + \|(T_\varepsilon f(\cdot + c)) - (T_\varepsilon f)(\cdot + c)\|_{L^2} \\
&\quad + \|(T_\varepsilon f)(\cdot + c) - (Tf)(\cdot + c)\|_{L^2} \\
&= \|(Tf(\cdot + c)) - (T_\varepsilon f(\cdot + c))\|_{L^2} + \|(T_\varepsilon f) - (Tf)\|_{L^2} \\
&\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.
\end{aligned}$$

Also ist auch T translationsinvariant[18].

Mit Theorem 6.18 folgt nun, dass T^1 und T^1_ε beide stetig von $\mathscr{H}^1$ nach L^1 abbilden mit der Abschätzung

$$\|T^1 f\|_{L^1}, \|T^1_\varepsilon f\|_{L^1} \leq C(\Omega, n)\|f\|_{\mathscr{H}^1}, \tag{6.57}$$

wobei die Konstante $C(\Omega, n)$ nicht von ε abhängt.
Nun behaupten wir, dass für alle $\tau \in \mathscr{H}^1$ und für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ das folgende gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|z|>\varepsilon} K(z)\tau(\xi - z) \, \mathbf{d}z \; \varphi(\xi) \, \mathbf{d}\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (T^1_\varepsilon \tau)(\xi) \; \varphi(\xi) \, \mathbf{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (T^1 \tau)(\xi) \; \varphi(\xi) \, \mathbf{d}\xi.$$

Dies folgt aus der folgenden Rechnung:
Wir approximieren $\tau \in \mathscr{H}^1$ durch $\tau_m \in L^1 \cap L^2 \cap \mathscr{H}^1$ (z.B. Atom-Kombinationen), beachten, dass $T^1_\varepsilon \tau_m = T_\varepsilon \tau_m$ und $T^1 \tau_m = T\tau_m$, da $\tau \in L^1 \cap L^2$, und erhalten

$$\begin{aligned}
|\int_{\mathbb{R}^n} (T^1_\varepsilon \tau)(\xi) \; \varphi(\xi) \quad &- \quad (T^1\tau)(\xi)\varphi(\xi) \, \mathbf{d}\xi| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|T^1_\varepsilon(\tau - \tau_m)\right| \, |\varphi| + \int_{\mathbb{R}^n} \left|T^1_\varepsilon \tau_m - T^1 \tau_m\right| \, |\varphi| + \int_{\mathbb{R}^n} \left|T^1(\tau_m - \tau)\right| \, |\varphi| \\
&\overset{(6.57)}{\leq} 2C(\Omega, n)\|\tau - \tau_m\|_{\mathscr{H}^1} \, \|\varphi\|_{L^\infty} + \|T^1_\varepsilon \tau_m - T^1 \tau_m\|_{L^2} \, \|\varphi\|_{L^2} \\
&\leq 2C(\Omega, n, \varphi)(\|\tau - \tau_m\|_{\mathscr{H}^1} + \|T_\varepsilon \tau_m - T\tau_m\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

Wir benutzen die starke Konvergenz von T_ε nach T aus Lemma 6.17(v) (wir beachten, dass $\tau_m \in L^2$) und die Konvergenz $\tau_m \xrightarrow{m \to \infty} \tau$ in $\mathscr{H}^1$. Genauer, wählen wir zunächst m hinreichend groß, so dass $\|\tau - \tau_m\|_{\mathscr{H}^1}$ hinreichend klein, und danach $\varepsilon = \varepsilon(m)$ hinreichend klein, so dass $\|T_\varepsilon \tau_m - T\tau_m\|_{L^2}$ klein.
Insgesamt ergibt sich dann

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} (T^1_\varepsilon \tau))(\xi) \; \varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (T^1 \tau)(\xi)\varphi(\xi) \, \mathbf{d}\xi,$$

und durch die Setzung $h := T^1(\tau)$ erhalten wir die Behauptung. □

6.3.2. Regularitätsbeweis nach Semmes

Nun sind wir fast in der Lage aus $\triangle v \in \mathscr{H}^1_{loc}$ zu schließen, dass $\nabla^2 v \in L^1_{loc}$ (Theorem 6.23). Zunächst benötigen wir aber noch einige Ergebnisse über das Newtonpotential:
Ab sofort nehmen wir in diesem Abschnitt an, dass die $n \geq 2$.

6.20 Lemma (Stetigkeit des Newton-Potentials)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ und seien q und p mit $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ gegeben, so dass

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{n}. \tag{6.58}$$

Dann ist das Newton-Potential auf Ω

$$Nf(x) := \int_\Omega \Phi(x - y) \; f(y) \, \mathbf{d}y, \quad x \in \Omega,$$

eine stetige, lineare Abbildung $N: \; L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ mit

$$\|N\|_{L(L^p(\Omega), L^q(\Omega))} \leq C(\Omega, n, p, q).$$

Hierbei bezeichnet

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\mathscr{L}^{B^n_1(0)}} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3, \end{cases}$$

die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

[18] Die gezeigte Translationsinvarianz für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist tatsächlich nicht stärker, als die in Theorem 6.18 geforderte Translationsinvarianz nur für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompakten Träger; aus dem letzeren lässt sich nämlich über das gerade vorgeführte Approximationsargument die nur scheinbar stärkere Translationsvarianz herleiten.

Beweisskizze. Zunächst macht man sich klar, dass für jedes $E \subset\subset \mathbb{R}^n$ im Fall $n = 2$ gilt, dass[19] $\log|\cdot| \in L^r(E)$ für alle $1 \leq r < \infty$ und im Fall $n \geq 3$, dass $\frac{1}{|\cdot|^{n-2}} \in L^r(E)$ für alle $1 \leq r < \frac{n}{n-2}$.
Sei zunächst $\frac{n}{2} < p \leq \infty$ und $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für r mit $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1$, dass $1 \leq r < \frac{n}{n-2}$ (bzw. $1 \leq r < \infty$ für $n = 2$). Somit erhalten wir durch Anwendung der HÖLDER-Ungleichung

$$\|Nf\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\Phi\|_{L^r(B_{\operatorname{diam}\Omega}(0))} \|f\|_{L^p(\Omega)} =: C(\operatorname{diam}\Omega, p, n)\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Daraus folgt die Behauptung für alle $1 \leq q \leq \infty$, $p > \frac{n}{2}$, da $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ (wir beachten, dass für $p > \frac{n}{2}$ gilt $\frac{1}{p} - \frac{2}{n} < 0$, also ist (6.58) trivialerweise erfüllt für $q \geq 1$).
Sei $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, $q \geq p$ und (6.58) erfüllt (d.h. $q < \infty$). Wir definieren r' durch $\frac{1}{r'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ und r durch $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.
Dann gilt

$$0 \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r'} \overset{(6.58)}{<} \frac{2}{n},$$

und deshalb $1 \leq r < \frac{n}{n-2}$.
Definieren wir p' durch $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$, so erhalten wir

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Mit der (verallgemeinerten) HÖLDER-Ungleichung folgt dann unter Beachtung, dass $r < \frac{n}{n-2}$ und deshalb $\|\Phi(x - \cdot)\|_{L^r(\Omega)} = C(\operatorname{diam}\Omega, r, n)$ für alle $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
|Nf(x)| &\leq \int_\Omega |\Phi(x-y)|^{\frac{r}{p'}} \, |\Phi(x-y)|^{\frac{r}{q}} \, |f(y)|^{\frac{p}{q}} \, |f(y)|^{\frac{p}{r'}} \\
&\leq \|\Phi(x-\cdot)\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}} \left(\int_\Omega |\Phi(x-y)|^r \, |f(y)|^p \, \mathbf{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{r'}} \\
&\leq C(\operatorname{diam}\Omega, p, r, n) \left(\int_\Omega |\Phi(x-y)|^r \, |f(y)|^p \, \mathbf{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{r'}}.
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Nun gilt mit dem Satz von FUBINI

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_\Omega |\Phi(x-y)|^r \, |f(y)|^p \, \mathbf{d}y \, \mathbf{d}x &= \int_\Omega \|\Phi(\cdot - y)\|_{L^r(\Omega)}^r \, |f(y)|^p \mathbf{d}y \\
&\leq C(\operatorname{diam}\Omega, r, n)\|f\|_{L^p(\Omega)}^p,
\end{aligned}$$

und somit erhalten wir aus (6.59)

$$\|Nf\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\operatorname{diam}\Omega, r, p, q, n)\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \, \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{r'}} = C(\operatorname{diam}\Omega, r, p, q, n)\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Da r in Abhängigkeit von p und q definiert wurde, haben wir gezeigt, dass

$$\|Nf\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\operatorname{diam}\Omega, p, q, n)\|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{6.60}$$

Sei zuletzt noch $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$, $1 \leq q < p$ und (6.58) erfüllt. Mit dem bereits Gezeigten erhalten wir dann unter Beachtung, dass $\frac{1}{p} > \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$

$$\|Nf\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\operatorname{diam}\Omega, n, p, q)\|Nf\|_{L^p(\Omega)} \overset{(6.60)}{\leq} C(\operatorname{diam}\Omega, n, q, p)\|f\|_{L^p(\Omega)},$$

und damit ist die Behauptung gezeigt. ||

[19] Es gilt für $n \geq 2$, dass $\log|x| \in L^1(E)$ für jedes $E \subset\subset \mathbb{R}^n$: Der Übersicht halber betrachten wir nur den „interessanten“ (weil singulären) Fall $E = B_1^n(0)$. Wir setzen $f_\varepsilon(x) := \log|x| \, \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)}(x)$. Dann gilt

$$\int_{B_1(0)} |f_\varepsilon(x)| = -C(n) \int_\varepsilon^1 r^{n-1} \log r \, \mathbf{d}r \leq C(n) \sup_{r \in [0,1]} r^{n-1} |\log r| (1-\varepsilon).$$

Also ist $\|f_\varepsilon\|_{L^1(B_1(0))} \leq C(n)O(1)$ für $\varepsilon \to 0$. Wir erhalten zudem durch analoges Rechnen $\|f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}\|_{L^1(B_1(0))} = \|f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}\|_{L^1(B_\varepsilon(0) \setminus B_{\varepsilon'}(0))} = o(1)$ für $\varepsilon \to 0$, also ist $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ eine CAUCHY-Folge für $\varepsilon \to 0$ und es existiert ein Limes f mit $\|f_\varepsilon - f\|_{L^1(B_1(0))} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} = 0$.
Weiter gilt $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \log$ punktweise fast überall in $B_1(0)$ und somit erhalten wir $f = \log|\cdot|$, woraus $\log|\cdot| \in L^1(B_1(0))$ folgt.

6.21 Bemerkung
Insbesondere ist das NEWTON-Potential auf $\mathbb{R}^n$, *welches wir im folgenden einfach das* NEWTON-*Potential nennen werden, punktweise fast überall in* $\mathbb{R}^n$ *wohldefiniert für jedes* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\operatorname{supp} f \subset\subset \mathbb{R}^n$, *da für* $x \in \operatorname{supp} f$ *die Abbildung* $Nf(x)$ *wohldefiniert ist, nach Lemma 6.20 und für* $x \notin \operatorname{supp} f$ *die Abbildung* $\Phi(x - \cdot) \in C^\infty(\operatorname{supp} f)$.

Nun benötigen wir noch, dass für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$ schwach $\triangle(Nf) = -f$ gilt:

6.22 Lemma
Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und* $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$.
Wir betrachten das Newtonpotential $Nf = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\cdot - y) f(y) \mathbf{d}y$.
Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} Nf \, \triangle\varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} f \, \varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. (*i*) Angenommen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt (vgl. z.B. [Eva98], §2.2, Theorem 1, S.23) $Nf \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\triangle Nf = f$, also mit partieller Integration

$$-\int_{\mathbb{R}^n} Nf \, \triangle\varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} \triangle(Nf) \, \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(*ii*) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^n$.
Da der Support von f kompakt enthalten in $\mathbb{R}^n$ ist, existieren $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f_k - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, so dass eine offene Menge $U \subset\subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $\operatorname{supp}(f_k) \subset\subset U$ für alle k.
Wir bezeichnen mit Nf_k das Newtonpotential von f_k, d.h. $Nf_k(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f_k(y) \mathbf{d}y$, und sei $K_\varphi := \operatorname{supp}(\triangle\varphi)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^n} (Nf \, \triangle\varphi + f \, \varphi)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (Nf - Nf_k) \, \triangle\varphi + \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_k) \, \varphi + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (Nf_k \, \triangle\varphi + f_k \, \varphi)}_{=0 \text{ nach } (i)}\right| \\ &\leq \|\triangle\varphi\|_{L^\infty} \, \|Nf - Nf_k\|_{L^1(K_\varphi)} + \|\varphi\|_{L^\infty} \, \|f - f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Nun gilt nach Lemma 6.20, dass das Newtonpotential als Funktion von $L^p(K_\varphi) \to L^q(K_\varphi)$ stetig und linear ist, falls $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$. Wir wählen $p = q = 1$, dann gilt$\|Nf - Nf_k\|_{L^1(K_\varphi)} \leq C(K_\varphi, n)\|f - f_k\|_{L^1(K_\varphi)}$.
Insgesamt folgt also

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} Nf \, \triangle\varphi + f \, \varphi\right| \leq C(\varphi, n)\|f - f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

6.23 Theorem ($\mathbf{W^{2,1}_{loc}}$-Regularität (ohne Abschätzung))
(vgl. [Sem94], Theorem 1.100)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $n \geq 2$, *und sei* $v \in L^1_{loc}(U)$ *mit* $\triangle v \in \mathscr{H}^1_{loc}(U)$, *d.h. es existiere ein* $(\triangle v) \in \mathscr{H}^1_{loc}(U)$, *so dass*

$$\int_U v \triangle\varphi = \int_U (\triangle v)\varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(U).$$

Dann gilt $\nabla^2 v \in L^1_{loc}(U)$, *d.h. es existieren Abbildungen* $(\partial_{ij} v) \in L^1_{loc}(U)$, $1 \leq i, j \leq n$, *so dass*

$$\int_U v \, \partial_{ij}\varphi = \int_U (\partial_{ij} v) \, \varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(U).$$

Beweis. Wir fixieren eine beliebige kompakte Teilmenge $K \subset U$ und wählen $\theta \in C_0^\infty(U)$ mit $0 \leq \theta \leq 1$ auf U und $\theta \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung V_K, so dass $K \subset\subset V_K \subset\subset U$ (insbesondere ist dann $\int_{\mathbb{R}^n} \theta \neq 0$).
Nach Proposition 6.8 gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\tau := \theta(\triangle v - \lambda) \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$.
Wir definieren das Newtonpotential ω von $\theta(\triangle v - \lambda)$, nämlich

$$\omega(x) := N\tau(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\theta(y)(\triangle v(y) - \lambda)\mathbf{d}y, \quad x \in U,$$

wobei Φ wie in Lemma 6.20 die Fundamentallösung der LAPLACE-Gleichung ist (wir beachten, dass supp $\tau \subset\subset \mathbb{R}^n$ und deshalb ω wohldefiniert ist).
Wir betrachten nun

$$g(x) := \omega(x) + v(x) - \frac{\lambda}{2n}|x|^2.$$

Es gilt mit Lemma 6.22, der Definition von $\triangle v$ und mit partieller Integration für alle $\varphi \in C_0^\infty(U)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\ \triangle\varphi(x)\ \mathbf{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\ \triangle\varphi(x)\ \mathbf{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} v(x)\ \triangle\varphi(x) - \frac{\lambda}{2n}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\ \triangle\varphi(x)\ \mathbf{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x)(\triangle v(x) - \lambda)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \triangle v(x)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda}{2n} 2n\varphi(x)\ \mathbf{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1-\theta(x))\ (\triangle v(x) - \lambda)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x.
\end{aligned}$$

Also gilt für jedes $\varphi \in C_0^\infty(V_K)$ wegen $\theta(x) = 1$ für alle $x \in V_K$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\ \triangle\varphi(x)\ \mathbf{d}x = \int_{V_K} g(x)\ \triangle\varphi(x)\ \mathbf{d}x = \int_{V_K} \underbrace{(1-\theta(x))}_{=0}\ (\triangle v(x) - \lambda)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x = 0.$$

Aus dem Lemma von WEYL, Lemma 4.16, folgt $g \in C^\infty(V_K)$ und $\triangle g = 0$ (stark in V_K), da $g \in L^1_{loc}$ ($\omega \in L^1$, $v \in L^1_{loc}$) und sehr schwach $\triangle g = 0$ galt.
Damit folgt

$$v(x) = -\omega(x) + \underbrace{\frac{\lambda}{2n}|x|^2 + g(x)}_{\in C^\infty}\ , \ x \in V_K.$$

Also lässt sich anschaulich sagen, dass v in V_K "so gut wie" ω ist.

Wir wollen eine gewisse Regularität für das ω erhalten, wir suchen nämlich ein $h_{ij} \in L^1(V_K)$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)\ \partial_{ij}\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} h_{ij}\ \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(V_K). \tag{6.61}$$

Zunächst eine

Zwischenbehauptung. *Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\ \partial_{ij}\varphi(x)\ \mathbf{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i\Phi(x-y)\ \partial_j\varphi(x)\ \mathbf{d}x. \tag{6.62}$$

Beweis. Wir bezeichnen $B_\varepsilon := B_\varepsilon(0)$. Es gilt mit partieller Integration (Korollar 4.3), da supp $\varphi \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^\infty$ und da die äußere Einheitsnormale an $\mathbb{R}^n \backslash B_\varepsilon$ gegeben ist durch $\nu(z) = -\frac{z}{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\ \partial_{ij}\varphi(x)\ \mathbf{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z)\ \partial_{ij}\varphi(y+z)\ \mathbf{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\backslash B_\varepsilon} \Phi(z)\ \partial_{ij}\varphi(y+z)\ \mathbf{d}z + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} \Phi(z)\ \partial_{ij}\varphi(y+z)\ \mathbf{d}z}_{=:I_\varepsilon} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n\backslash B_\varepsilon} \partial_i\Phi(z)\ \partial_j\varphi(y+z)\ \mathbf{d}z + \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon} \Phi(\zeta)\ \partial_j\varphi(y+\zeta)\left(-\frac{\zeta_i}{\varepsilon}\right)\ \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\zeta)}_{=:II_\varepsilon} + I_\varepsilon \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i\Phi(z)\ \partial_j\varphi(y+z)\ \mathbf{d}z + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} \partial_i\Phi(z)\ \partial_j\varphi(y+z)\ \mathbf{d}z}_{=:III_\varepsilon} + II_\varepsilon\ + I_\varepsilon \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i\Phi(z)\ \partial_j\varphi(y+z)\ \mathbf{d}z + III_\varepsilon + II_\varepsilon\ + I_\varepsilon.
\end{aligned}$$

- Zu I_ε:
  Wir beachten, dass $\Phi(z) = \Phi(|z|)$, dann gilt

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon| &\leq \|D^2\varphi\|_{L^\infty} \int_{B_\varepsilon} |\Phi(|z|)| \, \mathbf{d}z \\ &\leq C \int_{r=0}^{\varepsilon} |\Phi(r)| \, r^{n-1} \, \mathbf{d}r. \end{aligned}$$

  Mit $\varepsilon < 1$ gilt $|\log(r)| = -\log(r)$ für alle $0 < r < \varepsilon$ und es folgt für $n = 2$:

$$|I_\varepsilon| \leq -C \int_0^\varepsilon r \, \log r = -C\frac{r^2}{2} \log r - C \frac{r^2}{4}\Big|_0^\varepsilon = o(1) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

  Für $n \geq 3$ folgt analog

$$|I_\varepsilon| \leq C \int_0^\varepsilon r = o(1) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

  Somit ist $I_\varepsilon = o(1)$ für $\varepsilon \to 0$.

- Zu II_ε:
  Es gilt (wir beachten, dass $\frac{|z_i|}{\varepsilon} \leq 1$ auf $\partial B_\varepsilon(0)$)

$$|II_\varepsilon| \leq C(\varphi, n) \int_{\partial B_\varepsilon} |\Phi(z)| \leq C \int_{\partial B_\varepsilon} \left\{ \begin{matrix} |\log \varepsilon| \\ |\varepsilon|^{2-n} \end{matrix} \right\} \leq C \left\{ \begin{matrix} |\log \varepsilon| \\ |\varepsilon|^{2-n} \end{matrix} \right\} \varepsilon^{n-1} = o(1) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

  Somit gilt auch $II_\varepsilon = o(1)$ für $\varepsilon \to 0$.

- Zu III_ε:
  Wegen $\partial_i \Phi(z) = C\frac{z_i}{|z|^n}$ für alle $z \neq 0$ gilt

$$|III_\varepsilon| \leq C(\varphi) \int_{B_\varepsilon} \frac{z_i}{|z|^n} \leq C \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{|z|^{n-1}} = C \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{n-1}} r^{n-1} \, \mathbf{d}r = C\varepsilon = o(1) \quad \text{für } \varepsilon \to 0. \tag{6.63}$$

  Also gilt $III_\varepsilon = o(1)$ für $\varepsilon \to 0$.

Damit folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) \, \partial_{ij}\varphi(x) \, \mathbf{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \Phi(z) \, \partial_j \varphi(y+z) \, \mathbf{d}z + o(1) \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

und somit, wegen der Unabhängigkeit der anderen Summanden von ε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) \, \partial_{ij}\varphi(x) \, \mathbf{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \Phi(z) \, \partial_j \varphi(y+z) \, \mathbf{d}z,$$

womit diese Zwischenbehauptung gezeigt ist. ||

Nun wollen wir die Gleichung (6.61) umschreiben. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es gilt zunächst

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) \, \partial_{ij}\varphi = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) \, \tau(y) \, \mathbf{d}y \, \partial_{ij}\varphi(x) \, \mathbf{d}x.$$

Es gilt nach Lemma 6.20, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) \, \tau(y) \, \mathbf{d}y \in L^1(\mathrm{supp}(\tau))$, also lässt sich der Satz von Fubini anwenden, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) \, \tau(y) \, \mathbf{d}y \, \partial_{ij}\varphi(x) \, \mathbf{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) \, \partial_{ij}\varphi(x) \, \mathbf{d}x \, \tau(y) \, \mathbf{d}y \\ &\overset{(6.62)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} -\partial_i \Phi(x-y) \, \partial_j \varphi(x) \, \mathbf{d}x \, \tau(y) \, \mathbf{d}y. \end{aligned}$$

Wir fixieren zunächst ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann gilt mit partieller Integration (vgl. Korollar 4.3)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\ \tau(y)\ \mathbf{d}y\ \partial_{ij}\varphi(x)\ \mathbf{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i\Phi(x-y)\ \partial_j\varphi(x)\ \mathbf{d}x\ \tau(y)\ \mathbf{d}y$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left(-\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(y)} \partial_i\Phi(x-y)\ \partial_j\varphi(x)\ \mathbf{d}x\ - \int_{B_\varepsilon(y)} \partial_i\Phi(x-y)\ \partial_j\varphi(x)\ \mathbf{d}x\right)\ \tau(y)\ \mathbf{d}y$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left(-\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(y)} \partial_i\Phi(x-y)\ \partial_j\varphi(x)\ \mathbf{d}x\ - III_\varepsilon\right)\ \tau(y)\ \mathbf{d}y.$$

Nach (6.63) konvergiert III_ε unabhängig von y gegen 0 für $\varepsilon \to 0$. Also gilt für unsere Umformung mit partieller Integration weiter (wir beachten, dass die äußere Einheitsnormale an $\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(y)$ der Funktion $-\frac{x-y}{\varepsilon}$ entspricht)

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\ \tau(y)\ \mathbf{d}y\ \partial_{ij}\varphi(x)\ \mathbf{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(y)} \partial_{ij}\Phi(x-y)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x\ + \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \partial_i\Phi(\xi-y)\varphi(\xi)\frac{\xi_j-y_j}{\varepsilon}\ \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - III_\varepsilon\right)\ \tau(y)\ \mathbf{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(y)} \partial_{ij}\Phi(x-y)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x\ \tau(y)\ \mathbf{d}y - \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \partial_i\Phi(\xi-y)\varphi(\xi)\frac{\xi_j-y_j}{\varepsilon}\ \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi)\ \tau(y)\ \mathbf{d}y \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^n} III_\varepsilon\ \tau(y)\ \mathbf{d}y
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Unser Ziel ist, diese Terme für $\varepsilon \to 0$ als ein

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\ \varphi$$

zu erkennen für ein $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dazu betrachten wir zunächst

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left|\int_{\mathbb{R}^n} III_\varepsilon\ \tau(y)\ \mathbf{d}y\right| \overset{(6.63)}{=} 0.$$

Wir betrachten den vorletzten Term

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_i\Phi(\zeta)\ \varphi(y+\zeta)\ \frac{\zeta_j}{\varepsilon}\ \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\zeta)\ \tau(y)\ \mathbf{d}y.$$

Zunächst beobachten wir, dass die inneren Integrale für $\varepsilon \to 0$ konvergieren, denn mit $\partial_i\Phi(\zeta) = C(n)\ \frac{\zeta_i}{|\zeta|^n}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\zeta_i}{|\zeta|^n}\ \varphi(y+\zeta)\ \frac{\zeta_j}{\varepsilon}\ \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\zeta) &= \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi(y+\zeta)\ \frac{\zeta_i\zeta_j}{\varepsilon^2}\mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\zeta) \\
&= \int_{\partial B_1(0)} \varphi(y+\varepsilon\xi)\ \xi_i\xi_j\mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Nun definieren wir $\gamma_{ij} := \int_{\partial B_1(0)}\xi_i\xi_j\ \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) \in \mathbb{R}$ (unabhängig von φ, τ).
Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial B_1(0)} \varphi(y+\varepsilon\xi)\ \xi_i\xi_j\ \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - \gamma_{ij}\varphi(y)\right| &= \left|\int_{\partial B_1(0)} (\varphi(y+\varepsilon\xi)-\varphi(y))\,\xi_i\xi_j\mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi)\right| \\
&\le \int_{\partial B_1(0)} |\varphi(y+\varepsilon\xi)-\varphi(y)|\ \underbrace{|\xi_i||\xi_j|}_{\le 1}\mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi)| \\
&\le \|D\varphi\|_{L^\infty}\ \varepsilon\ C(n) \\
&\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $|\varphi(y+\varepsilon\xi)-\varphi(y)| \leq \int_0^\varepsilon |\nabla\varphi(y+t\xi)|\xi|| \leq \|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\ \varepsilon$.
Da die obige Konvergenz unabhängig von y ist, gilt somit

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_i\Phi(z)\ \varphi(y+z)\ \frac{z_j}{\varepsilon}\ \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(z)\ \tau(y)\ \mathbf{d}y \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \gamma_{ij}\int_{\mathbb{R}^n}\tau(y)\varphi(y)\mathbf{d}y.$$

Wegen $\tau \in \mathscr{H}^1$ ist auch $\gamma_{ij}\tau \in \mathscr{H}^1 \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Wir betrachten noch das erste Integral. Da $\varepsilon > 0$ gilt mit der Transformationsregel und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(y)} \partial_{ij}\Phi(\underbrace{x-y}_{z})\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x\ \tau(y)\ \mathbf{d}y \\
&\qquad= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} \partial_{ij}\Phi(z)\ \varphi(z+y)\ \mathbf{d}z\ \tau(y)\ \mathbf{d}y \\
&\qquad= \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} \partial_{ij}\Phi(z)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\underbrace{z+y}_{\xi})\ \tau(y)\ \mathbf{d}y\ \mathbf{d}z \\
&\qquad= \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} \partial_{ij}\Phi(z)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\ \tau(\xi-z)\ \mathbf{d}\xi\ \mathbf{d}z \\
&\qquad= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{|z|>\varepsilon} \partial_{ij}\Phi(z)\tau(\xi-z)\ \mathbf{d}z\ \varphi(\xi)\ \mathbf{d}\xi.
\end{aligned}$$

Mit Korollar 6.19 folgt für $K_{ij}(z) := \partial_{ij}\Phi(z) = -C(n)\frac{\delta_i^j|z|^n - nz_iz_j|z|^{n-2}}{|z|^{2n}} = \frac{\Omega_{ij}(z)}{|z|^n}$ für $z \neq 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|z|>\varepsilon} K_{ij}(z)\tau(\xi-z)\ \mathbf{d}z\ \varphi(\xi)\ \mathbf{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} h_{ij}(\xi)\ \varphi(\xi)\ \mathbf{d}\xi$$

für ein $h_{ij} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und mit

$$\|h_{ij}\|_{L^1} \leq C(\Omega, n)\|\tau\|_{\mathscr{H}^1}.$$

Diese Ergebnisse eingesetzt in (6.64) ergeben nach dem (nun wohldefinierten) Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\omega\ \partial_{ij}\varphi = \int_{\mathbb{R}^n}(h_{ij} - \gamma_{ij} + 0)\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(V_K).$$

Daraus folgt nun

$$\int v\ \partial_{ij}\varphi = \int(-h_{ij} + \gamma_{ij} + \partial_{ij}\frac{\lambda}{2n}|x|^2 + \partial_{ij}g)\varphi =: \int(\partial_{ij}v)\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(V_K)$$

und $(\partial_{ij}v) \in L^1_{loc}(V_K)$ (wir beachten, dass nach Lemma von Weyl, Lemma 4.16, g nur (lokal) glatt ist, und somit nur in $W^{k,p}_{loc}$ für alle k,p).
Da $K \subset\subset U$ beliebig gewählt war und der Eindeutigkeit der schwachen Ableitung ist somit $(\partial_{ij}v)$ punktweise fast überall wohldefiniert in U und $\partial_{ij}v \in L^1_{loc}(U)$. □

6.24 Bemerkung
Der obige Satz gilt tatsächlich stärker, nämlich mit der Aussage, dass die zweite Ableitung wiederum in $\mathscr{H}^1_{loc}$ statt nur in L^1_{loc} liegt, vgl. [Sem94], Theorem 1.100, und Fußnote 17, S. 100.

Falls wir eine etwas striktere Forderung an $\triangle v$ stellen, erhalten wir auch eine Abschätzung:

6.25 Theorem ($\mathbf{W^{2,1}_{loc}}$-Regularität (mit Abschätzung))
(vgl. [Sem94], Theorem 1.100)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \geq 2$, und sei $v \in L^1_{loc}(U)$. Sei $\tau \in \mathscr{H}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp}\tau \subset K \subset\subset \mathbb{R}^n$ für ein Kompaktum K. Gilt nun

$$\triangle v = \tau \quad \textit{schwach in } U,$$

d.h. gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} v \ \triangle\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \tau \ \varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(U),$$

dann folgt $\nabla^2 v \in L^1_{loc}(U)$.
Weiter existiert für jedes offene Gebiet $W \subset\subset U$ *eine Konstante* $C(U,W,K,n)$, *so dass gilt*

$$\|\nabla^2 v\|_{L^1(W)} \leq C(U,W,K,n)(\|v\|_{L^1(U)} + \|\tau\|_{\mathscr{H}^1}).$$

Beweis. Der Beweis ist äußerst ähnlich zum Beweis von Theorem 6.23, weswegen wir ihn nur skizzieren wollen. Wir fixieren ein $W \subset\subset U$ und definieren wieder das Newtonpotential ω von τ, nämlich

$$\omega(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) \ \tau(y) \ \mathbf{d}y \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei Φ wie in Lemma 6.20 die Fundamentallösung der LAPLACE-Gleichung ist.
Wir betrachten nun

$$g(x) := \omega(x) + v(x).$$

Wieder gilt mit Lemma 6.22 und der Definition von $\triangle v$ für $\varphi \in C_0^\infty(U)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \ \triangle\varphi(x) \ \mathbf{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) \ \triangle\varphi(x) \ \mathbf{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \ \triangle\varphi(x) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \tau(x) \ \varphi(x) \ \mathbf{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \tau(x)\varphi(x) \ \mathbf{d}x \\ &= 0.\end{aligned}$$

Mit dem Lemma von WEYL, Lemma 4.16, folgt wieder $g \in C^\infty(U)$ und $\triangle g = 0$ (stark in U), da $g \in L^1_{loc}(U)$.
Es gilt

$$v(x) = -\omega(x) + g(x)\,, \quad \text{für } \mathscr{L}^n\text{-fast alle } x \in U, \tag{6.65}$$

und wieder reicht es somit, $\partial_{ij}\omega(x)$ zu betrachten.
Genau wie in Theorem 6.23 erhalten wir wieder

$$\partial_{ij}\omega = h_{ij}(\tau) - \gamma_{ij}\tau$$

mit h_{ij} und γ_{ij} wie im Beweis von Theorem 6.23 und der Abschätzung

$$\|h_{ij}(\tau)\|_{L^1} \leq C(n)\|\tau\|_{\mathscr{H}^1}, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Weiter wissen wir nach dem Lemma von WEYL, Lemma 4.16, $\partial_{ij} g \in L^1_{loc}$, da $g \in C^\infty(U)$.
<u>Zur Abschätzung:</u>
Mit (6.65) gilt für $W \subset\subset V$

$$\begin{aligned}\|\partial_{ij} v\|_{L^1(W)} &\leq \|\partial_{ij}\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_{ij} g\|_{L^1(W)} \\ &\leq C(n)\|\tau\|_{\mathscr{H}^1} + \|\partial_{ij} g\|_{L^1(W)}.\end{aligned}$$

Es bleibt also nur noch $\partial_{ij} g$ zu betrachten.
Wir wählen ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(W) \subset U$. Da g in W harmonisch ist, folgt aus den CAUCHY-Abschätzungen, Lemma 4.17, dass für jedes $x \in W$

$$\begin{aligned}|\partial_{ij} g(x)| &\leq C\frac{1}{\delta^{n+2}}\|g\|_{L^1(B_\delta(x))} \\ &\leq C(W,U,n)\|g\|_{L^1(U)}.\end{aligned}$$

Somit gilt mit der Definition von g

$$\begin{aligned}
\|\partial_{ij} g\|_{L^1(W)} &\leq \mathscr{L}^n(W) C(U,W,n)\|g\|_{L^1(U)} \\
&\leq \tilde{C}(U,W,n)\|g\|_{L^1(U)} \\
&\overset{(6.65)}{\leq} C(U,W,n)(\|v\|_{L^1(U)} + \|\omega\|_{L^1(U)}) \\
&\overset{L.6.20}{\leq} C(U,W,K,n)(\|v\|_{L^1(U)} + \|\tau\|_{L^1(\operatorname{supp}\tau)}) \\
&\overset{P.6.7}{\leq} C(U,W,K,n)(\|v\|_{L^1(U)} + \|\tau\|_{\mathscr{H}^1}).
\end{aligned}$$

□

6.26 Korollar (Anwendung)
Es seien E, $D \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ die Lösungen von

$$\begin{cases} \triangle D = -\nabla B \cdot \nabla^{\perp} u & \text{in } D^2 \\ \triangle E = \nabla^{\perp} A \cdot \nabla u & \text{in } D^2, \end{cases}$$

wobei A, $B \in W^{1,2} D^2, M(m)$ und $u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$. Dann gilt $D, E \in W^{2,1}_{loc}(D^2, \mathbb{R}^m)$.

Beweis. Wir setzen $F := -(\nabla B) \cdot (\nabla^{\perp} u)$ und $G := (\nabla^{\perp} A) \cdot (\nabla u)$.
Wie in Korollar 6.15 gezeigt gilt $F, G \in \mathscr{H}^1$ (wenn wir u, A, B auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortsetzen, so dass jeweils $\operatorname{supp} G$, $\operatorname{supp} F \subset\subset \mathbb{R}^n$).
Aus Theorem 6.25 folgt dann $\nabla^2 D$ und $\nabla^2 E \in L^1_{loc}(D^2)$, also erhalten wir die Behauptung. □

Ein Ergebnis dieser Methode in zwei Dimensionen ist, dass eine Lösung $v \in W^{1,2}(D^2)$ mit $\triangle v \in \mathscr{H}^1$ in $W^{2,1}_{loc}(D^2)$ liegen. Dies impliziert, dass $v \in C^0(D^2)$, wie der folgende Sonderfall der Soboleveinbettung zeigt:

6.27 Theorem (Sobolev-Einbettung: Sonderfall für $\mathbf{n = 2}$)
(vgl. [AF03], Theorem 4.12, Case A)
Für alle $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in C^\infty$ gilt, dass

$$W^{2,1}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Beweis. Sei $f \in W^{2,1}(\Omega)$. Wir approximieren f durch $f_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so dass gilt

$$f_m \xrightarrow{m \to \infty} f \quad \text{in } W^{2,1}.$$

Nach [AF03], Lemma 4.15, gilt nun, dass für $r = r(\Omega)$ klein genug, für alle $u \in C^\infty(\Omega)$, punktweise in Ω

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq K \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} r^{\alpha - 1} \int_\Omega |D^\alpha u(y)| \, \mathbf{d}y + \sum_{|\alpha| = 2} \int_\Omega |D^\alpha u(y)| \, \mathbf{d}y \right) \\
&\leq K(\Omega) \|u\|_{W^{2,1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\|u\|_{L^\infty} \leq K \|u\|_{W^{2,1}}.$$

Deshalb gilt insbesondere

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq K \|f_m - f_n\|_{W^{2,1}}$$

und wegen $f_m \in C^0(\overline{\Omega})$ folgt wegen der Cauchy-Folgen-Eigenschaft, dass auch f fast überall gleich einer bis auf den Rand stetigen Funktion ist. □

7. Wente-Ungleichung

In diesem Abschnitt wollen wir ein Phänomen beweisen, was zuerst von Wente in [Wen69] ausgenutzt wurde. Die hier präsentierten Beweise beziehen sich großteils auf die Ausarbeitungen von [BC84], Lemma A.1, und [Hél02] Kapitel 3, sowie für einen alternativen Beweisansatz auf [Tar84].

7.1 Theorem (Wente-Ungleichung)
Seien a^k, $b^k \in W^{1,2}(D^2)$, $1 \leq k \leq m < \infty$, und $u \in W^{1,2}(D^2)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\triangle u = \sum_{k=1}^m (\frac{\partial a^k}{\partial x}\ \frac{\partial b^k}{\partial y} - \frac{\partial a^k}{\partial y}\ \frac{\partial b^k}{\partial x}) & \text{in } D^2 \\ u = 0 & \text{auf } \partial D^2 \end{cases}$$

oder eine Lösung von (dann sei $a^k \in W_0^{1,2}(D^2)$)

$$\begin{cases} -\triangle u = \sum_{k=1}^m (\frac{\partial a^k}{\partial x}\ \frac{\partial b^k}{\partial y} - \frac{\partial a^k}{\partial y}\ \frac{\partial b^k}{\partial x}) & \text{in } D^2 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} u = 0. \end{cases}$$

Dann ist $u \in W^{2,1}_{loc}(D^2) \cap C^0(\overline{D^2})$ und es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\|u\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(D^2)} \leq C \sum_{k=1}^m \|\nabla a^k\|_{L^2(D^2)}\ \|\nabla b^k\|_{L^2(D^2)}.$$

und für alle $\Omega \subset\subset D^2$

$$\|\nabla^2 u\|_{L^1(\Omega)} \leq C(\Omega) \sum_{k=1}^m \|\nabla a^k\|_{L^2(D^2)}\ \|\nabla b^k\|_{L^2(D^2)}.$$

Dieses Theorem ergibt sich aus Lemma 7.4, Korollar 7.9, Korollar 7.17 und einer Bemerkung analog zu Bemerkung 7.7, welche wir in den nächsten Unterabschnitten beweisen werden. Eine erste Anwendung ist das folgende

7.2 Korollar (Approximation von $\mathbf{W^{1,2}}$ durch $\mathbf{W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}}$)
Seien $u \in W^{1,2}(D^2)$, $a^k \in W^{1,2}(D^2)$, $b^k \in W_0^{1,2}(D^2)$, $1 \leq k \leq m < \infty$. Weiter gelte schwach

$$\begin{cases} -\triangle u = \sum_{k=1}^m \{a^k, b^k\} = \sum_{k=1}^m \nabla a^k\ \nabla^\perp b^k & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} u = 0, \end{cases}$$

d.h. für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$ gelte

$$\int_{D^2} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \sum_{k=1}^m \int_{D^2} \nabla a^k\ \nabla b^k\ \varphi.$$

Dann existieren $u_j \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2)$, $\int_{D^2} u_j = 0$ mit

$$u_j \xrightarrow{j \to \infty} u \quad \text{in } W^{1,2}(D^2) \cap L^\infty(D^2).$$

Insbesondere existieren dann auch (vgl. Lemma 4.25) $u_j \in C^\infty(\overline{D^2}) \cap W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}$, $\int_{D^2} u_j = 0$ mit

$$\langle \nabla u_j, \nu \rangle = \frac{\partial u_j}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial D^2,$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale auf ∂D^2 sei, und

$$u_j \xrightarrow{j \to \infty} u \quad \text{in } W^{1,2}(D^2) \text{ und } L^\infty(D^2).$$

Beweis. Wir betrachten der Übersicht zuliebe nur den Fall $m = 1$ und identifizieren $a \equiv a^1$ und $b \equiv b^1$. Man verifiziert einfach, dass der Fall $m > 1$ analog zu behandeln ist.
Es ist nur zu zeigen, dass es u_j in $W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2)$ gibt, mit denen wir f wie behauptet approximieren können, die restliche Behauptung folgt dann aus Lemma 4.25.
Wegen $b \in W_0^{1,2}(D^2)$ existiert $b_j \in C_0^\infty(D^2)$ mit

$$b_j \xrightarrow{j\to\infty} b \quad \text{in } W^{1,2}(D^2).$$

Dann gilt nach Proposition 4.22(ii)

$$\int_{D^2} \nabla a \cdot \nabla^\perp b_j = 0.$$

Weiter haben wir $\{a, b_j\} \in L^2$ und somit existiert ein $u_j \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2)$ mit $\int_{D^2} u_j = 0$ und

$$-\triangle u_j = \nabla a \cdot \nabla^\perp b_j,$$

denn zunächst existiert nach Lemma 4.14 ein solches u_j in $W^{1,2}(D^2)$, so dass

$$\int_{D^2} \nabla u_j \ \nabla\varphi = \int_{D^2} \{a, b\}\ \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{D^2}),$$

und dann folgt mit dem Satz von FRIEDRICHS, Theorem 4.19, dass $u_j \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2)$. Weiter gilt

$$-\triangle(u_j - u) = \{a, b_j - b\}$$

und somit folgt mit der WENTE-Ungleichung, Theorem 7.1,

$$\|u_j - u\|_{L^\infty} + \|\nabla(u_j - u)\|_{L^2} \leq \|\nabla a\|_{L^2}\ \|\nabla(b_j - b)\|_{L^2} \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Wegen $\int_{D^2}(u_j - f) = 0$ sind die Voraussetzungen für die POINCARÉ-Ungleichung erfüllt und wir erhalten

$$\|u_j - u\|_{W^{1,2}} \leq C\|\nabla(u_j - u)\|_{L^2} \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$u_j \xrightarrow{j\to\infty} u \quad \text{in } W^{1,2}(D^2) \cap L^\infty(D^2).$$

□

Nun müssen wir Theorem 7.1 beweisen. Zunächst erinnern wir uns an die folgende Definition, die wir im folgenden häufiger verwenden werden:

7.3 Definition ($\{u, v\}$)
Wir definieren

$$\{a, b\} := \frac{\partial}{\partial x}a\ \frac{\partial}{\partial y}b - \frac{\partial}{\partial y}a\ \frac{\partial}{\partial x}b,$$

wann immer dieser Ausdruck sinnvoll ist.

Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(D^2)$ von

$$\begin{cases} -\triangle u = \{a, b\} & \text{in } D^2, \\ u = 0 & \text{auf } \partial D^2 \end{cases}$$

mit a, $b \in W^{1,2}(D^2)$ oder

$$\begin{cases} -\triangle u = \{a, b\} & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} u = 0 \end{cases}$$

mit $a \in W_0^{1,2}(D^2)$, $b \in W^{1,2}(D^2)$, beobachten wir zunächst, dass $\{a, b\}$ nach Theorem 6.14 in $\mathscr{H}^1$ liegt, womit wir unter Anwendung von Theorem 6.25 das folgende Lemma erhalten:

7.4 Lemma ($\mathbf{W^{2,1}}$-Abschätzung)
Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ eine zusammenhängende, offene Menge, mit $\partial\Omega \in C^\infty$. Seien $a, b \in W^{1,2}(\Omega)$. Wir betrachten eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ der partiellen Differentialgleichung

$$-\triangle u = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x} \quad \text{in } \Omega. \tag{7.1}$$

Dann gilt $u \in W^{2,1}_{loc}(\Omega)$ und für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt

$$\|\nabla^2 u\|_{L^1(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega')(\|\nabla a\|_{L^2(\Omega)}\ \|\nabla b\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\Omega)}).$$

Ist weiter $\int_\Omega u = 0$ oder $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$, so folgt

$$\|\nabla^2 u\|_{L^1(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega')(\|\nabla a\|_{L^2(\Omega)}\ \|\nabla b\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Beweis. Ohne Einschränkung gilt zunächst $\int_\Omega a = \int_\Omega b = 0$, da wir ansonsten mit $a - \int_\Omega a$ bzw. $b - \int_\Omega b$ weiterrechnen (wir beachten, dass (7.1) auch mit den so modifizierten Funktionen erfüllt ist).
Wir sehen nun, dass sich die rechte Seite der PDE (7.1) darstellen lässt als

$$\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x} = (\nabla^\perp a) \cdot (\nabla b).$$

Wegen $\partial\Omega \in C^\infty$ können wir a, b auf $\tilde{a}$,$\tilde{b}$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ fortsetzen, mit $\text{supp}(\tilde{a})$, $\text{supp}(\tilde{b}) \subset\subset B_1(\Omega)$ und der Abschätzung

$$\|\tilde{a}\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^2)} \leq C\|a\|_{W^{1,2}(\Omega)} \overset{L.4.1}{\leq} \tilde{C}\|\nabla a\|_{L^2(\Omega)}, \tag{7.2}$$

wobei die Poincaré-Ungleichung, Lemma 4.1, wegen $\int_\Omega \tilde{a} = 0$ und Ω zusammenhängend anwendbar ist. Analoges gilt für $\tilde{b}$.
Nun gilt $\nabla^\perp \tilde{a}$, $\nabla\tilde{b} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und schwach in $\mathbb{R}^n$ gilt, dass $\text{div}(\nabla^\perp\tilde{a}) = \text{curl}(\nabla\tilde{b}) = 0$ nach Proposition 4.22. Somit folgt mit dem CLMS-Theorem, Theorem 6.14, dass $\nabla^\perp\tilde{a} \cdot \nabla\tilde{b} \in \mathscr{H}^1$ und

$$\|\nabla^\perp\tilde{a}.\nabla\tilde{b}\|_{\mathscr{H}^1} \overset{T.6.14}{\leq} C(n)\|\nabla\tilde{a}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ \|\nabla\tilde{b}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \overset{(7.2)}{\leq} C(\Omega, n)\|\nabla a\|_{L^2(\Omega)}\ \|\nabla b\|_{L^2(\Omega)}. \tag{7.3}$$

Mit Theorem 6.25 folgt nun[20] wegen der Voraussetzung an u, dass $u \in W^{2,1}_{loc}(\Omega)$ und für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 u\|_{L^1(\Omega')} &\overset{T.6.25}{\leq} C(\Omega, \Omega', n)(\|u\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla^\perp\tilde{a} \cdot \nabla\tilde{b}\|_{\mathscr{H}^1}) \\ &\overset{(7.3)}{\leq} C(\Omega, \Omega', n)(\|u\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla a\|_{L^2(\Omega)}\ \|\nabla b\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Gilt weiter $\int_\Omega u = 0$ oder $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$, so folgt mit der Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C(\Omega, n)\ \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

und es gilt somit

$$\|\nabla^2 u\|_{L^1(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', n)(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla a\|_{L^2(\Omega)}\ \|\nabla b\|_{L^2(\Omega)}).$$

□

Der Ansatz von [BC84] zum Beweis der Wente-Ungleichung basiert auf einer Abschätzung des Newtonpotentials beziehungsweise der Green-Darstellung. Diese Abschätzung zeigen wir im

7.5 Lemma (Abschätzungen für das Newton-Potential)
(vgl. [BC84], Lemma A.1)
Es gilt

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \log\left|c - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right|\ \{a, b\}(x, y)\ \mathbf{d}x\ \mathbf{d}y\right| \leq \|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \textit{für alle } a,b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ c \in \mathbb{R}^2.$$

[20] Es gilt für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $-\triangle u = f$, wobei f integrierbar sei, dass

$$\int_\Omega fv \overset{PDE}{=} -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \overset{W^{1,2}}{=} \int_\Omega u\ \triangle v \quad \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega);$$

also erfüllt eine schwache Lösung einer PDE diese auch *sehr schwach*.

Beweis. Seien[21] a,b in $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $c \in \mathbb{R}^2$ fixiert. Wir definieren[22]

$$\Psi(c) := \int_{\mathbb{R}^2} \log \left| c - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right| \, \{a, b\} \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}y.$$

Für den Wechsel nach Polarkoordinaten setzen wir

$$x := c_1 - r\cos\theta$$

und

$$y := c_2 - r\sin\theta.$$

Wir definieren die Polarkoordinatendarstellung von a und b:

$$f(r,\theta) := a(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta),$$

$$g(r,\theta) := b(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta).$$

Dann gilt

$$f_r\Big|_{(r,\theta)} = (-\cos\theta \; a_x - \sin\theta \; a_y)\Big|_{(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta)}$$

$$g_r\Big|_{(r,\theta)} = -(\cos\theta \; b_x + \sin\theta \; b_y)\Big|_{(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta)}$$

$$f_\theta\Big|_{(r,\theta)} = r(\sin\theta \; a_x - \cos\theta \; a_y)\Big|_{(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta)}$$

und

$$g_\theta\Big|_{(r,\theta)} = r(\sin\theta \; b_x - \cos\theta \; b_y)\Big|_{(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta)}$$

Daraus folgt (wir unterdrücken die Argumente)

$$\begin{aligned} f_r g_\theta - f_\theta g_r &= r(-\cos\theta \; a_x - \sin\theta \; a_y)(\sin\theta \; b_x - \cos\theta \; b_y) - r(\sin\theta \; a_x - \cos\theta \; a_y)(-\cos\theta \; b_x - \sin\theta \; b_y) \\ &= r(a_x b_y(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) - a_y b_x(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))) \\ &= r(a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \Psi(c) &= \int_{\mathbb{R}^2} \log \left| c - \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} \right| ((a_x b_y - a_y b_x)(x,y)) \; \mathbf{d}x \; \mathbf{d}y \\ &= \int_{r=0}^\infty \int_{\theta=0}^{2\pi} \log r \; (\underbrace{(a_x b_y - a_y b_x)}_{=\frac{1}{r}(f_r g_\theta - f_\theta g_r)}(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta) \; r \; \mathbf{d}\theta \; \mathbf{d}r \\ &= \int_{r=0}^\infty \int_{\theta=0}^{2\pi} \log r \; (f_r g_\theta - f_\theta g_r)(\theta, r) \mathbf{d}\theta \; \mathbf{d}r. \end{aligned}$$

Nun gilt (wir beachten, dass f, $g \in C^\infty$)

$$(fg_\theta)_r - (fg_r)_\theta = f_r g_\theta + f g_{\theta r} - f_\theta g_r - f \underbrace{g_{r\theta}}_{=g_{\theta r}} = f_r g_\theta - f_\theta g_r.$$

Damit erhalten wir

$$\Psi(c) = \int_{r=0}^\infty \int_{\theta=0}^{2\pi} \log r \; ((fg_\theta)_r - (fg_r)_\theta) \; \mathbf{d}\theta \; \mathbf{d}r.$$

[21] Tatsächlich bleibt der Beweis auch gültig, wenn man nur $a \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ und $b \in C^1(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ fordert.

[22] Dieses Integral ist wohldefiniert, vgl. Fußnote 19, Seite 107.

Weiterhin gilt (wir beachten wieder, dass $(fg_r)_\theta \in C^\infty$)

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} (fg_r)_\theta(r,\theta')\mathbf{d}\theta' = (fg_r)(r,\theta')\Big|_{\theta'=0} 2\pi = 0 \quad \text{für alle } r>0,$$

da $fg_r(r,\theta)$ 2π-periodisch in θ ist.
Dies führt zu

$$\Psi(c) = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} \log r\ (fg_\theta)_r\ \mathbf{d}\theta\ \mathbf{d}r.$$

Es gilt zudem für alle $\theta \in [0,2\pi]$

$$\int_{r=0}^{\infty} \log r\ (fg_\theta)_r\ \mathbf{d}r = \log r\ fg_\theta|_{r=0}^{\infty} - \int_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r} fg_\theta\ \mathbf{d}r.$$

Zu $\log r(fg_\theta)|_{r=0}^{\infty}$ beachten wir zunächst, dass wegen $a,b\in C_0^\infty$ für alle r hinreichend groß $f(r,\theta)=0$ und $g_\theta(r,\theta)=0$ für alle $\theta\in[0,2\pi]$.
Daraus folgt für festes $\theta\in[0,2\pi]$

$$\log r\ (fg_\theta)(r,\theta)|_{r=0}^{\infty} = \lim_{r\to 0}\log r\ (fg_\theta)(r,\theta).$$

Nun gilt $g_\theta(r,\theta) = r(\sin\theta\ b_x - \cos\theta\ b_y)$ und wegen $b_x,\ b_y \in C_0^\infty$ folgt

$$|g_\theta(r,\theta)| \le rC(b).$$

Daraus folgt wiederum (wir beachten $f\in C_0^\infty$)

$$\begin{aligned} |\log r fg_\theta|_{r=0}^{\infty}| &= \left|\lim_{r\to 0}(\log r)(fg_\theta)(r,\theta)\right| \\ &\le C\lim_{r\to 0}|r\log r| = 0. \end{aligned}$$

Also folgt schließlich durch zweifache Anwendung des Satzes von Fubini

$$\Psi(c) = -\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{r} fg_\theta\ \mathbf{d}\theta\ \mathbf{d}r.$$

Nun gilt für alle $r>0$ mit partieller Integration

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} g_\theta(r,\theta)\mathbf{d}\theta = g(r,\theta)\Big|_{\theta=0}^{2\pi} = 0,$$

wegen der 2π-Periodizität von g in θ.
Damit lässt sich der Term $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\sigma)\mathbf{d}\sigma$ im Integral hinzufügen, d.h.

$$\Psi(c) = -\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{r}\Big(f - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\sigma)\ \mathbf{d}\sigma\Big)\ g_\theta\ \mathbf{d}\theta\ \mathbf{d}r.$$

Für alle $r>0$ gilt folgende Abschätzung (wir definieren $f_{[0,2\pi]}(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\sigma)\ \mathbf{d}\sigma$) mit der Hölder-Ungleichung und dann der Wirtinger-Ungleichung[23]

$$\begin{aligned} \left|\int_{\theta=0}^{2\pi}(f(r,\theta)-f_{[0,2\pi]}(r))g_\theta(r,\theta)\ \mathbf{d}\theta\right| &\le \|f(r,\cdot)-f_{[0,2\pi]}(r)\|_{L^2((0,2\pi))}\ \|g_\theta(r,\cdot)\|_{L^2((0,2\pi))} \\ &\le \|f_\theta\|_{L^2((0,2\pi))}\ \|g_\theta(\cdot,r)\|_{L^2((0,2\pi))} \quad \text{für alle } r\ge 0. \end{aligned}$$

[23] Sei $\psi\in C^1(\mathbb{R})$ eine 2π-periodische Funktion, d.h. $\psi(\cdot+2\pi)=\psi(\pi)$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi}|\psi(\sigma)|^2\ \mathbf{d}\sigma \le \int_0^{2\pi}|\psi'(\sigma)|^2\ \mathbf{d}\sigma.$$

Insgesamt folgt also wiederum mit der HÖLDER-Ungleichung

$$
\begin{aligned}
|\Psi(c)| &\leq \tilde{C} \left(\int_{r=0}^{\infty} \|f_\theta(\cdot, r)\|^2_{L^2([0,2\pi])} \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2 \, \mathbf{d}r \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{r=0}^{\infty} \|g_\theta(\cdot, r)\|^2_{L^2([0,2\pi])} \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2 \, \mathbf{d}r \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt mit der Definition von f und der CAUCHY-SCHWARTZ-Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&\int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} |f_\theta(\theta, r)|^2 \, \frac{1}{r} \, \mathbf{d}\theta \, \mathbf{d}r \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^2 |a_x(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta)\sin\theta - a_y(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta)\cos\theta|^2 \frac{1}{r} \, \mathbf{d}\theta \, \mathbf{d}r \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \, |\langle \nabla a(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta), \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \rangle|^2 \mathbf{d}\theta \, \mathbf{d}r \\
&\leq \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r |\nabla a(c_1 - r\cos\theta, c_2 - r\sin\theta)|^2 \, \mathbf{d}\theta \, \mathbf{d}r \\
&= \|\nabla a\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}
$$

(bzw. eine analoge Aussage für g) benutzt wurde. □

Aus Lemma 7.5 erhalten wir sofort als Spezialfall das folgende

7.6 Korollar
Sei $a \in C_0^\infty(D^2)$, $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $c \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$
\left| \int_{D^2} \log \left| c - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right| \, (a_x \; b_y - a_y \; b_x) \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}y \right| \leq \|\nabla a\|_{L^2(D^2)} \, \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.
$$

7.7 Bemerkung
Lemma 7.5 und Korollar 7.6 gelten auch für den Fall, wenn $\{a, b\}$ durch $\sum_{k=1}^m \{a^k, b^k\}$ ersetzt wird, wobei sich dann die folgende Abschätzung ergibt:

$$
\left| \int \log \left| c - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right| \, (\sum_{k=1}^m \{a^k, b^k\}) \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}y \right| \leq \sum_{k=1}^m \left| \int \log \left| c - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right| \, \{a^k, b^k\} \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}y \right| \leq \sum_{k=1}^m \|\nabla a^k\|_{L^2} \, \|\nabla b^k\|_{L^2}.
$$

7.1. Wente-Ungleichung für Dirichlet-Randwerte

7.1.1. Beweis nach Brezis und Coron

7.8 Lemma
(vgl. [BC84], Lemma A.1)
Seien a^k, $b^k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $k = 1, \ldots, m < \infty$ und sei $u \in W^{1,2}(D^2)$ die Lösung von

$$
\begin{cases} -\triangle u = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial a^k}{\partial x} \, \frac{\partial b^k}{\partial y} - \frac{\partial a^k}{\partial y} \, \frac{\partial b^k}{\partial x} \right) & \text{in } D^2, \\ u = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases} \tag{7.4}
$$

Dann gilt die Abschätzung

$$
\|u\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(D^2)} \leq C(m) \, \sum_{k=1}^m \|\nabla a^k\|_{L^2} \, \|\nabla b^k\|_{L^2}.
$$

Beweis. Wir setzen

$$
f := \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial a^k}{\partial x} \, \frac{\partial b^k}{\partial y} - \frac{\partial a^k}{\partial y} \, \frac{\partial b^k}{\partial x} \right)
$$

und definieren das Newtonpotential Ψ von f

$$\Psi := \Phi * (\sum_{k=1}^{m} (a_x^k\ b_y^k - a_y^k\ b_x^k)),$$

wobei Φ die Fundamentallösung der LAPLACE-Gleichung ist (vgl. Definition in Lemma 6.20).Aus Lemma 7.5 erhalten wir die Abschätzung

$$|\Psi(c)| \leq \sum_k \|\nabla a^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ \|\nabla b^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}^2.$$

Weiter gilt (vgl. z.B. [GT83], Lemma 4.2) wegen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\Psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

und

$$-\triangle\Psi = \sum_k (a_x^k\ b_y^k - a_y^k\ b_x^k).$$

Somit gilt

$$\triangle(u - \Psi) = -f + f = 0 \quad \text{schwach auf } D^2, \tag{7.5}$$

Nun folgt aus $u \in W_0^{1,2}(D^2)$ und $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit dem Satz von FRIEDRICHS $u \in C^\infty(\overline{D^2})$, also lässt sich wegen (7.5) das klassische Maximumsprinzip auf $u - \Psi$ anwenden. Wir erhalten

$$\sup_{D^2} |u - \Psi| \leq \sup_{\partial D^2} |u - \Psi|.$$

Nun gilt aber punktweise $u = 0$ auf ∂D^2, und somit

$$\sup_{D^2} |u - \Psi| \leq \sup_{\partial D^2} |\Psi| \leq \sup_{D^2} |\Psi|.$$

Daraus ergibt sich

$$\|u\|_{L^\infty(D^2)} \leq \|u - \Psi\|_{L^\infty(D^2)} + \|\Psi\|_{L^\infty(D^2)} \leq 2\|\Psi\|_{L^\infty(D^2)} \leq 2 \sum_k \|\nabla a^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ \|\nabla b^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{7.6}$$

Wir testen die PDE (7.4) mit der gültigen Testfunktion $u \in W_0^{1,2}(D^2)$ (wir beachten, dass die rechte Seite in L^2 liegt, da a^k und $b^k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$) und erhalten

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(D^2)} \overset{(7.4)}{\leq} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \sum_k \|\nabla a^k\|_{L^2(D^2)}\ \|\nabla b^k\|_{L^2(D^2)} \overset{(7.6)}{\leq} C(m) \sum_k \|\nabla a^k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ \|\nabla b^k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

also

$$\|u\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(D^2)} \leq C(m) \sum_k \|\nabla a^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\ \|\nabla b^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

□

7.9 Korollar (WENTE-Ungleichung für homogenen DIRICHLET-Randwert)
(vgl.: [BC84] Lemma A.1.; [Hél02] Theorem 3.1.2)
Seien a^k, $b^k \in W^{1,2}(D^2)$, $k = 1, \dots, m < \infty$ und sei $u \in W^{1,2}(D^2)$ die Lösung von

$$\begin{cases} -\triangle u = \sum_{k=1}^m (\frac{\partial a^k}{\partial x}\ \frac{\partial b^k}{\partial y} - \frac{\partial a^k}{\partial y}\ \frac{\partial b^k}{\partial x}) & \text{in } D^2, \\ u = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases}$$

Dann ist $u \in C^0(\overline{D^2})$ und es gilt für eine von u, a^k und b^k unabhängige Konstante $C(m)$

$$\|u\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(D^2)} \leq C(m) \sum_{k=1}^{m} \|\nabla a^k\|_{L^2(D^2)} \|\nabla b^k\|_{L^2(D^2)}.$$

Beweis. Wegen $\{a,b\} = \{a - \int_{D^2} a, b - \int_{D^2} b\}$ nehmen wir o.B.d.A. an, dass $\int_{D^2} a^k = \int_{D^2} b^k = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$. Es existieren Fortsetzungen $\tilde{a}^k$, $\tilde{b}^k \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ von a^k, b^k, sodass mit Lemma 4.1 gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}^k\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^2)} &\leq C\|a^k\|_{W^{1,2}(D^2)} \overset{L.4.1}{\leq} C\|\nabla a^k\|_{L^2(D^2)}, \\ \|\tilde{b}^k\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^2)} &\leq C\|b^k\|_{W^{1,2}(D^2)} \overset{L.4.1}{\leq} C\|\nabla b^k\|_{L^2(D^2)}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Nun wählen wir weiter $\tilde{a}_i^k$, $\tilde{b}_i^k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\tilde{a}_i^k \xrightarrow{i\to\infty} \tilde{a}^k$ und $\tilde{b}_i^k \xrightarrow{i\to\infty} \tilde{b}^k$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$.
Wir betrachten die Lösungen $u_{i,j} \in C^\infty(\overline{D^2})$ von

$$\begin{cases} -\triangle u_{i,j} = \sum_{k=1}^m \{\tilde{a}_i^k, \tilde{b}_j^k\} & \text{in } D^2, \\ u_{i,j} = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases}$$

Nach Lemma 7.8 erhalten gilt dann

$$\|u_{ij}\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u_{ij}\|_{L^2(D^2)} \leq C(m) \sum_{k=1}^m \|\nabla \tilde{a}_i^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, \|\nabla \tilde{b}_j^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{7.8}$$

Dann ist $(u_{i,j})_{n\geq 1}$ eine CAUCHY-Folge in $C^0(\overline{D^2}) \cap W^{1,2}(D^2)$ für $j \to \infty$, denn es gilt für j, $j' \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} -\triangle(u_{i,j} - u_{i,j'}) = \sum_{k=1}^m \{\tilde{a}_i^k, \tilde{b}_j^k - \tilde{b}_{j'}^k\} & \text{in } D^2, \\ u_{i,j} - u_{i,j'} = 0 & \text{auf } \partial D^2, \end{cases}$$

und die WENTE-Ungleichung, Lemma 7.8, liefert die CAUCHY-Folgen-Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \|u_{i,j} - u_{i,j'}\|_{L^\infty(D^2)} \quad &+ \|\nabla(u_{i,j} - u_{i,j'})\|_{L^2(D^2)} \\ \leq \quad & C(m) \sum_{k=1}^m \|\nabla \tilde{a}_i^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, \|\nabla(\tilde{b}_j^k - \tilde{b}_{j'}^k)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{j,j'\to\infty} 0. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Es existiert also ein $u_i \in C^0(\overline{D^2}) \cap W_0^{1,2}(D^2)$ mit $u_{i,j} \xrightarrow{j\to\infty} u_i$ in $W^{1,2}(D^2) \cap L^\infty(D^2)$. Wegen dieser Konvergenz erfüllt u_i für alle $i \geq 1$ schwach die partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\triangle u_i = \sum_{k=1}^m \{\tilde{a}_i^k, \tilde{b}^k\} & \text{in } D^2, \\ u_i = 0 & \text{auf } \partial D^2, \end{cases}$$

und die WENTE-Ungleichung folgt aus (7.8) durch den Grenzübergang $j \to \infty$

$$\|u_i\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u_i\|_{L^2(D^2)} \leq C \sum_{k=1}^m \|\nabla \tilde{a}_i^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, \|\nabla \tilde{b}^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Aus der Konvergenz von $(u_{i,j})_j$ erhalten wir für jedes $i, i' \in \mathbb{N}$, dass $u_{i,j} - u_{i',j} \xrightarrow{j\to\infty} u_i - u_{i'}$ in $W^{1,2}(D^2) \cap L^\infty(D^2)$. Daraus folgt unter Anwendung des Lemmas 7.8 auf die Differenz $u_{i,j} - u_{i',j}$ nach dem Grenzübergang $j \to \infty$

$$\|u_i - u_{i'}\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla(u_i - u_{i'})\|_{L^2(D^2)} \leq C \sum_{k=1}^m \|\nabla(\tilde{a}_i^k - \tilde{a}_{i'}^k)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, \|\nabla \tilde{b}^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{i,i'\to\infty} 0.$$

Also ist $(u_i)_i$ eine CAUCHY-Folge in $C^0(\overline{D^2}) \cap W_0^{1,2}(D^2)$ und wir erhalten ein $\tilde{u} \in C^0(\overline{D^2}) \cap W_0^{1,2}(D^2)$ mit $u_i \xrightarrow{i\to\infty} \tilde{u}$ in $L^\infty(D^2) \cap W^{1,2}(D^2)$, so dass

$$\begin{cases} -\triangle \tilde{u} = \sum_{k=1}^m \{\tilde{a}^k, \tilde{b}^k\} & \text{in } D^2, \\ \tilde{u} = 0 & \text{auf } \partial D^2 \end{cases} \tag{7.10}$$

und die folgende Abschätzung gilt:

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(D^2)} \leq C \sum_{k=1}^{m} \|\nabla\tilde{a}^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \ \|\nabla\tilde{b}^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Nun erfüllen u und $\tilde{u}$ beide dieselbe partielle Differentialgleichung (7.10) und daher gilt $u = \tilde{u} \in C^0(\overline{D^2}) \cap W_0^{1,2}(D^2)$ und schließlich

$$\|u\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(D^2)} \leq C \sum_{k=1}^{m} \|\nabla\tilde{a}^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \ \|\nabla\tilde{b}^k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \overset{(7.7)}{\leq} C \sum_{k=1}^{m} \|\nabla a^k\|_{L^2(D^2)} \ \|\nabla b^k\|_{L^2(D^2)}.$$

□

7.1.2. Alternative Beweismethode nach Tartar

Die Methode von L. Tartar aus [Tar84] impliziert einen alternativen Beweis für den Dirichlet-Fall der Wente-Ungleichung, wir benötigen dafür einige Ergebnisse aus der Theorie der Lorentz-Räume. Lorentz-Räume sind eine feinere Unterteilung der L^p-Räume. Eine Einführung findet sich z.B. in [Gra04], Chapter 1.4, pp45 ff, in [Zie89], §1.8 und §2.10, im Artikel [Hun66] sowie in [SW71], §5.3. Einige Anwendungen in Bezug auf Partielle Differentialgleichungen werden z.B. in [Hél02] §3.3 vorgestellt.

7.10 Definition (Lorentz-Raum)
(vgl. [Gra04] Definitionen 1.1.1 (S. 2), 1.4.1 (S.45), 1.4.6 (S.48))
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar. Wir definieren die Distributionsfunktion $d_f : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ *von f durch*

$$d_f(\alpha) := \mathscr{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > \alpha\}).$$

Wir definieren weiter das abfallende Rearrangement $f^*(t)$ *für $t > 0$ durch*

$$\mathrm{R}_f(t) := \inf\{s > 0 : \ d_f(s) \leq t\}.$$

Wir definieren die Quasinorm (die Dreiecksungleichung gilt nicht, für ein Beispiel siehe z.B. [Gra04], Seite 50) $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ durch

$$\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|f\|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \ R_f(t)\right)^q \ \frac{1}{t} \ \mathbf{d}t\right)^{\frac{1}{q}} & \text{, falls } q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} R_f(t) & \text{, falls } q = \infty \text{ und } p < \infty. \\ \sup_{t>0} R_f(t) & \text{, falls } q = p = \infty. \end{cases}$$

Wir definieren den Lorentz-Raum $L^{p,q}$ als die Menge aller messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für die gilt $\|f\|_{L^{p,q}} < \infty$.

7.11 Bemerkung
In der Literatur findet sich statt $R_f(t)$ häufig f^*, welches wir hier aus Gründen der Verwechslungsgefahr mit f^* aus Definition 6.1 nicht verwenden wollen.

7.12 Theorem (Eigenschaften von Lorentzräumen)
(vgl. [Gra04] Proposition 1.4.10 (S. 49), [Hun66] Theorem 4.5. (Multiplication Theorem) und Theorem 4.10. (Convolution Theorem), sowie [Zie89], Theorem 2.10.1, Seite 96)
Seien $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$. Seien weiter p, q, $r > 0$. Dann gilt

(i) *falls $0 < p_1 \leq \infty$, $0 < q_1 < r \leq \infty$,*

$$\|f\|_{L^{p_1,r}} \leq C(p_1, q_1, r)\|f\|_{L^{p_1,q_1}},$$

(ii) *falls $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ und $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$,*

$$\|f \cdot g\|_{L^{p,q}} \leq C(p,q,n)\|f\|_{L^{p_1,q_1}} \ \|g\|_{L^{p_2,q_2}},$$

(iii) falls $0 < \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 < 1$, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ *und* $0 \leq \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \leq 1$,

$$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C(p,q,n)\|f\|_{L^{p_1,q_1}} \; \|g\|_{L^{p_2,q_2}}$$

(iv) und $L^{p,p} = L^p$ *für* $0 < p \leq \infty$.

7.13 Lemma (Wente-Ungleichung auf $\mathbb{R}^2$)
(vgl. [Tar84] Kapitel II, Lemma, S.29)
Es existiert ein $C > 0$, *so dass für alle* $a, b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ *ein* $p \in C^0(\mathbb{R}^2)$ *existiert mit*

$$\triangle p = \{a,b\} \quad \textit{schwach in } \mathbb{R}^2 \tag{7.11}$$

und

$$\|p\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla p\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \; \|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \; \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Beweis. Zunächst eine kurze Motivation:
Angenommen wir hätten schon ein $p \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\triangle p = \{a,b\} \quad \text{punktweise in } \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt nach Proposition 3.3 (Eigenschaften der Fouriertransformation)

$$(\triangle p)^\wedge(\xi) = (\sum_{k=1}^2 \partial_k\partial_k p)^\wedge(\xi) = \sum_{k=1}^2 (\partial_k\partial_k p)^\wedge(\xi) = \sum_{k=1}^2 (2\pi i\xi_k)(\partial_k p)^\wedge(\xi)$$

$$= \sum_{k=1}^2 (2\pi i \xi_k)^2 \widehat{p}(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\widehat{p}(\xi),$$

also

$$\widehat{p}(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2|\xi|^2}(\triangle p)^\wedge(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\},$$

und mit dem Satz von Plancherel (Theorem 3.4) (wir beachten, das $p \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ angenommen ist)

$$p(x) = (\widehat{p})^\vee(x) = -\left(\frac{1}{4\pi^2|\cdot|^2}(\triangle p)^\wedge\right)^\vee(x).$$

Wir definieren also

$$q(\xi) := -\frac{1}{4\pi^2|\xi|^2}(\{a,b\})^\wedge(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\},$$

und hoffen, dass $p := q^\vee$ sinnvoll ist und die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

Wegen $\{a,b\} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$(\{a,b\})^\wedge(\xi) = (\partial_x a \; \partial_y b)^\wedge(\xi) - (\partial_y a \; \partial_x b)^\wedge(\xi)$$

und für $f, g \in \mathscr{S}$ gilt nach Proposition 3.3 und dem Satz von Plancherel (Theorem 3.4)

$$\widehat{f \cdot g} = ((\widehat{f})^\vee \cdot (\widehat{g})^\vee)^\wedge = ((\widehat{f} * \widehat{g})^\vee)^\wedge = \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Wir beachten $\widehat{\partial_k a}(\xi) = (2\pi i \xi_k)\widehat{a}(\xi)$ und schließen

$$\begin{aligned}
(\{a,b\})^\wedge(\xi) &= (\widehat{\partial_x a} * \widehat{\partial_y b})(\xi) - (\widehat{\partial_y a} * \widehat{\partial_x b})(\xi) \\
&= -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{a}(\xi-\eta)\; (\xi-\eta)_1 \; \widehat{b}(\eta)\; \eta_2 - \widehat{a}(\xi-\eta)\; (\xi-\eta)_2 \; \widehat{b}(\eta)\; \eta_1 \; \mathbf{d}\eta \\
&= -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{a}(\xi-\eta)\; \widehat{b}(\eta)\; ((\xi_1-\eta_1)\eta_2 - (\xi_2-\eta_2)\eta_1)\; \mathbf{d}\eta \\
&= -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{a}(\xi-\eta)\; \widehat{b}(\eta)\; (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\; \mathbf{d}\eta.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$q(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{a}(\xi-\eta)\widehat{b}(\eta)(\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2)\ \mathbf{d}\eta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

Nun gilt einerseits (mit der Äquivalenz von 1-Norm und 2-Norm in $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} |\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2| &= |\xi_2(\eta_1+\eta_2) - \eta_2(\xi_2+\xi_1)| \\ &\leq |\xi_2|(|\eta_1|+|\eta_2|) + |\eta_2|(|\xi_1|+|\xi_2|) \\ &\leq 2(|\xi_1|+|\xi_2|)(|\eta_1|+|\eta_2|) \\ &\leq C|\xi||\eta| \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} |\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2| &= |\xi_2(\eta_1-\xi_1) + \xi_1(\xi_2-\eta_2)| \\ &\leq |\xi_2||\eta_1-\xi_1| + |\xi_1||\xi_2-\eta_2| \\ &\leq 2(|\xi_1|+|\xi_2|)(|\eta_1-\xi_1|+|\eta_2-\xi_2|) \\ &\leq C|\xi||\eta-\xi|. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2| &= \sqrt{|\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2|}\sqrt{|\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2|} \\ &\leq C\sqrt{|\xi||\eta|}\sqrt{|\xi||\eta-\xi|} \\ &= C|\xi||\eta|^{\frac{1}{2}}|\eta-\xi|^{\frac{1}{2}} \quad \text{für alle } \xi,\eta\in\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Also können wir $q(\xi)$ abschätzen gegen

$$\begin{aligned} |q(\xi)| &\leq \frac{1}{|\xi|^2}|\xi|\int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{a}(\xi-\eta)||\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}\ |\widehat{b}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}}\ \mathbf{d}\eta \\ &= \frac{1}{|\xi|}(|\widehat{a}(\cdot)|\ |\cdot|^{\frac{1}{2}}) * (\left|\widehat{b}(\cdot)\right|\ |\cdot|^{\frac{1}{2}})(\xi). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Nun gilt wieder mit der Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^2$ und $(\partial_k a)\hat{}(\xi) = (2\pi i\xi_k)\ \hat{a}(\xi)$, $k=1,2$,

$$\begin{aligned} |\widehat{a}(\eta)|\ |\eta| &= |\widehat{a}(\eta)|\ \sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2} \\ &\leq C(|\widehat{a}(\eta)\eta_1| + |\widehat{a}(\eta)\eta_2|) \\ &= \tilde{C}(\left|\widehat{\partial_x a}(\eta)\right| + \left|\widehat{\partial_y a}(\eta)\right|) \end{aligned}$$

und deshalb ist $|\hat{a}||\cdot| \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und mit dem Satz von Plancherel folgt

$$\||\widehat{a}(\cdot)|\ |\cdot|\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\widehat{\nabla a}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = C\|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{7.13}$$

Analog folgt $|\widehat{b}(\cdot)||\cdot| \in L^2$ und $\||\widehat{b}(\cdot)|\ |\cdot|\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.
Die Funktion $f(\eta) := |\eta|^{-\frac{1}{2}}$ ist im Lorentz-Raum $L^{4,\infty}(\mathbb{R}^n)$, was man folgendermaßen einsieht:
Für $\alpha > 0$ und

$$d_f(\alpha) = \mathscr{L}^2(\{\eta :\ |f(\eta)| > \alpha\})$$

gilt mit $|\eta|^{-\frac{1}{2}} > \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{|\eta|} > \alpha^2 \Leftrightarrow |\eta| < \frac{1}{\alpha^2}$ (wir bezeichnen $\omega_2 := \mathscr{L}^2(B_1(0))$)

$$d_f(\alpha) = \mathscr{L}^2(B_{\frac{1}{\alpha^2}}(0)) = \omega_2\frac{1}{\alpha^4}.$$

Wir betrachten für $t > 0$

$$R_f(t) = \inf\{s > 0 : \ d_f(s) \leq t\}.$$

Mit $\omega_2 \frac{1}{\alpha^4} \leq t \Leftrightarrow \alpha \geq (\frac{\omega_2}{t})^{\frac{1}{4}}$ erhält man $R_f(t) = \left(\frac{\omega_2}{t}\right)^{\frac{1}{4}}$, woraus folgt

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{4}} R_f(t) = (\omega_2)^{\frac{1}{4}} < \infty,$$

also $f \in L^{4,\infty}(\mathbb{R}^2)$ (vgl. Definition 7.10).
Da $L^2 = L^{2,2}$ gilt nach Theorem 7.12, dass $|\widehat{a}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}} = |\widehat{a}(\eta)||\eta||\eta|^{-\frac{1}{2}} \in L^{\frac{4}{3},2}(\mathbb{R}^n)$ und ebenso $|\widehat{b}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}} \in L^{\frac{4}{3},2}(\mathbb{R}^n)$ mit (unter Anwendung der Abschätzungen für die einzelnen Multiplikatoren)

$$\begin{aligned} \||\widehat{a}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}}\|_{L^{\frac{4}{3},2}} &\leq C\||\widehat{a}(\eta)||\eta|\|_{L^2} \ \||\eta|^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{4,\infty}} \\ &= C\||\widehat{a}(\eta)||\eta|\|_{L^2} \ (\omega_2)^{\frac{1}{4}} \\ &\overset{(7.13)}{\leq} C\|\nabla a\|_{L^2}, \end{aligned}$$

und ebenso

$$\||\widehat{b}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}}\|_{L^{\frac{4}{3},2}} \leq C\|\nabla b\|_{L^2}.$$

Damit folgt wiederum nach Theorem 7.12, dass

$$|\widehat{a}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}} * |\widehat{b}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}} \in L^{2,1} \subset L^{2,2} = L^2$$

mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} \||\widehat{a}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}} * |\widehat{b}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}}\|_{L^2} &\leq C\||\widehat{a}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}}\|_{L^{\frac{4}{3},2}} \ \||\widehat{b}(\eta)||\eta|^{\frac{1}{2}}\|_{L^{\frac{4}{3},2}} \\ &\leq C\|\nabla a\|_{L^2} \ \|\nabla b\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (7.12) ergibt dies zunächst einmal, dass

$$q(\xi) \cdot |\xi| \in L^{2,1} \subset L^2 \tag{7.14}$$

mit der Abschätzung

$$\|q(\cdot) \ |\cdot|\|_{L^2} \leq C\|\nabla a\|_{L^2} \ \|\nabla b\|_{L^2}. \tag{7.15}$$

Wir betrachten $f(\xi) := \frac{1}{|\xi|}$ und $\alpha > 0$:
Wegen $\frac{1}{|\xi|} > \alpha \Leftrightarrow |\xi| < \frac{1}{\alpha}$ folgt $d_f(\alpha) = \mathscr{L}^2(B_{\frac{1}{\alpha}}) = \omega_2 \frac{1}{a^2}$.
Somit folgt wegen $t \geq \frac{1}{s^2} \ \omega_2 \Leftrightarrow s \geq (\frac{\omega_2}{t})^{\frac{1}{2}}$, dass $R_f(t) = (\frac{\omega_2}{t})^{\frac{1}{2}}$ und somit

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \ R_f(t) = (\omega_2)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

was $f \in L^{2,\infty}$ bedeutet.
Damit folgt aus Theorem 7.12 (ii) und (7.14), dass

$$q(\xi) = q(\xi)|\xi|\frac{1}{|\xi|} \in L^{1,1} = L^1$$

und die Abschätzung

$$\|q(\xi)\|_{L^1} \leq C\|q(\xi)|\xi|\|_{L^{2,1}} \ \left\|\frac{1}{|\xi|}\right\|_{L^{2,\infty}} \leq C\|\nabla a\|_{L^2} \ \|\nabla b\|_{L^2}(\omega_2)^{\frac{1}{2}} = \tilde{C}\|\nabla a\|_{L^2} \ \|\nabla b\|_{L^2}.$$

Also haben wir gezeigt, dass $q \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. Definieren wir nun

$$p := q^{\vee},$$

so ist $p \in C^0(\mathbb{R}^2)$ nach Proposition 3.3(vii) wohldefiniert, da $q \in L^1(\mathbb{R}^2)$ und

$$\|p\|_{L^\infty} = \|q^\vee\|_{L^\infty} \overset{P3.3}{\leq} \|q\|_{L^1} \leq C\|\nabla a\|_{L^2}\ \|\nabla b\|_{L^2}. \tag{7.16}$$

Nun wollen wir noch die schwache Ableitung von p berechnen: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$; beachten wir, dass $p \in L^\infty$ und somit $\int_{\mathbb{R}^2} p\partial_k\varphi$ wohldefiniert ist, und dass $q \in L^1$ und somit die FOURIERtransformierte bzw. deren Umkehrung punktweise gegeben ist, so erhalten wir mit partieller Integration (PI)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} p(y)\ \partial_k\varphi(y)\ \mathbf{d}y &= \int_{\mathbb{R}^2} q^\vee(y)\ \partial_k\varphi(y)\ \mathbf{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} q(\xi)e^{2\pi i\langle\xi,y\rangle}\ \mathbf{d}\xi\ \partial_k\varphi(y)\ \mathbf{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} q(\xi)\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i\langle\xi,y\rangle}\partial_k\varphi(y)\ \mathbf{d}y\ \mathbf{d}\xi \\
&\overset{PI}{=} -\int_{\mathbb{R}^2} q(\xi)\ \int_{\mathbb{R}^2}(2\pi i\xi_k)e^{2\pi i\langle\xi,y\rangle}\varphi(y)\ \mathbf{d}y\ \mathbf{d}\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}(2\pi i\xi_k)e^{2\pi i\langle\xi,y\rangle}q(\xi)\ \mathbf{d}\xi\varphi(y)\ \mathbf{d}y \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2}((2\pi i(\cdot)_k)q(\cdot))^\vee(y)\varphi(y)\ \mathbf{d}y.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Nun gilt aber

$$|(2\pi i(\cdot)_k)q(\cdot)| \leq C|q(\cdot)||\cdot| \overset{(7.14)}{\in} L^2(\mathbb{R}^2)$$

(womit insbesondere $((2\pi i(\cdot)_k)q(\cdot))^\vee$ wohldefiniert und die Integrale in (7.17) endlich sind). Mit dem Satz von PLANCHEREL (Theorem 3.4) und (7.15)

$$\|(|(2\pi i(\cdot)_k)q(\cdot)|)^\vee\|_{L^2} \overset{T.3.4}{=} \|(|(2\pi i(\cdot)_k)q(\cdot)|)\|_{L^2} \leq C\||\cdot||q(\cdot)|\|_{L^2} \overset{(7.15)}{\leq} C\|\nabla a\|_{L^2}\|\nabla b\|_{L^2}. \tag{7.18}$$

Somit ist ∇p schwach definiert und in L^2 mit der gewünschten Abschätzung

$$\|p\|_{L^\infty} + \|\nabla p\|_{L^2} \overset{(7.16)}{\underset{(7.18)}{\leq}} C\|\nabla a\|_{L^2}\|\nabla b\|_{L^2}.$$

Nun zeigen wir, dass p auch schwache Lösung von (7.11) ist: Sei $\varphi \in C_0^\infty$. Wie oben gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \nabla p(y)\ \nabla\varphi(y)\ \mathbf{d}y &= -\int_{\mathbb{R}^2} p(y)\ \triangle\varphi(y)\ \mathbf{d}y \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} q(\xi)\int_{\mathbb{R}^2} e^{i2\pi\langle\xi,y\rangle}\triangle\varphi(y)\ \mathbf{d}y\ \mathbf{d}\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} q(\xi)\int_{\mathbb{R}^2}(-4\pi^2)|\xi|^2 e^{i2\pi\langle\xi,y\rangle}\varphi(y)\ \mathbf{d}y\ \mathbf{d}\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2}(-4\pi^2|\cdot|^2 q(\cdot))^\vee(y)\varphi(y)\ \mathbf{d}y\ \mathbf{d}\xi.
\end{aligned}$$

Wir erinnern uns, dass

$$q(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2|\xi|^2}(\{a,b\})^\wedge(\xi),$$

also

$$q(\xi)|\xi|^2(-4\pi^2) = (\{a,b\})^\wedge(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\},$$

und wegen $\{a,b\} \in \mathscr{S}$ gilt somit

$$(q(\cdot)|\cdot|^2(-4\pi^2))^\vee = ((\{a,b\})^\wedge)^\vee = \{a,b\}$$

und damit folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla p(y)\ \nabla\varphi(y)\ \mathbf{d}y = -\int_{\mathbb{R}^2}\{a,b\}(y)\varphi(y)\ \mathbf{d}y.$$

□

7.2. Wente-Ungleichung für Neumann-Randwerte

Für homogene Neumannrandwerte wollen wir ähnlich vorgehen wie im Beweis von Brezis und Coron im homogenen Dirichlet-Fall. Nun lässt sich aber das Maximumsprinzip nicht ohne Weiteres anwenden, welches für den Dirichlet-Fall (vgl. Lemma 7.8) essentiell war. Anstatt wie im Dirichlet-Fall das Newtonpotential mit der Lösung φ zu *vergleichen* werden wir die Lösung φ über ein Potential darstellen, und zwar über die sogenannte GREENs-Funktion (vgl. [Hél02], Theorem 3.1.2).
Zunächst werden wir in den nächsten zwei Lemmata eine solche Darstellung erhalten und damit dann die WENTE-Ungleichung beweisen.

7.14 Lemma (Darstellungssatz für NEUMANN-Randwerte)
Sei für alle $x \in D^2$ ein $h^x(\cdot) \in C^\infty(\overline{D^2})$ gegeben, mit der Eigenschaft

$$\triangle_y h^x(y) = C(x) \quad \textit{für alle } x \in D^2 \tag{7.19}$$

und

$$\langle \nabla\Phi(\xi - x) + \nabla h^x(\xi), \nu(\xi)\rangle \equiv 0 \quad \textit{für alle } \xi \in \partial D^2,\, x \in D^2, \tag{7.20}$$

wobei $\Phi = -\frac{1}{2\pi}\log|\cdot|$ die Fundamentallösung des LAPLACE-Operators (vgl. Lemma 6.20)und $\nu(y) = y$ die äußere Einheitsnormale an ∂D^2 bezeichne.
Dann gilt für alle $u \in C^2(\overline{D^2})$ mit $\int_{D^2} u = 0$ die Gleichung

$$u(x) = \int_{\partial D^2} G(x,\xi)\, \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - \int_{D^2} G(x,y)\, \triangle u(y)\, \mathbf{d}y \quad \textit{für fast alle } x \in D^2,$$

wobei

$$G(x,y) := \Phi(y-x) + h^x(y).$$

Beweis. Es gilt (siehe z.B. [GT83], §2.4, Gleichung (2.16) Seite 18) bereits für die Fundamentallösung Φ punktweise fast überall

$$u(x) = \int_{\partial D^2} \left(\Phi(\xi - x)\, \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) - u(\xi)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\xi - x)\right)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - \int_{D^2} \Phi(y-x)\, \triangle u(y)\, \mathbf{d}y. \tag{7.21}$$

Wegen $h^x \in C^\infty(\overline{D^2})$ gilt weiterhin für alle $x \in D^2$ mit dem klassischem Satz von GAUSS-GREEN

$$\int_{D^2} \Big(h^x(y)\, \triangle u(y) - u(y)\, \underbrace{\triangle h^x(y)}_{=C(x)}\Big)\, \mathbf{d}y = \int_{\partial D^2} \left(h^x(\xi)\, \frac{\partial < u}{\partial \nu}(\xi) - u(\xi)\, \frac{\partial h^x}{\partial \nu}(\xi)\right) \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi),$$

und somit wegen $\triangle h^x(y) = C(x)$ und wegen $\int_{D^2} C(x) u(y)\, \mathbf{d}y = C(x)\int_{D^2} u(y)\, \mathbf{d}y = 0$

$$\int_{\partial D^2} u(\xi)\, \frac{\partial h^x}{\partial \nu}(\xi)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) = \int_{\partial D^2} h^x(\xi)\, \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - \int_{D^2} h^x(y)\, \triangle u(y)\, \mathbf{d}y. \tag{7.22}$$

Zusammengesetzt ergeben die Gleichungen (7.21) und (7.22) nun

$$\begin{aligned}
u(x) &\overset{(7.21)}{=} \int_{\partial D^2} \Phi(\xi - x)\, \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - \int_{\partial D^2} u(\xi)\, \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\xi - x)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - \int_{D^2} \Phi(y-x)\, \triangle u(y)\, \mathbf{d}y \\
&\overset{(7.20)}{=} \int_{\partial D^2} \Phi(\xi - x)\, \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) + \int_{\partial D^2} u(\xi)\, \frac{\partial h^x}{\partial \nu}(\xi)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - \int_{D^2} \Phi(y-x)\, \triangle u(y)\, \mathbf{d}y \\
&\overset{(7.22)}{=} \int_{\partial D^2} (\Phi(\xi - x) + h^x(\xi))\, \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - \int_{D^2} (\Phi(y-x) + h^x(y))\, \triangle u(y)\, \mathbf{d}y \\
&= \int_{\partial D^2} G(x,\xi)\, \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - \int_{D^2} G(x,y)\, \triangle u(y)\, \mathbf{d}y.
\end{aligned}$$

□

Nun müssen wir noch ein h^x finden, welches die Voraussetzungen von Lemma 7.14 erfüllt:

7.15 Lemma (Neumann-Greensfunktion auf Disk)
(vgl. [DiB95], Ch. III, Lemma 8.1.c, Seite 153)
Sei die Funktion $h^x(y)$ definiert durch

$$h^x(y) := -\frac{1}{2\pi}\ \log|\zeta - y| + \frac{1}{4\pi}|y|^2 \quad \text{für } x \in D^2\backslash\{0\}$$

wobei $\zeta := \frac{x}{|x|^2}$ und

$$h^0(y) := \frac{1}{4\pi}|y|^2.$$

Dann gilt

(i) $h^x(\cdot) \in C^\infty(\overline{D^2})$ *für alle* $x \in D^2$.

(ii) $\triangle h^x(\cdot) \equiv \frac{1}{\pi}$ *für alle* $x \in D^2$.

(iii) Für $G(x,y) := \Phi(y-x) + h^x(y)$ *gilt für jedes* $x \in D^2$

$$\langle \nabla_y G(x,\cdot), \nu\rangle = 0 \quad \text{auf } \partial D^2,$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale an ∂D^2 sei.

Beweis. *(i)* $h^x(\cdot) \in C^\infty(\overline{D^2})$ für alle $x \in D^2$:
Für $x = 0$ ist die Behauptung klar, da $|\cdot|^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
Für $x \neq 0$, $x \in D^2$ beachten wir, dass $|x| < 1$ und somit

$$|\zeta| = \frac{|x|}{|x|^2} = \frac{1}{|x|} > 1$$

und somit

$$\zeta \notin \overline{D^2}$$

woraus folgt

$$\log|\zeta - \cdot| \in C^\infty(\overline{D^2}).$$

(ii) $\triangle h^x(\cdot) = \frac{1}{\pi}$ für alle $x \in D^2$:
Es gilt für $x = 0$

$$\triangle h^0(y) = \frac{1}{4\pi}\cdot 4 = \frac{1}{\pi}.$$

Weiter gilt

$$\triangle \log|\zeta - y| = 0 \quad \text{für alle } y \neq \zeta,$$

und somit für alle $y \in \overline{D^2}$, da $x \in D^2$ und $\zeta = \frac{x}{|x|^2} \notin \overline{D^2}$.
Daraus folgt[24]

$$\triangle_y h^x(y) = \frac{1}{\pi} \quad \text{für alle } x \in D^2\backslash\{0\}.$$

(iii) $\frac{\partial}{\partial\nu}(h^x(y) + \Phi(y-x)) = 0$:
Es gilt

$$\nabla(\frac{1}{4\pi}|y|^2) = \frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix}2y_1\\ 2y_2\end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi}y$$

und somit für $|y| = 1$

$$\begin{aligned}\langle\nabla(\frac{1}{4\pi}|y|^2), \nu(y)\rangle &= \langle\nabla(\frac{1}{4\pi}|y|^2), y\rangle\\ &= \frac{1}{2\pi}|y|^2\\ &= \frac{1}{2\pi}.\end{aligned}$$

[24]Tatsächlich finden wir also eine universelle Konstante $\frac{1}{\pi}$ unabhängig von x. Für die Anwendung von Lemma 7.14 ist in (7.19) eine Konstante abhängig von x erlaubt.

Weiter gilt für $x \in D^2$ und $|y| = 1$ (und somit $|x-y| > 0$) für die Fundamentallösung Φ

$$\nabla_y \Phi(y-x) = \nabla_y(-\frac{1}{2\pi}\log|x-y|) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{|y-x|^2}\,(y-x)$$

und somit

$$\langle \nabla\Phi(y-x), \nu(y)\rangle = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{|y-x|^2}\,\langle y-x, y\rangle.$$

Für $x = 0$ ist dies

$$\langle \nabla\Phi(y-0), \nu(y)\rangle = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{|y|^2}\,\langle y, y\rangle = -\frac{1}{2\pi},$$

und es folgt

$$\langle \nabla(\Phi(y-0) + h^0(y)), \nu(y)\rangle = 0,$$

also $\frac{\partial}{\partial\nu} G(0,y) = 0$ für alle $y \in \partial D^2$.
Für $x \neq 0$, $\zeta = \frac{x}{|x|^2}$ betrachten wir

$$\nabla(-\frac{1}{2\pi}\log|\zeta - y|) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\zeta - y}{|\zeta - y|^2}.$$

Daraus folgt für $|y| = 1$

$$\langle \nabla(\Phi(y-x) - \frac{1}{2\pi}\log|\zeta-y|), y\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle(\frac{x-y}{|y-x|^2} + \frac{\zeta-y}{|\zeta-y|^2}), y\rangle.$$

Nun gilt für $|y| = 1$

$$\begin{aligned}
|\zeta - y|^2 &= |\zeta|^2 + |y|^2 - 2\langle\zeta, y\rangle \\
&= \frac{1}{|x|^2} + 1 - 2\langle\zeta, y\rangle \\
&= \frac{1}{|x|^2}(1 + |x|^2 - 2\langle x, y\rangle) \\
&= \frac{1}{|x|^2}(|y|^2 + |x|^2 - 2\langle x, y\rangle) \\
&= \frac{1}{|x|^2}|x-y|^2.
\end{aligned}$$

Damit schreiben wir

$$\frac{\zeta - y}{|\zeta - y|^2} = \frac{|x|^2(\zeta - y)}{|x-y|^2} = \frac{x - |x|^2 y}{|x-y|^2}$$

und erhalten schließlich ($|y| = 1$)

$$\left\langle \frac{\zeta - y}{|\zeta - y|^2}, y \right\rangle = \frac{\langle x, y\rangle - |x|^2 1}{|x-y|^2}$$

und

$$\left\langle \frac{x - y}{|x - y|^2}, y \right\rangle = \frac{\langle x, y\rangle - |y|^2}{|x-y|^2}.$$

Damit erhalten wir

$$\left\langle \frac{x - y}{|x - y|^2}, y \right\rangle + \left\langle \frac{\zeta - y}{|\zeta - y|^2}, y \right\rangle = -\frac{|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle}{|x-y|^2} = -1,$$

und somit

$$\langle \nabla(\Phi(y-x) - \frac{1}{2\pi}\log|\zeta - y|, y\rangle = -\frac{1}{2\pi},$$

woraus folgt

$$\langle \nabla(\Phi(y-x) + h^x(y)), \eta(y)\rangle = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = 0,$$

also

$$\langle \nabla_y G(x,y), \nu(y)\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in D^2\backslash\{0\},\ y \in \partial D^2.$$

□

Nun sind wir in der Lage, den Fall der homogenen NEUMANN-Randdaten mit einer ähnlichen Methode wie in Lemma 7.8 zu beweisen:

7.16 Lemma (Ungleichung für homogene NEUMANN-Randwerte und C_0^∞-Daten)
Sei[25] $a \in C_0^\infty(D^2)$, $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. *Sei* $u \in W^{1,2}(D^2)$ *die Lösung von*

$$\begin{cases} -\triangle u = \{a,b\} & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial D^2 \\ \int_{D^2} u = 0. \end{cases} \tag{7.23}$$

Dann gilt

$$\|u\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(D^2)} \le C\|\nabla a\|_{L^2(D^2)}\ \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Beweis. Es gilt nach Theorem 4.19, dass $u \in C^\infty(\overline{D^2})$ und dass u stark homogene NEUMANN-Randwerte besitzt.
Aus Lemma 7.14 erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D^2} G(x,\xi)\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\ \mathbf{d}\mathscr{H}^{n-1}(\xi) - \int_{D^2} G(x,y)\ \triangle u(y)\ \mathbf{d}y \\ &= \int_{D^2} G(x,y)\ \{a,b\}(y)\ \mathbf{d}y, \end{aligned}$$

wobei nach Lemma 7.15 für $\zeta = \frac{x}{|x|^2}$

$$G(x,y) := -\frac{1}{2\pi}\ \log|x-y| - \frac{1}{2\pi}\ \log|\zeta - y| + \frac{1}{4\pi}|y|^2 \quad \text{für } x \in D^2\backslash\{0\}$$

und

$$G(0,y) := -\frac{1}{2\pi}\ \log|x-y| + \frac{1}{4\pi}|y|^2.$$

Also ist

$$u(0) = -\int_{D^2} \frac{1}{2\pi}\ \log|y|\{a,b\}(y)\ \mathbf{d}y + \int_{D^2} \frac{1}{4\pi}|y|^2\ \{a,b\}(y)\ \mathbf{d}y$$

und

$$u(x) = \int_{D^2} \left[-\frac{1}{2\pi}\ \log|\zeta - y|\{a,b\}(y) - \frac{1}{2\pi}\ \log|x-y|\{a,b\}(y) + \frac{1}{4\pi}|y|^2\ \{a,b\}(y)\right]\ \mathbf{d}y, \quad \text{für } x \in D^2\backslash\{0\}.$$

Mit Korollar 7.6 erhalten[26] von φ wir für alle $x \in D^2$

$$|u(x)| \le C\|\nabla a\|_{L^2(D^2)}\ \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{4\pi}\|\{a,b\}\|_{L^1(D^2)}$$

und somit

$$\|u\|_{L^\infty(D^2)} \le C\|\nabla a\|_{L^2(D^2)}\ \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Wegen $u \in C^\infty(\overline{D^2})$ können wir die PDE (7.23) testen und erhalten

$$\|\nabla u\|_{L^2(D^2)} + \|u\|_{L^\infty(D^2)} \le C\|\nabla a\|_{L^2}\ \|\nabla b\|_{L^2}.$$

Damit ist dieses Lemma bewiesen. □

[25] Tatsächlich reicht hier auch wieder $a \in C_0^1(D^2)$ und $b \in C^1(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, vgl. Fußnote 21, Seite 118.
[26] Hier benutzen wir, dass $\operatorname{supp} a \subset\subset D^2$, da sonst der Integrationsbereich für die GREENsche Darstellung von φ nicht mit dem Integrationsbereich von Ψ aus Lemma 7.5 übereinstimmt.

7.17 Korollar (Wente-Ungleichung Neumann-Fall)
Sei $a \in W_0^{1,2}(D^2)$, $b \in W^{1,2}(D^2)$. Sei $u \in W^{1,2}(D^2)$ die Lösung von

$$\begin{cases} -\triangle u = \{a, b\} & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} u = 0. \end{cases} \tag{7.24}$$

Dann ist $u \in C^0(\overline{D^2}) \cap W^{1,2}(D^2)$, und es gibt eine Konstante C unabhängig von a und b, so dass

$$\|u\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(D^2)} \leq C \|\nabla a\|_{L^2(D^2)} \, \|\nabla b\|_{L^2(D^2)}.$$

Beweis. Wir gehen analog zum Beweis von Korollar 7.9 vor; dazu setzen wir b zu $\tilde{b} \in W_0^{1,2}(2D^2)$ fort, approximieren a durch $a_m \in C_0^\infty(D^2)$ und $\tilde{b}$ durch $b_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. (Wir identifizieren im Folgenden $\tilde{b}$ mit b).
Dann gilt mit Proposition 4.22(ii)

$$\int_{D^2} \nabla a_m \, \nabla^\perp b_n = 0,$$

da $a_m \in C_0^\infty(D^2)$. Folglich existieren eindeutige Lösungen $u_{m,n} \in W^{1,2}(D^2)$ zu

$$\begin{cases} -\triangle u_{m,n} = \{a_m, b_n\} & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} u_{m,n} = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} u_{m,n} = 0. \end{cases}$$

Nach Lemma 7.16 gilt dann

$$\|u_{m,n}\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla u_{m,n}\|_{L^2(D^2)} \leq C \|\nabla a_m\|_{L^2(D^2)} \, \|\nabla b_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Wir fahren fort wie im Beweis von Korollar 7.9 und erhalten, dass $\varphi_{m,n}$ eine Cauchy-Folge in $C^0(\overline{D^2}) \cap W^{1,2}(D^2)$ bezüglich m und n ist. Durch Grenzwertbildung erhalten wir dann ein $\tilde{u} \in C^0(D^2) \cap W^{1,2}(D^2)$, welches (7.24) löst und die Abschätzung

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(D^2)} + \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(D^2)} \leq C \|\nabla a\|_{L^2(D^2)} \, \|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung von (7.24) gilt $\tilde{u} = u$, und somit erfüllt auch u diese Abschätzung. Nehmen wir wieder ohne Einschränkung an, dass $\int_{D^2} a = 0$ und $\int_{D^2} b = 0$, so erhalten wir die Behauptung wie im Beweis zu Korollar 7.9 aus Eigenschaften der Erweiterung von b auf $\mathbb{R}^2$ und der Poincaré-Ungleichung. $\square$

8. Differentiation, Matrizen und exp

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Eigenschaften von Matrizen und Abbildungen von Matrizen.

8.1. Fréchet-Differenzierbarkeit, Richtungsableitung und Kettenregel

Zunächst wiederholen wir einige Resultate zur Differentiation zwischen linearen Räumen.

8.1 Definition (Differentiation, Differenzierbarkeit)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei reelle normierte Vektorräume und $U \subset X$, $V \subset Y$ offen. Sei weiter eine Abbildung $T : U \to V$ gegeben und $x \in U$.
Wir sagen, dass T differenzierbar *in x ist, wenn es eine stetige, lineare Abbildung $\mathbf{d}T_x : X \to Y$ gibt, so dass*

$$\frac{1}{\|h\|_X}\|T(x+h) - T(x) + \mathbf{d}T_x[h]\|_Y \to 0 \quad \text{für } 0 \neq h \in X \text{ mit } \|h\|_X \to 0.$$

Wir nennen $\frac{T(x+h)-T(x)}{\|h\|_X}$ den Differenzenquotienten *von T an der Stelle x in* Richtung *$\frac{h}{\|h\|_X}$ und $\mathbf{d}_x T$ die* Ableitung *von T am Punkt x.*
T heißt differenzierbar *auf U, falls T in jedem $x \in U$ differenzierbar ist. Wir sagen T ist* stetig differenzierbar *auf U, falls T auf U differenzierbar ist und die Abbildung $\mathbf{d}T : U \to L(X,Y)$, $\mathbf{d}T : x \mapsto dT_x$ stetig ist. Wir schreiben dann $T \in C^1(U,Y)$ oder $T \in C^1(U,T(U))$. Wir sagen T ist k-mal stetig differenzierbar auf U und schreiben $T \in C^k(U,Y)$, $k \geq 1$, falls $T \in C^1(U,Y)$ und $\mathbf{d}T \in C^{k-1}(U, \mathbf{d}T(U))$. Wir schreiben $T \in C^\infty(U,Y)$, falls $T \in C^k(U,Y)$ für alle $k \geq 1$.*

8.2 Bemerkung

- *Jeder lineare, stetige Operator $T : X \to Y$ ist in $C^\infty(X,Y)$ und $dT_x = T$ für alle $x \in X$, denn T ist stetig und linear und*
$$\left\|\frac{T[x+h] - T[x]}{\|h\|_X} - T\left[\frac{h}{\|h\|_X}\right]\right\|_Y = 0 \quad \text{für alle } h \in X,\ h \neq 0.$$
Somit ist $\mathbf{d}T_x := T$ die Ableitung von T und $T \in C^1(X,Y)$. Insesondere ist $T \in C^1(X, L(X,Y))$, wenn wir $T : x \mapsto T$ setzen. Per Induktion erhalten wir $T \in C^\infty(X,Y)$.

- *Insbesondere sind die Operatoren $\nabla : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-1,p}(\Omega)$ und $\operatorname{div} : W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \to W^{k-1,p}(\Omega)$ in C^∞ für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $k \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$.*

8.3 Proposition (Kettenregel)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ reelle normierte Vektorräume und $U \subset X$, $V \subset Y$ offen. Seien weiterhin Abbildungen $T \in C^1(U,Y)$ und $S \in C^1(V,Z)$ gegeben mit $T(U) \subset V$. Dann ist $S \circ T \in C^1(U,Z)$ und es gilt $\mathbf{d}(S \circ T) = \mathbf{d}S \circ \mathbf{d}T$ in dem Sinne, dass

$$\mathbf{d}(S \circ T)_x[v] = \mathbf{d}S_{T(x)}\left[\mathbf{d}T_x[v]\right] \quad \text{für alle } x \in U,\ v \in X.$$

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass der Differenzenquotient konvergiert. Sei also $x \in U$, $h \in X$ so klein, dass $x + h \in U$. Dann setzen wir $\tilde{h} := T(x+h) - T(x)$ und rechnen

$$\begin{aligned}
\|S(T(x+h)) - S(T(x)) - \mathbf{d}S_{T(x)}\left[\mathbf{d}T_x[h]\right]\|_Z &= \left\|\frac{S(T(x)+\tilde{h}) - S(T(x))}{\|\tilde{h}\|_Y}\ \|\tilde{h}\|_Y - \mathbf{d}S_{T(x)}\left[\mathbf{d}T_x[h]\right]\right\|_Z \\
\leq \left\|\frac{S(T(x)+\tilde{h}) - S(T(x))}{\|\tilde{h}\|_Y} - \mathbf{d}S_{T(x)}\left[\frac{\tilde{h}}{\|\tilde{h}\|_Y}\right]\right\|_Z &\|\tilde{h}\|_Y + \left\|\mathbf{d}S_{T(x)}[\tilde{h}] - \mathbf{d}S_{T(x)}[\mathbf{d}T_x[h]]\right\|_Z \\
&\leq o(1)\ \|\tilde{h}\|_Y\ + \|\mathbf{d}S_{T(x)}\|_{L(Y,Z)} \left\|\tilde{h} - \mathbf{d}T_x[h]\right\|_Y \\
&= o(1)\left\|\frac{T(x+h) - T(x)}{\|h\|_X}\right\|_Y \|h\|_X + \|\mathbf{d}S_{T(x)}\|_{L(Y,Z)}\ \|T(x+h) - T(x) - \mathbf{d}T_x[h]\| \\
&\leq o(1)2\left\|\mathbf{d}T_x\left[\frac{h}{\|h\|_X}\right]\right\|_Y \|h\|_X + \|\mathbf{d}S_{T(x)}\|_{L(Y,Z)}\ \frac{\|T(x+h) - T(x) - \mathbf{d}T_x[h]\|}{\|h\|_X}\ \|h\|_X
\end{aligned}$$

$$\leq o(1)\|h\|_X \left(2\,\|\mathbf{d}T_x\|_{L(X,Y)} \cdot 1 + \|\mathbf{d}S_{T(x)}\|_{L(Y,Z)}\right)$$
$$= o(1)\ \|h\|_X \quad \text{für } h \to 0.$$

Weiter ist die Abbildung $x \mapsto \mathbf{d}S_{T(x)}[\mathbf{d}T_x[\cdot]]$ stetig. □

8.4 Lemma (Richtungsableitung)
Seien X, Y lineare, normierte Vektorräume, $T \in C^1(U,Y)$ für eine offene Menge $U \subset X$ und $x \in U$ gegeben. Dann gilt für $\tilde{T}(t) := T(x+tv)$

$$\mathbf{d}T_x[v] = \lim_{\tau\to 0} \frac{\tilde{T}(t+\tau) - \tilde{T}(t)}{\tau} =: \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(x+tv) \quad \textit{für alle } v \in X.$$

Beweis. Wir setzen $S(t) := x + tv$. Dann ist $S \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$ und $\mathbf{d}S_t[s] = sv$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Weiter gilt $\tilde{T}(t) = T \circ S$. Für t hinreichend nahe bei 0 gilt $x + tv \in U$ und somit erhalten wir aus der Kettenregel, Proposition 8.3, dass

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(x+tv) \cdot s \overset{D.8.1}{=} \mathbf{d}\tilde{T}_0[s] \overset{P.8.3}{=} \mathbf{d}T_x[\mathbf{d}S_t[s]] = \mathbf{d}T_x[sv] = s\mathbf{d}T_x[v] \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(x+tv) = \mathbf{d}T_x[v].$$

□

8.5 Lemma (Multiplikation $\mathbf{W^{2,2} \cdot W^{1,2}}$, $\mathbf{W^{2,2} \cdot W^{2,2}}$ in $\mathbf{C^1}$)
Die Abbildungen $T_1 : W^{2,2}(D^2) \times W^{2,2}(D^2) \to W^{2,2}(D^2)$ und $T_2 : W^{2,2}(D^2) \times W^{1,2}(D^2) \to W^{1,2}(D^2)$ definiert durch

$$T_1(u,v) := u \cdot v, \quad T_2(u,v) := u \cdot v$$

sind beide in C^1.

Beweis. Es gilt

$$(u+h_1)(v+h_2) - uv - h_1 v - h_2 u - h_1\ h_2 = 0.$$

Wir definieren also $T'_{(u,v)}[h_1,h_2]$ durch

$$T'_{(u,v)}[h_1,h_2] = h_1 v + h_2 u.$$

Dann ist $T'_{(u,v)}$ linear und stetig sowie stetig abhängig vom Fußpunkt, denn es gilt für $u \in W^{2,2}(D^2)$ und $v \in W^{2,2}(D^2)$

$$\|T'_{(u,v)}[h_1,h_2]\|_{W^{2,2}} \leq C(\|h_1\|_{W^{2,2}} + \|h_2\|_{W^{2,2}})(\|u\|_{W^{2,2}} + \|v\|_{W^{2,2}}),$$

bzw. für $u \in W^{2,2}(D^2)$ und $v \in W^{1,2}(D^2)$

$$\|T'_{(u,v)}[h_1,h_2]\|_{W^{1,2}} \leq C(\|h_1\|_{W^{2,2}} + \|h_2\|_{W^{1,2}})(\|u\|_{W^{2,2}} + \|v\|_{W^{1,2}}).$$

Weiterhin gilt

$$(u+h_1)(v+h_2) - uv - T'_{(u,v)}[(h_1,h_2)] = h_1 h_2.$$

Nun haben wir

$$\frac{\|h_1 h_2\|_{W^{2,2}}}{\sqrt{\|h_1\|^2_{W^{2,2}} + \|h_2\|^2_{W^{2,2}}}} \leq C\frac{\|h_1\|_{W^{2,2}}\ \|h_2\|_{W^{2,2}}}{\sqrt{\|h_1\|^2_{W^{2,2}} + \|h_2\|^2_{W^{2,2}}}} \leq C\frac{\|h_1\|^2_{W^{2,2}} + \|h_2\|^2_{W^{2,2}}}{\sqrt{\|h_1\|^2_{W^{2,2}} + \|h_2\|^2_{W^{2,2}}}} = o(1) \quad \text{für } (h_1,h_2) \to 0,$$

und analog

$$\frac{\|h_1 h_2\|_{W^{1,2}}}{\sqrt{\|h_1\|^2_{W^{2,2}} + \|h_2\|^2_{W^{1,2}}}} = o(1) \quad \text{für } (h_1,h_2) \to 0.$$

Also konvergiert der Differenzenquotient von T_1 bzw. T_2 gegen T'. □

8.2. Matrizen und exp

Wir schränken uns auf D^2 und $W^{2,2}$ ein; die meisten Resultate bleiben aber gültig für $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand und Funktionen der Klasse $W^{2,p}$ für $p > \frac{n}{2}$.

Zunächst führen wir eine Konvention ein, welche uns viel Schreibarbeit abnehmen wird.

8.6 Konvention (Kombinatorische Klammern)
Seien $A_1, A_2, A_3 \in M(m)$ und $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Dann setzen wir

$$\{A_1^{l_1}, A_2^{l_2}\} := \sum_{\sigma\in\mathscr{K}_2(l_1,l_2)} \Pi_{i=1}^{l_0+l_1} A_{\sigma(i)} \in M(m),$$

wobei $\mathscr{K}_2(a_1,a_2) := \{\sigma \in \{1,2\}^{a_1+a_2} \mid |\{j \mid \sigma(j) = i\}| = a_i,\ i = 1,2\}$ *und*

$$\{A_1^{l_1}, A_2^{l_2}, A_3^{l_3}\} := \sum_{\sigma\in\mathscr{K}_3(l_1,l_2,l_3)} \Pi_{i=1}^{l_0+l_1} A_{\sigma(i)} \in M(m),$$

wobei $\mathscr{K}_3(a_1,a_2,a_3) := \{\sigma \in \{1,2,3\}^{a_1+a_2+a_3} \mid |\{j \mid \sigma(j) = i\}| = a_i,\ i = 1,2,3\}$.

8.7 Bemerkung

- *Es gilt dann für Matrizen A, $B \in M(m)$*

$$(A+B)^k = \sum_{j=1}^{k} \{A^j, B^{k-j}\}$$

- *und* $\{A^l, h\} = \sum_{j=0}^{l} A^j \cdot h \cdot A^{l-j}$ *für A, $h \in M(m)$.*

8.8 Definition (Exponentialfunktion)
Wir definieren die Exponentialfunktion

$$\exp : M(m) \to M(m)$$

durch

$$e^A \equiv \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad A \in M(m)$$

wann immer dieser Ausdruck sinnvoll ist.

8.9 Lemma (Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion auf $\mathbf{W^{2,2}}$)
Die Exponentialfunktion ist wohldefiniert als Funktion

$$\exp : W^{2,2}(D^2, M(m)) \to W^{2,2}(D^2, M(m))$$

und liegt in $C^1(W^{2,2}(D^2, M(m)), W^{2,2}(D^2, M(m)))$.
Die erste Ableitung $\mathbf{d}\exp_A$ *ist gegeben durch*

$$\exp'(A)[h] := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\{A^{k-1}, h\}, \quad h \in W^{2,2}(D^2, M(m)).$$

Beweis. Der Beweis ist hauptsächlich kombinatorischer Natur, wenn folgende Resultate verwendet werden:

- $W^{2,2}(D^2) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{D^2})$ stetig für jedes $0 < \alpha < 1$,
- $W^{2,2}(D^2) \hookrightarrow W^{1,4}(D^2)$ stetig.

Wir bezeichnen mit $\exp_n$ die n-te Partialsumme von exp, d.h.

$$\exp_n(A) := \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!},$$

und mit $\exp_{m,n}$, $m < n$

$$\exp_{m,n} := \exp_n - \exp_m .$$

Analog definieren wir $\exp'_n(A)[h]$ und $\exp'_{m,n}(A)[h]$.Wir betrachten folgende Gleichungen:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{8.1}$$

$$\nabla \exp(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \nabla(A^k) \tag{8.2}$$

$$\partial_{ij} \exp(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \partial_{ij}(A^k) \tag{8.3}$$

$$\exp'(A)[h] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \{A^{k-1}, h\} \tag{8.4}$$

$$\nabla \exp'(A)[h] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \nabla\{A^{k-1}, h\} \tag{8.5}$$

$$\partial_{ij} \exp'(A)[h] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \partial_{ij}\{A^{k-1}, h\} \tag{8.6}$$

Für $A \in W^{2,2}(D^2, M(m))$ wollen wir zunächst zu jeder dieser Gleichungen die Wohldefiniertheit der rechten Seite in $L^2(D^2, M(m))$ zeigen, d.h. die Konvergenz der unendlichen Reihe bezüglich der L^2-Norm beweisen (Schritt 1). Im Anschluss daran werden wir überprüfen, dass $\nabla \exp(A)$, $\partial_{ij} \exp(A)$, $\nabla \exp'(A)[h]$ und $\partial_{ij} \exp'(A)[h]$ tatsächlich schwache Ableitungen von $\exp(A)$ bzw. $\exp'(A)[h]$ sind (Schritt 2). Zuletzt müssen wir noch zeigen, dass $\exp'(A)[]$ wirklich die Ableitung von $\exp()$ an der Stelle A im Sinne von Definition 8.1 ist und dass $\exp'(A)[]$ als Operator stetig von A abhängt (Schritt 3). Nachdem wir diese Aussagen gezeigt haben, können wir $\exp \in C^1(W^{2,2}(D^2, M(m)), W^{2,2}(D^2, M(m)))$ schließen.
Im folgenden identifizieren wir $|\cdot|$ sowohl mit der Operatornorm bezüglich der euklidischen $\mathbb{R}^m$-Norm $|\cdot|_{M(m)}$, als auch mit der euklidischen Norm $|\cdot|_2$ auf $\mathbb{R}^{m\times m}$. Zwischen den beiden äquivalenten Normen werden wir weiterhin wechseln ohne ausdrücklich darauf hinzuweisen. Insbesondere benutzen wir die Abschätzung $|AB| \leq |A||B|$.

Schritt 1:
Zunächst zeigen wir die Wohldefiniertheit der exp-Funktionen von (8.1) bis (8.6):
Wir beachten im Folgenden, dass Matrizen A, h nicht notwendig kommutieren.

Wohldefiniertheit von (8.1)
Wir rechnen für $m < n$

$$\begin{aligned}
\| \exp_{m,n}(A)\|_{L^2(D^2)} &= \| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{A^k}{k!} \|_{L^2(D^2)} \\
&\leq C \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\|A\|_{L^\infty}^k}{k!} \\
&\leq C \sum_{k=m+1}^{n} \frac{(C\|A\|_{W^{2,2}})^k}{k!},
\end{aligned}$$

und wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz der reellen Exponentialfunktion ist $\exp_{m,n}(A)$ eine Cauchy-Folge in $L^2(D^2, M(m))$. Somit konvergiert $\exp_n(A)$ in L^2 für $n \to \infty$.

Wohldefiniertheit von (8.2)

Es gilt $\nabla A^k = \sum_{j=0}^{k-1} A^j\ (\nabla A)\ A^{k-j-1}$, also

$$\begin{aligned}
\|\nabla \exp_{m,n}(A)\|_{L^2} &= \|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\nabla(A^k)}{k!}\| \\
&\leq \|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{|A|^{k-1}\ |\nabla A| \cdot k}{k!}\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\|A\|_{L^\infty}^{k-1}}{(k-1)!}\|\nabla A\|_{L^2} \\
&\leq C\|\nabla A\|_{L^2} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(C\|A\|_{W^{2,2}})^k}{k!},
\end{aligned}$$

und somit haben wir auch hier eine Konvergenz in L^2 von $\nabla \exp_n(A)$.

<u>Wohldefiniertheit von (8.3)</u>
<u>Es gilt für $k \geq 2$</u>

$$\left|\partial_{ij} A^k\right| \leq k(k-1)\ |\partial_i A|\ |\partial_j A||A|^{k-2} + |\partial_{ij} A||A|^{k-1} k,$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
\|\partial_{ij} \exp_{m,n}(A)\|_{L^2} &\leq \|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\left|\partial_{ij}(A^k)\right|}{k!}\|_{L^2} \\
&\leq \|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{|A|^{k-1}\ |\partial_{ij} A| \cdot k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|A|^{k-2}\ |\partial_i A|\ |\partial_j A|\ k(k-1)}{k!}\|_{L^2} \\
&\leq \|\partial_{ij} A\|_{L^2} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\|A\|_{L^\infty}^{k}}{k!} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\|A\|_{L^\infty}^{k-2}\ k(k-1)}{k!}\ \|\nabla A\|_{L^4}^2
\end{aligned}$$

und somit

$$\|\partial_{ij} \exp_{m,n}(A)\|_{L^2} \leq C(\|\nabla^2 A\|_{L^2} + \|A\|_{W^{2,2}}^2) \sum_{k=m-1}^{n} \frac{(C\|A\|_{W^{2,2}})^k}{k!}.$$

Somit haben wir auch hier eine Konvergenz in L^2 gezeigt.

<u>Wohldefiniertheit von (8.4)</u>

$$\begin{aligned}
\|\exp'_{m,n}(A)[h]\|_{L^2(D^2)} &= \|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\{A^{k-1}, h\}}{k!}\|_{L^2} \\
&\leq C \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\|A\|_{L^\infty}^{k-1}\|h\|_{L^\infty} \cdot k}{k!} \\
&\leq C \sum_{k=m+1}^{n} \frac{(C\|A\|_{W^{2,2}})^{k-1}}{(k-1)!}\|h\|_{W^{2,2}} \\
&\leq C\|h\|_{W^{2,2}}\ \exp_{m,n}(C\|A\|_{W^{2,2}}),
\end{aligned} \tag{8.7}$$

und es folgt die Konvergenz.

<u>Wohldefiniertheit von (8.5)</u>

$$\begin{aligned}
\|\nabla \exp'_{m,n}(A)[h]\|_{L^2(D^2)} &= \|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\nabla\{A^{k-1}, h\}}{k!}\|_{L^2} \\
&\leq \|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{|A|^{k-1}|\nabla h| k + |A|^{k-2}|\nabla A||h|(k-1) \cdot k}{k!}\|_{L^2} \\
&\leq C(\|\nabla h\|_{L^2} + \|\nabla A\|_{L^2}\ \|h\|_{L^\infty}) \exp_{m-1,n}(C\|A\|_{W^{2,2}}),
\end{aligned} \tag{8.8}$$

und wieder erhalten wir Konvergenz.

Wohldefiniertheit von (8.6)

$$\begin{aligned}
&\|\partial_{ij}\exp'_{m,n}(A)[h]\|_{L^2(D^2)} = \|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial_{ij}\{A^{k-1},h\}}{k!}\|_{L^2}\\
&\leq \|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{|\partial_{ij}A||h||A|^{k-2}(k-1)k+|\partial_i A||\partial_j A||h||A|^{k-3}\ (k-1)(k-2)\cdot k}{k!}\\
&\quad+\frac{|\partial_i A||\partial_j h||A|^{k-2}(k-1)\cdot k+|\partial_j A||\partial_i h||A|^{k-2}(k-1)\cdot k}{k!}+\frac{|A|^{k-1}|\partial_{ij}h|k}{k!}\|_{L^2}\\
&\leq C(\|\nabla^2 A\|_{L^2}\ \|h\|_{L^\infty}+\|\nabla A\|_{L^4}^2\|h\|_{L^\infty}+\|\nabla A\|_{L^4}\|\nabla h\|_{L^4}+\|\nabla^2 h\|_{L^2})\ \exp_{m-2,n}(C\|A\|_{W^{2,2}}),
\end{aligned} \tag{8.9}$$

was wieder Konvergenz impliziert.

Schritt 2:
Wir wissen, dass $\nabla\exp_n(A)$ und $\partial_{ij}\exp_n(A)$ tatsächlich die schwachen Ableitungen von $\exp_n(A)$ sind. Weiterhin konvergieren $\exp_n(A)$, $\nabla\exp_n(A)$ und $\partial_{ij}\exp_n(A)$ jeweils in $L^2(D^2,M(m))$. Also ist $\exp_n(A)$ eine Cauchy-Folge in $W^{2,2}(D^2,M(m))$. Es folgt, dass $\exp(A)\in W^{2,2}(D^2,M(m))$ und dass $\nabla\exp(A)$ und $\partial_{ij}\exp(A)$ tatsächlich die schwachen Ableitungen von $\exp(A)$ sind.
Durch analoge Schlüsse erhalten wir, dass auch $\exp'(A)[h]\in W^{2,2}(D^2,M(m))$ und dass $\nabla\exp'(A)[h]$ und $\partial_{ij}\exp'(A)[h]$ die schwachen Ableitungen von $\exp'(A)[h]$ sind.
Schritt 3:
Nun müssen wir noch zeigen, dass der Differenzenquotient in $W^{2,2}$ konvergiert:
Zunächst beachten wir, dass $\exp'(A)[h]$ linear in h ist, und aus den Rechnungen zur Wohldefiniertheit von (8.7), (8.8) und (8.9) in Schritt 1 folgt, dass

$$\|\exp'(A)[h]\|_{W^{2,2}}\leq C(A)\|h\|_{W^{2,2}}.$$

Also ist $\exp'(A)[\cdot]\in L(W^{2,2}(D^2,M(m)))$.
Wir behaupten also $\mathbf{d}\exp_A[h]=\exp'(A)[h]$. Um dies zu zeigen wird es wieder reichen, nur für endliche Partialsummen die Konvergenz des Differenzenquotienten zu zeigen, da

$$\|\exp(A+h)-\exp(A)-\exp'(A)[h]\|_{W^{2,2}}\leq C\|h\|_{W^{2,2}}^2$$

aus

$$\|\exp_n(A+h)-\exp_n(A)-\exp'_n(A)[h]\|_{W^{2,2}}\leq C(A)\|h\|_{W^{2,2}}^2\quad\text{für alle } \|h\|_{W^{2,2}}\leq 1 \text{ und für alle } n$$

folgt und das letztere in Gleichung (8.11) gezeigt wird.

Sei I die Einheitsmatrix in $M(m)$. Zunächst sehen wir, dass gilt

$$\begin{aligned}
\exp_n(A+h)-\exp_n(A)-\exp'_n(A)[h] &= I-I+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(A+h)^k-A^k-\{A^{k-1},h\}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=0}^{k}\{A^j,h^{k-j}\}-A^k-\{A^{k-1},h\}\right]\\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=0}^{k-2}\{A^j,h^{k-j}\}\right].
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Wir beobachten, dass die Potenz von h in jedem Summanden auf der rechten Seite der obigen Ungleichung mindestens 2 ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\exp_n(A+h)-\exp_n(A)-\exp'_n(A)[h]| &\leq |h|^2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=0}^{k-2}|A|^j|h|^{k-j-2}\binom{k}{j}\right]\\
&\leq |h|^2\sum_{k=2}^{n}(|A|+|h|)^{k-2}\frac{1}{(k-2)!},
\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}\binom{k}{j}\frac{1}{k!} &= \frac{k!}{k!}\,\frac{(k-2)!}{(k-2-j)!j!}\,\frac{(k-2-j)!}{(k-j)!}\,\frac{1}{(k-2)!}\\ &\leq \binom{k-2}{j}\frac{1}{(k-2)!}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\|\exp_n(A+h)-\exp_n(A)-\exp'_n(A)[h]\|_{L^2}\leq C\|h\|^2_{W^{2,2}}\ \exp(C(\|A\|_{W^{2,2}}+\|h\|_{W^{2,2}})).$$

Nun <u>die erste Ableitung</u>:

$$|\nabla(\exp_n(A+h)-\exp_n(A)-\exp'_n(A)[h])|\overset{(8.10)}{=}\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=0}^{k-2}\nabla\{A^j,h^{k-j}\}\right]\right|\leq$$

$$\begin{aligned}&\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{k-2}|h|^2|\nabla A||A|^{j-1}|h|^{k-j-2}\cdot j\cdot\binom{k}{j}+\sum_{j=0}^{k-2}|\nabla h||h||A|^j|h|^{k-j-2}\cdot(k-j)\cdot\binom{k}{j}\right]\\
&=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left[|h|^2|\nabla A|\sum_{j=0}^{k-3}|A|^j|h|^{k-j-3}\cdot(j+1)\cdot\binom{k}{j+1}+|\nabla h||h|\sum_{j=0}^{k-2}|A|^j|h|^{k-j-2}\cdot(k-j)\cdot\binom{k}{j}\right]\\
&\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left[|h|^2|\nabla A|\sum_{j=0}^{k-3}|A|^j|h|^{k-j-3}\binom{k-3}{j}\frac{k!}{(k-3)!}+|\nabla h||h|\sum_{j=0}^{k-2}|A|^j|h|^{k-j-2}\binom{k-2}{j}\frac{k!}{(k-2)!}\right]\\
&\leq|h|^2|\nabla A|\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-3)!}(|A|+|h|)^{k-3}+|\nabla h||h|\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}(|A|+|h|)^{k-2}\\
&\leq C(|h|^2|\nabla A|+|\nabla h||h|)\ \exp(C(\|A\|_{W^{2,2}}+\|h\|_{W^{2,2}})),\end{aligned}$$

und somit folgt

$$\begin{aligned}&\|\nabla(\exp_n(A+h)-\exp_n(A)-\exp'_n(A)[h])\|_{L^2}\\
&\leq C(\|h\|^2_{W^{2,2}}\|\nabla A\|_{L^2}+\|\nabla h\|_{L^2}\|h\|_{L^\infty})\exp(C(\|A\|_{W^{2,2}}+\|h\|_{W^{2,2}}))\\
&\leq C\|h\|^2_{W^{2,2}}(1+\|A\|_{W^{1,2}})\exp(C(\|A\|_{W^{2,2}}+\|h\|_{W^{2,2}})).\end{aligned}$$

Nun <u>die zweite Ableitung</u>:

$$|\partial_{ij}(\exp_n(A+h)-\exp_n(A)-\exp'_n(A)[h])|\overset{(8.10)}{=}\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=0}^{k-2}\partial_{ij}\{A^j,h^{k-j}\}\right]\right|$$

$$\begin{aligned}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\Bigg[&\sum_{j=1}^{k-2}|\partial_{ij}A||A|^{j-1}|h|^{k-j}j\binom{k}{j}\\
&+\sum_{j=0}^{k-2}|A|^j|h|^{k-j-1}|\partial_{ij}h|(k-j)\binom{k}{j}\\
&+2\sum_{j=2}^{k-2}|\nabla A|^2|A|^{j-2}|h|^{k-j}\ j(j-1)\ \binom{k}{j}\\
&+2\sum_{j=0}^{k-2}|\nabla h|^2|A|^j|h|^{k-2-j}\ (k-j)(k-j-1)\ \binom{k}{j}\\
&+2\sum_{j=1}^{k-2}|\nabla h||\nabla A||A|^{j-1}|h|^{k-1-j}j\cdot(k-j)\cdot\binom{k}{j}\Bigg]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \quad \Big[|\partial_{ij} A||h|^2 (|A| + |h|)^{k-3} \\
&\qquad + |\partial_{ij} h||h|(|A| + |h|)^{k-2} \\
&\qquad + |\nabla A|^2 |h|^2 (|A| + |h|)^{k-4} \\
&\qquad + |\nabla h|^2 (|A| + |h|)^{k-2} \\
&\qquad + |\nabla h||\nabla A||h|(|A| + |h|)^{k-3} \Big] \\
&\leq C(|\partial_{ij} A||h|^2 + |\partial_{ij} h||h| + |\nabla A|^2 |h|^2 + |\nabla h|^2 + |\nabla h||\nabla A||h|) \ \exp(|A| + |h|).
\end{aligned}
$$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
\|\partial_{ij} (\exp_n(A + h) - \exp_n(A) \quad &- \quad {\exp'}_n(A)[h])\|_{L^2} \\
&\leq \quad C\|h\|^2_{W^{2,2}} (1 + \|A\|_{W^{2,2}} + \|A\|^2_{W^{2,2}}) \exp(C(\|A\|_{W^{2,2}} + \|h\|_{W^{2,2}})).
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir also für $\|h\|_{W^{2,2}} \leq 1$

$$
\|\exp_n(A + h) - \exp_n(A) - {\exp'}_n(A)[h]\|_{W^{2,2}} \leq C\|h\|^2_{W^{2,2}} C(A) \exp(C(A) + C)) \quad \text{für alle } n \geq 1. \tag{8.11}
$$

Damit folgt auch

$$
\left\| \frac{\exp(A + h) - \exp(A)}{\|h\|_{W^{2,2}}} - \exp'(A) \left[\frac{h}{\|h\|_{W^{2,2}}} \right] \right\|_{W^{2,2}} \leq C\|h\|_{W^{2,2}} \ C(A)
$$

Damit ist also $\exp'(A)[\cdot]$ tatsächlich die Ableitung von exp() und exp ist somit differenzierbar.

Um $\exp \in C^1$ zu zeigen, benötigen wir nur noch, dass $\exp'(A)$ stetig von A abhängig ist:
Sei dazu $B \in W^{2,2}$, $\|B\|_{W^{2,2}}$ klein.
Dann gilt für alle $\|h\|_{W^{2,2}} \leq 1$

$$
\begin{aligned}
{\exp'}_n(A)[h] - {\exp'}_n(A + B)[h] &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\{A^{k-1}, h\} - \{(A + B)^{k-1}, h\} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\{A^{k-1}, h\} - \sum_{j=0}^{k-1} \{A^j, B^{k-1-j}, h\} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\{A^{k-1}, h\} - \{A^{k-1}, h\} - \sum_{j=0}^{k-2} \{A^j, B^{k-1-j}, h\} \right) \\
&= -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{k-2} \{A^j, B^{k-1-j}, h\} \right).
\end{aligned}
$$

Wieder beobachten wir, dass in jedem Summanden auf der rechten Seite der obigen Gleichung B mindestens zur Potenz 1 vorkommt. Völlig analog zu oben rechnen wir dann

$$
\|{\exp'}_n(A)[h] - {\exp'}_n(A + B)[h]\|_{W^{2,2}} \leq C\|B\|_{W^{2,2}} \|h\|_{W^{2,2}} C(A),
$$

und somit gilt auch

$$
\|\exp'(A) - \exp'(A + B)\|_{L(W^{2,2})} \leq C\|B\|C(A).
$$

Also ist $\exp'(\cdot)$ stetig als Abbildung $W^{2,2}(D^2, M(m)) \to L(W^{2,2}(D^2, M(m)))$.
Damit haben wir gezeigt, dass $\exp \in C^1(W^{2,2}(D^2, M(m)))$. □

Nun möchten wir zeigen, dass Randwerte in gewisser Weise unter der Exponentialfunktion erhalten bleiben:

8.10 Proposition (exp-Regularität und Randwerte)
Sei $U \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m))$. Dann ist auch $e^U \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m))$.
Ist $U \in W^{2,2} \cap W^{1,2}_0(D^2, M(m))$, so ist $e^U - I \in W^{2,2} \cap W^{1,2}_0(D^2, M(m))$.

Beweis. $W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2)$ ist abgeschlossen (nach Lemma 4.11). Wegen der $W^{2,2}$-Konvergenz der Partialsummen $\exp_n$ nach exp reicht es also zu zeigen, dass

$$\exp_n U = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} U^k \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m)) \quad \text{für } U \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m)).$$

Also reicht es $U^k \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m))$ zu zeigen, was aus Lemma 4.29 folgt.

Sei $U \in W^{2,2} \cap W^{1,2}_0(D^2)$. Dann ist U stetig und somit ist $U(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \partial D^2$. Daraus folgt, dass $\exp(U(\xi)) = I$ für alle $\xi \in \partial D^2$ und damit gilt

$$\exp(U) - I \in W^{1,2}_0(D^2, M(m)),$$

da $W^{2,2}(D^2) \hookrightarrow C^0(\overline{D^2})$. □

8.11 Definition ($M(m) \otimes \mathbb{R}^k$)
Wir definieren $M(m)\otimes\mathbb{R}^k := \{(A^j_i)_{1\le i,j\le m} \mid A^j_i \in \mathbb{R}^k\}$. Für $A, B \in M(m)\otimes\mathbb{R}^k$ definieren wir das Skalarprodukt

$$AB \equiv A \cdot B \equiv \langle A, B\rangle := (\langle A^j_i, B^j_i\rangle_{\mathbb{R}^k})_{ij}.$$

Für $A \in M(m)$ und $B \in M(m) \otimes \mathbb{R}^k$ definieren wir das Matrixprodukt

$$AB := (A^k_i B^j_k)_{ij} \quad \text{und} \quad BA := (B^k_i A^j_k)_{ij} \in M(m) \otimes \mathbb{R}^k.$$

Für $A \in M(m) \otimes \mathbb{R}^k$ sei zudem

$$A^T := (A^j_i)_{ji}.$$

Weiterhin fassen wir für $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ den Operator ∇ als Abbildung von $W^{1,2}(\Omega, M(m))$ nach $L^2(\Omega, M(m) \otimes \mathbb{R}^k)$ auf:

$$\nabla A := (\nabla A^j_i)_{ij}, \quad A \in W^{1,2}(\Omega, M(m)).$$

Schließlich verstehen wir den Operator div als Abbildung von $W^{1,2}(\Omega, M(m) \otimes \mathbb{R}^k)$ nach $L^2(\Omega, M(m))$:

$$\operatorname{div} A := (\operatorname{div} A^j_i)_{ij} \quad A \in W^{1,2}(\Omega, M(m) \otimes \mathbb{R}^k),$$

auf.

8.12 Bemerkung
Man macht sich leicht klar, dass $(A \cdot B)^T = (B^T \cdot A^T)$ für alle $A, B \in M(m) \otimes \mathbb{R}^k$.

8.13 Lemma (so(m) → so(m))
Für $U \in W^{2,2}(D^2, so(m))$, $B \in W^{2,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ gilt punktweise fast überall

$$e^{-U(x)}\nabla e^{U(x)} - e^{-U(x)}B(x)e^{U(x)} \in so(m) \otimes \mathbb{R}^2 \quad \text{für alle } x \in D^2.$$

Insbesondere gilt

$$\operatorname{div}(e^{-U(x)}\nabla e^{U(x)} - e^{-U(x)}B(x)e^{U(x)}) \in so(m).$$

Weiter gilt $e^U \in O(m)$ punktweise[27] *in D^2.*

Beweis. Es gilt punktweise in D^2, dass $e^{-U}e^U = I$. (Da U und $-U$ punktweise kommutieren gilt $e^{-U}e^{+U} = e^{-U+U} = e^0 = I$).
Somit gilt komponentenweise (wir beachten: e^U und e^{-U} in $W^{2,2}(D^2, M(m))$)

$$0 = \nabla I = \nabla(e^{-U}e^U) = \nabla e^{-U}\ e^U + e^{-U}\ \nabla e^U. \tag{8.12}$$

[27] Tatsächlich gilt sogar, dass $exp(so(m)) \subset SO(m)$. Vgl. zum Beispiel [Boo86], Example 8.6.

Andererseits gilt für $U(x) \in so(m)$, $x \in D^2$

$$e^{-U} = \lim_n \sum_{k=1}^n (-U)^k \frac{1}{k!} = \lim_n \sum_{k=1}^n (U^T)^k \frac{1}{k!} = \lim_n \sum_{k=1}^n (U^k)^T \frac{1}{k!} = (e^U)^T \quad \text{an der Stelle } x. \tag{8.13}$$

Wir beachten, dass ∇ komponentenweise wirkt und somit mit $()^T$ kommutiert und kombinieren

$$(e^{-U}\nabla e^U)^T = \nabla(e^U)^T\ (e^{-U})^T = \nabla e^{-U}\ e^U \overset{(8.12)}{=} -e^{-U}\ \nabla e^U,$$

somit gilt $e^{-U}\nabla e^U \in so(m) \otimes \mathbb{R}^2$.
Weiter gilt auch

$$(e^{-U}Be^U)^T \overset{(8.13)}{=} e^{-U}B^T e^U = -e^{-U}Be^U \quad \text{für alle } B \in so(m) \otimes \mathbb{R}^2.$$

Da die Divergenz komponentenweise auf die $\mathbb{R}^2$-Einträge in den $so(m)$-Matrizen wirkt, folgt

$$\operatorname{div}(e^{-U}\nabla e^U - e^{-U}Be^U) \in so(m);$$

aus (8.13) erhält man zudem $e^U \in O(m)$. □

8.14 Lemma (Neumann-Reihe)
Seien $m, n > 0$. Es existiert ein $\gamma \equiv \gamma(m) > 0$, $\gamma < 1$, so dass für alle $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $A \in W^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, M(m))$ mit

$$\|A\|_{L^\infty(\Omega)} < \gamma$$

und

$$B := I - A,$$

folgendes gilt: $B \in W^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, GL(m))$ und

$$B^{-1} = \sum_{k=0}^\infty A^k$$

in $W^{1,2} \cap L^\infty$ konvergiert, d.h. $\|B^{-1} - \sum_{k=0}^n A^k\|_{L^\infty} + \|B^{-1} - \sum_{k=0}^n A^k\|_{W^{1,2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und

$$B^{-1} \in W^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, GL(m))$$

mit

$$\|B^{-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|B^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(\Omega, m)\frac{1}{\gamma - \|A\|_{L^\infty(\Omega)}}.$$

Beweis. Wir definieren[28]

$$S_n := \sum_{k=0}^n A^k \in W^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, M(m))$$

und

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n A^k.$$

Dann ist

$$\nabla(S_n - S_m) = \sum_{k=m+1}^n \nabla A^k.$$

Nun ist die $\|\cdot\|_{L^\infty}$-Norm von einer Matrix über die euklidische $\mathbb{R}^{m\times m}$-Norm $|\cdot|$ definiert, d.h.

$$\|A\|_{L^\infty(\Omega, M(m))} = \sup_{x\in\Omega} |A(x)|.$$

[28] Sei $f \in W^{1,2} \cap L^\infty$ und $g \in W^{1,2} \cap L^\infty$, dann ist $f \cdot g \in W^{1,2} \cap L^\infty$, wie man sich leicht über Approximation klar macht.

Diese euklidische Norm ist äquivalent zur Operatornorm $|\cdot|_O$, d.h. es existieren $C_1 \equiv C_1(m)$ und $C_2 \equiv C_2(m)$, so dass $|A| \leq C_1|A|_O$ und $|A|_O \leq C_2|A|$. Für die Operatornorm gilt $\left|A^k\right|_O \leq |A|_O^k$. Also gilt $\left|A^k\right| \leq C_1\left|A^k\right|_O \leq C_1|A|_O^k \leq C_1(C_2|A|)^k$. Wir wählen also $\gamma > 0$ so klein, dass $C_2\gamma < 1$. Dann gilt

$$\|S_n - S_m\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} \leq C_1 \sum_{k=m+1}^{n} (C_2\|A\|_{L^\infty(\Omega,M(m))})^k \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

da $(C_1\|A\|_{L^\infty(\Omega,M(m))}) < 1$.
Wegen $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ folgt daraus

$$\|S_n - S_m\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

und daher existiert ein Limes in $L^2 \cap L^\infty(\Omega, M(m))$.
Für die Ableitung gilt

$$\|\nabla S_n - \nabla S_m\|_{L^2} \leq C_1 \sum_{k=m+1}^{n} k(C_2\|A\|_{L^\infty})^{k-1}\|\nabla A\|_{L^2}.$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1} < \infty$$

existiert für $0 < s = C_2\|A\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} < 1$ (ist $s = 0$, also $A = 0$, so ist $B = B^{-1} = I$). Dies folgt aus dem Quotientenkriterium für Reihen, da

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{(k+1)s^k}{ks^{k-1}} = \limsup_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) s = s < 1.$$

Also gilt

$$\|\nabla(S_n - S_m)\|_{L^2} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

und somit ist $(S_n)_n$ eine CAUCHY-Folge in $W^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, M(m))$.
Also existiert

$$B^{-1} := \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad \text{in } W^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, M(m)).$$

Nun ist noch zu zeigen, dass punktweise fast überall $B^{-1}B = BB^{-1} = I$. Dies folgt, da

$$\begin{aligned}
\|S_nB - I\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} &= \|\sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} - I\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} \\
&= \|\sum_{k=1}^{n} A^k - \sum_{k=1}^{n+1} A^k\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} \\
&= \|S_n - S_{n+1}\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\|B^{-1}B - I\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} \leq \|S_nB - I\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} + C\|(B^{-1} - S_n)\|_{L^\infty(\Omega,M(m))}\ \|B\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $B^{-1}B = I$ punktweise fast überall in Ω. Analog zeigt man $B \cdot B^{-1} = I$ und es gilt folglich

$$B \in W^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, GL(m)),$$

sowie

$$B^{-1} \in W^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, GL(m)).$$

Nun zur Abschätzung:
Es gilt punktweise fast überall

$$\begin{aligned}
1 &= |I|_O \\
&= \left|BB^{-1}\right|_O \\
&= \left|(I-A)B^{-1}\right|_O \\
&= \left|B^{-1} - AB^{-1}\right|_O \\
&\geq \left|B^{-1}\right|_O - |A|_O \left|B^{-1}\right|_O \\
&= (1 - |A|_O)\left|B^{-1}\right|_O
\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\left|B^{-1}\right|_O \leq \frac{1}{1-|A|_O} \leq \frac{1}{1 - C_2\|A\|_{L^\infty(\Omega,M(m))}} = \frac{\gamma}{\gamma - \gamma C_2\|A\|_{L^\infty(\Omega,M(m))}} \leq \frac{1}{\gamma - \|A\|_{L^\infty(\Omega,M(m))}},$$

also

$$\|B^{-1}\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} \leq C_1(m)\frac{1}{\gamma - \|A\|_{L^\infty(\Omega,M(m))}}.$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\|B^{-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|B^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega)\|B^{-1}\|_{L^\infty(\Omega,M(m))} \leq C(\Omega,m)\frac{1}{\gamma - \|A\|_{L^\infty(\Omega,M(m))}},$$

und damit ist dieses Lemma bewiesen. □

Teil II.
Erhaltungssätze und Regularitätstheorie nach Rivière

In diesem Teil wollen wir zeigen, dass eine Lösung $u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ von

$$\triangle u = \Omega \cdot \nabla u \quad \text{auf } D^2 \tag{8.14}$$

für ein $\Omega \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ stetig ist.
Ein erster Versuch, dies zu zeigen wäre zum Beispiel die lineare HODGE-Zerlegung auf Ω anzuwenden:

$$\Omega = \nabla \tilde{P} + \nabla^{\perp} \tilde{\xi} \quad \text{in } D^2$$

für $\tilde{P}$, $\tilde{\xi} \in W^{1,2}_{loc}(D^2, M(m))$. Eingesetzt in (8.14) ergibt dies

$$\triangle u = \nabla \tilde{P} \cdot \nabla u + \nabla^{\perp} \tilde{\xi} \cdot \nabla u.$$

Der Term $\nabla^{\perp} \tilde{\xi} \cdot \nabla u$ ist nach Theorem 6.14 in $\mathscr{H}^1_{loc}(D^2)$. Wäre die gesamte rechte Seite in $\mathscr{H}^1_{loc}(D^2)$, so würde aus Theorem 6.23 und Theorem 6.27 die Stetigkeit von u folgen. Der Term $\nabla \tilde{P} \cdot \nabla u$ besitzt allerdings keine Struktur, welche die Zugehörigkeit zu $\mathscr{H}^1_{loc}(D^2)$ implizieren würde.
Eine der Hauptideen in [Riv07a] ist nun, anstatt einer linearen HODGE-Zerlegung eine nicht-lineare Zerlegung aus der nichtabelschen Gauge-Theorie zu verwenden. Wir werden im folgenden Abschnitt diese Zerlegung gemäß den Ausführungen in [Riv07a] herleiten, ohne auf die tieferen Hintergründe und Interpretationen dieser Theorie einzugehen.

9. Nicht-lineare Hodge-Zerlegung

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen (vgl. [Riv07a], Lemmata A.3, A.4), dass für alle $\Omega \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit $\|\Omega\|_{L^2(D^2)}$ klein genug ein $\xi \in W^{1,2}_0(D^2, so(m))$ und ein $P \in W^{1,2}(D^2, O(m))$ existiert, so dass

$$\nabla^{\perp} \xi = P^T \nabla P + P^T \Omega P \quad \text{in } D^2. \tag{9.1}$$

Der Vorteil dieser Zerlegung ist, dass P orthogonal und somit a priori gleichmäßig in $L^{\infty}(D^2, M(m))$ abgeschätzt ist. Zum Beweis dieser Darstellung reicht es, eine entsprechende Aussage mit geeigneten Abschätzungen für $\Omega \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit kleiner L^2-Norm zu zeigen, da sich diese durch ein Kompaktheitsargument (Lemma 9.9) auf den ursprünglichen Fall erweitern lässt.
Zum Beweis der Aussage für $\Omega \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ benutzen wir in Lemma 9.8 eine Kontinuitätsmethode. Dazu betrachten wir die Menge aller $\tilde{\Omega}$ mit einer Darstellung wie in 9.1 und geeigneten Abschätzungen. Für die Offenheit werden wir zunächst mit einer Methode von UHLENBECK ([Uhl82], Lemmata 2.7, 2.8) zeigen, dass es für alle $\xi \in W^{2,2} \cap W^{1,2}_0(D^2, so(m))$ mit $\|\nabla \xi\|_{L^2}$ hinreichend klein eine stetige Abbildung $\lambda \mapsto Q_\lambda \in O(m)$ gibt, so dass

$$\operatorname{div}(Q_\lambda^T\ \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T(\nabla^{\perp}\xi + \lambda)Q_\lambda) = 0 \quad \text{für alle } \lambda \in W^{1,2}(D^2, so(m)) \text{ mit } \|\lambda\|_{W^{1,2}} \ll 1. \tag{9.2}$$

Dies beweisen wir zunächst mithilfe des Satzes über implizite Funktionen unter einer zusätzlichen Bedingung an λ (Lemma 9.2; in [Uhl82] Lemma 2.7), welche wir durch Anwendung des Theorem von AGMON, DOUGLIS und NIRENBERG, Theorem 9.5, wegtransformieren können (Theorem 9.6; in [Uhl82] Lemma 2.8).
Aus (9.2) folgt mit linearer HODGE-Zerlegung die Existenz einer Stammfunktion $\Gamma_\lambda \in W^{2,2} \cap W^{1,2}_0(D^2, so(m))$ (stetig abhängig von λ), so dass

$$\nabla^{\perp}\Gamma_\lambda = Q_\lambda^T\ \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T(\nabla^{\perp}\xi + \lambda)Q_\lambda. \tag{9.3}$$

Fixieren wir ein Ω, ξ und P, so dass die Darstellung (9.1) erfüllt ist, so erhalten wir aus (9.1) und (9.3) für alle kleinen $\lambda \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$

$$\nabla^{\perp}\Gamma_\lambda = (PQ_\lambda)^T\ \nabla(PQ_\lambda) + (PQ_\lambda)^T(\Omega + P\lambda P^T)(PQ_\lambda).$$

Durch Setzung von $\lambda := P^T \zeta P$ ergibt sich dann für alle hinreichend kleinen $\zeta \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ die Darstellung

$$\nabla^\perp \xi_\zeta = R_\zeta^T \nabla R + R_\zeta^T (\Omega + \zeta) R_\zeta$$

für $\xi_\zeta \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m))$ und $R_\zeta \in W^{2,2}(D^2, O(m))$.

Zunächst wenden wir uns dem Beweis von (9.2) zu. Um in Lemma 9.2 den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können, benötigen wir die Nichtdegeneriertheit des Operators $\psi \mapsto \triangle\psi + \left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right]$, welche wir im folgenden Lemma zeigen:

9.1 Lemma (Isomorphie eines Operators)
Sei X der Raum der $W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}$-Abbildungen auf D^2 mit $\int \cdot = 0$ und Bild in den schiefsymmetrischen Matrizen der Dimension $m \times m$, d.h.

$$X := \left\{ U \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2, so(m)) \mid \int_{D^2} U = 0 \right\}$$

und Y der Raum der L^2-Abbildungen auf D^2 mit Bild in den schiefsymmetrischen Matrizen und $\int \cdot = 0$, d.h.

$$Y := \left\{ f \in L^2(D^2, so(m)) \mid \int_{D^2} f = 0 \right\}.$$

Dabei ist das Integral über Matrizen oder Vektoren komponentenweise aufzufassen. Für

$$\xi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m))$$

definieren wir den Operator H_ξ

$$H_\xi(\psi) := \triangle\psi + \left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right],$$

wobei $\left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right] := \nabla^\perp\xi \cdot \nabla\psi - \nabla\psi \cdot \nabla^\perp\xi$ die Lie-Klammer *ist.*
Dann existiert ein $\gamma = \gamma(m)$[29], so dass für alle $\xi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m))$ mit

$$\|\nabla\xi\|_{L^2(D^2)} \le \gamma$$

der Operator H_ξ ein Isomorphismus als Abbildung $H_\xi : X \to Y$ ist.

Beweis. Wir setzen der Einfachheit halber $H \equiv H_\xi$. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

- Zuerst müssen wir zeigen, dass $\underline{H \text{ von } X \text{ nach } Y}$ abbildet.

  - H ist wohldefiniert auf $W^{2,2}(D^2, M(m))$, also auch auf X und $H(\psi) \in L^2(D^2, M(m))$.

  - Für $\psi \in X$ gilt $H(\psi) \in so(m)$ punktweise fast überall. Denn wenn wir beachten, dass ψ, $\xi \in so(m)$ punktweise fast überall in D^2, dann haben wir (vgl. Bemerkung 8.12)

    $$(\nabla^\perp\xi \cdot \nabla\psi)^T = \nabla\psi^T \nabla^\perp\xi^T = \nabla\psi \cdot \nabla^\perp\xi$$

    und somit

    $$\left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right]^T = -\left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right].$$

    Weiter gilt punktweise fast überall in D^2

    $$(\triangle\psi)^T = \triangle\psi^T = -\triangle\psi,$$

    da $\triangle$ auf Matrizen komponentenweise wirkt.
    Zusammengesetzt ergibt sich also punktweise fast überall

    $$H(\psi)^T = \triangle\psi^T + \left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right]^T = -(\triangle\psi + \left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right]) = -H(\psi).$$

[29] Der Beweis bleibt gültig, wenn wir sowohl in X als auch in Y als Bildraum $M(m)$ statt $so(m)$ fordern; für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \ge 2$ lässt sich eine analoge Aussage erhalten, wenn wir statt $W^{2,2}$ den Raum $W^{2,p}$ mit $p > \frac{n}{2}$ wählen; dass der sozusagen „kritische“ Fall $n = 2$, $p = 2$ funktioniert, verdanken wir der Wente-Ungleichung.

– Es bleibt zu zeigen, dass $\int_{D^2} H(\psi) = 0$.
Wegen $\psi \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2, M(m))$ gilt nach Proposition 4.22(*iii*) komponentenweise

$$\int_{D^2} \triangle\psi = 0,$$

und wegen $\xi \in W^{1,2}_0(D^2, M(m))$, $\psi \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ gilt

$$\int_{D^2} \nabla^\perp \xi_i^j \cdot \nabla \psi_k^l = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i,j,k,l \leq m,$$

und somit

$$\int_{D^2} \nabla^\perp \xi \cdot \nabla \psi = 0$$

und

$$\int_{D^2} \nabla \psi \cdot \nabla^\perp \xi = 0.$$

Also gilt $H(\psi) \in Y$ für alle $\psi \in X$.

- H ist offensichtlich linear auf dem Raum $W^{2,2}(D^2, M(m))$, also auch auf X.
- H ist beschränkt:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\|H(\psi)\|_{L^2} &\leq \|\triangle\psi\|_{L^2} + \|\left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right]\|_{L^2} \\
&\leq \|\psi\|_{W^{2,2}} + 2\|\nabla\xi\|_{L^4}\ \|\nabla\psi\|_{L^4} \\
&\leq \|\psi\|_{W^{2,2}} + 2\|\xi\|_{W^{1,4}}\ \|\psi\|_{W^{1,4}} \\
&\leq \|\psi\|_{W^{2,2}} + C(m)\|\xi\|_{W^{2,2}}\ \|\psi\|_{W^{2,2}} \\
&= C(m)\ \|\psi\|_{W^{2,2}},
\end{aligned}$$

denn mit der SOBOLEV-Einbettung gilt wegen $2 - \frac{2}{2} = 1 \geq 1 - \frac{2}{4}$ komponentenweise, dass $W^{2,2}(D^2)$ stetig in $W^{1,4}(D^2)$ einbettet.
Somit ist H ein beschränkter linearer Operator von $W^{2,2}(D^2, M(m))$ nach $L^2(D^2, M(m))$, und folglich insbesondere auch ein beschränkter Operator von X nach Y.

- H ist injektiv:
Wegen der Linearität von H ist es genau dann injektiv, wenn aus $H(\psi) = 0$ sofort $\psi = 0$ folgt.
Sei also $\psi \in X$ mit $H(\psi) = 0$, d.h.

$$H(\psi) = \triangle\psi + \left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right] = 0. \tag{9.4}$$

Insbesondere folgt dann wegen $\psi \in X \subset W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2, M(m))$

$$\int_{D^2} \nabla\psi \cdot \nabla\varphi \overset{W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}}{=} -\int_{D^2} \triangle\psi\ \varphi \overset{(9.4)}{=} \int_{D^2} \left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right]\ \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{D^2}).$$

Komponentenweise besteht der Term $\left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right]$ aus Summen mit Summanden der Form $\nabla^\perp a \cdot \nabla b = \{a, b\}$ für ein $a \in W^{1,2}_0(D^2)$ und $b \in W^{1,2}(D^2)$. Außerdem gilt nach Definition von X, dass komponentenweise $\int_{D^2} \psi = 0$. Damit lässt sich (9.4) komponentenweise auch in folgender Weise darstellen:

$$\begin{cases}
\triangle\psi_i^j = \left(\sum_{k=1}^m \{a_k, b_k\}\right)_{ij} & \text{in } D^2, \\
\frac{\partial}{\partial\nu}\psi_i^j = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\
\int_{D^2} \psi_i^j = 0.
\end{cases}$$

Aus der WENTE-Ungleichung, Theorem 7.1 folgt

$$\|\nabla\psi\|_{L^2} \leq C(m)\|\nabla\xi\|_{L^2}\ \|\nabla\psi\|_{L^2}.$$

Wir setzen $\gamma := \frac{1}{2C(m)}$. Erfüllt ξ die Abschätzung

$$\|\nabla\xi\|_{L^2} \leq \gamma,$$

dann folgt

$$\|\nabla\psi\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_{L^2},$$

also

$$\|\nabla\psi\|_{L^2} = 0$$

und somit $\psi \equiv C$ auf D^2, und aus $\int_{D^2}\psi = 0$ folgt dann

$$\psi \equiv 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $H(\psi) = 0$ genau dann, wenn $\psi = 0$ und somit ist H wegen der Linearität auch injektiv.

- H ist surjektiv:
  Dieser Teil folgt in mehreren Schritten:

  - Zunächst rechnen wir in $M(m)$ statt in $so(m)$.

    * Unser Ziel ist die Anwendung der Fredholm-Alternative, Lemma 3.8. Dazu definieren wir den Operator $K(\psi) \equiv K_\xi(\psi) := \triangle^{-1}\left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right]$, $K : W^{2,2}(D^2, M(m)) \to W^{2,2}(D^2, M(m))$. Ist K ein kompakter Operator im Hilbert-Raum $W^{2,2}(D^2, M(m))$ und $I - K$ injektiv, so folgt mit der Fredholm-Alternative, dass $I - K$ surjektiv ist. Definieren wir für ein $f \in L^2$ die Sobolevfunktion $w := \triangle^{-1}f$, so existiert genau ein $\psi \equiv \psi_f$, so dass

      $$\psi - K\psi = w.$$

      Durch Anwendung des Laplace-Operators ergibt sich daraus

      $$\triangle\psi - \triangle K(\psi) = \triangle w = f.$$

      Dies impliziert die Surjektivität von H.

    * Um zu zeigen, dass K kompakt ist, nähern wir es durch Operatoren $K^n \equiv K_{\xi^n}$, $K^n(\psi) := \triangle^{-1}\left[\nabla^\perp\xi^n, \nabla\psi\right]$ an, wobei ξ^n die Approximation von ξ in C^∞ mit Nullrandwerten ist. (Wir beachten, dass wir nur dadurch, dass wir ξ^n mit Nullrandwerten wählen können die Garantie haben, dass $\int_{D^2}\left[\nabla^\perp\xi^n, \nabla\psi\right] \overset{P.4.22(ii)}{=} 0$, und somit die Existenz von K_n gesichert ist, siehe Lemma 4.14.)
    * Wir müssen also zeigen, dass die Operatoren K_n tatsächlich kompakt sind und
    * dann, dass $K_n \xrightarrow{n\to\infty} K$ als Operator, woraus die Kompaktheit von K folgt.
  - Dann übertragen wir dieses Ergebnis auf $so(m)$-Matrizen.

Wir rechnen zunächst also (nur der Übersicht halber) in $M(m)$ statt $so(m)$.
Sei $\xi_n \in C^\infty(\overline{D^2}, M(m)) \cap W_0^{1,2}(D^2)$, so dass $\xi_n \xrightarrow{n\to\infty} \xi$ in $W^{2,2}(D^2)$ und $\|\xi_n\|_{W^{2,2}} \leq 2\|\xi\|_{W^{2,2}}$. Die Existenz solcher ξ_n folgt dabei aus Lemma 4.24.
Wir definieren für $\psi \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2, M(m))$, $\int_{D^2}\psi = 0$ die Operatoren K_n und K durch

$$\begin{cases} \triangle K(\psi) = -\left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right] & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial K(\psi)}{\partial\nu} = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} K(\psi) = 0 \end{cases} \tag{9.5}$$

mit $K(\psi) \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2, M(m))$, sowie

$$\begin{cases} \triangle K_n(\psi) = -\left[\nabla^\perp\xi_n, \nabla\psi\right] & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial K_n(\psi)}{\partial\nu} = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} K_n(\psi) = 0 \end{cases} \tag{9.6}$$

mit $K_n(\psi) \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m))$.
Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösung $v := K(\psi) \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m))$ erhalten wir aus Lemma 4.14, unter Beachtung dass $\xi, \psi \in W^{2,2} \hookrightarrow W^{1,4}$, also

$$\big[\nabla^\perp \xi, \nabla\psi\big] \in L^2(D^2, M(m)),$$

wegen $\int_{D^2}[\nabla^\perp \xi, \nabla\psi] \overset{P.4.22}{=} 0$ und dem Friedrichs-Theorem 4.19. Analog erhalten wir auch Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von $v_n := K_n(\psi)$, da wir mit den Nullrandwerten von ξ_n mit Proposition 4.22 garantieren können, dass

$$\int_{D^2} \big[\nabla^\perp \xi_n, \nabla\psi\big].$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen v bzw. v_n sind K und K_n auch linear, da

$$\triangle K(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = -\lambda_1\big[\nabla^\perp\xi, \psi_1\big] - \lambda_2\big[\nabla^\perp\xi, \psi_2\big] = \lambda_1 \triangle K(\psi_1) + \lambda_2 \triangle K(\psi_2).$$

Weiter sind K und K_n auch stetig, denn nach dem Satz von Friedrichs, dann mit der Poincaré-Ungleichung, der Wente-Ungleichung und der Einbettung $W^{2,2} \hookrightarrow W^{1,4}$ in zwei Dimensionen gilt

$$\begin{aligned}
\|K(\psi)\|_{W^{2,2}} = \|v\|_{W^{2,2}} &\overset{T.4.19}{\leq} C(\|\triangle v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) \\
&\overset{(9.5)}{\leq} C(\|\big[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\big]\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2}) \\
&\overset{T.7.1}{\leq} C(\|\nabla\xi\|_{L^4}\ \|\nabla\psi\|_{L^4} + \|\nabla\xi\|_{L^2}\ \|\nabla\psi\|_{L^2}) \\
&\leq C\|\xi\|_{W^{2,2}}\ \|\psi\|_{W^{2,2}}.
\end{aligned}$$

Analoges schließn wir für K_n.

Unser Ziel ist es zu beweisen, dass K kompakt ist. Wir zeigen dazu zunächst, dass K_n kompakt ist:
Seien $\psi_k \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m))$ mit $\|\psi_k\|_{W^{2,2}} \leq C$. Wegen der schwachen Folgenkompaktheit des Hilbert-Raums $W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m))$ und dem Satz von Rellich kann man eine Teilfolge von $(\psi_k)_k$ wählen (wieder mit ψ_k beschriftet) und ein $\psi_0 \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m))$ finden,so dass

$$\psi_k \rightharpoonup \psi_0 \quad \text{in } W^{2,2}_{\text{Neu}},$$

$$\psi_k \xrightarrow{k\to\infty} \psi_0 \quad \text{in } W^{1,2}.$$

Mit dem Satz von Friedrichs für homogene Neumannranddaten, Theorem 4.19, der Anwendung der Poincaré-Ungleichung und anschließend der Wente-Ungleichung auf

$$\triangle(K^n(\psi_k) - K^n(\psi_0)) = -\big[\nabla^\perp\xi^n, \nabla(\psi_k - \psi_0)\big]$$

folgt dann

$$\begin{aligned}
\|K_n(\psi_k) - K_n(\psi_0)\|_{W^{2,2}} &\overset{T.4.19}{\leq} C(\|\triangle(K_n(\psi_k) - K_n(\psi_0))\|_{L^2} + \|K_n(\psi_k) - K_n(\psi_0)\|_{L^2}) \\
&\overset{\substack{L.4.1\\T.7.1}}{\leq} C(\|\big[\nabla^\perp\xi^n, \nabla(\psi_k - \psi_0)\big]\|_{L^2} + \|\nabla(\psi_k - \psi_0)\|_{L^2}\ \|\nabla\xi^n\|_{L^2}) \\
&\leq C(\|\nabla^\perp\xi^n\|_{L^\infty}\ \|\nabla(\psi_k - \psi_0)\|_{L^2} + \|\nabla(\psi_k - \psi_0)\|_{L^2}\ \|\nabla\xi^n\|_{L^2}) \\
&\leq C(\|\nabla\xi^n\|_{L^\infty} + \|\nabla\xi^n\|_{L^2})\ \|\psi_k - \psi_0\|_{W^{1,2}} \\
&\xrightarrow{k\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

wegen der starken Konvergenz von ψ_k in $W^{1,2}$.
Wir haben somit gezeigt, dass

$$K_n(\psi_k) \xrightarrow{k\to\infty} K_n(\psi_0) \quad \text{in } W^{2,2},$$

für eine Teilfolge $k \to \infty$.
Also ist K_n ein kompakter Operator von $Z := \{f \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m)) \mid \int_{D^2} f = 0\}$ in sich selbst.

Nun zeigen wir noch, dass $\underline{K_n \xrightarrow{n\to\infty} K}$ als Operator.
Wir beachten dazu, dass

$$\begin{cases} \triangle(K_n(\psi) - K(\psi)) = -\left[\nabla^\perp(\xi^n - \xi), \nabla\psi\right] & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial\nu}(K_n(\psi) - K(\psi)) = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} K_n(\psi) - K(\psi) = 0. \end{cases}$$

Somit gilt wieder mit dem Satz von Friedrichs, der Poincaré-Ungleichung, der Wente-Ungleichung und der Einbettung $W^{2,2} \hookrightarrow W^{1,4}$

$$\begin{aligned} \|K_n(\psi) - K(\psi)\|_{W^{2,2}} &\overset{T4.19}{\leq} C(\|\triangle(K_n - K)\|_{L^2} + \|K_n - K\|_{L^2}) \\ &\overset{L4.1}{\leq} C(\|\left[\nabla^\perp(\xi^n - \xi), \nabla\psi\right]\|_{L^2} + \|\nabla(K_n - K)\|_{L^2}) \\ &\overset{T.7.1}{\leq} C\|\xi^n - \xi\|_{W^{2,2}}\ \|\psi\|_{W^{2,2}}. \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass in der Operatornorm

$$\|K_n - K\|_{L(Z)} \leq C\|\xi^n - \xi\|_{W^{2,2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also

$$K_n \xrightarrow{n\to\infty} K \quad \text{in } L(Z).$$

Da die Operatoren K_n kompakt sind, folgt dann, dass auch $\underline{K \text{ kompakt}}$ ist[30].
Nun zeigen wir noch, dass für alle $\|\nabla\xi\|_{L^2} \leq \gamma$ gilt, dass $\underline{I - K \text{ injektiv}}$ ist:
Dazu nehmen wir an, dass für ein $\psi \in Z$ gilt

$$(I - K)(\psi) = 0,$$

somit

$$\triangle\psi - \triangle K(\psi) = 0,$$

also

$$\begin{cases} \triangle\psi = -\left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right] & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial\nu}\psi = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2}\psi = 0. \end{cases}$$

Dies bedeutet aber, dass $H(\psi) = 0$ und wegen der Injektivität von H, dass $\psi = 0$. Somit ist $I - K$ injektiv.

Mit der Fredholm-Alternative, Lemma 3.8, folgt nun, dass

$$\text{Im}(I - K) = Z,$$

also existiert für jedes $w \in Z$ genau ein $\psi \in Z$ mit

$$\psi - K(\psi) = w,$$

[30]Seien X, Y Banach-Räume, $(T_k)_k \subset L(X,Y)$ kompakte Operatoren, $T \in L(X,Y)$ und $\lim_{k\to\infty} \|T_k - T\|_{L(X,Y)} = 0$. Sei $(x_n)_n \subset X$ und $\|x_n\|_X \leq C$ für alle n. Wir setzen $(x_n^0)_n := (x_n)_n$ und wählen für alle k eine Teilfolge von $(x_n^k)_n$, so dass $(T_k(x_n^k))_n$ konvergiert. Sei $(\tilde{x}_n)_n := (x_n^n)_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|T(\tilde{x}_n) - T(\tilde{x}_{n'})\|_Y &\leq \|T(\tilde{x}_n) - T_k(\tilde{x}_n)\|_Y + \|T_k(\tilde{x}_n) - T_k(\tilde{x}_{n'})\|_Y + \|T_k(\tilde{x}_{n'}) - T(\tilde{x}_{n'})\|_Y \\ &\leq 2\|T - T_k\|_{L(X,Y)}\ C + \|T_k(\tilde{x}_n) - T_k(\tilde{x}_{n'})\|_Y. \end{aligned}$$

Wir wählen zunächst k genügend groß, so dass $2\|T - T_k\|_{L(X,Y)}\ C < \frac{\varepsilon}{2}$ ist und anschließend n_0 so groß, dass für alle n, $n' \geq n_0$ gilt $\|T_k(\tilde{x}_n) - T_k(\tilde{x}_{n'})\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$. So erhalten wir $\|T(\tilde{x}_n) - T(\tilde{x}_{n'})\|_Y < \varepsilon$ für alle n, $n' \geq n_0$.

also insbesondere

$$H(\psi) = \triangle\psi + \left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right] = \triangle w.$$

Wählen wir für ein beliebiges $f \in L^2(D^2, M(m))$ mit $\int_{D^2} f = 0$ ein zugehöriges $w \equiv w_f \in Z$, so dass

$$\begin{cases} \triangle w = f & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} w = 0, \end{cases} \tag{9.7}$$

so haben wir die Surjektivität von H (bezüglich $M(m)$-Matrizen) gezeigt. Für die Lösbarkeit von (9.7) benutzen wir dabei Lemma 4.14 und Theorem 4.19.

Es verbleibt, dieses Resultat auf $so(m)$-wertige Funktionen zu reduzieren:

Überführen auf $so(m)$

Sei $f \in L^2(D^2, so(m))$, d.h. $f^T + f = 0$ punktweise fast überall in D^2.
Dann gilt für die Lösung $\psi \in Z$ von $H(\psi) = f$ die folgende Gleichung (wir beachten: $(AB)^T = B^T A^T$)

$$\triangle\psi^T + \nabla\psi^T \cdot \nabla^\perp\xi^T - \nabla^\perp\xi^T \cdot \nabla\psi^T = f^T = -f = -\triangle\psi - \nabla^\perp\xi \cdot \nabla\psi + \nabla\psi \cdot \nabla^\perp\xi.$$

Mit $\xi^T = -\xi$ folgt dann

$$\triangle(\psi^T + \psi) + \nabla^\perp\xi \cdot \nabla(\psi^T + \psi) - \nabla(\psi^T + \psi)\ \nabla^\perp\xi = 0,$$

das heißt

$$H(\psi^T + \psi) = \triangle(\psi^T + \psi) + \left[\nabla^\perp\xi, \nabla(\psi^T + \psi)\right] = 0.$$

Wegen der Injektivität von H folgt dann

$$\psi^T + \psi = 0,$$

also

$$\psi = -\psi^T,$$

und somit $\psi \in so(m)$ punktweise fast überall.

Also ist $H \in L(X, Y)$ ein linearer, beschränkter, bijektiver Operator.
Nun sind X und Y Banach-Räume:

- Y ist ein Banach-Raum da $L^2(D^2, M(m))$ ein Banach-Raum ist und die Identitäten $\int_{D^2} f_n = 0$ und $(f_n)^T + f_n = 0$ unter L^2-Konvergenz erhalten bleiben.

- X ist ein Banach-Raum, da $W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, M(m))$ ein Banach-Raum ist, und die Identitäten $\int_{D^2} U_n = 0$ und $(U_n)^T + U_n = 0$ unter $W^{2,2}$-Konvergenz punktweise fast überall erhalten bleiben.

Dann gilt nach dem Satz von Banach über die Beschränktheit der Umkehrabbildung, Satz 3.7, dass H^{-1} beschränkt ist, d.h. H ist ein Isomorphismus von X nach Y. □

Nun sind wir fast in der Lage ein sogenanntes lokales Coulomb-Gauge zu konstruieren, so dass Darstellung (9.3) erfüllt wird, indem wir zeigen, dass für alle kleinen λ ein schiefsymmetrisches U_λ existiert, so dass

$$\operatorname{div}(e^{-U_\lambda}\ \nabla e^{U_\lambda} + e^{-U_\lambda}(\nabla^\perp\xi + \lambda)e^{U_\lambda}) = 0. \tag{9.8}$$

Um Lemma 9.1 für den impliziten Funktionensatz zu benutzen (dort wurde gezeigt, dass die Linearisierung in U der linken Seite von (9.8) unter gewissen Voraussetzungen ein Isomorphismus ist), benötigen wir, dass das Integral über die linke Seite von (9.8) Null ist (was wiederum nötig war, um im Beweis von Lemma 9.1 aus $\|\nabla\psi\|_{L^2} = 0$ zu schließen, dass $\psi = 0$). Dazu muss folgendes garantiert werden:

$$\int_{D^2} \operatorname{div}(e^{-U}\lambda e^U) = 0.$$

Dies folgt aus dem Gaussschen Integralsatz, Lemma 4.5, Fall (β), wenn $\langle\nu, \lambda\rangle$ am Rand von D^2 schwach gleich Null ist, wobei ν die Einheitsnormale an ∂D^2 sei. Mit dieser zusätzlichen Voraussetzung an λ erhalten wir das folgende

9.2 Lemma (Anwendung des Satzes über implizite Funktionen)
(vgl. [Uhl82], Lemma 2.7, S. 37)
Sei

$$F := W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2, so(m)) \cap \{U : \int_{D^2} U = 0\},$$

$$\tilde{E} := W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2) \cap \{\lambda : \langle \nu, \lambda \rangle \in W^{1,2}_0(D^2, M(m))\}$$

und

$$G := L^2(D^2, so(m)) \cap \{f : \int_{D^2} f = 0\}.$$

Dabei sei ν *die äußere Einheitsnormale an* ∂D^2, $\nu = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
Wir definieren die Abbildung T_ξ

$$T_\xi : F \times \tilde{E} \to G$$

durch

$$T_\xi(U, \lambda) := \operatorname{div}(e^{-U} \nabla e^U + e^{-U}(\nabla^\perp \xi + \lambda) e^U)$$

für ein festes $\xi \in W^{2,2} \cap W^{1,2}_0(D^2, so(m))$.
Dann existiert ein $\gamma > 0$*, so dass falls* $\|\nabla \xi\|_{L^2(D^2)} < \gamma$ *ein* $\alpha \equiv \alpha(\xi) > 0$ *und eine* C^1*-Abbildung* $\Psi_\xi \equiv \Psi$ *existiert,*

$$\Psi : \tilde{E} \cap \{\lambda : \|\lambda\|_{W^{1,2}} < \alpha\} \to F,$$

mit $\Psi(0) = 0$ *und so dass*

$$T_\xi(\Psi(\lambda), \lambda) = 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \tilde{E},\ \|\lambda\|_{W^{1,2}} < \alpha.$$

Insbesondere existiert für jedes $\beta > 0$ *ein* $\alpha(\beta, \xi) > 0$*, so dass für alle* $\|\lambda\|_{W^{1,2}} < \alpha$

$$T_\xi(\Psi(\lambda), \lambda) = 0$$

und

$$\|e^{\Psi(\lambda)} - I\|_{W^{2,2}} \leq \beta, \quad \|e^{-\Psi(\lambda)} - I\|_{W^{2,2}} \leq \beta.$$

9.3 Bemerkung
Man macht sich klar, dass $e^{-\Psi} \nabla e^{\Psi} + e^{-\Psi}(\nabla^\perp \xi + \lambda) e^{\Psi} \in so(m)$ *punktweise fast überall in* D^2*, was auch direkt aus Lemma 8.13 folgt.*

Beweis von Lemma 9.2 Wir setzen im folgenden $T \equiv T_\xi$ und wählen $\gamma > 0$ aus Lemma 9.1. T ist als Multiplikation (siehe Lemma 8.5) bzw. Verknüpfung von den C^1-Funktionen exp (Lemma 8.9), div, ∇ (beides Bemerkung 8.2) selbst wieder eine C^1-Abbildung. Weiter gilt:

- Es gilt

$$\int_{D^2} T(U, \lambda) = 0:$$

  Mit der schwachen Version des GAUSS'schen Integrationssatz, Lemma 4.5, Fall (β), ist nämlich

$$\int_{D^2} \operatorname{div}(e^{-U} \lambda e^u) = \int_{D^2} e^{-U} \lambda e^U \ (\nabla 1) = 0,$$

  da $\langle \nu, \lambda \rangle \in W^{1,2}_0(D^2, M(m))$ (vgl. Definition 8.11).
  Weiterhin gilt nach Proposition 4.23 (ii), dass

$$\int_{D^2} \operatorname{div}(e^{-U} \nabla^\perp \xi e^U) = 0.$$

  Und schließlich folgt aus Proposition 4.23(i) und Proposition 8.10

$$\int_{D^2} \operatorname{div}(e^{-U} \nabla e^U) = 0$$

  für $U \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}$.

- Nach Lemma 8.13 gilt zudem
$$T(U,\lambda) \in so(m).$$

- Weiter gilt
$$T(U,\lambda) \in L^2(D^2, M(m)),$$
denn $e^{\pm U}$ ist nach Lemma 8.9 in $W^{2,2}$, somit ist ∇e^U in $W^{1,2}$, also folgt aus Lemma 4.30
$$e^{-U}\nabla e^U \in W^{1,2}(D^2, M(m)).$$
Weiter gilt, dass
$$\nabla^\perp \xi + \lambda \in W^{1,2}(D^2, M(m)\otimes \mathbb{R}^2),$$
und wieder mit Lemma 4.30 folgt dann wegen $e^{\pm U} \in W^{2,2}(D^2, M(m))$
$$e^{-U}(\nabla^\perp \xi + \lambda)e^U \in W^{1,2}(D^2, M(m)\otimes \mathbb{R}^2).$$

Also gilt
$$T(U,\lambda) \in G, \quad \text{für alle } U \in F \text{ und } \lambda \in \tilde{E}.$$

Weiter haben wir $T(0,0) = 0$.
Dann folgt aus Lemma 8.4 , dass
$$\mathbf{d}T_{0,0}[\psi] \overset{L8.4}{=} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} T(t\psi, 0) = H(\psi), \quad \psi \in F$$
für das $H(\psi)$ aus Lemma 9.1: Für die letzte Gleichung berechnen wir zunächst mit Kettenregel, Proposition 8.3,
$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{t\psi} \overset{P.8.3}{=} \mathbf{d}\exp_0[\psi] \overset{L8.9}{=} \psi + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\{0^{k-1}, \psi\} = \psi.$$
Also gilt (wir beachten, dass für lineare Abbildungen S nach Kettenregel gilt $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} S = S \frac{d}{dt}\big|_{t=0}$)
$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (e^{-t\psi}\ \nabla e^{t\psi}) = (e^{-t\psi}\psi\nabla e^{t\psi})_{t=0} + \nabla\psi = \nabla\psi$$
und
$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (e^{-t\psi}(\nabla^\perp\xi)e^{t\psi}) = (e^{-t\psi}(-\psi)\nabla^\perp\xi e^{t\psi} + e^{-t\psi}\nabla^\perp\xi e^{t\psi}\psi)_{t=0} = \left[\nabla^\perp\xi, \psi\right].$$
Daraus erhalten wir
$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} T(t\psi, 0) = \operatorname{div}(\nabla\psi + \left[\nabla^\perp\xi, \psi\right]) = \triangle\psi + \left[\nabla^\perp\xi, \nabla\psi\right] = H(\psi),$$
da $\operatorname{div}\nabla^\perp\xi = 0$.
Weiter gilt, dass F, $\tilde{E}$, G Banach-Räume sind, da $\int_{D^2} \cdot = 0$ und $\langle\nu, \cdot\rangle \in W_0^{1,2}$ unter $W^{1,2}$-Konvergenz erhalten bleibt.
H ist nach Lemma 9.1 ein Isomorphismus von F nach G, wenn $\|\nabla^\perp\xi\|_{L^2(D^2)} < \gamma$, für das γ aus Lemma 9.1.Damit existiert nach dem Satz über implizite Funktionen, Theorem 3.5, ein $\tilde{\alpha} > 0$, so dass genau ein $\Psi : \tilde{E} \cap \{\|\lambda\|_{W^{1,2}(D^2)} < \alpha\} \to F$ existiert mit
$$T(\Psi(\lambda), \lambda) = 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \tilde{E} \text{ mit } \|\lambda\| < \tilde{\alpha}.$$

Zudem ist Ψ eine C^1-Abbildung. Aus der Eindeutigkeit von Ψ und der Tatsache $T(0,0) = 0$ folgt $\Psi(0) = 0$.
Wegen der Stetigkeit von $U \mapsto e^U$ in $W^{2,2}$ und der Stetigkeit von Ψ gilt
$$\|e^{\Psi(\lambda)} - I\|_{W^{2,2}} = \|e^{\Psi(\lambda)} - e^{\Psi(0)}\|_{W^{2,2}} < \beta \quad \text{für alle } \lambda \in \tilde{E} \text{ mit } \|\lambda\|_{W^{1,2}} < \alpha$$
für ein $\alpha \equiv \alpha(\beta, \xi) > 0$. □

9.4 Bemerkung
Angenommen wir fordern in Lemma 9.2 für $\tilde{E}$ nur $M(m)$ statt $so(m)$. Dann müssen wir auch in G alle Matrizen zulassen, also in Lemma 9.1 auch Y und somit X mit $M(m)$ definieren. Daraus folgt, dass wir in Lemma 9.1 auch F mit $M(m)$ definieren müssen. Dann ist allerdings $e^F \not\subset O(m)$, was es für unsere Anwendung uninteressant macht.

Das Ergebnis von Lemma 9.2 wollen wir für alle $\lambda \in W^{1,2}$ erhalten, ohne die Einschränkung $\langle \nu, \lambda \rangle \in W_0^{1,2}$. Dazu benötigen wir zunächst das folgende

9.5 Theorem (Agmon, Douglis, Nirenberg)
(vgl. [Uhl82], Lemma 2.6, S. 36; [Weh04] Theorem 3.4, Seite 45)
Es existiert ein stetiger linearer Operator P,

$$P : W^{1,2}(D^2) \to W^{2,2}(D^2) \cap W_0^{1,2}(D^2), \tag{9.9}$$

so dass für alle $f \in W^{1,2}(D^2)$ gilt

$$\langle \cdot, \nabla(Pf)(\cdot) \rangle - f(\cdot) \in W_0^{1,2}(D^2). \tag{9.10}$$

Beweis. Da auf D^2 die Einheitsnormale $\nu = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ist, bedeutet die Gleichung (9.10) gerade, dass schwach

$$\frac{\partial}{\partial \nu} Pf = f \quad \text{auf } D^2.$$

Wir führen den Beweis in mehreren Schritten, in denen wir die zu beweisende Aussage stückweise reduzieren:

(*i*) Angenommen, es existiert ein stetiger linearer Operator $\tilde{P} : C^\infty(\overline{D^2}) \cap W^{1,2}(D^2) \to W_0^{1,2}(D^2) \cap W^{2,2}(D^2)$ mit (9.10).
Da $C^\infty(\overline{D^2}) \cap W^{1,2}(D^2)$ dicht in $W^{1,2}(D^2)$ liegt (wir beachten: $\partial D^2 \in C^\infty$) und $\tilde{P}$ linear und stetig ist, existiert eine eindeutige, stetige und lineare Fortsetzung von $\tilde{P}$ auf $W^{1,2}$ (da $W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$ mit der $W^{2,2}$-Norm ein Banach-Raum ist), welche wir mit P bezeichnen.
Es verbleibt noch, den Neumannrandwert (9.10) zu zeigen.
Wir approximieren dazu f durch $f_m \in C^\infty(\overline{D^2})$ in $W^{1,2}$, und beobachten dann

$$\begin{aligned}
\|\langle \nu, \nabla(\tilde{P} f_m) \rangle - f_m - \langle \nu, \nabla(Pf) \rangle + f\|_{W^{1,2}} &\leq \|f_m - f\|_{W^{1,2}} + \|\langle \nu, \nabla(P(f_m - f)) \rangle\|_{W^{1,2}} \\
&\leq \|f_m - f\|_{W^{1,2}} + C\|\nabla P(f_m - f)\|_{W^{1,2}} \\
&\leq \|f_m - f\|_{W^{1,2}} + C\|P(f_m - f)\|_{W^{2,2}} \\
&\leq \|f_m - f\|_{W^{1,2}} + C\|P\|_{L(W^{1,2})} \; \|(f_m - f)\|_{W^{1,2}} \\
&\xrightarrow{m \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

Wegen $\langle \nu, \nabla(Pf_m) - f_m \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ und der $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$-Abgeschlossenheit von $W_0^{1,2}$ folgt also

$$\langle \nu, \nabla(Pf) - f \rangle \in W_0^{1,2}(D^2).$$

Somit erfüllt unser fortgesetztes P die Forderung (9.10). Es reicht also, nur noch $f \in C^\infty(\overline{D^2})$ zu betrachten.

(*ii*) Angenommen es existiert ein $\tilde{P}$ wie oben, allerdings nur für $f \in C^\infty(\overline{D^2})$ mit $f \equiv 0$ auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$.
Wir wählen dann ein $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, so dass $\eta \equiv 1$ auf $B_{\frac{5}{4}}(0) \backslash B_{\frac{3}{4}}(0)$ und $\eta \equiv 0$ auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$.
Für jedes $g \in C^\infty(\overline{D^2})$ definieren wir

$$f := g\eta.$$

Dann gilt $f \in C^\infty(\overline{D^2})$, $f \equiv 0$ auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$.
Wir definieren nun

$$Pg := \tilde{P} f.$$

Dann ist P linear, da $\tilde{P}$ linear ist, und es gilt, dass $Pg \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$.
Weiter hat man
$$\|Pg\|_{W^{2,2}(D^2)} = \|\tilde{P}f\|_{W^{2,2}(D^2)} \leq C\|f\|_{W^{1,2}(D^2)} \leq \tilde{C}\|g\|_{W^{1,2}(D^2)}.$$
Bleibt noch zu zeigen, dass
$$\langle \nu, \nabla(Pg)\rangle - g \in W_0^{1,2}(D^2).$$
Zunächst gilt
$$\langle \nu, \nabla(\tilde{P}f)\rangle - f \in W_0^{1,2}(D^2)$$
und
$$\begin{aligned}\langle \nu, \nabla(Pg)\rangle - g &= \langle \nu, \nabla(\tilde{P}f)\rangle - \eta g + (\eta - 1)g \\ &= \langle \nu, \nabla(\tilde{P}f)\rangle - f + (\eta - 1)g.\end{aligned}$$
Nun gilt
$$\langle \nu, \nabla(\tilde{P}f)\rangle - f \in W_0^{1,2}(D^2)$$
und
$$(\eta - 1) \equiv 0 \quad \text{um } \partial D^2.$$
also gilt wegen $g \in C^\infty(\overline{D^2})$, dass
$$(\eta - 1)g \in W_0^{1,2}(D^2),$$
da es starke Nullrandwerte hat und stetig ist.
Daraus erhalten wir
$$\langle \nu, \nabla(Pg)\rangle - g \in W_0^{1,2}(D^2),$$
und P erfüllt somit die Anforderung (9.10).
Es reicht also, P nur für Funktionen f zu finden, die in $C^\infty(\overline{D^2})$ liegen und die auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$ konstant Null sind. Auf solche f werden wir Polarkoordinaten anwenden.

- Angenommen es existiert ein $\tilde{P}$, und zwei Konstanten $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, so dass für alle $g \in C^\infty([0,1] \times [0, 2\pi])$ mit
$$g(r, \theta) = 0 \quad \text{für alle } (r, \theta) \in \{(r,\theta) \mid r \geq \tfrac{3}{4}\} \cup \{(r,\theta) \mid \theta < \theta_1\} \cup \{(r,\theta) \mid \theta > \theta_2\},$$
folgende Eigenschaften gelten, welche wir in Zukunft mit ($\mathfrak{P}$) bezeichnen:
  - $\tilde{P}g \in C^2([0,1] \times [0, 2\pi])$,
  - $\tilde{P}g(0,\theta) \equiv 0$ für alle $\theta \in [0, 2\pi]$,
  - $\partial_r \tilde{P}g(0,\theta) = g(0,\theta)$ für alle $\theta \in [0, 2\pi]$ und
  - $\tilde{P}$ ist linear und
$$\|\tilde{P}g\|_{W^{2,2}([0,1]\times[0,2\pi])} \leq C\|g\|_{W^{1,2}([0,1]\times[0,2\pi])}. \tag{9.11}$$

Dann führen wir das gewünschte P mittels Polarkoordinaten auf dieses $\tilde{P}$ zurück:

Wir wählen eine endliche, offene Überdeckung $(U_j)_{j=1}^m$, $m \in \mathbb{N}$, von ∂D^2, so dass
$$U_j \cap B_{\frac{1}{4}}(0) = \emptyset, \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, m$$
und so dass ein $c_j \in [0, 2\pi)$ existiert, so dass Φ_j definiert als
$$\Phi_j(r,\theta) := [(1-r)\cos(\theta + c_j), (1-r)\sin(\theta + c_j)] \tag{9.12}$$
die Eigenschaft hat, dass
$$\Phi_j^{-1}(U_j \cap \overline{D^2}) \subseteq [0, \frac{3}{4}) \times (\theta_1, \theta_2).$$
Wir definieren dann U_0 als $B_\varepsilon(D^2 \setminus \bigcup_j U_j)$ für ein kleines ε (also den ggf. noch nichtüberdeckten Teil von D^2). Wir wählen eine Zerlegung der Eins (vgl. Lemma 3.9), also $\sqrt{\eta_j}$, $\eta_j \in C_0^\infty(U_j \cap \overline{D^2})$, $0 \leq j \leq m$, mit

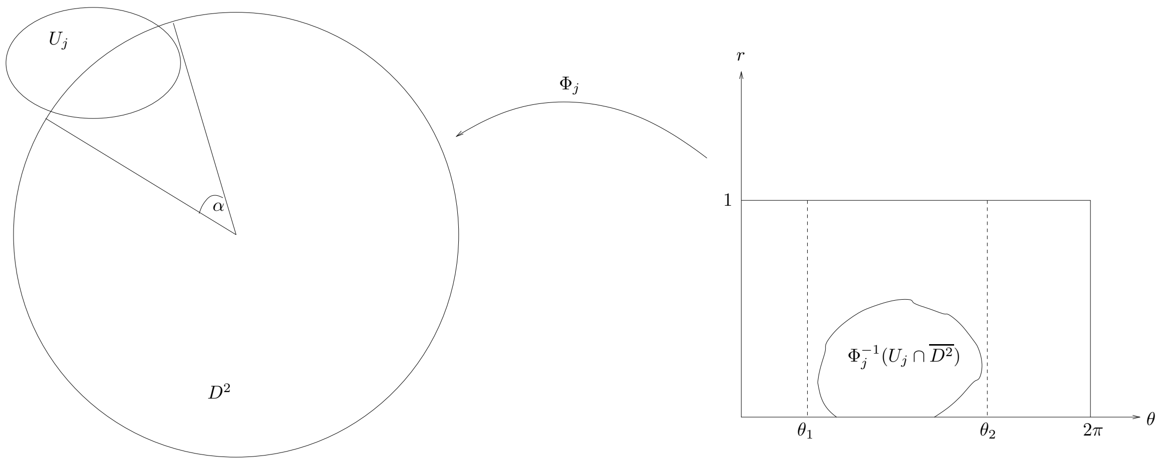

Abbildung 9.1: Wir wählen U_j so klein, dass $|\alpha| < |\theta_1 - \theta_2|$.

$0 \leq \eta_j \leq 1$ und $\sum_{j=1}^m \eta_j \equiv 0$ in $\overline{D^2}$.
Für ein $f \in C^\infty(\overline{D^2})$ mit $\operatorname{supp}(f) \cap B_{\frac{1}{2}}(0) = \emptyset$ definieren wir

$$f_j := f\sqrt{\eta_j} \in C^\infty(U_j \cap \overline{D^2}), \quad 0 \leq j \leq m. \tag{9.13}$$

Mit der Definition von Φ_j aus (9.12) erhalten wir, dass Φ_j ein C^∞-Diffeomorphismus zwischen $\Phi_j^{-1}(\overline{U_j \cap D^2})$ und $\overline{U_j \cap D^2}$ ist, da

$$(r, \theta) \notin \Phi_j^{-1}(\overline{U_j \cap D^2}) \quad \text{für alle } r \geq \tfrac{3}{4},\ \theta \in [0, 2\pi],$$

da $U_j \cap B_{\frac{1}{4}}(0) = \emptyset$ (Wir beachten dazu, dass $(r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$ nicht injektiv ist für $r = 0$).
Wir definieren weiter

$$v_j := f_j \circ \Phi_j \in C^\infty(\Phi_j^{-1}(\overline{U_j \cap D^2})) \cap C_0^\infty([0, \frac{3}{4}) \times (\theta_1, \theta_2)) \tag{9.14}$$

wegen der Abschneidefunktion η_j und der Voraussetzung, dass $f \equiv 0$ auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$, wobei wir v_j durch 0 auf $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ fortsetzen, also

$$v_j \in C^\infty([0, 1] \times [0, 2\pi]).$$

Somit ist v_j im Definitionsbereich von $\tilde{P}$, also gilt

$$\tilde{P}v_j \in C^2([0, 1] \times [0, 2\pi]),$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{P}v_j(0, \theta) &\equiv 0, \\ \partial_r \tilde{P}v_j(0, \theta) &= v_j(0, \theta) \quad \text{für } \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Weiter gilt, da Φ_j auf $\Phi_j^{-1}(\overline{U_j \cap D^2})$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist,

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}v_j\|_{W^{2,2}([0,1]\times[0,2\pi])} &\overset{(9.11)}{\leq} C\|v_j\|_{W^{1,2}([0,1]\times[0,2\pi])} \\ &\overset{(9.14)}{\leq} C\|f_j\|_{W^{1,2}(U_j\cap D^2)} \\ &\overset{(9.13)}{=} C\|\sqrt{\eta_j}f\|_{W^{1,2}(U_j\cap D^2)} \\ &\leq C\|\sqrt{\eta_j}f\|_{W^{1,2}(D^2)} \\ &\leq C(\eta_j)\|f\|_{W^{1,2}(D^2)}. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Nun definieren wir Pf durch

$$\begin{aligned} Pf \quad &:= -\sum_{j=1}^{m} \left(\tilde{P}[(\sqrt{\eta_j}\cdot f)\circ\Phi_j]\right)\Big|_{\Phi_j^{-1}(\overline{U_j\cap D^2})} \circ \Phi_j^{-1}\big|_{\overline{U_j\cap D^2}} \ \sqrt{\eta_j} \\ &= \qquad -\sum_{j=1}^{m}(\tilde{P}v_j)\circ\Phi_j^{-1}\ \sqrt{\eta_j}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Dann gilt wegen $\sqrt{\eta_j}\in C^\infty$, Φ_j auf den jeweiligen Mengen C^∞-Diffeomorphismus, also $(\tilde{P}v_j)\circ\Phi_j^{-1}\in C^2(U_j\cap\overline{D^2})$ und $\sqrt{\eta_j}\in C_0^\infty(U_j\cap\overline{D^2})$, dass $Pf\in C^2(\overline{D^2})$.
Weiter folgt dann punktweise, dass

$$Pf|_{\partial D^2}=0,$$

da $\Phi_j^{-1}(\partial D^2\cap U_j)\subseteq\{r=0\}\times[0,2\pi]$. Zudem gilt

$$\begin{aligned} \langle\nu,\nabla(Pf)\rangle|_{\partial D^2} &= -\sum_j\langle\nu,\nabla\sqrt{\eta_j}\rangle\,\underbrace{(\tilde{P}v_j)\Big|_{\{r=0\}\times[0,2\pi]}}_{=0}\circ\Phi_j^{-1}-\sum_j\sqrt{\eta_j}\langle\nu,\nabla((\tilde{P}v_j)\circ\Phi_j^{-1})\rangle\Big|_{\partial D^2} \\ &= -\sum_j\sqrt{\eta_j}\langle\nu,\nabla((\tilde{P}v_j)\circ\Phi_j^{-1})\rangle\Big|_{\partial D^2} \\ &= -\sum_j\sqrt{\eta_j}\langle\nu,\nabla((\tilde{P}v_j)\circ\Phi_j^{-1})\rangle\circ\Phi_j\circ\Phi_j^{-1}\Big|_{\partial D^2}. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Nun gilt für $h:\overline{D^2}\cap U_j\subset D^2\to\mathbb{R}$, $h\in C^2(\overline{U_j})$ (bei uns $h=(\tilde{P}v_j)\circ\Phi_j^{-1}$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\Big|_{r=0}(h\circ\Phi_j) &= \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} h\left((1-r)\cos(\theta+c_j),(1-r)\sin(\theta+c_j)\right) \\ &= -\cos(\theta+c_j)\ h_x-\sin(\theta+c_j)\ h_y \\ &= -\langle\nabla h\left(\cos(\theta+c_j),\sin(\theta+c_j)\right), \begin{bmatrix}\cos(\theta+c_j)\\ \sin(\theta+c_j)\end{bmatrix}\rangle \\ &= -\langle\nabla h,x\rangle\circ\Phi_j(0,\theta) \\ &= -\langle\nu,\nabla h\rangle\circ\Phi_j(0,\theta), \quad (0,\theta)\in\Phi^{-1}(U_j\cap\overline{D^2} \end{aligned} \tag{9.19}$$

Also gilt für $h = (\tilde{P}v_j) \circ \Phi_j^{-1}$ (wir beachten, dass $\eta_j \geq 0$ also $|\eta_j| = \eta_j$)

$$
\begin{aligned}
\langle \nu, \nabla(Pf)\rangle\Big|_{\partial D^2} &\overset{(9.18)}{=} -\sum_j \sqrt{\eta_j}\langle \nu, \nabla((\tilde{P}v_j)\circ\Phi_j^{-1})\rangle \circ \Phi_j \circ \Phi_j^{-1}\Big|_{\partial D^2} \\
&= -\sum_j \sqrt{\eta_j}\langle \nu, \nabla h\rangle \circ \Phi_j\Big|_{r=0} \circ \Phi_j^{-1}\Big|_{\partial D^2} \\
&\overset{(9.19)}{=} +\sum_j \sqrt{\eta_j}\frac{d}{dr}(h\circ\Phi_j)\Big|_{r=0} \circ \Phi_j^{-1}\Big|_{\partial D^2} \\
&= \sum_j \sqrt{\eta_j}\frac{d}{dr}((\tilde{P}v_j)\circ\Phi_j^{-1}\circ\Phi_j)\Big|_{r=0} \circ \Phi_j^{-1}\Big|_{\partial D^2} \\
&= \sum_j \sqrt{\eta_j}\left[\frac{d}{dr}\Big|_{r=0}(\tilde{P}v_j)\right] \circ \Phi_j^{-1}\Big|_{\partial D^2} \\
&\overset{(9.15)}{=} \sum_j \sqrt{\eta_j}v_j\Big|_{r=0} \circ \Phi_j^{-1}\Big|_{\partial D^2} \\
&\overset{(9.14)}{=} \sum_j \sqrt{\eta_j}(f_j\circ\Phi_j)\Big|_{r=0} \circ \Phi_j^{-1}\Big|_{\partial D^2} \\
&\overset{(9.13)}{=} \sum_j \sqrt{\eta_j}\sqrt{\eta_j}f\Big|_{(\partial D^2)\cap U_j} \\
&= \sum_j \eta_j f\Big|_{(\partial D^2)\cap U_j} \\
&= f\Big|_{\partial D^2}.
\end{aligned}
$$

Damit gilt also

$$\langle \nu, \nabla(Pf)\rangle - f \equiv 0 \quad \text{auf } \partial D^2,$$

und somit wegen $\langle \nu, \nabla(Pf)\rangle - f \in C^2(\overline{D^2})$

$$\langle \nu, \nabla(Pf)\rangle - f \in W_0^{1,2}(D^2).$$

Schließlich gilt noch

$$
\begin{aligned}
\|Pf\|_{W^{2,2}(D^2)} &\overset{(9.17)}{\leq} \sum_j C(\eta_j,\Phi_j)\|\tilde{P}v_j\|_{W^{2,2}(\Phi_j^{-1}(\overline{U_j\cap D^2}))} \\
&\overset{(9.16)}{\leq} \tilde{C}\|f\|_{W^{1,2}(D^2)}.
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir einen Operator P, der für $f \in C^\infty(\overline{D^2})$, welche in $B_{\frac{1}{2}}(0)$ konstant null sind, linear und stetig ist, und die geforderten Eigenschaft ($\mathfrak{P}$) besitzt.
Um den Beweis fertigzustellen, benötigen wir also nur noch die Existenz von $\tilde{P}$ auf $[0,1]\times[0,2\pi]$.

- Nun sei also $g \in C^\infty([0,1]\times[0,2\pi])$ und $\operatorname{supp} g \subset\subset [0,1]\times(\frac{\pi}{4},\frac{7}{4}\pi)$.
  Wir definieren[31]

$$\tilde{P}g := u,$$

wobei u die Lösung von

$$
\begin{cases}
u_r - u_{\theta\theta} = g, & \text{auf } [0,1]\times[0,2\pi] \\
u = 0, & \text{auf } \{0\}\times[0,2\pi],\ [0,1]\times\{0\} \text{ und } [0,1]\times\{2\pi\}
\end{cases}
$$

[31] $\tilde{P}$ besitzt also einen größeren Definitionsbereich, als im vorherigen Schritt gefordert, da $g(r,\theta) \neq 0$ für $r > \frac{3}{4}$ zugelassen ist. Diese Voraussetzung an g wurde im vorigen Schritt benötigt, damit die Polarkoordinatentransformation ein Diffeomorphismus ist.

Nach [Eva98] Kapitel 7, Theorem 7, p. 367, sowie Theorem 6, Theorem 4 und Theorem 3 existiert[32] genau ein solches $u \in C^\infty([0,1] \times [0,2\pi])$, und es gibt ein C, so dass

$$\|u\|_{W^{2,2}((0,1)\times(0,2\pi))} \leq C\|g\|_{W^{1,2}((0,1)\times(0,2\pi))}.$$

Dann ist $\tilde{P}$ linear (wegen der Eindeutigkeit) und wegen $\tilde{P}g \in C^2([0,1] \times [0,2\pi])$ gilt punktweise

$$f = u_r + \triangle u \quad \text{in } [0,1] \times [0,2\pi],$$

$$\triangle u = 0 \quad \text{für } r = 0,$$

und somit

$$f(0,\theta) = u_r \quad \text{für } r = 0,\, \theta \in [0,2\pi].$$

□

Mit diesem Ergebnis können wir eine stetige Transformation von beliebigen $\lambda \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ zu $\tilde{\lambda} \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit $\langle \nu, \tilde{\lambda} \rangle \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ konstruieren, und somit die Aussage von Lemma 9.2 verschärfen:

9.6 Theorem (Uhlenbeck)
(vgl. [Uhl82], Lemma 2.7, Lemma 2.8)
Sei[33]

$$E := W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$$

Dann existiert ein $\gamma > 0$, so dass für alle $\xi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m))$ mit

$$\|\nabla \xi\|_{L^2(D^2)} < \gamma$$

ein $\alpha > 0$ und eine stetige Abbildung Q_ξ existiert

$$Q_\xi : E \cap \{\lambda : \ \|\lambda\|_{W^{1,2}} < \alpha\} \to W^{2,2}(D^2, O(m)),$$

mit $Q_\xi(0) = I$ und

$$\operatorname{div}(Q_\xi^T \nabla Q_\xi + Q_\xi^T(\nabla^\perp \xi + \lambda)Q_\xi) = 0 \quad \textit{für alle } \lambda \textit{ mit } \|\lambda\|_{W^{1,2}} < \alpha.$$

Insbesondere existiert für jedes $\beta > 0$ ein $\alpha(\beta,\xi) > 0$, so dass für alle $\lambda \in E$, $\|\lambda\|_{W^{1,2}} < \alpha(\beta,\xi)$ (wir setzen $Q_\xi \equiv Q_\xi(\lambda)$)

$$\operatorname{div}(Q_\xi^T \nabla Q_\xi + Q_\xi^T(\nabla^\perp \xi + \lambda)Q_\xi) = 0$$

und

$$\|Q_\xi(\lambda) - I\|_{W^{2,2}} \leq \beta.$$

Weiter gilt, dass

$$\langle \nu, Q_\xi^T \nabla Q_\xi + Q_\xi^T(\nabla^\perp \xi + \lambda)Q_\xi \rangle \ \in W_0^{1,2}(D^2, M(m)),$$

für die Einheitsnormale ν an ∂D^2, und

$$Q_\xi^T \nabla Q_\xi + Q_\xi^T(\nabla^\perp \xi + \lambda)Q_\xi \in so(m) \otimes \mathbb{R}^2 \quad \textit{puntkweise fast überall in } D^2.$$

Beweis. Wir wählen $\gamma > 0$ aus Lemma 9.2 und fixieren ein $\xi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m))$ mit $\|\nabla \xi\|_{L^2(D^2)} < \gamma$. Dann erhalten wir die Behauptung aus Lemma 9.2 für ein $\alpha_0 > 0$ durch Setzen von $\tilde{Q}(\lambda) \equiv \tilde{Q}_\xi(\lambda) := e^{\Psi(\lambda)}$ für alle $\lambda \in \tilde{E}$ mit $\|\lambda\|_{W^{1,2}} < \alpha_0$, wobei wir wieder

$$\tilde{E} := \{\lambda \in W_0^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2) \mid \langle \nu, \lambda \rangle \in W_0^{1,2}(D^2, so(m))\}$$

definieren, da $\Psi(\lambda)$ punktweise eine schiefsymmetrische Matrix ist und somit $e^{\Psi(\lambda)}$ punktweise eine orthogonale Matrix ist.

[32] Hier benötigt man, dass $g \equiv 0$ nahe $\{\theta = 0\}$ und $\{\theta = 2\pi\}$, um die „compatibility conditions“ aus [Eva98] Kapitel 7, Theorem 6 zu erfüllen.

[33] Wir beachten die schwächeren Anforderungen an E bzw. λ im Vergleich zu $\tilde{E}$ aus Lemma 9.2.

Da weiterhin die exp-Funktion nach Lemma 8.9 in $C^1\big(W^{2,2}(D^2,so(m)),W^{2,2}(D^2,O(m))\big)$ und $\Psi(\lambda)$ nach Lemma 9.2 zu der Klasse C^1 gehört, ist auch $e^{\Psi(\cdot)}$ eine C^1-Funktion von $\tilde{E}$ nach $W^{2,2}(D^2,O(m))$.
Wir erhalten also für $\tilde{Q}(\lambda)$ die Gleichung

$$\operatorname{div}(\tilde{Q}^T\ \nabla\tilde{Q}+\tilde{Q}^T(\nabla^\perp\xi+\lambda)\tilde{Q})=0. \tag{9.20}$$

Zusätzlich lässt sich ür jedes $\beta>0$ ein $\alpha(\beta,\xi)>0$ so wählen, dass für alle $\lambda\in\tilde{E}$ mit $\|\lambda\|_{W^{1,2}}<\alpha(\beta,\xi)$ folgendes gilt:

$$\|\tilde{Q}-I\|_{W^{2,2}}\le\beta,\quad \|\tilde{Q}^T-I\|_{W^{2,2}}\le\beta.$$

Unser Ziel ist es jetzt, für jedes $\lambda\in E$ ein $\tilde{\lambda}\in\tilde{E}$ zu konstruieren, so dass wir eine stetige Abbildung $Q_\xi\equiv Q$ mit den gewünschten Eigenschaften erhalten, falls λ hinreichend klein ist.
Sei also ein $\lambda\in W^{1,2}(D^2,so(m)\times\mathbb{R}^2)$ mit $\|\lambda\|_{W^{1,2}}<\alpha_0$ gegeben. Wir wählen den stetigen linearen Operator P aus dem ADN-Theorem 9.5 und setzen komponentenweise

$$U\equiv U(\lambda):=P(-\langle\nu,\lambda\rangle).$$

Mit $\langle\nu,\lambda\rangle\in W^{1,2}(D^2,M(m))$ ist $U\in W^{2,2}\cap W_0^{1,2}(D^2,so(m))$ wohldefiniert, und es gilt

$$\|U\|_{W^{2,2}}\le C\|\lambda\|_{W^{1,2}},$$

sowie

$$\langle\nu,\nabla U\rangle+\langle\nu,\lambda\rangle\in W_0^{1,2}(D^2,M(m))\quad\text{komponententweise.} \tag{9.21}$$

Da $U\in W^{2,2}$ ist also e^U wohldefiniert, und $\lambda\mapsto e^{U(\lambda)}$ ist eine C^1-Abbildung (da P linear und stetig und somit C^∞-Abbildung ist).
Wir definieren dann

$$\tilde{\lambda}:=e^{-U}\ \nabla e^U+e^{-U}\ \lambda\ e^U+e^{-U}\ \nabla^\perp\xi\ e^U-\nabla^\perp\xi. \tag{9.22}$$

Zuerst sehen wir, dass $\lambda\mapsto\tilde{\lambda}$ eine stetige-Abbildung ist, da $\lambda\mapsto e^{\pm U(\lambda)}$ von der Klasse C^1 auf $W^{1,2}(D^2,so(m)\otimes\mathbb{R}^2)$ und ∇ wiederum eine C^∞-Abbildung von $W^{2,2}$ nach $W^{1,2}$, also $\lambda\mapsto\tilde{\lambda}$ eine Abbildung ist, die sich aus (verträglichen) Multiplikationen (da $W^{2,2}\cdot W^{1,2}\hookrightarrow W^{1,2}$ stetig, vgl. Lemma 4.30) und Additionen von C^1-Abbildungen zusammensetzt.
Weiter rechnen wir für $\tilde{Q}\equiv\tilde{Q}\tilde{\lambda}\in O(m)$, $R\equiv R(\lambda):=e^{U(\lambda)}\in O(m)$ und $Q(\lambda)\equiv Q:=R\tilde{Q}\in O(m)$

$$\begin{aligned}
&\tilde{Q}^T\ \nabla\tilde{Q}+\tilde{Q}^T(\nabla^\perp\xi+\tilde{\lambda})\tilde{Q}\\
&\quad=\tilde{Q}^T\ \nabla\tilde{Q}+\tilde{Q}^T(\nabla^\perp\xi+R^T\ \nabla R+R^T\lambda R+R^T\ \nabla^\perp\xi\ R-\nabla^\perp\xi)\tilde{Q}\\
&\quad=\tilde{Q}^T\nabla\tilde{Q}+\tilde{Q}^T\nabla^\perp\xi\tilde{Q}+(R\tilde{Q})^T\nabla(R\tilde{Q})-(R\tilde{Q})^TR\nabla\tilde{Q}\\
&\qquad+(R\tilde{Q})^T\lambda(R\tilde{Q})+(R\tilde{Q})^T\ \nabla^\perp\xi\ (R\tilde{Q})-\tilde{Q}^T\nabla^\perp\xi\ \tilde{Q}\\
&\quad=\tilde{Q}^T\nabla\tilde{Q}-\tilde{Q}^TR^TR\nabla\tilde{Q}+(R\tilde{Q})^T\nabla(R\tilde{Q})+(R\tilde{Q})^T(\nabla^\perp\xi+\lambda)(R\tilde{Q})\\
&\quad=(R\tilde{Q})^T\nabla(R\tilde{Q})+(R\tilde{Q})^T(\nabla^\perp\xi+\lambda)(R\tilde{Q})\\
&\quad=Q^T\nabla Q+Q^T(\nabla^\perp\xi+\lambda)Q.
\end{aligned} \tag{9.23}$$

Außerdem erhalten wir aus der Stetigkeit von $\lambda\mapsto\tilde{\lambda}$, dass für kleines $\|\lambda\|_{W^{1,2}}$ auch $\|\tilde{\lambda}\|_{W^{1,2}}$ klein wird. Wir wählen $\alpha\in(0,\alpha_0)$ so klein, dass für alle $\lambda\in W^{1,2}(D^2,so(m)\otimes\mathbb{R}^2)$ mit $\|\lambda\|_{W^{1,2}}<\alpha$ folgt, dass $\|\tilde{\lambda}\|_{W^{1,2}}<\alpha_0$.
Falls $\tilde{\lambda}$ punktweise fast überall ein Tensor in $so(m)\otimes\mathbb{R}^2$, $\|\lambda\|_{W^{1,2}}<\alpha$ und

$$\langle\nu,\tilde{\lambda}\rangle\ \in W_0^{1,2}(D^2,M(m))$$

erfüllt ist, so folgt mit Lemma 9.2 und der Rechnung (9.23)

$$0\overset{L.9.2}{=}\operatorname{div}(\tilde{Q}^T\ \nabla\tilde{Q}+\tilde{Q}^T(\nabla^\perp\xi+\tilde{\lambda})\tilde{Q})\overset{(9.23)}{=}\operatorname{div}(Q^T\nabla Q+Q^T(\nabla^\perp\xi+\lambda)Q)$$

und

$$Q^T\nabla Q+Q^T(\nabla^\perp\xi+\lambda)Q\in so(m)\quad\text{punktweise fast überall in }D^2.$$

Außerdem ist $\lambda\mapsto Q(\lambda)=R(\lambda)Q(\tilde{\lambda})$ eine stetige Abbildung.

Wir müssen also noch zeigen, dass $\tilde{\lambda} \in \tilde{E}$.
Mit

$$R^T R = I \quad , \quad \lambda^T = -\lambda \quad \text{und} \quad \xi^T = -\xi$$

gilt, dass $\underline{\tilde{\lambda} \in so(m) \otimes \mathbb{R}^2}$ punktweise fast überall:

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}^T &= (R^T \nabla R)^T + (R^T \lambda R)^T + (R^T(\nabla^\perp \xi)R)^T - \nabla^\perp \xi^T \\
&= (\nabla R^T)R + R^T \lambda^T R + R^T \nabla^\perp \xi^T R - \nabla^\perp \xi^T \\
&= (\nabla(R^T R) - R^T \nabla R) - R^T \lambda R - R^T \nabla^\perp \xi R + \nabla^\perp \xi \\
&= -(R^T \nabla R + R^T \lambda R + R^T \nabla^\perp \xi R - \nabla^\perp \xi) \\
&= -\tilde{\lambda}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen noch, dass $\underline{\langle \nu, \tilde{\lambda} \rangle \ \in W_0^{1,2}(D^2, so(m))}$.
Zunächst gilt mit Proposition 8.10, dass wegen $U \in W_0^{1,2} \cap W^{2,2}(D^2, M(m))$ gilt $R - I = e^U - I \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$, und ebenso $R^T - I = e^{-U} - I \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$.
Also erhalten wir wieder mit $R = e^U$

$$R^T \langle \nabla^\perp \xi, \nu \rangle R - \langle \nabla^\perp \xi, \nu \rangle = (R^T - I)\langle \nabla^\perp \xi, \nu \rangle R + \langle \nabla^\perp \xi, \nu \rangle (R - I) \in W_0^{1,2}(D^2, M(m)),$$

da $(W^{2,2} \cap W_0^{1,2}) \cdot W^{1,2} \subset W_0^{1,2}$ nach Lemma 4.28.

Wir beweisen noch

$$\langle \nabla e^U + \lambda e^U, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2, M(m)).$$

Wir betrachten zunächst wieder <u>Partialsummen:</u>
Es gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \nabla(U^k) + \lambda \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} U^k = \nabla U + \lambda + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \nabla(U^k) + \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} U^k.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\langle \nu, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \nabla(U^k) + \lambda \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} U^k \rangle &= \langle \nu, \nabla U \rangle + \langle \nu, \lambda \rangle + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \{U^{k-1}, \langle \nu, \nabla U \rangle\} \\
&\quad + \langle \nu, \lambda \rangle \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} U^k.
\end{aligned}$$

Nun ist wegen (9.21)

$$\langle \nu, \nabla U \rangle + \langle \nu, \lambda \rangle \in W_0^{1,2}(D^2, so(m)).$$

Weiter gilt nach Theorem 9.5, dass U^{k-1} für $k \geq 2$ in $W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$ liegt, und somit auch (vgl. Lemma 4.28)

$$\{U^{k-1}, \langle \nu, \nabla U \rangle\} \in W_0^{1,2}(D^2, M(m)),$$

und ebenso ist U^k in $W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$ für $k \geq 1$, also

$$\langle \nu, \lambda \rangle U^k \in W_0^{1,2}(D^2, M(m)), \quad k \geq 1.$$

Damit folgt, dass

$$\langle \nu, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \nabla(U^k) + \lambda \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} U^k \rangle \in W_0^{1,2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weiter gilt für $\exp_n$ definiert wie im Beweis zu Lemma 8.9

$$\begin{aligned}
&\|\langle \nu, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\nabla(U^k) + \lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} U^k\rangle - (\langle \nu, \nabla e^U\rangle + \langle \nu, \lambda\rangle e^U)\|_{W^{1,2}} \\
&\qquad \leq C(\|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\nabla(U^k) - \nabla e^U\|_{W^{1,2}} + \|\langle \nu, \lambda\rangle (e^U - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} U^k)\|_{W^{1,2}} \\
&\qquad \leq C\|\nabla \exp_n(U) - \nabla \exp(U)\|_{W^{1,2}} + \|\exp_n(U) - \exp(U)\|_{W^{2,2}}\ \|\lambda\|_{W^{1,2}} \\
&\qquad \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $W_0^{1,2}$ gilt somit, dass

$$\langle \tilde{\lambda}, \nu\rangle \in W_0^{1,2}(D^2, so(m)).$$

Damit haben wir den ersten Teil der Behauptung bewiesen.

Wir zeigen noch den letzten Teil der Behauptung, nämlich, dass

$$\langle \nu, Q^T\nabla Q + Q^T(\nabla^\perp \xi + \lambda)Q\rangle \ \in W_0^{1,2}(D^2, M(m)).$$

Zunächst haben wir aus (9.23)

$$\langle \nu, Q^T\nabla Q + Q^T(\nabla^\perp \xi + \lambda)Q\rangle = \langle \nu, \tilde{Q}^T\nabla \tilde{Q} + \tilde{Q}^T(\nabla^\perp \xi + \tilde{\lambda})\tilde{Q}\rangle$$

und

$$\langle \nu, \tilde{\lambda}\rangle \ \in W_0^{1,2}(D^2, so(m)).$$

Weiter folgt nach Theorem 4.31 aus $\xi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$

$$\langle \nu, \nabla^\perp \xi\rangle \ \in W_0^{1,2}(D^2, M(m)).$$

Zudem impliziert Proposition 8.10, dass $\tilde{Q}(\tilde{\lambda}) = e^{-\Psi(\tilde{\lambda})} \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2, O(m))$. Daraus folgt nach Theorem 4.32

$$\langle \nu, \tilde{Q}\rangle \in W_0^{1,2}(D^2).$$

Zusammengesetzt ergibt dies

$$\langle \nu, \tilde{Q}^T\nabla \tilde{Q} + \tilde{Q}^T(\nabla^\perp \xi + \tilde{\lambda})\tilde{Q}\rangle = \underbrace{\tilde{Q}^T\langle \nu, \nabla \tilde{Q}\rangle}_{W_0^{1,2}} + \tilde{Q}^T(\underbrace{\langle \nu, \nabla^\perp \xi\rangle}_{W_0^{1,2}} + \underbrace{\langle \nu, \tilde{\lambda}\rangle}_{W_0^{1,2}})\tilde{Q},$$

und somit ist die rechte Seite in $W^{2,2} \cdot W_0^{1,2} \subset W_0^{1,2}$.
Damit ist dieses Theorem vollständig bewiesen. □

9.7 Lemma (Abschätzung für Zerlegung)
(siehe [Riv07a], Lemma A.5, S.17)
Es existiert ein $C(m) > 0$, ein $\varepsilon(m) > 0$, sowie ein $\delta > 0$, so dass für jedes $P \in W^{2,2}(D^2, O(m))$ und $\xi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m))$ mit

$$\nabla^\perp \xi = P^{-1}\nabla P + P^{-1}\Omega P \tag{9.24}$$

für ein $\Omega \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 \leq \varepsilon(m)$$

falls zusätzlich noch gilt

$$\|\nabla P\|_{L^2} + \|\xi\|_{W^{1,2}} \leq \delta, \tag{9.25}$$

dann auch[34]

$$\|\xi\|_{W^{1,2}} + \|\nabla P\|_{L^2} \leq C(m)\ \|\Omega\|_{L^2} \tag{9.26}$$

und

$$\|\xi\|_{W^{2,2}} + \|\nabla P\|_{W^{1,2}} \leq C(m)\ \|\Omega\|_{W^{1,2}} \tag{9.27}$$

erfüllt ist.

[34] Für den Beweis von (9.26) reicht tatsächlich schon die Bedingung $\|\nabla P\|_{L^2} \leq \delta$ und (9.24).

Beweis. Wegen

$$\nabla^\perp \xi = P^{-1}\nabla P + P^{-1}\Omega P$$

folgt

$$\operatorname{curl}(\nabla^\perp \xi) = \operatorname{curl}(P^T \nabla P + P^T \Omega P),$$

also

$$\triangle \xi = \nabla^\perp P^T \nabla P + \operatorname{curl}(P^T \Omega P).$$

Wir betrachten die Lösung $v \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ von

$$\begin{cases} \triangle v = \nabla^\perp P^T \nabla P & \text{in } D^2, \\ v = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases} \tag{9.28}$$

Dann gilt mit der WENTE-Ungleichung, Theorem 7.1, und der POINCARÉ-Ungleichung

$$\|v\|_{W^{1,2}} \leq C\|\nabla v\|_{L^2} \overset{T7.1}{\leq} C\|\nabla P^T\|_{L^2}\ \|\nabla P\|_{L^2}. \tag{9.29}$$

Wegen $P^T\Omega P \in W^{1,2}$, da $P, P^T \in W^{2,2}$ wissen wir

$$\int_{D^2} \operatorname{curl}(P^T\Omega P)\varphi = -\int_{D^2} P^T\Omega P \cdot \nabla^\perp \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2).$$

Dies stellt ein lineares Funktional auf $W_0^{1,2}$ dar, und es gilt (wir beachten, dass wegen P, P^T orthogonal gilt $|P| \leq C$)

$$\begin{aligned} \left|\int_{D^2} \operatorname{curl}(P^T\Omega P)\varphi\right| &= \left|\int_{D^2} P^T\Omega P \cdot \nabla^\perp \varphi\right| \\ &\leq \left|P^T\right||P|\|\Omega\|_{L^2}\ \|\nabla\varphi\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Omega\|_{L^2}\ \|\varphi\|_{W^{1,2}}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\|\operatorname{curl}(P^T\Omega P)\|_{(W_0^{1,2})^*} \leq C\|\Omega\|_{L^2}. \tag{9.30}$$

Nach Lemma 4.13 existiert dann (genau) eine Lösung $w \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ von

$$\begin{cases} \triangle w = \operatorname{curl}(P^T\Omega P) & \text{in } D^2, \\ w = 0 & \text{auf } \partial D^2, \end{cases} \tag{9.31}$$

und es gilt

$$\|w\|_{W^{1,2}} \leq C\|\operatorname{curl}(P^T\Omega P)\|_{(W_0^{1,2})^*} \overset{(9.30)}{\leq} C\|\Omega\|_{L^2}. \tag{9.32}$$

Weiter gilt

$$\triangle w + \triangle v = \triangle \xi \quad \text{in } D^2$$

und ξ, $w + v \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$. Daraus folgt

$$\xi = w + v \quad \text{in } D^2, \tag{9.33}$$

und somit gilt wegen (9.29) und (9.32)

$$\|\xi\|_{W^{1,2}} \leq \|w\|_{W^{1,2}} + \|v\|_{W^{1,2}} \leq C(\|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla P^T\|_{L^2}\ \|\nabla P\|_{L^2}). \tag{9.34}$$

Nach Voraussetzung gilt $\|\nabla P\|_{L^2} \leq \delta$, und somit folgt

$$\|\xi\|_{W^{1,2}} \leq C_1\delta\|\nabla P\|_{L^2} + C_1\|\Omega\|_{L^2}. \tag{9.35}$$

Weiter gilt nach Voraussetzung

$$\nabla^\perp \xi \overset{(9.24)}{=} P^T \nabla P + P^T \Omega P,$$

also wegen $PP^T = I$

$$\nabla P = -\Omega P + P\nabla^\perp \xi, \tag{9.36}$$

woraus die folgende Abschätzung folgt:

$$\begin{aligned} \|\nabla P\|_{L^2} &\leq \|\Omega P\|_{L^2} + \|P\nabla^\perp \xi\|_{L^2} \\ &\leq \|P\|_{L^\infty}\ \|\Omega\|_{L^2} + \|P\|_{L^\infty}\ \|\nabla\xi\|_{L^2} \\ &\leq C_2(\|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla\xi\|_{L^2}). \end{aligned} \tag{9.37}$$

Zusammengesetzt ergeben (9.35) und (9.37)

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{W^{1,2}} &\overset{(9.35)}{\leq} C_1\delta\|\nabla P\|_{L^2} + C_1\|\Omega\|_{L^2} \\ &\overset{(9.37)}{\leq} C_1\delta C_2(\|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla\xi\|_{L^2}) + C_1\|\Omega\|_{L^2} \\ &\leq C_1(\delta C_2 + 1)\|\Omega\|_{L^2} + C_1C_2\delta\|\nabla\xi\|_{L^2} \\ &\leq C_1(\delta C_2 + 1)\|\Omega\|_{L^2} + C_1C_2\delta\|\xi\|_{W^{1,2}}. \end{aligned} \tag{9.38}$$

Für $0 < \delta \leq \frac{1}{2C_1C_2}$ gilt dann

$$\|\xi\|_{W^{1,2}} \leq 2C_1(\delta C_2 + 1)\|\Omega\|_{L^2},$$

also, wenn wir zusätzlich $\delta \leq 1$ fordern,

$$\|\xi\|_{W^{1,2}} \leq 2C_1(C_2 + 1)\|\Omega\|_{L^2}. \tag{9.39}$$

Es ergibt (9.39) eingesetzt in (9.37)

$$\begin{aligned} \|\nabla P\|_{L^2} &\overset{(9.37)}{\leq} C_2(\|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla\xi\|_{L^2}) \\ &\overset{(9.39)}{\leq} C_2\|\Omega\|_{L^2} + C_2 2C_1(C_2 + 1)\|\Omega\|_{L^2} \\ &= (C_2 + C_2 2C_1(C_2 + 1))\|\Omega\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{9.40}$$

Jetzt nur noch (9.39) und (9.40) addiert, und es ergibt sich

$$\|\nabla P\|_{L^2} + \|\xi\|_{W^{1,2}} \leq C(m)\|\Omega\|_{L^2},$$

für ein $C(m) \geq C_2 + C_2 2C_1(C_2 + 1) + 2C_1(C_2 + 1)$, also ist (9.26) gezeigt.

Nun zur Abschätzung (9.27):
Wegen $P \in L^\infty$, $\nabla P \in W^{1,2} \supset L^4$ und $\Omega \in W^{1,2} \supset L^4$ gilt

$$\operatorname{curl}(P^T\Omega P) = \nabla^\perp P^T\ \cdot \Omega\ P + P^T\ \operatorname{curl}\Omega\ P + P^T\Omega \cdot \nabla^\perp P \in L^2, \tag{9.41}$$

und deshalb gilt für w aus (9.31) nach dem Satz von FRIEDRICHS, Theorem 4.18, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|w\|_{W^{2,2}} &\overset{T.4.18}{\leq} C(\|\triangle w\|_{L^2} + \|w\|_{L^2}) \\ &\leq C(\|\operatorname{curl}(P^T\Omega P)\|_{L^2} + \|w\|_{L^2}) \\ &\overset{(9.41)}{\underset{(9.32)}{\leq}} C(\|\nabla^\perp P^T \cdot \Omega\|_{L^2}\|P\|_{L^\infty} + \|P\|^2_{L^\infty}\|\operatorname{curl}\Omega\|_{L^2} + \|P\|_{L^\infty}\|\Omega \cdot \nabla^\perp P\|_{L^2} + C\|\Omega\|_{L^2}). \end{aligned} \tag{9.42}$$

Nun gilt in zwei Dimensionen, dass $W^{1,1} \hookrightarrow L^2$ $(1 - \frac{2}{1} = 0 - \frac{2}{2})$, also

$$\begin{aligned} \|\nabla^\perp P^T \cdot \Omega\|_{L^2} &\leq C\|\nabla^\perp P^T \cdot \Omega\|_{W^{1,1}} \\ &\leq C(\|\nabla^\perp P^T \cdot \Omega\|_{L^1} + \|(\nabla^2 P^T) \cdot \Omega\|_{L^1} + \|\nabla P \cdot \nabla\Omega\|_{L^1}) \\ &\leq C(\|\nabla P\|_{L^2}\ \|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla^2 P\|_{L^2}\ \|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla P\|_{L^2}\ \|\nabla\Omega\|_{L^2}) \\ &\leq C(\|\nabla P\|_{W^{1,2}}\|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla P\|_{L^2}\ \|\Omega\|_{W^{1,2}}). \end{aligned} \tag{9.43}$$

Analog gilt

$$\|\Omega \cdot \nabla^\perp P\|_{L^2} \leq C(\|\nabla P\|_{W^{1,2}}\|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla P\|_{L^2}\ \|\Omega\|_{W^{1,2}}). \tag{9.44}$$

Somit erhalten wir schließlich (wir beachten $\|\Omega\|^2_{L^2} \leq \varepsilon$, $\|\nabla P\|_{L^2} \leq \delta$)

$$\begin{aligned} \|w\|_{W^{2,2}} &\overset{(9.42)}{\leq} C(\|\nabla^\perp P^T \cdot \Omega\|_{L^2}\|P\|_{L^\infty} + \|P\|^2_{L^\infty}\|\operatorname{curl}\Omega\|_{L^2} + \|P\|_{L^\infty}\|\Omega \cdot \nabla^\perp P\|_{L^2} + C\|\Omega\|_{L^2}) \\ &\overset{(9.43)}{\underset{(9.44)}{\leq}} C(\|\nabla P\|_{W^{1,2}}\|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla P\|_{L^2}\ \|\Omega\|_{W^{1,2}} + \|\Omega\|_{W^{1,2}}) \\ &\leq C(\|\nabla P\|_{W^{1,2}}\sqrt{\varepsilon} + (\delta+1)\|\Omega\|_{W^{1,2}}). \end{aligned} \tag{9.45}$$

Für v aus (9.28) gilt mit dem Satz von FRIEDRICHS, Theorem 4.18, (wir beachten wieder die stetige Einbettung $W^{1,1} \hookrightarrow L^2$)

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{2,2}} &\overset{T.4.18}{\leq} C(\|\triangle v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) \\ &\overset{(9.29)}{\leq} C(\|\nabla P^T\ \nabla^\perp P\|_{W^{1,1}} + \|\nabla P\|^2_{L^2}) \\ &\leq C(2\|\nabla P\|_{W^{1,2}}\|\nabla P\|_{L^2} + \|\nabla P\|^2_{L^2}) \end{aligned} \tag{9.46}$$

Damit gilt wieder mit dem Satz von Friedrichs (wir beachten: $\|\nabla P\|_{L^2} \leq \delta$)

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{W^{2,2}} &\overset{(9.33)}{\leq} C(\|\triangle v\|_{L^2} + \|\triangle w\|_{L^2} + \|\xi\|_{L^2}) \\ &\overset{(9.45)}{\underset{(9.46)}{\leq}} C(\|\nabla P\|_{W^{1,2}}\delta + \delta\|\nabla P\|_{L^2} + \|\nabla P\|_{W^{1,2}}\sqrt{\varepsilon} + (\delta+1)\|\Omega\|_{W^{1,2}} + \|\xi\|_{L^2}) \\ &\overset{(9.26)}{\leq} C(\|\nabla P\|_{W^{1,2}}(\delta + \sqrt{\varepsilon}) + (\delta + C)\|\Omega\|_{W^{1,2}}). \end{aligned} \tag{9.47}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \|\nabla P\|_{W^{1,2}} &\leq C(\|\nabla P\|_{L^2} + \|\nabla^2 P\|_{L^2}) \\ &\overset{(9.26)}{\leq} C(m)(\|\Omega\|_{L^2} + \|\nabla^2 P\|_{L^2}). \end{aligned} \tag{9.48}$$

Schätze also noch $\|\nabla^2 P\|_{L^2}$ ab: Es gilt mit der Darstellung (9.36) von ∇P

$$\begin{aligned} \partial_i \nabla P &\overset{(9.36)}{=} \partial_i(P\nabla^\perp\xi) - \partial_i(\Omega P) \\ &= (\partial_i P)\nabla^\perp\xi + P\ \partial_i\nabla^\perp\xi - \partial_i\Omega\ P - \Omega\ \partial_i P, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \|\partial_i \nabla P\|_{L^2} &\leq C(\|(\partial_i P)\nabla^\perp\xi\|_{L^2} + \|P\|_{L^\infty}\|\nabla^2\xi\|_{L^2} + \|\nabla\Omega\|_{L^2}\|P\|_{L^\infty} + \|\Omega\partial_i P\|_{L^2}) \\ &\leq C(\|(\partial_i P)\nabla^\perp\xi\|_{L^2} + \|\xi\|_{W^{2,2}} + \|\Omega\|_{W^{1,2}} + \|\Omega\partial_i P\|_{L^2}). \end{aligned} \tag{9.49}$$

Wir beachten nun, dass $\partial_i P\nabla^\perp\xi$ und $\Omega\partial_i P$ komponentenweise in $W^{1,1}$ liegt, und $W^{1,1}\hookrightarrow L^2$ in zwei Dimensionen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\partial_i P\nabla^\perp\xi\|_{L^2} &\leq C\|\partial_i P\ \nabla^\perp\xi\|_{W^{1,1}}\\
&\leq C(\|\partial_i P\ \nabla^\perp\xi\|_{L^1}+\|\nabla(\partial_i P\ \nabla^\perp\xi)\|_{L^1})\\
&\leq C(\|\nabla P\|_{L^2}\ \|\xi\|_{W^{1,2}}+\|\nabla\partial_i P\|_{L^2}\ \|\nabla^\perp\xi\|_{L^2}+\|\partial_i P\|_{L^2}\ \|\nabla^2\xi\|_{L^2})\\
&\overset{(9.25)}{\leq} C(\delta\|\xi\|_{W^{1,2}}+\|\nabla P\|_{W^{1,2}}\delta+\delta\|\xi\|_{W^{2,2}})\\
&\leq C(\delta\|\xi\|_{W^{2,2}}+\delta\|\nabla P\|_{W^{1,2}})
\end{aligned}\tag{9.50}$$

und

$$\begin{aligned}
\|\Omega\ \partial_i P\|_{L^2} &\leq C\|\Omega\ \partial_i P\|_{W^{1,1}}\\
&\leq C(\|\Omega\|_{L^2}\ \|\partial_i P\|_{L^2}+\|\nabla(\Omega\ \partial_i P)\|_{L^1})\\
&\leq C(\sqrt{\varepsilon}\|\nabla P\|_{L^2}+\|\nabla\Omega\|_{L^2}\ \|\partial_i P\|_{L^2}+\|\Omega\|_{L^2}\ \|\nabla\partial_i P\|_{L^2})\\
&\overset{(9.25)}{\leq} C(\sqrt{\varepsilon}\|\nabla P\|_{W^{1,2}}+\delta\|\Omega\|_{W^{1,2}}+\sqrt{\varepsilon}\|\nabla P\|_{W^{1,2}})\\
&\leq C(\sqrt{\varepsilon}\|\nabla P\|_{W^{1,2}}+\|\Omega\|_{W^{1,2}}).
\end{aligned}\tag{9.51}$$

Folglich gilt, wenn wir (9.50) und (9.51) in (9.49) einsetzen, (wobei ε, $\delta\leq 1$ vorausgesetzt ist)

$$\begin{aligned}
\|\partial_i\nabla P\|_{L^2} &\overset{(9.49)}{\leq} C(\|(\partial_i P)\nabla^\perp\xi\|_{L^2}+\|\xi\|_{W^{2,2}}+\|\Omega\|_{W^{1,2}}+\|\Omega\partial_i P\|_{L^2})\\
&\leq C(\delta\|\xi\|_{W^{2,2}}+\delta\|\nabla P\|_{W^{1,2}}+\|\xi\|_{W^{2,2}}+\|\Omega\|_{W^{1,2}}+\sqrt{\varepsilon}\|\nabla P\|_{W^{1,2}}+\|\Omega\|_{W^{1,2}})\\
&\leq C((1+\delta)\|\xi\|_{W^{2,2}}+(\delta+\sqrt{\varepsilon})\|\nabla P\|_{W^{1,2}}+\|\Omega\|_{W^{1,2}})\\
&\leq C(\|\xi\|_{W^{2,2}}+\|\Omega\|_{W^{1,2}}+(\delta+\sqrt{\varepsilon})\|\nabla P\|_{W^{1,2}}).
\end{aligned}$$

Mit (9.48) folgt dann

$$\|\nabla P\|_{W^{1,2}}\leq\tilde{C}(\|\xi\|_{W^{2,2}}+\|\Omega\|_{W^{1,2}}+(\delta+\sqrt{\varepsilon})\|\nabla P\|_{W^{1,2}}).$$

Für ε und δ in Abhängigkeit von $\tilde{C}$ klein, erhalten wir also

$$\|\nabla P\|_{W^{1,2}}\leq C(\|\xi\|_{W^{2,2}}+\|\Omega\|_{W^{1,2}}).$$

Dieses mit (9.47) zusammen ergibt

$$\begin{aligned}
\|\nabla P\|_{W^{1,2}}+\|\xi\|_{W^{2,2}} &\leq C(\|\xi\|_{W^{2,2}}+\|\Omega\|_{W^{1,2}})+\|\xi\|_{W^{2,2}}\\
&\leq C_1\|\nabla P\|_{W^{1,2}}(\delta+\sqrt{\varepsilon})+C_2\|\Omega\|_{W^{1,2}}.
\end{aligned}$$

Wählen wir δ und ε ggf. noch kleiner, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\nabla P\|_{W^{1,2}}+\frac{1}{2}\|\xi\|_{W^{2,2}} &\leq \frac{1}{2}\|\nabla P\|_{W^{1,2}}+\|\xi\|_{W^{2,2}}\\
&\leq \tilde{C}_2\|\Omega\|_{W^{1,2}}.
\end{aligned}$$

und somit

$$\|\nabla P\|_{W^{1,2}}+\|\xi\|_{W^{2,2}}\leq C(m)\|\Omega\|_{W^{1,2}}$$

für eine gewisse Konstante $C(m)$. Damit ist auch (9.27) gezeigt und dieses Lemma bewiesen. □

9.8 Lemma (nichtlineare Zerlegung für $\Omega \in W^{1,2}$)
(siehe [Riv07a], Lemma A.4, S.16)
Es existieren $\varepsilon = \varepsilon(m)$, $C(m) > 0$, so dass für jedes $\Omega \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 \leq \varepsilon(m)$$

ein $\xi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m))$ und ein $P \in W^{2,2}(D^2, O(m))$ existieren, so dass gilt

$$\nabla^{\perp}\xi = P^T \; \nabla P + P^T \Omega P \tag{9.52}$$

und die Abschätzungen

$$\|\xi\|_{W^{1,2}(D^2)} + \|\nabla P\|_{L^2(D^2)} \leq C(m) \; \|\Omega\|_{L^2(D^2)} \tag{9.53}$$

und

$$\|\xi\|_{W^{2,2}(D^2)} + \|\nabla P\|_{W^{1,2}(D^2)} \leq C(m) \; \|\Omega\|_{W^{1,2}(D^2)} \tag{9.54}$$

erfüllt sind.

Beweis. Dieser Beweis folgt einer Kontinuitätsmethode. Wir definieren für noch zu wählende Konstanten $\varepsilon > 0$, $C > 0$ $U_{\varepsilon,C}$ als

$$U_{\varepsilon,C} = \left\{ \begin{array}{c} \Omega \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2) \text{ mit } \int_{D^2} |\Omega|^2 \leq \varepsilon \text{ und so,} \\ \text{dass } \xi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m)) \text{ und } P \in W^{2,2}(D^2, O(m)) \text{ existieren} \\ \text{so dass (9.52), (9.53), (9.54) erfüllt sind.} \end{array} \right\}$$

Dann gelten folgende Eigenschaften:
★ Schritt 1: $\underline{U_{\varepsilon,C} \text{ ist abgeschlossen in } W^{1,2}}$:
Sei dazu $\Omega_k \in U_{\varepsilon,C}$ und $\Omega_k \xrightarrow{k\to\infty} \Omega$ in $W^{1,2}$. Wir wählen zu den Ω_k die P_k und ξ_k entsprechend. Dann gilt mit (9.54) für k hinreichend groß

$$\|\nabla P_k\|_{W^{1,2}} + \|\nabla \xi_k\|_{W^{2,2}} \leq C\|\Omega_k\|_{W^{1,2}} \leq 2C\|\Omega\|_{W^{1,2}}. \tag{9.55}$$

Weiter gilt $|P_k| \leq C$, da $P_k \in O(m)$. Somit sind P_k und ξ_k in $W^{2,2}$ gleichmäßig beschränkt, und es existiert eine schwach konvergente Teilfolge und $\xi \in W^{2,2}(D^2, M(m))$ sowie $P \in W^{2,2}(D^2, M(m))$ mit

$$\xi_k \rightharpoonup \xi \quad \text{in } W^{2,2},$$

$$\xi_k \xrightarrow{k\to\infty} \xi \quad \text{in } W^{1,2}$$

und

$$P_k \rightharpoonup P \quad \text{in } W^{2,2},$$

$$P_k \xrightarrow{k\to\infty} P \quad \text{in } W^{1,2}.$$

Wegen

$$0 = \xi_k + \xi_k^T \xrightarrow{k\to\infty} \xi + \xi^T$$

gilt $\xi \in so(m)$ und wegen

$$\begin{aligned} \|P_k^T P_k - I\|_{L^2} = \|P_k^T P_k - P^T P\|_{L^2} &\leq \|P_k^T(P_k - P)\|_{L^2} + \|(P_k^T - P^T)P\|_{L^2} \\ &\leq \|P_k\|_{L^\infty} \|P_k - P\|_{L^2} + \|P_k - P\|_{L^2} \|P\|_{L^\infty} \\ &\leq C \|P_k - P\|_{L^2} + C \|P_k - P\|_{L^2} \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{aligned}$$

gilt

$$I = P^T P \quad \text{punktweise fast überall in } D^2,$$

also $P \in O(m)$.
Wegen der $W^{1,2}$-Konvergenz gilt auch weiter

$$\begin{aligned}\|\nabla^\perp \xi_k - P_k^T \nabla P_k &- P_k^T \Omega_k P_k - \nabla^\perp \xi - P^T \nabla P - P^T \Omega P\|_{L^2} \\ &\leq \|\xi_k - \xi\|_{W^{1,2}} + \|P_k^T \nabla P_k - P^T \nabla P\|_{L^2} + \|P_k^T \Omega_k P_k - P^T \Omega P\|_{L^2} \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 0,\end{aligned}$$

denn

$$\xi_k \xrightarrow{k\to\infty} \xi \quad \text{in } W^{1,2}$$

und (wir beachten $|P_k| \leq C$, da $P_k \in O(m)$)

$$\begin{aligned}\|P_k \nabla P_k - P \nabla P\|_{L^2} &\leq \|P_k(\nabla P_k - \nabla P)\|_{L^2} + \|(P_k - P)\nabla P\|_{L^2} \\ &\leq C\|\nabla P_k - \nabla P\|_{L^2} + \|P_k - P\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{W^{2,2}} \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 0,\end{aligned}$$

sowie (wir beachten $\Omega P \in W^{1,2}$, da $P \in W^{2,2}$, siehe Lemma 4.30)

$$\begin{aligned}\|P_k^T \Omega_k P_k - P^T \Omega P\|_{L^2} &\leq \|P_k^T(\Omega_k P_k - \Omega P)\|_{L^2} + \|(P_k^T - P^T)\Omega P\|_{L^2} \\ &\leq C\|\Omega_k P_k - \Omega P\|_{L^2} + \|P_k^T - P^T\|_{W^{1,2}}\ \|\Omega P\|_{W^{1,2}} \\ &\leq C\|\Omega_k(P_k - P)\|_{L^2} + \|(\Omega_k - \Omega)P\|_{L^2} + \|P_k^T - P^T\|_{W^{1,2}}\ \|\Omega P\|_{W^{1,2}} \\ &\leq C\|\Omega_k\|_{W^{1,2}}\|P_k - P\|_{W^{1,2}} + C\|(\Omega_k - \Omega)\|_{L^2} + \|P_k^T - P^T\|_{W^{1,2}}\ \|\Omega P\|_{W^{1,2}} \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Weiter gilt wegen der L^2-Konvergenz von Ω_k, dass

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 \leq \varepsilon$$

Also liegt $\Omega \in U_{\varepsilon,C}$, da sich die Abschätzung (9.54) wegen der Unterhalbstetigkeit der Norm bezüglich schwacher Konvergenz überträgt und (9.53) wegen der starken Konvergenz erhalten bleibt.

★ Schritt 2: *Es existiert ein $C(m)$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes Ω mit $\int_{D^2} |\Omega|^2 < \varepsilon$ (wir beachten die strikte Ungleichung), eine offene Umgebung von Ω in $W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ in $U_{\varepsilon,C}$ enthalten ist, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $\Omega' \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit $\|\Omega' - \Omega\|_{W^{1,2}} \leq \delta$ auch $\Omega' \in U_{\varepsilon,C}$ gilt.*
Wir wählen f´„ir C die Konstante $C(m)$ aus Lemma 9.7, ξ und P zu Ω, welche (9.52), (9.53) und (9.54) erfüllen und $\varepsilon = \varepsilon(C(m))$ zunächst so klein, dass

$$C(m)\|\Omega\|_{L^2} \leq C(m)\sqrt{\varepsilon} \leq \gamma$$

wobei γ die Schranke aus dem Uhlenbeck-Theorem, Theorem 9.6, sei; d.h. wir wählen $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so dass mit (9.53) insbesondere

$$\|\nabla \xi\|_{L^2} \leq \gamma.$$

Dann existiert nach dem Uhlenbeck-Satz, Theorem 9.6 für alle hinreichend kleinen $\lambda \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ eine Abbildung $Q_\lambda := Q_\xi(\lambda) \in W^{2,2}(D^2, O(m))$, so dass komponentenweise

$$\operatorname{div}(Q_\lambda^T\ \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T(\nabla^\perp \xi + \lambda)Q_\lambda) = 0 \quad \text{in } D^2.$$

Dabei ist die Abbildung

$$\lambda \mapsto Q_\lambda$$

stetig, und es existiert insbesondere für jedes $\beta > 0$ ein $\alpha = \alpha(\beta, \xi)$, so dass

$$\|Q_\lambda - I\|_{W^{2,2}} \leq \beta \quad \text{für alle } \lambda \text{ mit } \|\lambda\|_{W^{1,2}} < \alpha(\beta, \xi). \tag{9.56}$$

Zusätzlich gilt komponentenweise

$$\langle \nu, Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda \rangle \ \in W_0^{1,2}(D^2, M(m)). \tag{9.57}$$

Damit existiert nach Theorem 5.19(i) ein eindeutiges $\Gamma_\lambda \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ mit

$$\nabla^\perp \Gamma_\lambda = Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda.$$

Nun gilt nach Anwendung von Theorem 4.31 auf die einzelnen Komponenten von ξ

$$\langle \nu, \nabla^\perp \xi \rangle \ \in W_0^{1,2}(D^2, M(m)), \tag{9.58}$$

da $\xi \in W_0^{1,2} \cap W^{2,2}$. Mit

$$\operatorname{div}(Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda - \nabla^\perp \xi) = 0$$

und aus (9.57) und (9.58)

$$\langle \nu, Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda - \nabla^\perp \xi \rangle \ \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$$

existiert nach Theorem 5.19(i) eine eindeutige Stammfunktion $G \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ mit

$$\nabla^\perp G = Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda - \nabla^\perp \xi$$

und

$$\|G\|_{W^{2,2}} \leq C \|Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda - \nabla^\perp \xi\|_{W^{1,2}}.$$

Wegen der Eindeutigkeit, $\Gamma_\lambda - \xi \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ und

$$\nabla^\perp (\Gamma_\lambda - \xi) = Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda - \nabla^\perp \xi,$$

folgt daraus $G = \Gamma_\lambda - \xi$ und somit erhalten wir die Abschätzung

$$\|\Gamma_\lambda - \xi\|_{W^{2,2}} \leq C \|Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda - \nabla^\perp \xi\|_{W^{1,2}}. \tag{9.59}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} &Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda - \nabla^\perp \xi \\ &\qquad = Q_\lambda^T \nabla (Q_\lambda - I) + (Q_\lambda - I)^T \ (\nabla^\perp \xi) \ Q_\lambda + Q_\lambda^T \lambda Q_\lambda + \nabla^\perp \xi \ (Q_\lambda - I). \end{aligned}$$

Mit $Q_\lambda \in O(m)$ punktweise fast überall, also $|Q_\lambda| \leq \tilde{C}$ unabhängig von λ, folgt

$$\begin{aligned} \|Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda - \nabla^\perp \xi\|_{L^2} \quad &\leq \quad \tilde{C} \|Q_\lambda - I\|_{W^{1,2}} + 2 \|Q_\lambda - I\|_{W^{1,2}} \|\xi\|_{W^{2,2}} \tilde{C} + \tilde{C}^2 \|\lambda\|_{L^2} \\ &\ll \quad 1 \quad \text{für } \|\lambda\|_{W^{1,2}} \text{ hinreichend klein nach (9.56)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\|\nabla [Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda - \nabla^\perp \xi]\|_{L^2} \\ &\qquad \leq \|\nabla Q_\lambda\|_{L^4} \ \|\nabla (Q_\lambda - I)\|_{L^4} + \tilde{C} \|Q_\lambda - I\|_{W^{2,2}} + \|\nabla (Q_\lambda - I)\|_{W^{1,2}} \ \|\nabla \xi\|_{W^{1,2}} \tilde{C} \\ &\qquad\quad + \|Q_\lambda - I\|_{L^\infty} \tilde{C} \|\nabla^2 \xi\|_{L^2} + \|Q_\lambda - I\|_{L^\infty} \ \|\nabla^\perp \xi\|_{L^4} \ \|\nabla Q_\lambda\|_{L^4} + 2\tilde{C} \|\nabla Q_\lambda\|_{W^{1,2}} \|\lambda\|_{L^4} \\ &\qquad\quad + \tilde{C}^2 \|\nabla \lambda\|_{L^2} + \|\nabla^2 \xi\|_{L^2} \|Q_\lambda - I\|_{L^\infty} + \|\nabla \xi\|_{L^4} \|\nabla (Q_\lambda - I)\|_{L^4} \\ &\qquad \ll 1' \quad \text{für } \|\lambda\|_{W^{1,2}} \text{ hinreichend klein nach (9.56).} \end{aligned}$$

Für alle $\beta > 0$ existiert also ein $\alpha(\beta, \Omega) > 0$, so dass für jedes $\lambda \in W^{1,2}(D^2, so(m))$ mit $\|\lambda\|_{W^{1,2}} < \alpha(\beta, \Omega)$ gilt, dass ein $\Gamma_\lambda \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}$ existiert, sodass

$$\nabla^\perp \Gamma_\lambda = Q_\lambda^T \ \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T (\nabla^\perp \xi + \lambda) Q_\lambda \quad \text{in } D^2$$

und zusammen mit (9.56) und (9.59) die Abschätzung

$$\|Q_\lambda - I\|_{W^{2,2}} + \|\Gamma_\lambda - \xi\|_{W^{2,2}} \overset{(9.56)}{\underset{(9.59)}{\leq}} \beta. \tag{9.60}$$

Weiter gilt $\Gamma_\lambda \in so(m)$ punktweise, da nach Theorem 9.6

$$Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T(\nabla^\perp \xi + \lambda)Q_\lambda \in so(m) \otimes \mathbb{R}^2$$

und die Stammfunktion komponentenweise berechnet wurde.
Setzen wir für $\nabla^\perp \xi$ die vorausgesetzte Darstellung aus (9.52) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\nabla^\perp \Gamma_\lambda &= Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T(\nabla^\perp \xi + \lambda)Q_\lambda \\
&= Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + Q_\lambda^T(P^T \nabla P + P^T \Omega P + \lambda)Q_\lambda \\
&= Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + (PQ_\lambda)^T(\nabla P)Q_\lambda + (PQ_\lambda)^T(\Omega + P\lambda P^T)(PQ_\lambda) \\
&= Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda + (PQ_\lambda)^T \nabla(PQ_\lambda) - (PQ_\lambda)^T P \nabla Q_\lambda + (PQ_\lambda)^T(\Omega + P\lambda P^T)(PQ_\lambda) \\
&= Q_\lambda^T \nabla Q_\lambda - Q_\lambda^T P^T P \nabla Q_\lambda + (PQ_\lambda)^T \nabla(PQ_\lambda) + (PQ_\lambda)^T(\Omega + P\lambda P^T)(PQ_\lambda) \\
&= P_\lambda^T \nabla P_\lambda + P_\lambda^T(\Omega + P\lambda P^T)P_\lambda,
\end{aligned}$$

wobei

$$P_\lambda := PQ_\lambda \in O(m).$$

Wir beachten, dass für $\lambda \in so(m)$

$$(P^T \lambda P)^T = P^T \lambda^T P = -P^T \lambda P,$$

also $P^T \lambda P \in so(m)$.
Setzen wir für $\mu \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$

$$\lambda_\mu := P^T \mu P,$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\lambda_\mu\|_{W^{1,2}} &\leq \|P^T \mu P\|_{L^2} + \|\nabla(P^T \mu P)\|_{L^2} \\
&\leq \tilde{C}\|\mu\|_{L^2} + 2\tilde{C}\|\nabla P\|_{W^{1,2}}\|\mu\|_{L^4} + 2\tilde{C}\|\nabla \mu\|_{L^2} \\
&\leq C(1 + \|\nabla P\|_{W^{1,2}})\,\|\mu\|_{W^{1,2}},
\end{aligned}$$

und es folgt, dass für alle $\alpha > 0$ ein $\eta > 0$ existiert, so dass für alle

$$\|\mu\|_{W^{1,2}} < \eta$$

gilt

$$\|\lambda_\mu\| < \alpha,$$

und daher ein $\xi_\mu := \Gamma_{\lambda_\mu}$, $\xi_\mu \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m))$, ein $R_\mu := PQ_{\lambda_\mu} \in W^{2,2}(D^2, O(m))$ existiert, so dass

$$\nabla^\perp \xi_\mu = R_\mu^T \nabla R_\mu + R_\mu^T(\Omega + \mu)R_\mu$$

und den Abschätzungen

$$\|Q_{\lambda_\mu} - I\|_{W^{2,2}} + \|\xi_\mu - \xi\|_{W^{2,2}} \leq \beta. \tag{9.61}$$

Nun gilt

$$Q_{\lambda_\mu} - I = P^T(R_\mu - P)$$

und somit

$$\|R_\mu - P\|_{W^{2,2}} \leq C(P)\|Q_{\lambda_\mu} - I\|_{W^{2,2}} \leq C(P)\beta.$$

Damit ergibt sich schließlich die folgende Aussage:
Für alle $\rho > 0$ existiert ein $\sigma > 0$, so dass für alle $\mu \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit

$$\|\mu\|_{W^{1,2}} \leq \sigma \tag{9.62}$$

ein $\xi_\mu \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m))$ und ein $R \equiv R_\mu \in W^{2,2}(D^2, O(m))$ existiert, so dass

$$\nabla^\perp \xi_\mu = R_\mu^T \nabla R_\mu + R_\mu^T (\Omega + \mu) R \quad \text{in } D^2$$

und mit der Abschätzung

$$\|R - P\|_{W^{2,2}} + \|\xi_\mu - \xi\|_{W^{2,2}} \overset{\substack{(9.61)\\(9.62)}}{<} \rho.$$

Nun gilt nach Voraussetzung

$$\|\nabla P\|_{L^2} + \|\xi\|_{W^{1,2}} \leq C(m)\|\Omega\|_{L^2} \leq C(m)\sqrt{\varepsilon}.$$

Dann gilt, für $\beta < \sqrt{\varepsilon}$, dass

$$\begin{aligned} \|\nabla R\|_{L^2} + \|\xi_\mu\|_{W^{1,2}} &\leq \|\nabla R - \nabla P\|_{L^2} + \|\xi_\mu - \xi\|_{W^{1,2}} + \|\nabla P\|_{L^2} + \|\xi\|_{W^{1,2}} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} + C\sqrt{\varepsilon} \\ &\leq (1 + C)\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Weiter erfüllt $\Omega + \mu$ für $\|\mu\|_{W^{1,2}}$ klein genug, dass

$$\int |\Omega + \mu|^2 < \varepsilon,$$

da

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 < \varepsilon.$$

Wir wählen ε ggf. noch kleiner, so dass die Voraussetzungen von Lemma 9.7 für R, ξ_μ und $\Omega + \mu$ erfüllt sind. Dann folgen aus Lemma 9.7 die Abschätzungen (wir beachten, dass $C(m)$ aus Lemma 9.7 gewählt wurde)

$$\|\nabla R\|_{L^2} + \|\xi_\mu\|_{W^{1,2}} \leq C(m)\|\Omega + \mu\|_{L^2}$$

und

$$\|\nabla R\|_{W^{1,2}} + \|\xi_\mu\|_{W^{2,2}} \leq C(m)\|\Omega + \mu\|_{W^{1,2}},$$

also erfüllt $\Omega + \mu$ die (Un-)Gleichungen (9.52), (9.53) und (9.54) für alle $\mu \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit $\|\mu\|_{W^{1,2}}$ hinreichend klein.

★ Schritt 3: Wir wenden ein Kontinuitätsargument an, um den Beweis abzuschließen.
Sei $\Omega \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ und für das nun gewählte $\varepsilon > 0$ gelte

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 < \varepsilon.$$

Wir definieren

$$\Omega_t(x) := t\Omega(x).$$

Dann gilt für $0 \leq t \leq 1$

$$\Omega_t \in W^{1,2}(D^2, so(m) \times \mathbb{R}^2)$$

und

$$\int |\Omega_t|^2 \leq \int t^2 |\Omega|^2 \leq 1 \int_{D^2} |\Omega|^2 < \varepsilon,$$

sowie

$$\|\Omega_t - \Omega_{t'}\|_{W^{1,2}} = |t - t'| \|\Omega\|_{W^{1,2}} \quad \text{für alle } 0 \leq t, t' \leq 1. \tag{9.63}$$

Weiter gilt (für $P \equiv I$ und $\xi \equiv 0$)

$$\Omega_0 \equiv 0 \in U_{\varepsilon,C}.$$

Wir definieren nun

$$t_0 := \inf\{t \in [0,1],\ \Omega_t \notin U_{\varepsilon,C}\}.$$

Zunächst gilt

$$t_0 > 0,$$

denn nach dem vorherigen Teil, wegen (9.63) und wegen

$$\int_{D^2} 0 = 0 < \varepsilon$$

existiert ein $\tilde{t} > 0$, so dass $\Omega_t \in U_{\varepsilon,C}$ für alle $0 \leq t < \tilde{t}$. Es folgt

$$t_0 \geq \tilde{t} > 0.$$

Nun gilt also

$$\Omega_t \in U_{\varepsilon,C} \quad \text{für alle } t < t_0,$$

und es gilt

$$\|\Omega_t - \Omega_{t_0}\|_{W^{1,2}} = (t_0 - t)\|\Omega\|_{W^{1,2}} \to 0 \quad \text{für } t \to t_0,\, t < t_0.$$

Also gilt mit der Abgeschlossenheit von $U_{\varepsilon,C}$, dass

$$\Omega_{t_0} \in U_{\varepsilon,C}.$$

Angenommen $t_0 < 1$, dann gilt

$$\int_{D^2} |\Omega_{t_0}|^2 = (t_0)^2 \int_{D^2} |\Omega|^2 < 1 \int_{D^2} |\Omega|^2 < \varepsilon.$$

Dann existiert wegen (9.63) und Schritt 2 ein $\eta > 0$, so dass für alle $|t - t_0| < \eta$ gilt

$$\Omega_t \in U_{\varepsilon,C}.$$

Damit gilt aber, dass jedes $\tilde{t} > 0$ mit

$$\Omega_{\tilde{t}} \notin U_{\varepsilon,C}$$

gilt

$$\left|t_0 - \tilde{t}\right| \geq \eta > 0,$$

was einen Widerspruch zu der Wahl von $t_0 = \inf\{\tilde{t}\}$ darstellt.
Somit muss $t_0 \geq 1$ und es gilt

$$\Omega_1 = \Omega \in U_{\varepsilon,C}.$$

Also gilt für $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$, dass für alle $\Omega \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 \leq \delta < \varepsilon$$

gilt, dass ξ und P wie gewünscht existieren.
Damit ist das Lemma bewiesen. □

Nun wenden wir ein Kompaktheitsargument an, um dieses Ergebnis auf $\Omega \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ zu übertragen.

9.9 Lemma (nichtlineare Hodge-Zerlegung für $\Omega \in L^2$)
(vgl. [Riv07a], Lemma A.3, S.15)
Es existiert ein $\varepsilon(m) > 0$ und ein $C(m) > 0$, so dass für alle $\Omega \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 \leq \varepsilon(m)$$

ein $\xi \in W_0^{1,2}(D^2, so(m))$ und ein $P \in W^{1,2}(D^2, O(m))$ existieren, so dass

$$\nabla^{\perp}\xi = P^T \nabla P + P^T \Omega P \quad \text{punktweise fast überall in } D^2 \tag{9.64}$$

und

$$\|\xi\|_{W^{1,2}(D^2)} + \|\nabla P\|_{L^2} \leq C(m)\ \|\Omega\|_{L^2(D^2)}.$$

Beweis. Wir wählen $\varepsilon \equiv \varepsilon(m)$ so klein, dass 2ε die kleine Konstante aus Lemma 9.8 ist. Sei $\Omega \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 \leq \varepsilon.$$

Wir approximieren Ω durch $\Omega_k \in W^{1,2}(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit

$$\|\Omega - \Omega_k\|_{L^2(D^2)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

und

$$\|\Omega_k\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\|\Omega\|_{L^2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann erfüllt Ω_k die Voraussetzung von Lemma 9.8 und folglich existieren $\xi_k \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2, so(m))$ und $P_k \in W^{2,2}(D^2, O(m))$ mit

$$\nabla^\perp \xi_k = P_k^T \nabla P_k + P_k^T \Omega_k P_k \quad \text{in } D^2$$

und

$$\|\xi_k\|_{W^{1,2}} + \|\nabla P_k\|_{L^2} \leq C(m)\sqrt{2}\|\Omega\|_{L^2}.$$

Die gleichmäßige Beschränktheit[35] impliziert die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge von ξ_k bzw. P_k gegen $\xi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$[36] bzw. $P \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ mit starker Konvergenz in $L^2(D^2, M(m))$, wobei wir die Folge wieder mit $k \to \infty$ indizieren. Man folgert

$$\begin{aligned}
\|P^T P - I\|_{L^1} &= \|P^T P - P_k^T P_k\|_{L^1} \\
&\leq \|P^T(P - P_k)\|_{L^1} + \|(P^T - P_k^T)P_k\|_{L^1} \\
&\leq C(\|P\|_{L^2}\|P - P_k\|_{L^2} + \|P - P_k\|_{L^2}\|P_k\|_{L^2}) \\
&\xrightarrow{k\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

also haben wir

$$P^T P = I \quad \text{punktweise fast überall in } D^2,$$

und wir schließen $P \in W^{1,2}(D^2, O(m))$. Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned}
\|\xi^T + \xi\|_{L^2} &= \|\xi^T + \xi - (\xi_k^T + \xi_k)\|_{L^2} \\
&\leq 2\|\xi - \xi_k\|_{L^2} \xrightarrow{k\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\xi^T = -\xi \quad \text{punktweise fast überall in } D^2,$$

also ist $\xi \in W_0^{1,2}(D^2, so(m))$. Wir wissen, dass ∇P_k schwach in L^2 konvergiert, und erhalten mit der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm

$$\|\nabla P\|_{L^2} \leq \liminf_{k\to\infty} \|\nabla P_k\|_{L^2}.$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\nabla P\|_{L^2(D^2)} + \|\xi\|_{W^{1,2}} &\leq \liminf_{k\to\infty}(\|\nabla P_k\|_{L^2(D^2)} + \|\xi_k\|_{W^{1,2}}) \\
&\leq C\|\Omega\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir die Gleichung (9.64), genauer beweisen wir für alle $\varphi \in C_0^\infty(D^2)$

$$\begin{aligned}
\int_{D^2} (\nabla^\perp \xi - P^T \nabla P - P^T \Omega P)\varphi &= \int_{D^2} [(\nabla^\perp \xi - P^T \nabla P - P^T \Omega P) - (\nabla^\perp \xi_k - P_k^T \nabla P_k - P_k^T \Omega_k P_k)]\varphi \\
&\xrightarrow{k\to\infty} 0.
\end{aligned} \tag{9.65}$$

[35] Wir benutzen, dass P in L^2 wegen der Orthogonalität gleichmäßig beschränkt ist.

[36] wir beachten, dass $W_0^{1,2}(D^2)$ ein Hilbert-Raum ist.

Dazu beobachten wir als erstes, dass

$$\xi - \xi_k \mapsto \int_{D^2} (\nabla^\perp \xi - \nabla^\perp \xi_k)\varphi$$

ein stetiges, lineares Funktional auf $W_0^{1,2}(D^2, so(m))$ ist, so dass wegen der schwachen Konvergenz

$$\int_{D^2} (\nabla^\perp \xi - \nabla^\perp \xi_k)\varphi \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Weiterhin ist

$$P_k \nabla P_k - P\nabla P = (P_k - P)\nabla P_k + P(\nabla P_k - \nabla P),$$

und es gilt wegen $P_k \xrightarrow{k\to\infty} P$ in $L^2(D^2, M(m))$

$$\begin{aligned} \left|\int_{D^2} (P_k - P)\nabla P_k \varphi\right| &\leq \|\varphi\|_{L^\infty} \, \|P_k - P\|_{L^2} \, \|\nabla P_k\|_{L^2} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty} \, \|P_k - P\|_{L^2} C(\Omega) \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Mit $P\varphi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} \left|\int_{D^2} (P\varphi)(\nabla P_k - \nabla P)\right| &= \left|\int_{D^2} \nabla(P\varphi)(P_k - P)\right| \\ &\leq \|\nabla(P\varphi)\|_{L^2} \|P_k - P\|_{L^2} \\ &\leq C\|P\|_{W^{1,2}} \|\varphi\|_{C^1} \, \|P_k - P\|_{L^2} \\ &\xrightarrow{k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Es verbleibt uns nur noch der Term

$$\int_{D^2} (P^T \Omega P - P_k^T \Omega_k P_k)\varphi.$$

Für eine weitere Teilfolge $k \to \infty$ haben wir punktweise $P^T\Omega P - P_k^T \Omega_k P_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und außerdem

$$\left|P^T \Omega P - P_k \Omega_k P_k\right| \leq C(|\Omega| + |\Omega_k|) \in L^1(D^2).$$

Mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz erhalten wir dann (9.65). Wir haben also gezeigt, dass

$$\int_{D^2} (\nabla^\perp \xi - P^T \nabla P - P^T \Omega P)\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2),$$

und mit dem Fundementallemma der Variationsrechnung folgt

$$\nabla^\perp \xi = P^T \nabla P + P^T \Omega P \quad \text{punktweise fast überall in } D^2.$$

□

10. Erhaltungssätze und Stetigkeit

Nun wollen wir den Beweis aus [Riv07a], Theorem I.1, vorführen: Für $u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ mit $\triangle u = \Omega \cdot \nabla u$ in D^2 für ein $\Omega \in L^2(D^2, so(m) \times \mathbb{R}^2)$ folgt $u \in C^0(D^2, \mathbb{R}^m)$.
Dazu zerlegen wir Ω zunächst durch $A \in W^{1,2} \cap L^\infty(\Omega, GL(m))$ und $B \in W^{1,2}(D^2, M(m))$, so dass $\nabla A - A\Omega = \nabla^\perp B$ (Theorem 10.4; Theorem I.4 in [Riv07a]), zeigen dann, dass daraus der Erhaltungssatz $\operatorname{div}(A\nabla u - B\nabla^\perp u) = 0$ folgt (Theorem 10.7; Theorem I.3 in [Riv07a]) und schließen daraus die Behauptung mithilfe einer linearen Hodge-Zerlegung und mit Hilfsmitteln aus der Harmonischer Analysis (Theorem 10.8; Theorem I.1 in [Riv07a]).

10.1. Dekomposition von schiefsymmetrischen Schnitten

In diesem Abschnitt zerlegen wir $\Omega \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit kleiner L^2-Norm, so dass $\nabla A - A\Omega = \nabla^\perp B$. Dazu benötigen wir zunächst einige Zwischenresultate.

10.1 Lemma (Eindeutigkeit der Lösung für Differentialgleichung erster Ordnung)
(vgl. [Riv07a], Lemma A.2)
Es existiert ein $\varepsilon(m) > 0$, so dass für alle $P \in W^{1,2}(D^2, O(m))$ mit

$$\|\nabla P^T\|_{L^2} = \|\nabla P\|_{L^2} \leq \varepsilon(m) \tag{10.1}$$

$C \equiv 0$ die einzige Lösung $C \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ von

$$\operatorname{div}(\nabla C P^T) = 0 \quad \textit{in } D^2.$$

Das heißt, ist (10.1) erfüllt, $C \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ und gilt

$$\int_{D^2} \nabla C \ P^T \cdot \nabla\varphi = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2),$$

dann ist $C \equiv 0$.

Beweis. Sei $C \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$, $\operatorname{div}(\nabla C\ P^T) = 0$ und $P \in W^{1,2}(D^2, O(m))$. Wegen der Orthogonalität von P gilt $P \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, O(m))$. Dann existiert mit der linearen Hodge-Zerlegung, genauer nach Korollar 5.21 und Bemerkung 5.22, ein $D \in W^{1,2}(D^2)$, $\int_{D^2} D = 0$ mit

$$\nabla C\ P^T = \nabla^\perp D \quad \text{punktweise fast überall in } D^2,$$

also auch

$$\nabla C = (\nabla^\perp D)\ P. \tag{10.2}$$

Weiter gilt für D nach Korollar 5.21 die schwache partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} \triangle D = -\nabla^\perp C \cdot \nabla P^T & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} D = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} D = 0, \end{cases}$$

und aus der Wente-Ungleichung, Theorem 7.1, folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla D\|_{L^2} &\overset{T7.1}{\leq} C_0 \|\nabla C\|_{L^2}\ \|\nabla P\|_{L^2} \\ &\overset{(10.1)}{\leq} C_0 \varepsilon \|\nabla C\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Andererseits gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(D^2)$ wegen (10.2)

$$\begin{aligned} \int_{D^2} \nabla C \cdot \nabla\varphi &\overset{(10.2)}{=} \int_{D^2} \nabla^\perp D \cdot \nabla\varphi\ P \\ &= \int_{D^2} \nabla^\perp D \cdot \nabla(P\varphi) - \int_{D^2} \nabla^\perp D \cdot \nabla P\ \varphi \\ &\overset{P4.22}{=} 0 - \int_{D^2} \nabla^\perp D \cdot \nabla P \varphi, \end{aligned}$$

da aus supp $\varphi \subset\subset D^2$ folgt, dass $P\varphi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$.
Also gilt schwach

$$\begin{cases} \triangle C = \nabla^\perp D \cdot \nabla P & \text{in } D^2, \\ C = 0 & \text{auf } \partial D^2, \end{cases}$$

und mit der WENTE-Ungleichung, Theorem 7.1, folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla C\|_{L^2} &\overset{T7.1}{\leq} C_0 \, \|\nabla D\|_{L^2} \, \|\nabla P\|_{L^2} \\ &\overset{(10.1)}{\leq} C_0 \varepsilon \|\nabla D\| \\ &\overset{(10.3)}{\leq} C_0^2 \varepsilon^2 \|\nabla C\|_{L^2}, \end{aligned}$$

und wir schließen für $\varepsilon := \frac{1}{2C_0(m)}$

$$\nabla C = 0.$$

Wegen $C \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ impliziert das

$$C \equiv 0.$$

□

10.2 Lemma (Zwischenresultat: Stammfunktion)
Seien für $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, ein a und $\alpha^k \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2)$ gegeben, mit approximierenden Folgen $(a_m)_m$, $(\alpha_m^k)_m \subset W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2)$, so dass $a_m \xrightarrow{m\to\infty} a$ und $\alpha_m^k \xrightarrow{m\to\infty} \alpha^k$ in $W^{1,2} \cap L^\infty$. Seien weiter ξ^k, $b^k \in W_0^{1,2}(D^2)$ und $p^k \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2)$. Wir betrachten $h \in L^2(D^2, \mathbb{R}^2)$ mit

$$h := \nabla a + \alpha^k \; \nabla^\perp \xi^k + \nabla^\perp b^k \; p^k.$$

Angenommen es gilt

$$\int_{D^2} h \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{D^2}), \tag{10.4}$$

dann existiert ein $C \in W_0^{1,2}(D^2)$ mit

$$h = \nabla^\perp C.$$

Beweis. Der Übersicht halber nehmen wir $n = 1$ an. Da die Struktur von $\alpha \nabla^\perp \xi$ und $\nabla^\perp b \; p$ ähnlich ist, betrachten wir den Fall $b = 0$, $p = 0$. Weiterhin nehmen wir $a = \alpha$ an. Man kann einfach verifizieren, dass das folgende Argument auch für die ursprüngliche Behauptung gilt.
Wir betrachten also

$$h := \nabla a + a \; \nabla^\perp \xi$$

für $a \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2)$ und $\xi \in W_0^{1,2}(D^2)$, und es sei (10.4) erfüllt. Wir approximieren ξ durch $\xi_m \in C_0^\infty(D^2)$ und setzen

$$h_m := \nabla a_m + a \nabla^\perp \xi_m \in W^{1,2}(D^2).$$

Es gilt für die äußere Einheitsnormale ν an ∂D^2

$$\langle h_m, \nu \rangle = \langle \nabla a_m, \nu \rangle + a \; \langle \nabla^\perp \xi_m, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2), \tag{10.5}$$

denn

- $\langle \nabla a_m, \nu \rangle \in W_0^{1,2}(D^2)$ nach Theorem 4.32, da $a_m \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2)$ und
- wegen $\text{supp}(\langle \nabla^\perp \xi_m, \nu \rangle) \subset\subset D^2$ gilt auch

$$\text{supp}(a \langle \nabla^\perp \xi_m, \nu \rangle) \subset\subset D^2.$$

Weiter gilt

$$\operatorname{div}(h_m) = \triangle a_m + \nabla a \cdot \nabla^\perp \xi_m \quad \text{punktweise fast überall in } D^2,$$

$$\int_{D^2} \triangle a_m \overset{P4.22}{=} 0$$

und

$$\int_{D^2} \nabla a \cdot \nabla^\perp \xi_m \overset{P4.22}{=} 0.$$

Also erhalten wir

$$\int_{D^2} \operatorname{div}(h_m) = 0.$$

Folglich existieren nach Theorem 5.19, Fall (β), $G_m \in W^{2,2} \cap W_0^{1,2}(D^2)$ und $F_m \in W^{2,2}_{\text{Neu}}(D^2)$ mit $\int_{D^2} F_m = 0$, so dass

$$h_m = \nabla F_m + \nabla^\perp G_m \quad \text{in } D^2. \tag{10.6}$$

Zudem haben wir die Abschätzung

$$\|F_m - F_{m'}\|_{W^{1,2}} + \|G_m - G_{m'}\|_{W^{1,2}} \leq C\|h_m - h_{m'}\|_{L^2}. \tag{10.7}$$

Nun gilt

$$\|\nabla(a_m - a_{m'})\|_{L^2} \xrightarrow{m,m'\to\infty} 0$$

und

$$\|a\ \nabla^\perp \xi_m - a\ \nabla^\perp \xi_{m'}\|_{L^2} \leq \|a\|_{L^\infty}\ \|\nabla(\xi_m - \xi_{m'})\|_{L^2} \xrightarrow{m,m'\to\infty} 0.$$

Also folgt zusammengesetzt

$$\|h_m - h_{m'}\|_{L^2} \xrightarrow{m,m'\to\infty} 0.$$

Damit sind $(G_m)_m$, $(F_m)_m$ wegen (10.7) Cauchy-Folgen in $W_0^{1,2}(D^2)$ bzw. $W^{1,2}(D^2)$, und wir finden Grenzwerte $G \in W_0^{1,2}(D^2)$, $F \in W^{1,2}(D^2)$ mit $\int_{D^2} F = 0$. Die Gleichung (10.6) überträgt sich, das heißt es gilt

$$h = \nabla^\perp G + \nabla F \quad \text{in } D^2.$$

Weiterhin haben wir für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$

$$\left|\int_{D^2} \nabla F \cdot \nabla\varphi\right| \quad \leq \quad \|\nabla F - \nabla F_m\|_{L^2}\ \|\nabla\varphi\|_{L^2} + \left|\int_{D^2} \nabla F_m \cdot \nabla\varphi\right|$$

und wegen $F_m \in W^{2,2}_{\text{Neu}}$ und (10.5)

$$\begin{aligned}
\int_{D^2} \nabla F_m \cdot \nabla\varphi &\overset{W^{2,2}_{\text{Neu}}}{=} -\int_{D^2} \triangle F_m\ \varphi \\
&= -\int_{D^2} \operatorname{div}(\nabla F_m)\ \varphi \\
&\overset{(10.6)}{=} -\int_{D^2} \operatorname{div}(h_m)\ \varphi \\
&\overset{\substack{L.4.5 \\ (10.5)}}{=} \int_{D^2} h_m\ \nabla\varphi \\
&= \int_{D^2} (h_m - h) \cdot \nabla\varphi + \underbrace{\int_{D^2} h \cdot \nabla\varphi}_{\overset{(10.4)}{=} 0} \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int_{D^2} \nabla F \cdot \nabla\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{D^2}),$$

und wegen $F \in W^{1,2}$ und $\int_{D^2} F = 0$ folgt mit der Eindeutigkeit für die Lösung von PDEs mit homogenen NEUMANN-Randwerten aus Lemma 4.14, dass

$$F \equiv 0.$$

Somit haben wir eine Darstellung

$$h = \nabla^\perp G \quad \text{in } D^2$$

für ein $G \in W_0^{1,2}(D^2)$ gefunden. □

10.3 Lemma (Zwischenresultat: Lösung eines PDE-Systems)
Sei $\Lambda > 0$. Es existiert ein $\gamma_0 = \gamma_0(m, \Lambda) > 0$ und eine Konstante $C = C(m, \Lambda)$, so dass für alle $0 < \gamma < \gamma_0$ gilt: Für alle $\xi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$, $P \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m))$ mit $\|P\|_{L^\infty} \leq \Lambda$ und der Abschätzung

$$\|\xi\|_{W^{1,2}} + \|\nabla P\|_{L^2} \leq \gamma \tag{10.8}$$

gibt es ein $A \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m))$ mit $\int_{D^2} A = 0$ und ein $B \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$, so dass schwach gilt:

$$\begin{cases} \triangle A = \nabla A \cdot \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp B \cdot \nabla P & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} A = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} A = 0, \end{cases} \tag{10.9}$$

d.h. es gilt

$$\int_{D^2} \nabla A \cdot \nabla \varphi = -\int_{D^2} (\nabla A \cdot \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp B \cdot \nabla P)\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{D^2}).$$

Weiterhin ist

$$\begin{cases} \triangle B = -\nabla^\perp A \cdot \nabla P^T - \operatorname{div}(A \nabla \xi P^T) - \operatorname{div}(\nabla \xi \; P^T) & \text{in } D^2, \\ B = 0 & \text{auf } \partial D^2, \end{cases} \tag{10.10}$$

also

$$\int_{D^2} \nabla B \cdot \nabla \varphi = \int_{D^2} \nabla^\perp A \cdot \nabla P^T \; \varphi - \int_{D^2} A \nabla \xi \; P^T \cdot \nabla \varphi - \int_{D^2} \nabla \xi \; P^T \cdot \nabla \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2).$$

Zudem gilt dann die Abschätzung

$$\|A\|_{W^{1,2}} + \|A\|_{L^\infty} + \|B\|_{W^{1,2}} \leq C(\Lambda, m)\gamma.$$

Beweis. Wir beginnen mit der PDE (10.9), d.h. wir suchen für alle $B \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ ein $A = A_B \in W^{1,2}(D^2, M(m))$, $\int_{D^2} A = 0$, welches (10.9) erfüllt.Die Idee ist, einen kompakten Operator

$$K: \; W^{1,2}(D^2, M(m)) \to W^{1,2}(D^2, M(m))$$

zu definieren, der

$$\begin{cases} \triangle K(\psi) = \nabla \psi \cdot \nabla^\perp \xi & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} K(\psi) = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} K(\psi) = 0 \end{cases}$$

löst, und dann die FREDHOLM-Alternative, Lemma 3.8, anzuwenden, um die PDE (10.9) zu lösen.

Wir approximieren dazu zunächst $\xi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ durch $\xi_m \in C_0^\infty(D^2, M(m))$. Dann gilt

$$\nabla \psi \cdot \nabla^\perp \xi_m \in L^2(D^2, M(m))$$

und nach Proposition 4.22

$$\int_{D^2} \nabla \psi \cdot \nabla^\perp \xi_m = 0.$$

Damit existiert nach Lemma 4.14 genau ein $v_m \equiv v_m(\psi) \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ mit

$$\begin{cases} \triangle v_m(\psi) = \nabla \psi \cdot \nabla^\perp \xi_m & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} v_m(\psi) = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} v_m(\psi) = 0, \end{cases}$$

und nach dem Satz von FRIEDRICHS, Theorem 4.19, gilt $v_n \in W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}(D^2, M(m))$. Wir setzen $K_n(\psi) := v_n(\psi)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist K_n linear bezüglich $\psi \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ und stetig, denn mit der POINCARÉ-Ungleichung (wir beachten $\int_{D^2} v_n = 0$) und der WENTE-Ungleichung, Theorem 7.1, gilt

$$\|v_n\|_{W^{1,2}} \leq C\|\nabla v_n\|_{L^2} \overset{T.7.1}{\leq} C\|\nabla\psi_k\|_{L^2}\ \|\nabla\xi_n\|_{L^2}.$$

Wir möchten zeigen, dass $\underline{K_n \text{ kompakt}}$ ist.
Seien $\psi_k \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ gegeben und $\|\psi_k\|_{W^{1,2}}$ gleichmäßig beschränkt. Dann gilt für jedes k mit dem Satz von FRIEDRICHS, der POINCARÉ- und der WENTE-Ungleichung, Theorem 7.1, wobei wir $\int_{D^2} K_n(\psi_k) = 0$ benutzen

$$\begin{aligned}
\|K_n(\psi_k)\|_{W^{2,2}} &\leq C(\|\triangle K_n(\psi_k)\|_{L^2} + \|K_n(\psi_k)\|_{L^2}) \\
&\leq C(\|\nabla\psi_k \cdot \nabla^\perp\xi_n\|_{L^2} + \|\nabla K_n(\psi_k)\|_{L^2}) \\
&\overset{T.7.1}{\leq} C(\|\nabla\psi_k\|_{L^2}\ \|\nabla^\perp\xi_n\|_{L^\infty} + \|\nabla\psi_k\|_{L^2}\ \|\nabla\xi_n\|_{L^2}) \\
&\leq C(\|\nabla\xi_n\|_{L^\infty} + \|\nabla\xi_n\|_{L^2})\|\psi_k\|_{W^{1,2}} \\
&\leq \tilde{C}(\|\nabla\xi_n\|_{L^\infty} + \|\nabla\xi_n\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

Somit existiert eine Teilfolge von $(K_n(\psi_k))_k$, welche in $W^{2,2}(D^2, M(m))$ schwach konvergent und stark konvergent in $W^{1,2}(D^2, M(m))$ ist. Also ist $K_n : W^{1,2}(D^2, M(m)) \to W^{1,2}(D^2, M(()m))$ kompakt.

K_n ist eine CAUCHY-Folge im Raum der stetigen, linearen Operatoren $L(W^{1,2}(D^2, M(m)))$: Tatsächlich gilt für ein beliebiges $\psi \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ mit $\|\psi\|_{W^{1,2}} = 1$

$$\begin{cases}
\triangle(K_n(\psi) - K_{n'}(\psi)) = \nabla\psi \cdot \nabla(\xi_n - \xi_{n'}) & \text{in } D^2, \\
\frac{\partial}{\partial\nu}(K_n(\psi) - K_{n'}(\psi)) = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\
\int_{D^2}(K_n(\psi) - K_{n'}(\psi)) = 0.
\end{cases}$$

Deshalb gilt mit der hier entscheidend eingehenden WENTE-Ungleichung, Theorem 7.1,

$$\|\nabla(K_n(\psi) - K_{n'}(\psi))\|_{L^2} \leq C\|\nabla(\xi_n - \xi_{n'})\|_{L^2}\ \|\nabla\psi\|_{L^2}$$

und deshalb

$$\|K_n(\psi) - K_{n'}(\psi)\|_{L(W^{1,2})} \leq C\|\xi_n - \xi_{n'}\|_{W^{1,2}}.$$

Also ist $(K_n)_n$ eine CAUCHY-Folge in $L(W^{1,2}(D^2, M(m)))$, und es existiert ein kompakter Operator $K \in L(W^{1,2}(D^2, M(m)))$ mit $K_n \to K$ in $L(W^{1,2}(D^2, M(m)))$.
Weiter gilt wegen der $W^{1,2}$-Konvergenz, dass

$$\begin{cases}
\triangle K(\psi) = \nabla\psi \cdot \nabla^\perp\xi & \text{in } D^2, \\
\frac{\partial}{\partial\nu}K(\psi) = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\
\int_{D^2} K(\psi) = 0,
\end{cases} \tag{10.11}$$

denn für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$ gilt

$$\int_{D^2} \nabla K(\psi) \cdot \nabla\varphi + \int_{D^2} \nabla\psi \cdot \nabla^\perp\xi\ \varphi = \int_{D^2} \nabla(K(\psi) - K_n(\psi)) \cdot \nabla\varphi + \int_{D^2} \nabla\psi \cdot \nabla^\perp(\xi - \xi_n)\ \varphi.$$

Nun bereiten wir die FREDHOLM-Alternative vor:
Zunächst schränken wir K auf $\psi \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ mit $\int_{D^2}\psi = 0$ ein. Dann bleibt K stetig, linear und kompakt.
Falls $(I - K)(\psi) = 0$, dann erfüllt es

$$\begin{cases}
\triangle\psi = \triangle K(\psi) = \nabla\psi \cdot \nabla^\perp\xi & \text{in } D^2, \\
\frac{\partial}{\partial\nu}\psi = 0 & \text{auf } D^2, \\
\int_{D^2}\psi = 0,
\end{cases}$$

denn
$$\int_{D^2} \nabla\psi \cdot \nabla\varphi = \int_{D^2} \nabla K(\psi) \cdot \nabla\varphi \overset{(10.11)}{=} -\int_{D^2} \nabla\psi \cdot \nabla^\perp \xi \ \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{D^2}).$$
Mit der WENTE-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla\psi\|_{L^2} &\overset{T7.1}{\leq} C\|\nabla\xi\|_{L^2} \ \|\nabla\psi\|_{L^2} \\ &\overset{(10.8)}{\leq} C\gamma\|\nabla\psi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Für $0 < \gamma < \gamma_0$ und γ_0 hinreichend klein gilt dann

$$\|\nabla\psi\|_{L^2} = 0,$$

und somit wegen $\int_{D^2}\psi = 0$

$$\psi \equiv 0.$$

$(I-J)$ ist also injektiv als Operator von $W^{1,2}(D^2, M(m)) \cap \{\int_{D^2} \cdot = 0\} \to W^{1,2}(D^2, M(m)) \cap \{\int_{D^2} \cdot = 0\}$, und da $W^{1,2}(D^2, M(m))$ ein HILBERT-Raum und $W^{1,2}(D^2, M(m)) \cap \{\int_{D^2} \cdot = 0\}$ ein abgeschlossener Unterraum ist, folgt aus der FREDHOLM-Alternative, Lemma 3.8, dass für alle $w \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ mit $\int_{D^2} w = 0$ genau ein $\psi_w \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ mit $\int_{D^2}\psi = 0$ existiert mit

$$\psi_w = K(\psi_w) + w,$$

also
$$\triangle\psi_w = \triangle K(\psi_w) + \triangle w = \nabla\psi_w \cdot \nabla^\perp\xi + \triangle w \quad \text{in } D^2.$$
Um (10.9) zu lösen wollen wir zeigen, dass ein $w \in \mathrm{Im}(I-K)$ existiert, so dass

$$\triangle w = \nabla^\perp B \cdot \nabla P.$$

Dazu approximieren wir zunächst B durch $B_n \in C_0^\infty(D^2, M(m))$ und erhalten $w_n \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ mit

$$\begin{cases} \triangle w_n = \nabla^\perp B_n \cdot \nabla P & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial\nu} w_n = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} w_n = 0, \end{cases}$$

da wir nach Proposition 4.22 $\int_{D^2} \nabla^\perp B_n \ \nabla P = 0$ wissen und somit Lemma 4.14 anwendbar ist. Mit der WENTE-Ungleichung erhält man

$$\|w_n - w_{n'}\|_{W^{1,2}} \leq C\|\nabla(B_n - B)\|_{L^2} \ \|\nabla P\|_{L^2} \xrightarrow{n,n'\to\infty} 0.$$

Dann existiert $w \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ mit $\int_{D^2} w = 0$ als Grenzwert, und wegen

$$\int_{D^2} \nabla w \cdot \nabla\varphi + \int_{D^2} \nabla^\perp B \cdot \nabla P \ \varphi = \int_{D^2} \nabla(w - w_n) \cdot \nabla\varphi + \int_{D^2} \nabla^\perp(-B_n + B) \cdot \nabla P \ \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$$

gilt
$$\begin{cases} \triangle w = \nabla^\perp B \cdot \nabla P & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial\nu} w = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} w = 0. \end{cases} \tag{10.12}$$

Somit existiert für jedes $B \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ genau ein $A := \psi_w \in W^{1,2}(D^2, M(m))$, welches (10.9) erfüllt. Dabei folgt die Eindeutigkeit aus der eindeutigen Lösbarkeit von (10.12) und der Injektivität von $I - K$.

Nun ist die rechte Seite von (10.9) wieder komponentenweise vom Typ

$$\triangle A = \sum \{a_k, b_k\},$$

und somit folgt aus der WENTE-Ungleichung, Theorem 7.1,

$$\|A\|_{L^\infty} + \|\nabla A\|_{L^2} \leq C(\|\nabla A\|_{L^2}\ \|\xi\|_{W^{1,2}} + \|B\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2}).$$

Nach Vorausetzung ist $\|\xi\|_{W^{1,2}} \leq \gamma$, also folgt für $\gamma_0 > 0$ ggf. noch kleiner

$$\|A\|_{L^\infty} + \|\nabla A\|_{L^2} \leq C(\|B\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2}). \tag{10.13}$$

Die Abbildung $B \mapsto A$ ist dann linear wegen der Injektivität von $I - K$ und als Abbildung

$$I - K:\ W_0^{1,2}(D^2, M(m)) \to W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m))$$

stetig.
Nun betrachten wir die zweite PDE (10.10). Wir suchen ein $B \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$, so dass für die Lösung $A \equiv A_B$ von (10.9) gilt

$$\begin{cases} \triangle B = -\nabla^\perp A \cdot \nabla P^T - \operatorname{div}(A\ \nabla\xi\ P) - \operatorname{div}(\nabla\xi\ P^T) & \text{in } D^2, \\ B = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases}$$

Wir benutzen dieselbe Idee wie für (10.9).
Wir definieren zunächst $K(\Phi)$, so dass

$$\begin{cases} \triangle K(\Phi) = \nabla^\perp A_\Phi \cdot \nabla P^T & \text{in } D^2, \\ K(\Phi) = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases} \tag{10.14}$$

Das heißt für $\Phi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ bilden wir die Lösung $A_\Phi \in W^{1,2}(D^2, M(m))$ von (10.9) für Φ statt B, und können dann zunächst für P^T approximiert in C^∞ eine Lösung $K_n(\Phi)$ von (10.14) finden, so dass $K_n:\ \Phi \mapsto K_m(\Phi)$ kompakt, linear und stetig ist. Schließlich erreichen wir über Approximation $K(\Phi) \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$, welches (10.14) löst. Weiterhin gilt mit der WENTE-Ungleichung und der Abschätzung (10.13) für A_Φ

$$\begin{aligned} \|K(\Phi)\|_{W^{1,2}} &\leq C\|\nabla A\|_{L^2}\ \|\nabla P^T\|_{L^2} \\ &\overset{(10.13)}{\leq} C\|\nabla P\|_{L^2}^2\ \|\Phi\|_{W^{1,2}}. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Zum zweiten Summanden der Rechten Seite von (10.10):
Wir approximieren zunächst ξ durch $\xi_n \in C_0^\infty(D^2)$ und erhalten

$$\operatorname{div}(A_\Phi\ \nabla\xi_n\ P^T) \in L^2(D^2, M(m)),$$

da $A_\Phi \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m))$, $P \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m))$.
Somit existiert eine eindeutige schwache Lösung $G_n(\Phi) \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ von

$$\begin{cases} \triangle G_n(\Phi) = \operatorname{div}(A_\Phi\ \nabla\xi_n\ P^T) & \text{in } D^2, \\ G_n(\Phi) = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases} \tag{10.16}$$

Dabei fassen wir die rechte Seite komponentenweise als Funktional in $(W_0^{1,2}(D^2, M(m)))^*$ auf, d.h. für $\varphi \in C_0^\infty(D^2)$ als

$$\varphi \mapsto (\operatorname{div}(A_\Phi\ \nabla\xi_n\ P)[\varphi])_{ij} := \int_{D^2} A\ (\nabla\xi_n\ P\ \nabla\varphi)_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Dann gilt unter Benutzung, dass punktweise fast überall $P \in L^\infty(D^2, M(m))$, für $1 \leq i, j \leq m$

$$\begin{aligned} \left|(\operatorname{div}(A_\Phi\ \nabla\xi\ P^T)[\varphi])_{ij}\right| &\leq \|A\|_{L^\infty}\ \|\nabla\xi_n\|_{L^2}\ \|P\|_{L^\infty}\|\nabla\varphi\|_{L^2} \\ &\overset{(10.13)}{\leq} C(\Lambda)\|\Phi\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2}\|\nabla\xi_n\|_{L^2}\ \|\varphi\|_{W^{1,2}}, \end{aligned}$$

also

$$\|(\operatorname{div}(A_\Phi\ \nabla\xi\ P^T))_{ij}\|_{(W_0^{1,2}(D^2,M(m)))^*} \leq C\|\Phi\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2}\|\nabla\xi_n\|_{L^2}.$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung von (10.16) und Lemma 4.13 erhalten wir folglich

$$\begin{aligned}\|G_n(\Phi)\|_{W^{1,2}} &\leq C\|\operatorname{div}(A_\Phi\ \nabla\xi\ P^T)\|_{(W_0^{1,2}(D^2,M(m)))^*}\\ &\leq C\|\Phi\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2}\|\nabla\xi_n\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{10.17}$$

Weiter gilt wegen der Eindeutigkeit der Lösung $G_n(\Phi)$ und der Linearität von A_Φ bezüglich Φ, dass G_n linear und stetig in Φ ist, und wir erhalten wieder aus Lemma 4.13 die Abschätzung

$$\|G_n(\Phi) - G_{n'}(\Phi)\|_{W^{1,2}} \leq C\|\Phi\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2}\|\nabla(\xi_n - \xi_{n'})\|_{L^2}.$$

Die Folge $(G_n)_m$ ist also eine CAUCHY-Folge in $L(W_0^{1,2}(D^2, M(m)))$, und somit existiert der Grenzwert $G \in L(W_0^{1,2}(D^2), M(m))$ mit der Abschätzung

$$\|G(\Phi)\|_{W^{1,2}} \overset{(10.17)}{\leq} C\|\Phi\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2}\|\nabla\xi\|_{L^2}. \tag{10.18}$$

Zudem gilt wegen der $W^{1,2}$-Konvergenz schwach

$$\begin{cases}\triangle G(\Phi) = \operatorname{div}(A_\Phi\ \nabla^\perp\xi\ P) & \text{in } D^2,\\ G(\Phi) = 0 & \text{auf } \partial D^2,\end{cases}$$

wobei die rechte Seite komponentenweise als Funktional aufgefasst wird.

Falls wir noch zeigen, dass $\underline{G_n(\cdot) \text{ kompakt}}$ ist, dann folgt, dass auch G kompakt ist. Da die rechte Seite von (10.16) in L^2 liegt, folgt aus dem Satz von FRIEDRICHS

$$\triangle G_n(\Phi) = \operatorname{div}(A_\Phi\ \nabla\xi_n\ P^T) \quad \text{punktweise fast überall in } D^2$$

mit der folgenden Abschätzung, wobei man beachtet, dass A_Φ, $P \in L^\infty(D^2, M(m))$:

$$\begin{aligned}\|G_n(\Phi)\|_{W^{2,2}} &\leq C(\|\triangle G_n(\Phi)\|_{L^2} + \|G_n(\Phi)\|_{L^2})\\ &\overset{(10.17)}{\leq} C(\Lambda)(\|\nabla A_\Phi\|_{L^2}\|\nabla\xi_n\|_{L^\infty} + \|A_\Phi\|_{L^\infty}\ \|\triangle\xi_n\|_{L^2} + \|A_\Phi\|_{L^\infty}\ \|\nabla\xi_n\|_{L^\infty}\ \|\nabla P\|_{L^2}\\ &\qquad +\|\Phi\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2}\|\nabla\xi_n\|_{L^2})\\ &\overset{(10.13)}{\leq} C(\Lambda)[\|\nabla P\|_{L^2}\ \|\Phi\|_{W^{1,2}}\ (\|\nabla\xi_n\|_{L^2} + \|\triangle\xi_n\|_{L^2} + \|\nabla P\|_{L^2}\ \|\nabla\xi_n\|_{L^\infty})].\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für eine gleichmäßig beschränkte Folge $(\Phi_k)_k \subset W_0^{1,2}(D^2, M(m))$, dass $(\|G_n(\Phi_k)\|_{W^{2,2}})_k$ gleichmäßig beschränkt ist, und somit eine schwach konvergente Teilfolge von $(G_n(\Phi_k))_k$ in $W^{2,2}(D^2, M(m))$ und stark konvergent in $W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ existiert. Dies impliziert die Kompaktheit.

Insbesondere haben wir nun gezeigt, dass $-(G+K)$ ein kompakter Operator

$$-(G+K):\ W_0^{1,2}(D^2, M(m)) \to W_0^{1,2}(D^2, M(m))$$

ist. Weiter gilt, dass falls $\Phi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ und

$$[I + (G+K)](\Phi) = 0, \tag{10.19}$$

dann

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_{W^{1,2}} &\overset{(10.19)}{\leq} \|G(\Phi)\|_{W^{1,2}} + \|K(\Phi)\|_{W^{1,2}}\\ &\overset{\substack{(10.15)\\(10.18)}}{\leq} C(\|\Phi\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2}\ \|\nabla\xi\|_{L^2} + \|\nabla P\|_{L^2}^2\ \|\Phi\|_{W^{1,2}})\\ &\overset{(10.8)}{\leq} 2C(\|\Phi\|_{W^{1,2}}\gamma_0^2),\end{aligned}$$

also falls γ_0 klein genug
$$\Phi \equiv 0.$$
Folglich gilt mit der FREDHOLM-Alternative, Lemma 3.8, dass für alle $w \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ genau ein $\Phi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ existiert mit
$$\Phi_w = -K(\Phi) - G(\Phi) - w. \tag{10.20}$$
Wir definieren $w \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ durch
$$\begin{cases} \triangle w = \operatorname{div}(\nabla\xi\ P^T) & \text{in } D^2, \\ w = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases} \tag{10.21}$$
Dies ist möglich, da
$$\varphi \mapsto \operatorname{div}(\nabla\xi\ P^T)[\varphi] := \int_{D^2} \nabla\xi \cdot P^T \nabla\varphi$$
komponentenweise ein Funktional auf $W_0^{1,2}(D^2)$ ist, für welches wegen $P \in L^\infty(D^2, M(m))$ punktweise fast überall gilt
$$\left|\operatorname{div}(\nabla\xi\ P^T)[\varphi]\right| \leq C(\Lambda)\|\nabla\xi\|_{L^2}\ \|\nabla\varphi\|_{L^2}.$$
Dann existiert nach Lemma 4.13, $w \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$, das die PDE (10.21) erfüllt, und es gilt
$$\begin{aligned} \|w\|_{W^{1,2}} &\leq C\|\operatorname{div}(\nabla\xi\ P^T)\|_{(W^{1,2})^*} \\ &\leq C(\Lambda)\|\xi\|_{W^{1,2}}. \end{aligned} \tag{10.22}$$
Wir setzen $B := \Phi_w \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$; dann erhalten wir aus (10.20)
$$\begin{cases} \triangle B = -\nabla^\perp A_B \cdot \nabla P^T - \operatorname{div}(A_B\ \nabla\xi\ P^T) - \operatorname{div}(\nabla\xi\ P^T) & \text{in } D^2, \\ B = 0 & \text{auf } \partial D^2. \end{cases}$$
Aus (10.15), (10.18) und (10.22) erhalten wir zudem
$$\begin{aligned} \|B\|_{W^{1,2}} &\overset{(10.20)}{\leq} \|K(B)\|_{W^{1,2}} + \|G(B)\|_{W^{1,2}} + \|w\|_{W^{1,2}} \\ &\leq C(\Lambda)(\|\nabla P\|^2_{W^{1,2}}\ \|B\|_{W^{1,2}} + \|B\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2}\ \|\nabla\xi\|_{L^2} + \|\xi\|_{W^{1,2}}) \\ &\leq C(\Lambda)(\|B\|_{W^{1,2}}\ \gamma_0^2 + \|\xi\|_{W^{1,2}}) \end{aligned}$$
und somit für $\gamma_0 = \gamma_0(\Lambda)$ hinreichend klein mit (10.8)
$$\|B\|_{W^{1,2}} \leq C(\Lambda)\|\xi\|_{W^{1,2}} \overset{(10.8)}{\leq} C(\Lambda)\gamma. \tag{10.23}$$
Daraus folgt wiederum
$$\begin{aligned} \|B\|_{W^{1,2}} + \|A\|_{L^\infty} + \|\nabla A\|_{L^2} &\overset{\substack{(10.13)\\(10.23)}}{\leq} C(\Lambda)(\|B\|_{W^{1,2}}\ \|\nabla P\|_{L^2} + \gamma) \\ &\overset{(10.8)}{\leq} C(\Lambda)(\gamma_0\|B\|_{W^{1,2}} + \gamma), \end{aligned}$$
woraus schließlich
$$\|B\|_{W^{1,2}} + \|A\|_{L^\infty} + \|\nabla A\|_{L^2} \leq C(\Lambda)\gamma$$
folgt. □

Nun sind wir in der Lage, Ω zu zerlegen:

10.4 Theorem (Dekomposition)
(vgl. [Riv07a], Theorem I.4)Es existiert ein $\varepsilon = \varepsilon(m) > 0$ und $C = C(m) > 0$, so dass für jedes $\Omega = \left(\Omega^i_j\right)_{1\le i,j\le m} \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 \le \varepsilon \tag{10.24}$$

ein $A \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, GL(m))$ mit $A^{-1} \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, GL(m))$ und ein $B \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ existieren, so dass

$$\int_{D^2} |\nabla A|^2 + \left|\nabla A^{-1}\right|^2 + \|\operatorname{dist}(A, O(m))\|^2_{L^\infty} \le C(m) \int_{D^2} |\Omega|^2, \tag{10.25}$$

$$\int_{D^2} |\nabla B|^2 \le C(m) \int_{D^2} |\Omega|^2, \tag{10.26}$$

und

$$\nabla A - A\Omega = \nabla^\perp B \quad \textit{punktweise fast überall in } D^2. \tag{10.27}$$

Beweis. Wir wählen zunächst ε als $\varepsilon(m)$ aus Lemma 9.9. Sei $\Omega \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ mit

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 \le \varepsilon.$$

Aus Lemma 9.9 folgt die Existenz einer Konstanten $C(m)$ und von $\xi \in W_0^{1,2}(D^2, so(m))$, $P \in W^{1,2}(D^2, O(m))$ mit

$$\nabla^\perp \xi = P^T \nabla P + P^T \Omega P \quad \text{punktweise fast überall in } D^2 \tag{10.28}$$

und

$$\|\xi\|_{W^{1,2}(D^2)} + \|\nabla P\|_{L^2} \le C(m)\ \|\Omega\|_{L^2(D^2)}. \tag{10.29}$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ ggf. noch kleiner, so dass $C(m)\sqrt{\varepsilon} < \gamma_0$ für das γ_0 aus Lemma 10.3. Wir suchen A, B, so dass

$$\nabla A - A\Omega = \nabla^\perp B \quad \text{punktweise fast überall in } D^2.$$

Für $\gamma := C(m)\|\Omega\|_{L^2} < \gamma_0$ gilt nach Lemma 10.3: Es existiert ein $\hat{A} \in W^{1,2}(D^2, M(m))$, $B \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$, so dass schwach gilt

$$\begin{cases} \triangle \hat{A} = \nabla \hat{A} \cdot \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp B \cdot \nabla P & \text{in } D^2, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \hat{A} = 0 & \text{auf } \partial D^2, \\ \int_{D^2} \hat{A} = 0, \end{cases} \tag{10.30}$$

das heißt

$$\int_{D^2} \nabla \hat{A} \cdot \nabla \varphi = -\int_{D^2} (\nabla \hat{A} \cdot \nabla^\perp \xi + \nabla^\perp B \cdot \nabla P)\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\overline{D^2}),$$

sowie schwach

$$\begin{cases} \triangle B = -\nabla^\perp \hat{A} \cdot \nabla P^T - \operatorname{div}(\hat{A}\ \nabla \xi\ P^T) - \operatorname{div}(\nabla \xi P^T) & \text{in } D^2, \\ B = 0 & \text{auf } \partial D^2, \end{cases} \tag{10.31}$$

also

$$-\int_{D^2} \nabla B \cdot \nabla \varphi = -\int_{D^2} \nabla^\perp \hat{A} \cdot \nabla P^T \varphi + \int_{D^2} \hat{A} \nabla \xi P^T \cdot \nabla \varphi + \int_{D^2} \nabla \xi\ P^T \cdot \nabla \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2),$$

mit der Abschätzung

$$\|\hat{A}\|_{W^{1,2}} + \|\hat{A}\|_{L^\infty} + \|B\|_{W^{1,2}} \le C(m, \|P\|_{L^\infty})\gamma = C'(m)\|\Omega\|_{L^2}. \tag{10.32}$$

Insbesondere gilt

$$\|\hat{A}\|_{L^\infty} \le C'(m)\sqrt{\varepsilon},$$

und somit erhalten wir für ε hinreichend klein

$$\|\hat{A}\|_{L^\infty} \le \frac{\sigma}{2},$$

für die kleine Konstante $\sigma \in (0,1)$ aus Lemma 8.14, welche dort γ heißt. Wegen $\hat{A} \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m))$ folgt dann nach dem Lemma über die NEUMANN-Reihe, Lemma 8.14, dass

$$\tilde{A} := I + \hat{A} = I - (-\hat{A}) \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, GL(m))$$

und

$$\tilde{A}^{-1} := (\tilde{A})^{-1} \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, GL(m))$$

mit

$$\|\tilde{A}^{-1}\|_{L^2} + \|\tilde{A}^{-1}\|_{L^\infty} \le C \frac{1}{\sigma - \|\hat{A}\|_{L^\infty}} \le \tilde{C}. \tag{10.33}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \nabla\tilde{A} - \tilde{A}\,\nabla^\perp\xi - \nabla^\perp B\ P &= +\nabla\hat{A} - \nabla^\perp\xi - \hat{A}\nabla^\perp\xi - \nabla^\perp B\ P \\ &= (\nabla\hat{A} - \hat{A}\nabla^\perp\xi - \nabla^\perp B\ P) - \nabla^\perp\xi \\ &=: h - \nabla^\perp\xi. \end{aligned} \tag{10.34}$$

Nun gilt für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$ unter Anwendung der PDE (10.30)

$$\begin{aligned} \int_{D^2} h \cdot \nabla\varphi &= \int_{D^2} (\nabla\hat{A} - \hat{A}\nabla^\perp\xi - \nabla^\perp B\ P) \cdot \nabla\varphi \\ &\overset{(10.30)}{=} \int_{D^2} (-\nabla\hat{A} \cdot \nabla^\perp\xi\ \varphi - \hat{A}\ \nabla^\perp\xi \cdot \nabla\varphi) + \int_{D^2} (-\nabla^\perp B\ P \cdot \nabla\varphi - \nabla^\perp B \cdot \nabla P\ \varphi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{D^2})$ gilt komponentenweise[37] wegen $\xi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$

$$\begin{aligned} \int_{D^2} \hat{A}\ \nabla^\perp\xi \cdot \nabla\varphi &= \int_{D^2} \hat{A}\ \nabla\varphi \cdot \nabla^\perp\xi \\ &= \int_{D^2} \nabla(\hat{A}\varphi) \cdot \nabla^\perp\xi - \int_{D^2} \nabla\hat{A} \cdot \nabla^\perp\xi\ \varphi \\ &\overset{P.4.22}{=} -\int_{D^2} \nabla\hat{A} \cdot \nabla^\perp\xi\ \varphi, \end{aligned}$$

und wegen $B \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$

$$\begin{aligned} -\int_{D^2} \nabla^\perp B \cdot \nabla P\ \varphi &\overset{P.4.22}{=} \int_{D^2} \nabla^\perp B \cdot \nabla(P\varphi) - \int_{D^2} \nabla^\perp B \cdot \nabla P\ \varphi \\ &= \int_{D^2} \nabla^\perp B\ P \cdot \nabla\varphi. \end{aligned}$$

Weiter ist $\triangle\hat{A}$ komponentenweise vom Typ

$$\triangle\hat{A} = \sum_k \{a_k, b_k\}$$

ist, mit $a \in W_0^{1,2}(D^2)$, $b \in W^{1,2}(D^2)$ nach der PDE (10.30). Somit ist $\hat{A}$ nach Korollar 7.2 komponentenweise durch $W^{2,2}_{\mathrm{Neu}}$-Funktionen in $L^\infty \cap W^{1,2}$ approximierbar, denn es gilt $\int_{D^2} \hat{A} = 0$. Aus Lemma 10.2 folgt die Existenz eines $\tilde{C} \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ mit

$$h = \nabla^\perp\tilde{C} \quad \text{in } D^2.$$

Wegen $\xi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ gilt $C := \tilde{C} - \xi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$ und wir haben

$$h - \nabla^\perp\xi = \nabla^\perp C. \tag{10.35}$$

[37] Es gilt $(\hat{A}\ \nabla^\perp\xi \cdot \nabla\varphi)^j_i = \hat{A}^k_i\ \nabla^\perp\xi^j_k \cdot \nabla\varphi = \hat{A}^k_i\ \nabla\varphi \cdot \nabla^\perp\xi^j_k$, d.h. wir können den Gradienten der skalaren Funktion φ mit $\nabla^\perp\xi$ vertauschen.

Ausgeschrieben bedeutet dies, dass

$$\nabla\hat{A} - \hat{A}\nabla^{\perp}\xi - \nabla^{\perp}\xi - \nabla^{\perp}B\ P = \nabla^{\perp}C,$$

und somit

$$-\nabla^{\perp}\hat{A} - \hat{A}\nabla\xi - \nabla\xi - \nabla B\ P = \nabla C,$$

denn aus

$$\begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{bmatrix} f = \nabla f = \nabla^{\perp} g = \begin{bmatrix}-\partial_y\\ \partial_x\end{bmatrix} g$$

folgt

$$\begin{bmatrix}\partial_y\\ -\partial_x\end{bmatrix} f = -\nabla^{\perp} f = \nabla g = \begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{bmatrix} g.$$

Daraus schließen wir wegen $P \in O(m)$ punktweise fast überall

$$\nabla^{\perp}\hat{A}P^T + \hat{A}\nabla\xi\ P^T + \nabla\xi\ P^T + \nabla B = -\nabla C\ P^T,$$

also

$$\operatorname{div}(\nabla C\ P^T) = 0,$$

denn für alle $\varphi \in C_0^{\infty}(D^2)$ gilt

$$\begin{aligned}
-\int_{D^2} \nabla C\ P^T \cdot \nabla\varphi \quad &= \quad \int_{D^2} \nabla B \cdot \nabla\varphi + \nabla^{\perp}\hat{A}P^T \cdot \nabla\varphi + \hat{A}\nabla\xi \cdot P^T\nabla\varphi + \nabla\xi\ P^T \cdot \nabla\varphi \\
&\overset{P.4.22}{=} \int_{D^2} \nabla B \cdot \nabla\varphi - \nabla^{\perp}\hat{A} \cdot \nabla P^T\ \varphi + \hat{A}\nabla\xi \cdot P^T\nabla\varphi + \nabla\xi P^T \cdot \nabla\varphi \\
&\overset{(10.31)}{=} 0,
\end{aligned}$$

wenn wir für die Anwendung von Proposition 4.22 benutzen, dass $P^T\nabla\varphi = \nabla(P^T\varphi) - \nabla P^T\ \varphi$, und beachten, dass $P^T\varphi \in W_0^{1,2}(D^2, M(m))$. Weiter gilt

$$\|\nabla P^T\|_{L^2} = \|\nabla P\| \overset{(10.29)}{\leq} C(m)\ \|\Omega\|_{L^2} \leq C(m)\sqrt{\varepsilon}.$$

Wählen wir $\varepsilon > 0$ ggf. noch kleiner, so dass $C(m)\sqrt{\varepsilon}$ klein genug für die Anwendung von Lemma 10.1 ist, dann gilt

$$C \equiv 0$$

und somit folgt aus (10.34) und (10.35)

$$\nabla\tilde{A} - \tilde{A}\ \nabla^{\perp}\xi - \nabla^{\perp}B\ P = 0.$$

Also erhält man durch Multiplikation mit P^T

$$\begin{aligned}
\nabla^{\perp}B \quad &= \quad \nabla\tilde{A}\ P^T - \tilde{A}\ \nabla^{\perp}\xi P^T \\
&= \quad \nabla(\tilde{A}P^T) - \tilde{A}\nabla P^T - \tilde{A}\ \nabla^{\perp}\xi P^T \\
&\overset{(10.28)}{=} \nabla(\tilde{A}P^T) - \tilde{A}\nabla P^T - \tilde{A}(P^T\ \nabla P + P^T\Omega P)P^T \\
&= \quad \nabla(\tilde{A}P^T) - \tilde{A}\nabla P^T - \tilde{A}P^T\nabla P\ P^T - \tilde{A}P^T\Omega \\
&= \quad \nabla(\tilde{A}P^T) - \tilde{A}\nabla P^T - \tilde{A}P^T \underbrace{\nabla(P\ P^T)}_{=0} + \tilde{A}P^T P\nabla P^T - \tilde{A}P^T\Omega \\
&= \quad \nabla(\tilde{A}P^T) - \tilde{A}P^T\Omega \\
&= \quad \nabla A - A\Omega
\end{aligned}$$

für $A := \tilde{A}P^T \in W^{1,2}(D^2, M(M))$. Weiterhin gilt wegen $\tilde{A} \in GL(m)$ punktweise fast überall, dass auch $A = \tilde{A}P^T \in GL(m)$ punktweise fast überall, da $P \in O(m)$ und somit

$$(\tilde{A}P^T)(P\tilde{A}^{-1}) = I.$$

Aus $\hat{A} \in L^\infty$ folgert man $\tilde{A} = \hat{A} + I \in L^\infty$ und erhält

$$A = \tilde{A}P^T \in L^\infty, \quad A^{-1} \in W^{1,2} \cap L^\infty.$$

Zu den Abschätzungen:Wir haben schon aus (10.32)

$$\|B\|_{W^{1,2}} \leq C(m)\|\Omega\|,$$

also folgt insbesondere (10.26). Weiter gilt

$$\hat{A} \in L^\infty$$

und aus (10.32) wissen wir

$$\|\hat{A}\|_{L^\infty} \leq C\|\Omega\|_{L^2}. \tag{10.36}$$

Somit gilt

$$\|\tilde{A} - I\|_{L^\infty} = \|\hat{A}\|_{L^\infty} \leq C\|\Omega\|_{L^2},$$

woraus wiederum folgt

$$\begin{aligned} \|A - P^T\|_{L^\infty} &= \|(\tilde{A} - I)P^T\|_{L^\infty} \\ &\leq C(m)\|P^T\|_{L^\infty}\ \|\tilde{A} - I\|_{L^\infty} \\ &\leq \tilde{C}(m)\|\Omega\|_{L^2}, \end{aligned}$$

also

$$\|\operatorname{dist}(A, O(m))\|^2_{L^\infty} \leq \|A - P^T\|^2_{L^\infty} \leq C\int_{D^2} |\Omega|^2.$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \|\nabla A\|_{L^2} &= \|\nabla((\hat{A} + I)P^T)\|_{L^2} \\ &\leq \|\nabla\hat{A}\|_{L^2}\ \tilde{C} + \|\hat{A} + I\|_{L^\infty}\ \|\nabla P\|_{L^2} \\ &\leq \tilde{C}\|\nabla\hat{A}\|_{L^2} + \|\hat{A}\|_{L^\infty}\ \|\nabla P\|_{L^2} + C(m)\|\nabla P\|_{L^2} \\ &\overset{(10.29)}{\leq} \tilde{C}\|\nabla\hat{A}\|_{L^2} + C(m)\sqrt{\varepsilon}\|\hat{A}\|_{L^\infty} + C(m)\|\Omega\|_{L^2} \\ &\overset{(10.32)}{\leq} C(\|\nabla\hat{A}\|_{L^2} + \|\Omega\|_{L^2}) \\ &\leq C\|\Omega\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Für den Beweis von (10.25) ist also nur noch zu zeigen, dass $\|\nabla(A^{-1})\|_{L^2} \leq C(m)\|\Omega\|_{L^2}$. Wir haben bereits $\tilde{A}$, $\tilde{A}^{-1} \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, GL(m))$. Nun gilt[38] $(W^{1,2} \cap L^\infty) \cdot (W^{1,2} \cap L^\infty) \subset W^{1,2} \cap L^\infty$, und somit gilt punktweise fast überall

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla(\tilde{A}^{-1}\tilde{A}) \\ &= \nabla\tilde{A}^{-1}\ \tilde{A} + \tilde{A}^{-1}\ \nabla\tilde{A}, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$-\nabla\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}\ \nabla\tilde{A}\ \tilde{A}^{-1} \quad \text{punktweise fast überall in } D^2.$$

[38] Aus Lemma 4.27 folgt, dass für $f, g \in W^{1,2}(D^2) \cap L^\infty$ auch $fg \in W^{1,1}$ liegt. Da $\nabla(fg) \in L^2(D^2)$, wie man sich leicht klar macht, gilt auch $fg \in W^{1,2}(D^2)$.

Somit gilt

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{A}^{-1}\|_{L^2} &\leq \|\tilde{A}^{-1}\|^2_{L^\infty} \|\nabla \tilde{A}\|_{L^2} \\ &\overset{(10.33)}{\leq} 4C^2 \|\nabla \tilde{A}\|_{L^2} \\ &= 4C^2 \|\nabla \hat{A}\|_{L^2} \\ &\overset{(10.32)}{\leq} C\|\Omega\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{10.37}$$

Wegen $A^{-1} = P\tilde{A}^{-1}$, $P \in O(m)$, (10.29), (10.33) und (10.37) folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla A^{-1}\|_{L^2} &\leq \|P\|_{L^\infty} \|\nabla \tilde{A}^{-1}\|_{L^2} + \|\tilde{A}\|_{L^\infty} \|\nabla P\|_{L^2} \\ &\leq (C + \sqrt{\varepsilon})\ \|\Omega\|_{L^2} \\ &\overset{\varepsilon \leq 1}{\leq} C\|\Omega\|_{L^2}, \end{aligned}$$

und somit erhält man $A^{-1} \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, GL(m))$ mit der Abschätzung

$$\int_{D^2} \left|\nabla A^{-1}\right|^2 \leq C \int_{D^2} |\Omega|^2.$$

□

10.2. Erhaltungsätze

Wir zeigen nun, dass aus $\triangle u = \Omega \cdot \nabla u$ für geeignetes Ω der Erhaltungssatz $\operatorname{div}(A\nabla u + B\nabla u) = 0$ folgt.

10.5 Lemma (Testfunktionen von PDEs mit rechter Seite in $\mathbf{L^1}$)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet und $f \in L^1(\Omega)$, $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Weiterhin gelte

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\ \varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{10.38}$$

Dann gilt auch

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\ v \quad \textit{für alle } v \in W_0^{1,2} \cap L^\infty(\Omega) \textit{ mit } \operatorname{supp}(v) \subset\subset \Omega.$$

Beweis. Sei $v \in W_0^{1,2} \cap L^\infty(\Omega)$ und $\operatorname{supp} v \subset\subset \Omega$. Wir wählen einen Faltungskern $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$, d.h. $0 \leq \eta \leq 1$ auf $\mathbb{R}^n$ und $\int_{B_1(0)} \eta = 1$. Wir setzen

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\ \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

und definieren dann die Faltung von v (wir setzen v dazu formal außerhalb von Ω durch 0 fort)

$$v_\varepsilon := \eta_\varepsilon * v \quad \text{für } \varepsilon > 0.$$

Dann ist $v_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Weiter gilt für alle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein (z.B. $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(v), \partial\Omega)$), dass für ein gewisses $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt $\operatorname{supp}(v_\varepsilon) \subset \Omega'$. Außerdem haben wir $v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} v$ in $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, also insbesondere in $W^{1,2}(\Omega')$, und da v_ε außerhalb von $\Omega' \equiv 0$, auch in ganz $W^{1,2}(\Omega)$. Schließlich gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ wegen $\eta \geq 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\ v(y)\ \mathbf{d}y\right| \\ &= \left|\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)\ v(y)\ \mathbf{d}y\right| \\ &\leq \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)\mathbf{d}y \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned} \tag{10.39}$$

Wegen $v_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ ist

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u - \int_\Omega v\ f \overset{(10.38)}{=} \int_\Omega \nabla(v - v_\varepsilon) \cdot \nabla u - \int_\Omega (v - v_\varepsilon)\ f + 0.$$

Nun hat man einerseits

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \nabla(v - v_\varepsilon) \cdot \nabla u \right| &\leq \|v - v_\varepsilon\|_{W^{1,2}(\Omega)}\ \|\nabla u\|_{L^2} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0, \end{aligned}$$

und andererseits gilt für eine Teilfolge $\varepsilon \to 0$

$$f\ v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f\ v \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega.$$

Zudem haben wir punktweise fast überall in Ω

$$|f v_\varepsilon| \overset{(10.39)}{\leq} \|v\|_{L^\infty}\ |f| \in L^1(\Omega),$$

und somit folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz

$$\int_\Omega f\ v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_\Omega f\ v,$$

und schließlich erhalten wir ingesamt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega v\ f = 0.$$

□

10.6 Bemerkung
Das obige Lemma gilt auch für alle Testfunktionen v in der Klasse $v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

10.7 Theorem (Erhaltungssatz)
(vgl. [Riv07a], Theorem I.3)
Sei $m \geq 1$, $\Omega \in L^2(D^2, M(m) \otimes \mathbb{R}^2)$, $A \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m))$ und $B \in W^{1,2}(D^2, M(m))$, so dass gilt

$$\nabla A - A\Omega = \nabla^\perp B \quad \textit{in } D^2. \tag{10.40}$$

Sei weiterhin $u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ mit

$$\triangle u = -\Omega \cdot \nabla u \quad \textit{in } D^2, \tag{10.41}$$

das heißt komponentenweise gelte

$$\int_{D^2} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{D^2} \Omega \cdot \nabla u\ \varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2).$$

Dann gilt

$$\operatorname{div}(A\ \nabla u + B\ \nabla^\perp u) = 0 \quad \textit{in } D^2,$$

das heißt komponentenweise gilt

$$\int_{D^2} (A\nabla u + B\nabla^\perp u) \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2).$$

Beweis. Wir rechnen mit (10.40) und (10.41)

$$\begin{aligned} \int_{D^2} (A\nabla u + B\nabla^\perp u) \cdot \nabla\varphi &= \int_{D^2} (A\nabla\varphi) \cdot \nabla u + \int_{D^2} (B\nabla\varphi) \cdot \nabla^\perp u \\ &= \int_{D^2} \nabla(A\varphi) \cdot \nabla u - \int_{D^2} \nabla A \cdot \nabla u\ \varphi + \underbrace{\int_{D^2} \nabla(B\varphi) \cdot \nabla^\perp u}_{\overset{P4.22}{=} 0} - \int_{D^2} \nabla B \cdot \nabla^\perp u\ \varphi \\ &\overset{\substack{(10.40)\\(10.41)}}{=} \int_{D^2} (A\varphi)\ \Omega \cdot \nabla u - \int_{D^2} (\nabla^\perp B + A\Omega) \cdot \nabla u\ \varphi - \int_{D^2} \nabla B \cdot \nabla^\perp u\ \varphi \\ &= \int_{D^2} (A\ \Omega \cdot \nabla u\ - A\ \Omega \cdot \nabla u)\varphi - \int_{D^2} (\nabla^\perp B \cdot \nabla u + \nabla B \cdot \nabla^\perp u)\varphi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass für $D := A\varphi \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m))$ mit $\operatorname{supp}(D) \subset\subset D^2$ die PDE getestet werden kann, siehe Lemma 10.5 , und wegen

$$\int_{D^2} \nabla d \cdot \nabla u_i = \int_{D^2} d\ \Omega_i^k \cdot \nabla u_k \quad \text{für alle } d \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m)) \text{ mit } \operatorname{supp} d \subset\subset D^2$$

gilt

$$\begin{aligned}
\int_{D^2} \nabla D_i^k \cdot \nabla u_k &= \sum_k \int_{D^2} \nabla D_i^k \cdot \nabla u_k \\
&= \sum_k \int_{D^2} D_i^k \sum_l \Omega_k^l \cdot \nabla u_l \\
&= \int_{D^2} (D\Omega \cdot \nabla u)_i.
\end{aligned}$$

Weiterhin verwendet man

$$\nabla^\perp f \cdot \nabla g = -\nabla f \cdot \nabla^\perp g,$$

da

$$-\partial_y f\ \partial_x g + \partial_x f\ \partial_y g = -(\partial_y f\ \partial_x g + \partial_x f\ (-\partial_y g)).$$

□

10.3. Regularitätssatz von Rivière

Damit haben wir alle notwendigen Ergebnisse zusammen, um Rivières Theorem I.1 aus [Riv07a] zu beweisen:

10.8 Theorem (Stetigkeit)
(vgl. [Riv07a], Theorem I.1)
Sei $m \in \mathbb{N}$. Sei weiter $\Omega \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ und $u \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$, so dass gilt

$$\triangle u = -\Omega \cdot \nabla u \quad \text{in } D^2, \tag{10.42}$$

das heißt

$$\triangle u^j = -\Omega_j^k \cdot \nabla u_k, \quad 1 \le j \le m,$$

also

$$\int_{D^2} \nabla u^j\ \nabla \varphi = \int_{D^2} \Omega_j^k \cdot \nabla u_k\ \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(D^2),\ 1 \le j \le m.$$

Dann ist $u \in C^0(D^2)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ klein genug für Theorem 10.4.
Wir wollen für einen Punkt $\tilde{x} \in D^2$ zeigen, dass u dort auf einer kleinen Umgebung stetig ist. Dazu wollen wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\int_{D^2} |\Omega|^2 \le \varepsilon$$

und $\tilde{x} = 0$, denn sonst definieren wir $\delta \in (0, 1)$, so dass

$$\int_{B_\delta(\tilde{x})} |\Omega|^2 \le \varepsilon$$

(die Existenz eines solchen δ folgt aus der Voraussetzung, dass $\Omega \in L^2$) und definieren dann

$$\tilde{u}(x) := u(\tilde{x} + \delta x), \quad x \in B_\delta(\tilde{x})$$

und

$$\tilde{\Omega}(x) := \delta\ \Omega(\delta x + \tilde{x}), \quad x \in B_\delta(\tilde{x}).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{D^2}\left|\tilde{\Omega}(x)\right|^2 \mathbf{d}x &= \delta^2\int_{D^2}|\Omega(\delta x+\tilde{x})|^2 \mathbf{d}x\\ &= \int_{B_\delta(\tilde{x})}|\Omega(z)|^2 \mathbf{d}z\\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(D^2)$; dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{D^2}\nabla\tilde{u}(x)\cdot\nabla\varphi(x)\ \mathbf{d}x &= -\int_{D^2}\tilde{u}(x)\ \triangle\varphi(x)\mathbf{d}x\\ &= -\int_{D^2}u(\tilde{x}+\delta x)\ \triangle\varphi(x)\mathbf{d}x\\ &= -\frac{1}{\delta^2}\int_{B_\delta(\tilde{x})}u(z)\ (\triangle\varphi)\left(\frac{z-\tilde{x}}{\delta}\right)\ \mathbf{d}z.\end{aligned}$$

Wir definieren $\tilde{\varphi}(z) := \varphi\left(\frac{z-\tilde{x}}{\delta}\right)$ und berechnen

$$\triangle\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{\delta^2}(\triangle\varphi)\left(\frac{z-\tilde{x}}{\delta}\right), \quad z\in B_\delta(\tilde{x}),$$

und wir haben $\tilde{\varphi}\in C_0^\infty(B_\delta(\tilde{x}))$. Also folgt

$$\begin{aligned}\int_{D^2}\nabla\tilde{u}(x)\cdot\nabla\varphi(x)\ \mathbf{d}x &= -\int_{B_\delta(\tilde{x})}u(z)\ \triangle\tilde{\varphi}(z)\ \mathbf{d}z\\ &= -\int_{D^2}u(z)\ \triangle\tilde{\varphi}(z)\ \mathbf{d}z\\ &= \int_{D^2}\nabla u(z)\cdot\nabla\tilde{\varphi}(z)\ \mathbf{d}z\\ &\overset{(10.42)}{=} \int_{D^2}\Omega(z)\cdot\nabla u(z)\ \tilde{\varphi}(z)\ \mathbf{d}z\\ &= \int_{B_\delta(\tilde{x})}\Omega(z)\cdot\nabla u(z)\ \tilde{\varphi}(z)\ \mathbf{d}z\\ &= \int_{B_\delta(\tilde{x})}\Omega(z)\cdot\nabla u(z)\ \varphi\left(\frac{z-\tilde{x}}{\delta}\right)\ \mathbf{d}z\\ &= \delta^2\int_{D^2}\Omega(\tilde{x}+\delta x)\cdot(\nabla u)(\tilde{x}+\delta x)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x\\ &= \int_{D^2}\delta\Omega(\tilde{x}+\delta x)\cdot\delta(\nabla u)(\tilde{x}+\delta x)\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x\\ &= \int_{D^2}\delta\Omega(\tilde{x}+\delta x)\cdot\nabla_x(u(\tilde{x}+\delta x))\ \varphi(x)\ \mathbf{d}x\\ &= \int_{D^2}\tilde{\Omega}(x)\cdot\nabla\tilde{u}(x)\varphi(x)\ \mathbf{d}x.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\triangle\tilde{u} = -\tilde{\Omega}\cdot\nabla\tilde{u} \quad \text{in } D^2$$

mit $\tilde{u}\in W^{1,2}(D^2,\mathbb{R}^m)$, $\tilde{\Omega}\in L^2(D^2, so(m)\otimes\mathbb{R}^2)$ sowie

$$\int_{D^2}\left|\tilde{\Omega}\right|^2 \leq \varepsilon,$$

und falls $\tilde{u}$ um die 0 stetig ist, dann ist u um $\tilde{x}$ stetig.
Sei also ohne Einschränkung $\tilde{x}=0$ und $\int_{D^2}|\Omega|^2\leq\varepsilon$. Dann sind die Voraussetzungen von Theorem 10.4 erfüllt, und wir erhalten $A\in L^\infty\cap W^{1,2}(D^2,GL(m))$ mit $A^{-1}\in L^\infty\cap W^{1,2}(D^2,GL(m))$, sowie $B\in W_0^{1,2}(D^2,M(m))$, welche nach Theorem 10.7 die Gleichung

$$\operatorname{div}(A\nabla u + B\nabla^\perp u) = 0 \quad \text{fast überall in } D^2,$$

also
$$\operatorname{div}(A\nabla u) = -\nabla B \cdot \nabla^\perp u \quad \text{fast überall in } D^2$$
erfüllen.
Weiter gilt[39]
$$\operatorname{curl}(A\nabla u) = \nabla^\perp A \cdot \nabla u \quad \text{fast überall in } D^2.$$
Wegen $A \in L^\infty(D^2, M(m))$ ist $A\nabla u \in L^2(D^2, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^2)$, und mit der HODGE-Zerlegung, Lemma 5.15, existieren komponentenweise $E, D \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ mit
$$A\nabla u = \nabla^\perp E + \nabla D \quad \text{fast überall in } D^2.$$
Somit gilt schwach
$$\triangle D = \operatorname{div}(A\nabla u) = -\nabla B \cdot \nabla^\perp u \quad \text{in } D^2$$
und
$$\triangle E = \operatorname{curl}(A\nabla u) = \nabla^\perp A \cdot \nabla u \quad \text{in } D^2.$$
Nach [CLMS93] und mit Harmonischer Analysis, hier direkt aus Korollar 6.26, erhalten wir
$$E,\ D \in W^{2,1}_{loc} \cap W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m).$$
Dies bedeutet
$$A\nabla u = \nabla^\perp E + \nabla D \in W^{1,1}_{loc} \cap L^2(D^2),$$
und es folgt mit $G := \nabla^\perp E + \nabla D$
$$\nabla u = A^{-1} G.$$
Nun wissen wir $A^{-1} \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, M(m))$ und $G \in W^{1,1}_{loc}(D^2, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^2)$ und somit folgt aus Lemma 4.27, dass
$$\nabla u \in W^{1,1}_{loc}(D^2, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^2),$$
also
$$u \in W^{1,2} \cap W^{2,1}_{loc}(D^2, \mathbb{R}^m).$$
Mit einem Spezialfall des SOVOLEVschen Einbettungsatzes, Theorem 6.27, folgt $u \in C(\frac{1}{2}D^2)$. □

[39] Es gilt komponentenweise für $\varphi \in C_0^\infty(D^2)$
$$\int_{D^2} A\ \nabla u \cdot \nabla^\perp \varphi = \int_{D^2} \nabla^\perp (A\varphi)\ \nabla u - \int_{D^2} \nabla^\perp A \cdot \nabla u\ \varphi \overset{P4.22}{=} -\int_{D^2} \nabla^\perp A \cdot \nabla u\ \varphi.$$

11. Anwendung: Kritische Punkte konform invarianter Variationsprobleme

In diesem Kapitel wollen wir eine wichtige Anwendung betrachten, nämlich die Frage nach der Stetigkeit kritischer Punkte des Variationsfunktionals

$$F(v) = \int_{D^2} [|\nabla v|^2 + \omega(v)(\partial_x v, \partial_y v)]$$

in der Klasse der Funktionen $v \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^m)$ mit $v \in \mathcal{N}$ punktweise fast überall in D^2, wobei $\mathcal{N}$ eine Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^m$ und ω eine 2-Form auf $\mathcal{N}$ sei. Dieses Funktional ist nach [Grü84] eine Art Prototyp für konform invariante Variationsprobleme von RIEMANNschen Flächen in RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten (vgl. auch [Riv07c], Theorem II.1; [Hél02], Theorem 1.1.3).
Als Ergebnis dieses Abschnittes erhalten wir dann die Aussage von Theorem I.2 aus [Riv07a] unter etwas schwächeren Voraussetzungen.

11.1. Grundlagen aus der Riemannschen Geometrie

Zunächst wiederholen wir einige Grundlagen aus der Geometrischen Analysis. Für eine Einführung siehe z.B. [Jos05], eine Einführung in Bezug auf Harmonische Abbildungen findet sich auch in [Hél02], Kapitel 1.
Im Folgenden werden wir nur Mannigfaltigkeiten betrachten, die sich auch als Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^N$ auffassen lassen.

11.1 Definition (Mannigfaltigkeit, Atlas)
(vgl. [Jos05], Definition 1.1.1, Definition 1.1.2; [DC92], Definition 3.1, Seite 11)
Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Wir nennen $\mathcal{N}$ eine (Unter-)Mannigfaltigkeit *der Dimension p von $\mathbb{R}^m$, $1 \leq p \leq m$, falls es zu jedem Punkt $y \in \mathcal{N}$ eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ von y und einen Diffeomorphismus $\tilde{h} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{h}(\tilde{U})$ offen in $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass für $U := \tilde{U} \cap \mathcal{N}$ die Einschränkung $h := \tilde{h}_U : U \to \mathbb{R}^p$ ein Homöomorphismus und $h(U)$ offen bezüglich $\mathbb{R}^p$ ist.*
Den Homöomorphismus $h : U \to \mathbb{R}^p$, das Paar (U, h) oder auch das Paar $(\tilde{U}, \tilde{h})$ nennen wir eine Karte *von $\mathcal{N}$ um $y \in U$.*
Ein Atlas *von $\mathcal{N}$ ist eine Familie $(U_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in I}$ für eine Indexmenge I und Karten (U_α, h_α) mit $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \mathcal{N}$.*
Ein Atlas heißt C^k-Atlas, *$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls die Erweiterung $\tilde{h}$ aller Karten h jeweils C^k-Diffeomorphismen und falls alle Transitionen*

$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : \; h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

für alle α, $\beta \in I$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ von der Klasse C^k sind.
Zwei C^k-Atlanten sind kompatibel, *wenn die Vereinigung der Atlanten wiederum ein C^k-Atlas von $\mathcal{N}$ ist; existiert ein C^k-Atlas von $\mathcal{N}$, so existiert ein dazu kompatibler maximaler C^k-Atlas nach dem Lemma von ZORN.*
Einen solchen maximalen C^k-differenzierbaren Atlas nennen wir eine C^k-differenzierbare Struktur *für $\mathcal{N}$.*
Wir nennen $(\mathcal{N}, (U_\alpha, h_\alpha)_\alpha)$ eine C^k-Mannigfaltigkeit, *falls (U_α, h_α) eine C^k differenzierbare Struktur für $\mathcal{N}$ ist.*
Weiter nennen wir $(\mathcal{N}, (U_\alpha, h_\alpha)_\alpha)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, *falls $(\mathcal{N}, (U_\alpha, h_\alpha))$ eine C^k-differenzierbare Mannigfaltigkeit für ein $k \geq 1$ ist.*
Wir nennen eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ von $\mathbb{R}^n$ kompakt *bzw.* abgeschlossen, *falls $\mathcal{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ kompakt bzw. abgeschlossen ist.*

11.2 Bemerkung
Im Folgenden identifizieren wir aus Gründen der Übersicht öfters $\mathcal{N}$ mit dem Tupel $(\mathcal{N}, (U_\alpha, h_\alpha)_\alpha)$.

11.3 Definition (C^k, L^p, $W^{k,p}(\Omega, \mathcal{N})$)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ein Gebiet und $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit.
Man definiert $C^k(\Omega, \mathcal{N})$ für $k \geq 0$, $L^p(\Omega, \mathcal{N})$ für $p \geq 1$ und $W^{k,p}(\Omega, \mathcal{N})$ für $k \geq 0$ und $p \geq 1$ als

$$C^k(\Omega, \mathcal{N}) := \{f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid f(x) \in \mathcal{N} \quad \text{für alle } x \in \Omega\},$$

$$L^p(\Omega, \mathcal{N}) := \{f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid f(x) \in \mathcal{N} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega\}$$

und

$$W^{k,p}(\Omega, \mathcal{N}) := \{f \in W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid f(x) \in \mathcal{N} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega\}.$$

11.4 Bemerkung
Man beachtet, dass die soeben definierten Mengen $C^k(\Omega,\mathcal{N})$, $L^p(\Omega,\mathcal{N})$ und $W^{k,p}(\Omega,\mathcal{N})$ im Allgemeinen keine linearen Räume sind, da sie nicht notwendig unter Addition oder Multiplikation mit einem Skalar abgeschlossen sind.

11.5 Definition ($C^k(\mathcal{N},\mathbb{R}^p)$)
Sei $\mathcal{N}\subset\mathbb{R}^n$ eine p-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f:\ V\subset\mathcal{N}\to\mathbb{R}^q$ eine Abbildung, V eine relativ offene Teilmenge von $\mathcal{N}$. Dann sagen wir $f\in C^k(V,\mathbb{R}^q)$, falls es zu jedem Punkt $x\in V$ eine Umgebung $U\subset\mathcal{N}$ mit einer Karte $\Phi:U\to\mathbb{R}^p$ gibt, so dass $f\circ\Phi^{-1}:\Phi(U\cap V)\to\mathbb{R}^q$ eine C^k-Abbildung ist.

11.6 Proposition (Eigenschaften von $C^k(\mathcal{N},\mathbb{R}^p)$)
Sei $\mathcal{N}\subset\mathbb{R}^n$ eine p-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit und $f:\ \mathcal{N}\to\mathbb{R}^q$ eine Abbildung. Dann gilt

(*i*) *$f\in C^l(\mathcal{N},\mathbb{R}^q)$, $0\le l\le k$, genau dann, wenn für <u>alle</u> Karten Φ von $U\subset\mathcal{N}$ im Atlas von $\mathcal{N}$ gilt*

$$f\circ\Phi^{-1}:\Phi(U)\to\mathbb{R}^q\in C^l(\Phi(U),\mathbb{R}^q);$$

(*ii*) *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ ein Gebiet und $f\in C^l(\mathcal{N},\mathbb{R}^q)$ und $g\in C^l(\Omega,\mathcal{N})$, $0\le l\le k$, dann ist $f\circ g:\Omega\to\mathbb{R}^q$ in $C^l(\Omega,\mathbb{R}^q)$.*

Beweis. (*i*) Gilt für alle Karten Φ zu U im Atlas von $\mathcal{N}$

$$f\circ\Phi^{-1}:\Phi(U)\to\mathbb{R}^q\in C^l(\Phi(U),\mathbb{R}^q),$$

dann ist $f\in C^l(\mathcal{N},\mathbb{R}^q)$ per definitionem.
Andersherum seien (U,Φ) im Atlas von $\mathcal{N}$. Wir wählen einen beliebigen Punkt $y\in U$. Dann existiert eine Umgebung V von y und eine C^l Karte $h:V\to\mathbb{R}^q$, so dass $f\circ h^{-1}\in C^l$. Es gilt dann auf $\Phi(U\cap V)$:

$$f\circ\Phi^{-1}=\underbrace{f\circ h^{-1}}_{C^l}\circ\underbrace{h\circ\Phi^{-1}}_{C^k}\in C^l(\Phi(U\cap V),\mathbb{R}^q),$$

und da $y\in U$ beliebig gewählt war, erhalten wir, dass

$$f\circ\Phi^{-1}\in C^l(\Phi(U),\mathbb{R}^q).$$

(*ii*) Für jeden Punkt $x\in\Omega$, wählen wir eine kleine Umgebung U von $g(x)$ in $\mathcal{N}$ mit einer C^k-Karte $\Phi:U\to\mathbb{R}^p$. Dann gilt für eine kleine Umgebung $V\subset\Omega$ von x, dass $g(x)\in U$ (wegen der Stetigkeit) und somit

$$f\circ g=\underbrace{f\circ\Phi^{-1}}_{C^l}\circ\underbrace{\Phi}_{C^k}\circ\underbrace{g}_{C^l}\quad\text{in } C^l(V,\mathbb{R}^q).$$

□

11.7 Beispiel ($\mathcal{P}_q(n)$ ist eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit)
(vgl. [Hir76], §1, Exercise 1, Seite 14)
Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}_q(n)\subset M_n$, $1\le q<n$, definiert durch

$$\mathcal{P}_q(n):=\{A\in M_n|\ A=A^T=A^2,\ \operatorname{spur}A=q\}.$$

Dabei ist $\operatorname{spur}(A_{ij})_{ij}:=\sum_{i=1}^n A_{ii}$ die Spur *von A. Dann ist $\mathcal{P}_q(n)$ eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension $q(n-q)$ in $(\mathbb{R}^{n\times n},|\cdot|_{HS})$. Hier ist $|(v_{ij})_{ij}|_{HS}:=\left(\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n(v_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}$ die* Hilbert-Schmidt-Norm, *womit $(\mathbb{R}^{n\times n},|\cdot|_{HS})$ ein* Hilbert*-Raum ist.*

Beweis. <u>Schritt 1:</u>
Zunächst ist $\mathcal{P}_q(n)$ beschränkt: Denn $A=A^T$ impliziert, dass $A=ODO^T$ für eine Orthogonalmatrix $O\in O(n)$ und eine Diagonalmatrix D. Aus $A=A^2$ folgt dann weiter, dass $D_{ij}\in\{0,1\}$, $1\le i,j\le n$ und somit folgt, da orthogonale Matrizen gleichmäßig beschränkt sind,

$$|A|_{HS}\le C|D|\le C\sqrt{n}.$$

Weiterhin ist $\mathcal{P}_q(n)$ auch abgeschlossen, da die Gleichungen $A = A^T = A^2$ und $\operatorname{spur} A = q$ unter $|\cdot|_{HS}$-Konvergenz erhalten bleiben.
Zusammen impliziert dies, dass $\mathcal{P}_q(n)$ kompakt in $\mathbb{R}^{n\times n}$ enthalten ist.
Schritt 2:
Sei $A \in \mathcal{P}_q(n)$ gegeben. Wegen $A = A^T$ und $A = A^2$ erhalten wir dann ein $O \in O(n)$ und eine Diagonalmatrix $D \in \{0,1\}^{n\times n}$ mit der Darstellung $A = ODO^T$. Weiter impliziert $\operatorname{spur} A = q$

$$q = \operatorname{spur}(ODO^\top) = O_{ik}D_{kl}O^\top_{li} = O_{ik}\delta^l_k D_{kk}O_{il} = O_{ik}O_{ik}D_{kk} = \delta^k_k D_{kk} = \operatorname{spur} D.$$

Daraus folgt, dass genau q Diagonaleinträge von D den Wert 1 annehmen und die restlichen $n-q$ Einträge den Wert 0. Ohne Einschränkung erhalten wir also die Darstellung

$$A = O \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{D_q} O^\top,$$

und wir wählen eine Orthonormalbasis $(o_1, \dots, o_n)$ von $\mathbb{R}^n$ derart, dass $O = (o_1|\dots|o_n)$.
Wir beobachten nun, dass $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}(o_1, \dots o_q)$ und $\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}(o_{q+1}, \dots, o_n)$, was aus

$$Ao_i = OD_q\ e_i = \begin{cases} o_i, & 1 \le i \le q, \\ 0, & q+1 \le i \le n \end{cases}$$

folgt.
Schritt 3:
Sei $\gamma > 0$, so dass für alle Matrizen C mit $|C|_{HS} < \gamma$ die Matrix $I - C \in GL(n)$ und $(I-C)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty C^k$ (vgl. Lemma 8.14). Wir wollen zeigen, dass ein Homöomorphismus $\Phi:\ \mathcal{P}_q(n) \cap B^{n\times n}_{\frac{\gamma}{2}}(A) \to \mathbb{R}^{n-q\times q}$ existiert, so dass $\Phi(\mathcal{P}_q(n) \cap B^{n\times n}_{\frac{\gamma}{2}}(A))$ offen in $\mathbb{R}^{n-q\times q}$ ist.
Dazu beobachten wir, dass alle $\tilde{A}$ nahe bei A eine eindeutige lineare Abbildung $T:\ \operatorname{Im} A \to \operatorname{Ker} A$ implizieren, welche einem Vektor $v \in \operatorname{Im} A$ einen Vektor $w \in \operatorname{Ker} A$ zuordnet, so dass $v \oplus w \in \operatorname{Im} \tilde{A}$, wie Abbildung 11.1 veranschaulicht.Wir suchen also eine Abbildung $T:\ \operatorname{Im} A \to \operatorname{Ker} A$, so dass für $v \in \operatorname{Im} A$ und $w := T(v)$ gilt $\tilde{A}(v \oplus w) = v \oplus w$ (dies ist äquivalent zu $v \oplus w \in \operatorname{Im} \tilde{A}$, da $\tilde{A}^2 = \tilde{A}$). Wegen $Aw = 0$ erhalten wir daraus

$$(\tilde{A} - I)v = (I - (\tilde{A} - A))w.$$

Nun ist $\left|\tilde{A} - A\right|_{HS} < \frac{\gamma}{2}$ und es folgt nach Wahl von γ, dass $I - (\tilde{A} - A) \in GL(n)$ und $(I - (\tilde{A} - A))^{-1} = \sum_{k=0}^\infty (\tilde{A} - A)^k$. Weiter macht man sich klar, dass die Abbildung $\tilde{A} \mapsto \sum_{k=0}^\infty (\tilde{A} - A)^k$ in $C^\infty(B^{n\times n}_{\frac{\gamma}{2}}(A), \mathbb{R}^{n\times n})$ liegt. Wir erhalten also

$$w = (I - (\tilde{A} - A))^{-1}(\tilde{A} - I)v =: \tilde{M}v, \tag{11.1}$$

für $\tilde{M} \equiv \tilde{M}(\tilde{A}) := (I - (\tilde{A} - A))^{-1}(\tilde{A} - I) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Wir definieren $B = (B_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n-q\times q}$ durch

$$B_{ij} := \langle \tilde{M}o_j, o_{q+i}\rangle \quad 1 \le i \le n-q,\, 1 \le j \le q \tag{11.2}$$

und setzen $\Phi(\tilde{A}) := B$.
Weiter fassen wir jedes Element $B \in \mathbb{R}^{n-q\times q}$ als Abbildung $\operatorname{Im} A \to \operatorname{Ker} A$ auf, indem wir

$$M_B \equiv M := O \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & 0 & \dots & 0 \\ & B & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) O^T \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{11.3}$$

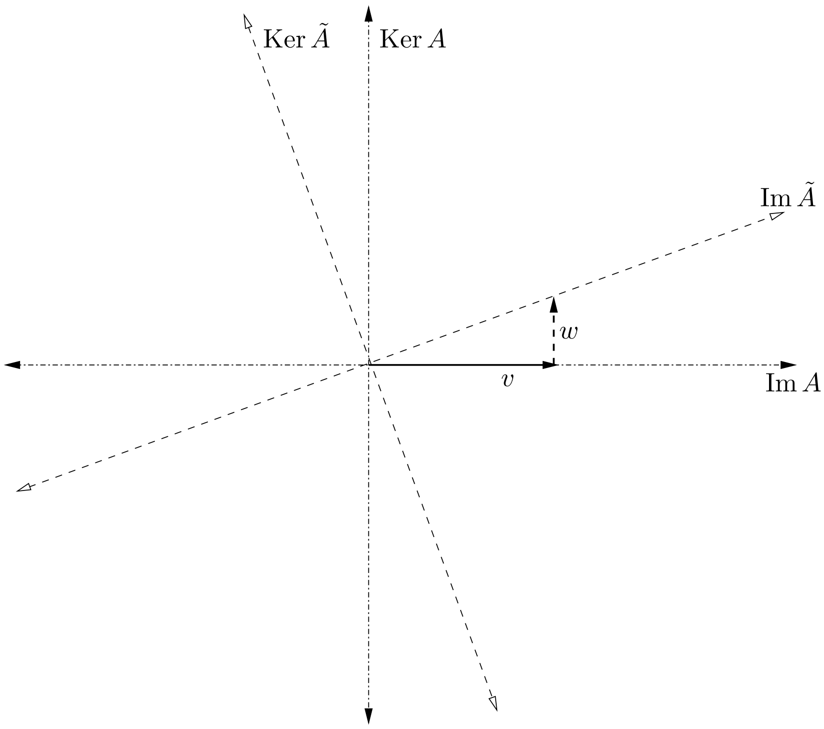

Abbildung 11.1: Jedes $\tilde{A}$ nahe bei A impliziert eine lineare Abbildung $T:\ \operatorname{Im} A \to \operatorname{Ker} A$.

setzen. Wir beachten, dass

$$\langle M_{\Phi(\tilde{A})} o_j, o_{q+i} \rangle = B_{ij}(\tilde{A}) \quad 1 \le i \le n-q,\, 1 \le j \le q.$$

Deshalb sehen wir mit (11.2), dass die Abbildungen $\tilde{M}$ aus (11.1) und M aus (11.3) identisch auf dem Raum $\operatorname{Im} A$ sind, da nach Konstruktion $\tilde{M} : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Ker} A$.
Wir beobachten nun, dass für ein gegebenes $B \in \mathbb{R}^{n-q\times q}$ und das zugehörige M_B gilt, dass $(o_i + M_B o_i)_{i=1}^n$ eine linear unabhängige Menge ist, da für $(\lambda_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind, wobei wir benutzen, dass $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^\perp$:

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (o_i + M o_i) \quad &\overset{(11.3)}{\Leftrightarrow} \quad \underbrace{\sum_{i=q+1}^n (-\lambda_i) o_i + \sum_{i=1}^q M(-\lambda_i o_i)}_{\in \operatorname{Ker} A} = \underbrace{\sum_{i=1}^q \lambda_i o_i}_{\in \operatorname{Im} A} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=q+1}^n (-\lambda_i) o_i + \sum_{i=1}^q M(-\lambda_i o_i) = 0 \quad \wedge \quad i \sum_{i=1}^q \lambda_i o_i = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=q+1}^n (-\lambda_i) o_i + \sum_{i=1}^q M(-\lambda_i o_i) = 0 \quad \wedge \quad \lambda_i = 0, \quad 1 \le i \le q \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=q+1}^n (-\lambda_i) o_i = 0 \quad \wedge \quad \lambda_i = 0, \quad 1 \le i \le q \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_i = 0, \quad 1 \le i \le n.
\end{aligned}$$

Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren konstruieren wir für jedes B aus $(o_1 + M_B o_1, \ldots, o_n + M_B o_n)$ eine Orthonormalbasis $(p_1, \ldots, p_n)$ von $\mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{span}(p_1, \ldots, p_q) = \operatorname{span}(o_1 + M_B o_1, \ldots, o_q + M_B o_q)$. Wir setzen

$P := (p_1|\dots|p_n)$. Dann ist die Abbildung $B \mapsto P$ eine C^∞-Abbildung und wir definieren

$$\tilde{\Phi}(B) := P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{D_q} P^T \in \mathcal{P}_q(n),$$

wobei wir in der obigen Diagonalmatrix genau den ersten q Diagonaleinträgen den Wert 1 zuweisen. Diese Abbildung $\tilde{\Phi}(B)$ ist unabhängig von der speziellen Wahl der Orthonormalbasis $(p_1, \dots, p_n)$, denn für zwei verschiedene Orthonormalbasen $(p_1, \dots, p_n)$ und $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n)$ mit $\operatorname{span}(p_1, \dots, p_q) = \operatorname{span}(\hat{p}_1, \dots \hat{p}_q)$ gilt

$$P\ D_q\ P^T\ p_k = \begin{cases} p_k, & 1 \le k \le q, \\ 0, & q+1 \le k \le n \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{P}\ D_q\ \hat{P}^T\ p_k &= \hat{P} \sum_{l=1}^{q} \langle \hat{p}_l, p_k \rangle e_l \\ &= \sum_{l=1}^{q} \langle \hat{p}_l, p_k \rangle \hat{p}_l \\ &= \begin{cases} p_k, & 1 \le k \le q, \\ 0, & q+1 \le k \le n, \end{cases} \end{aligned}$$

da $p_k \in \operatorname{span}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_q)$ für $1 \le k \le q$ und $p_k \perp \operatorname{span}(p_1, \dots, p_q)$ für $q+1 \le k \le n$. Daraus folgt, dass $P\ D_q\ P^T = \hat{P}\ D_q\ \hat{P}^T$, da $(p_1, \dots, p_n)$ eine Basis ist. Damit erhalten wir insbesondere $\tilde{\Phi}(0) = A$, da $M_0 = 0$ und somit $P_0 = 0$.
Wir halten fest, dass $\tilde{\Phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-q\times q}, \mathbb{R}^{n\times n})$ und $\operatorname{Im} \tilde{\Phi} \subset \mathcal{P}_q(n)$.
<u>Schritt 4:</u>
Wir zeigen noch, dass lokal um A bzw. um 0 gilt $\Phi^{-1} = \tilde{\Phi}$ und $\tilde{\Phi}^{-1} = \Phi$.Sei zunächst ein $\tilde{A}$ mit $\left|\tilde{A} - A\right| < \frac{\gamma}{2}$ gegeben. Dann erhalten wir $B := \Phi(\tilde{A})$, $M := M_B$ und $\tilde{M} = \tilde{M}(\tilde{A})$. Da $\tilde{M}$ und M auf $\operatorname{Im} A$ identisch sind, folgt aus (11.1)

$$(I - \tilde{A})Mv = (I - (\tilde{A} - A))Mv \overset{(11.1)}{=} (\tilde{A} - I)v,$$

also $\tilde{A}(v + Mv) = v + Mv$ für alle $v \in \operatorname{Im} A$. Daraus folgt insbesondere , dass für $1 \le i \le q$ auch $o_i + Mo_i \in \operatorname{Im} \tilde{A}$ liegt und da $\dim \operatorname{Im} \tilde{A} = q$ ist, gilt somit, dass $(o_i + Mo_i)_{i=1}^q$ eine Basis von $\operatorname{Im} \tilde{A}$ ist. Nun lässt sich $\tilde{A}$ darstellen als $\tilde{O} D_q \tilde{O}^T$. Mit $\tilde{O} =: (\tilde{o}_1|\dots|\tilde{o}_n)$ erhalten wir, dass $\operatorname{span}(\tilde{o}_1, \dots, \tilde{o}_q) = \operatorname{span}(o_1 + Mo_1, \dots, o_q + Mo_q)$. Es folgt $\tilde{\Phi}(\Phi(\tilde{A})) = \tilde{A}$, da die spezielle Wahl der Orthonormalbasis für $\tilde{\Phi}(B)$ irrelevant war, und wir deshalb auch $P := \tilde{O}$ wählen können.

Andererseits sei ein $B \in \mathbb{R}^{n-q\times q}$ gegeben. Da $\tilde{\Phi}$ eine C^∞-Abbildung ist und $\tilde{\Phi}(0) = A$, können wir ein kleines ε finden, so dass für alle $|B|_{HS} < \varepsilon$ gilt $\left|\tilde{\Phi}(B) - A\right|_{HS} < \frac{\gamma}{2}$. Für ein solches B erhalten wir durch Anwendung von $\tilde{\Phi}$ ein $\tilde{A}$ und dann durch Anwendung von Φ ein B'. Es gilt dann für $M' := M_{B'}$

$$\tilde{A}(v + M'v) = v + M'v \quad \text{für alle } v \in \operatorname{Im} A.$$

Es ist zu zeigen, dass $B' = B$. Da aber nach Konstruktion $\operatorname{Im} \tilde{A} = \operatorname{span}(o_1 + M_B o_1, \dots, o_q + M_B o_q)$, gilt wegen $\tilde{A} \in \mathcal{P}_q(n)$, also insbesondere $\tilde{A}^2 = \tilde{A}$, dass

$$\tilde{A}(o_i + M_B o_i) = o_i + M_B o_i, \quad 1 \le i \le q,$$

woraus folgt

$$\tilde{A}(v + M_B v) = v + M_B v \quad \text{für alle } v \in \operatorname{Im} A.$$

Dies impliziert mit einer Rechnung wie für (11.1) unter Beachtung, dass sowohl M_B als auch M' von $\operatorname{Im} A$ nach $\operatorname{Ker} A$ abbilden, dass $M'v = Mv$ für alle $v \in \operatorname{Im} A$ und somit $B' = B$.
Wir haben also in Φ einen erfolgversprechenden Kandidaten für eine Karte um A gefunden. Nun müssen wir noch zeigen, dass sich Φ lokal geeignet auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ erweitern lässt, um zu erhalten, dass $\mathcal{P}_q(n)$ eine Untermannigfaltigkeit ist.
Schritt 5:
Wir haben in (11.1) für $\left|\tilde{A} - A\right|_{HS} < \varepsilon$ folgendes gesetzt

$$\tilde{M} = (I - \tilde{A} + A)^{-1}(\tilde{A} - I).$$

Für $v \in \operatorname{Im} A$ gilt

$$\tilde{M}v + (I - A)v = \tilde{M}v.$$

Setzen wir für $|C - A|_{HS} < \frac{\gamma}{2}$

$$\tilde{\varphi}(C) := (I - C + A)^{-1}(C - I) + (I - A),$$

so ist $\tilde{\varphi}$ eine C^∞-Abbildung, und es gilt $\tilde{\varphi}(A) = 0$. Insbesondere lässt sich ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass $\tilde{\varphi}(B_\varepsilon^{n\times n}(A)) \subset B_{\frac{\gamma}{2}}^{n\times n}(0)$. Es gilt für $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|C - A|_{HS} < \varepsilon$

$$\tilde{\varphi}(C) + A\tilde{\varphi}(C) + A = C(I + \tilde{\varphi}(C)),$$

was wegen der Kleinheit von $|C - A|_{HS}$ äquivalent ist zu

$$C = (I + \tilde{\varphi}(C))^{-1}(\tilde{\varphi}(C) + A(\tilde{\varphi}(C) + I)).$$

Also ist $\tilde{\varphi}$ ein C^∞-Diffeomorphismus um A. Weiter soll gelten, dass $\tilde{\varphi}$ auf $\mathcal{P}_q(n)$ eingeschränkt Φ ergibt, was beinahe der Fall ist:
Sei also $\tilde{A} \in \mathcal{P}_q(n)$. Dann gilt $\tilde{\varphi}(\tilde{A})o_j = \tilde{M}o_j \in \operatorname{Ker} A$, $1 \le j \le q$ nach Definition von $\tilde{M}$ in Schritt 3. Also folgt

$$\langle \tilde{\varphi}(\tilde{A})o_j, o_{q+i}\rangle = B_{ij}(\tilde{A}), \quad 1 \le i \le n-q,\ 1 \le j \le q$$

und

$$\langle \tilde{\varphi}(\tilde{A})o_j, o_i\rangle = 0, \quad 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le q.$$

Für $q + 1 \le j \le n$ gilt $Ao_j = 0$ und es folgt

$$\tilde{\varphi}(\tilde{A})o_j = (I - \tilde{A} + A)^{-1}(\tilde{A} - I)o_j + (I - A)o_j = -(I - \tilde{A} - A)^{-1}(I - \tilde{A} - A)o_j + o_j = 0.$$

Folglich erhalten wir die Darstellung

$$O^T\tilde{\varphi}(\tilde{A})O = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & 0 & & \\ & \Phi(\tilde{A}) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right) = \tilde{\Phi} \times \{0\}.$$

Also ist $\varphi(\cdot) := O^T\tilde{\varphi}(\cdot)O$ die gewünschte Erweiterung von Φ. $\square$

11.8 Definition (Tangentialraum, Normalraum)
Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.
Sei für ein $y \in \mathcal{N}$ eine Abbildung $f \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^n)$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$, so dass gilt $f(t) \in \mathcal{N}$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $f(0) = y$. Dann nennen wir

$$v := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(t) \in \mathbb{R}^n$$

einen Tangentialvektor *an $\mathcal{N}$ am Punkt $y \in \mathcal{N}$.*
Die Menge der Tangentialvektoren an $\mathcal{N}$ zu einem fest gewähltem Punkt $y \in \mathcal{N}$ nennen wir den Tangentialraum

$T_y\mathcal{N}$ von $\mathcal{N}$ an $y \in \mathcal{N}$.
Den Normalraum $T_y^\perp\mathcal{N}$ *definieren wir als die Menge*

$$T_y^\perp\mathcal{N} := \{w \in \mathbb{R}^n | \ \langle w, v\rangle = 0 \quad \textit{für alle } v \in T_y\mathcal{N}\}$$

für das Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $\mathbb{R}^n$.

11.9 Lemma (Tangentialräume sind lineare Räume)
Ist $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ eine p-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist $T_y\mathcal{N}$ ein p-dimensionaler und $T_y^\perp\mathcal{N}$ ein $(n-p)$-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$ für jedes $y \in \mathcal{N}$.
Weiterhin gilt für eine Karte $h : U \subset \mathcal{N} \to \mathbb{R}^p$, dass für

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \equiv \frac{\partial}{\partial y^i}(y) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h^{-1}(h(y) + te_i),$$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor von $\mathbb{R}^p$ sei, die Menge $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_i$ für alle $y \in U$ eine Basis von $T_y\mathcal{N}$ ist.

Beweis. Die Vektorraum-Eigenschaft und die $(n-p)$-Dimensionalität von $T_y^\perp\mathcal{N}$ folgt sofort aus der Definition, falls die Vektorraum-Eigenschaft und die p-Dimensionalität von $T_y\mathcal{N}$ gezeigt ist.
Wir zeigen also zunächst, dass $T_y\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum ist:

(i) $0 \in T_y\mathcal{N}$, $y \in \mathcal{N}$:
Dies folgt sofort, wenn wir $f(t) := y$ setzen.

(ii) Ist $v \in T_y\mathcal{N}$, dann gilt $\lambda v \in T_y\mathcal{N}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:
Ist $\lambda = 0$ so folgt die Behauptung aus *(i)*. Sei also im folgenden $\lambda \neq 0$.
Sei f eine geeignete Funktion für v, d.h. $f \in C^1((-\varepsilon,\varepsilon),\mathbb{R}^n)$ für ein gewisses $\varepsilon > 0$, $f(t) \in \mathcal{N}$ für $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $f(0) = y$ und $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f = v$.
Wir setzen $g(t) := f(\lambda t)$. Dann gilt

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(t) = \lambda v$$

und somit gilt $\lambda v \in T_y\mathcal{N}$, da g für $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ alle Voraussetzungen erfüllt.

(iii) Sind v_1, $v_2 \in T_y\mathcal{N}$, so auch $v_1 + v_2$:
Seien f_1 und f_2 zwei geeignete C^1-Funktionen für v_1 bzw. v_2. Wir wählen aus dem Atlas zu $\mathcal{N}$ eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^p$ für eine relativ offene Umgebung U von y in $\mathcal{N}$.
Ohne Einschränkung gelte $\phi(y) = 0$ (denn sonst wählen wir die kompatible Karte $\phi(\cdot) - \phi(y)$). Nun existiert ein kleines $\varepsilon > 0$, so dass für alle $|t| < \varepsilon$ die Punkte $f_1(t)$, $f_2(t)$ in U liegen. Weiter sind $\phi \circ f_1$ und $\phi \circ f_2$ stetig, $\phi(U)$ offen und $\phi \circ f_1(0)$, $\phi \circ f_2(0) \in \phi(U)$. Somit existiert ein ggf. noch kleineres $\varepsilon > 0$, so dass für alle $|t| < \varepsilon$ gilt

$$\phi(f_1(t)) + \phi(f_2(t)) \in \phi(U).$$

Deshalb ist $g(t) := \phi^{-1}(\phi \circ f_1(t) + \phi \circ f_2(t))$ wohldefiniert und C^1 für $|t| < \varepsilon$. Zusätzlich gilt $g(0) = \phi^{-1}(0) = y$ und (wir bezeichnen für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit v^i die i-te Komponente von v)

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^i(t) &= \frac{\partial(\phi^{-1})^i}{\partial x^\alpha}(0) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [(\phi \circ f_1(t))^\alpha + (\phi \circ f_2(t))^\alpha] \\
&= \underbrace{\frac{\partial(\phi^{-1})^i}{\partial x^\alpha}(0)\ \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^\beta}(y)}_{=\delta^i_\beta}\ (v_1^\beta + v_2^\beta) \\
&= \delta^i_\beta(v_1^\beta + v_2^\beta) \\
&= v_1^i + v_2^i,
\end{aligned}$$

also

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g(t) = v_1 + v_2$$

und deshalb haben wir $v_1 + v_2 \in T_y\mathcal{N}$ gezeigt.

Die weiteren Vektorraumeigenschaften ergeben sich sofort.

Nun zeigen wir noch, dass für eine Karte $h : U \to \mathbb{R}^d$ die Vektoren

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(y), \quad 1 \le i \le p$$

eine Basis von $T_y\mathcal{N}$ für alle $y \in U$ darstellen. Wir fixieren ein $y_0 \in U$. Nun setzen wir $\Phi : U \to \mathbb{R}^p$ als $\Phi(z) := h(z) - h(y_0)$. Dann ist $\Phi^{-1}(x) = h^{-1}(x + h(y_0))$ wohldefiniert und in C^k auf einer Umgebung der 0.Weiterhin gilt dann, dass

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(y_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi^{-1}(te_i), \quad 1 \le i \le p.$$

Da $\Phi^{-1}(te_i) \in C^k((-\varepsilon,\varepsilon),\mathbb{R}^n) \subset C^1((-\varepsilon,\varepsilon),\mathbb{R}^n)$ (wir beachten $k \ge 1$) für ein ε hinreichend klein und $\Phi^{-1}(0e_i) = y_0$, haben wir

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(y_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi^{-1}(te_i) \in T_{y_0}\mathcal{N}.$$

Weiter ist $D\Phi^{-1}(y_0)$ eine $p \times n$-Matrix mit vollem Rang, da Φ die Einschränkung eines Diffeomorphismus auf $\mathcal{N}$ bzw. $\mathbb{R}^p$ ist, und somit sind die Zeilen $\frac{\partial}{\partial y^i}(y_0)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$.
Wählen wir andererseits einen beliebigen Tangentialvektor $v \in T_{y_0}\mathcal{N}$ mit zugehöriger Funktion $f : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathcal{N}$, so ist

$$\lambda_i(t) := \langle \Phi(f(t)), e_i \rangle \in C^1((-\varepsilon,\varepsilon)) \quad \text{für } 1 \le i \le p,$$

und somit finden wir die Darstellung in $\mathbb{R}^p$

$$\Phi(f(t)) = \lambda_i(t)\; e_i.$$

Weiter ist $\lambda_i(0) = 0$ und wir können für kleines t schreiben

$$f(t) = \Phi^{-1}(\lambda_i(t)\; e_i).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
v &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(t) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Phi^{-1}(0)\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda_i(t)\; \underbrace{(e_i)^\alpha}_{=\delta_i^\alpha} \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi^{-1}(te_\alpha)\; {\lambda_i}'(0)\; \delta_i^\alpha \\
&= \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(y_0)\; {\lambda_i}'(0)\; \delta_i^\alpha \\
&= \frac{\partial}{\partial y^i}(y_0)\; {\lambda_i}'(0)
\end{aligned}$$

und v ist mithin eine Linearkombination von $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}(y_0)\right)_{i=1}^p$, und deshalb ist $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}(y_0)\right)_{i=1}^p$ eine Basis von $T_{y_0}\mathcal{N}$. Insbesondere folgt, dass $T_y\mathcal{N}$ ein p-dimensionaler Vektorraum ist. $\square$

11.10 Bemerkung
Man nennt die Basis $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{i=1}^p$ *auch* lokale Koordinaten *der Tangentialräume* $T_y\mathcal{N}$ *für* $y \in U$ *und eine Karte* (Φ, U) *von* $\mathcal{N}$.

11.11 Definition (Kotangentialraum, k-Formen)
Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension p. Wir betrachten zu $y \in \mathcal{N}$ eine Basis $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{i=1}^p$ von $T_y\mathcal{N}$ in lokalen Koordinaten.
Wir definieren den Dualraum $T_y^*\mathcal{N} := L(T_y\mathcal{N})$ zu $T_y\mathcal{N}$. Dann definieren wir die duale Basis *von $T_y^*\mathcal{N}$ in* lokalen Koordinaten $(\mathbf{d}y^i)_{i=1}^p$, *charakterisiert durch*

$$\mathbf{d}y^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) := \delta_i^j, \quad 1 \leq i, j \leq p.$$

Wir definieren zudem den Raum der schiefsymmetrischen (bzw. alternierenden) k-Formen $\Lambda^k T_y\mathcal{N}$ *als Raum aller Abbildungen $\varphi : T_y\mathcal{N} \times \ldots \times T_y\mathcal{N} \to \mathbb{R}$, so dass gilt*

(i) φ ist eine multilineare Abbildung und

(ii) für $v_1, \ldots, v_k \in T_y\mathcal{N}$ und eine Permutation σ von $\{1, \ldots, k\}$ mit Vorzeichen $\operatorname{sgn}\sigma$ gilt $\varphi(v_1, \ldots, v_k) = \operatorname{sgn}\sigma\ \varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$.

Dann gilt $\Lambda^1 T_y\mathcal{N} = T_y^*\mathcal{N}$ und wir setzen $\Lambda^0 T_y\mathcal{N} := \mathbb{R}$.
Zusätzlich definieren wir $\Lambda^k T\mathcal{N} := \bigcup_{y\in\mathcal{N}} \Lambda^k T_y\mathcal{N}$.

Wir definieren das äußere Produkt $\wedge$

$$\wedge : \ \Lambda^k T_y\mathcal{N} \times \Lambda^l T_y\mathcal{N} \to \Lambda^{k+l} T_y\mathcal{N}$$

für Vektoren $v_1, \ldots, v_{k+l} \in T_y\mathcal{N}$:

- *Zunächst definieren wir für 1-Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \Lambda^1 T_y\mathcal{N}$ und für Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in T_y\mathcal{N}$, wobei $m \geq 1$,*

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m(v_1, \ldots, v_m) := \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \ldots & \varphi_1(v_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_m(v_1) & \ldots & \varphi_m(v_m) \end{pmatrix}.$$

  Es lässt sich dann zeigen, vgl. zum Beispiel [DC94] §1, dass für $k \geq 1$

$$\{\mathbf{d}y^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq p\}$$

  eine Basis von $\Lambda^k T_y\mathcal{N}$ ist.

- *Für $\omega \in \Lambda^k T_y\mathcal{N}$ und $\varphi \in \Lambda^l T_y\mathcal{N}$ mit der Darstellung*

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq p} \omega_{i_1,\ldots,i_k}\ \mathbf{d}y^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{i_k}$$

  und

$$\varphi = \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_l\leq p} \varphi_{j_1,\ldots,j_l}\ \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{j_l}$$

  definieren wir dann

$$\omega \wedge \varphi := \sum_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq p \\ 1\leq j_1<\ldots<j_l\leq p}} \omega_{i_1,\ldots,i_k}\ \varphi_{j_1,\ldots,j_l}\ \mathbf{d}y^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{i_k} \wedge \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{j_l}.$$

Wir nennen eine Abbildung $f : \mathcal{N} \to \Lambda^k T\mathcal{N}$ eine k-Form auf $\mathcal{N}$, *falls $f(y) \in \Lambda^k T_y\mathcal{N}$ für alle $y \in \mathcal{N}$.*

11.12 Bemerkung

- *Sei $\omega \in \Lambda^k T_y\mathcal{N}$ und $\varphi \in \Lambda^l T_y\mathcal{N}$. Dann gilt*

$$\omega \wedge \varphi = (-1)^{kl} \varphi \wedge \omega: \tag{11.4}$$

Es gilt nämlich für $v_1, \ldots, v_{k+l} \in T_y\mathcal{N}$ und für $\sigma \in S(1, \ldots, k+l)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{d}y^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{i_k} \wedge \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{j_l}(v_1, \ldots, v_{k+l}) \\
&\qquad = \sum_{\sigma \in S(1,\ldots,k+l)} \operatorname{sgn}(\sigma)\ \mathbf{d}y^{i_1}(v_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}y^{i_k}(v_{\sigma(k)}) \cdot \mathbf{d}y^{j_1}(v_{\sigma(k+1)}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}y^{j_l}(v_{\sigma(k+l)}) \\
&\qquad = \sum_{\sigma \in S(1,\ldots,k+l)} \operatorname{sgn}(\sigma)\ \mathbf{d}y^{i_1}(v_{\tilde\sigma(l+1)}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}y^{i_k}(v_{\tilde\sigma(l+k)}) \cdot \mathbf{d}y^{j_1}(v_{\tilde\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}y^{j_l}(v_{\tilde\sigma(l)})
\end{aligned}
$$

für eine Abbildung $\sim\colon\ S(1, \ldots, k+l) \to S(1, \ldots, k+l)$ definiert für $\sigma \in S(1, \ldots, k+l)$ durch

$$
\tilde\sigma(i) := \begin{cases} \sigma(k+i), & \text{falls } 1 \le i \le l, \\ \sigma(i-l), & \text{falls } l+1 \le i \le k+l. \end{cases}
$$

Hierbei sei $S(1, \ldots, k+l)$ die Menge der Permutationen von $(1, \ldots, k+l)$.
Offensichtlich ist dann $\sim\colon S(1, \ldots, k+l) \to S(1, \ldots, k+l)$ eine Bijektion und $\operatorname{sgn}(\tilde\sigma) = (-1)^{kl} \operatorname{sgn}(\sigma)$, da

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\sigma(1), \ldots, \sigma(k), \sigma(k+1), \ldots, \sigma(k+l)) &= -\operatorname{sgn}(\sigma(1), \ldots, \sigma(k-1), \sigma(k+1), \sigma(k), \ldots, \sigma(k+l)) \\
&= (-1)^l\ \operatorname{sgn}(\sigma(1), \ldots, \sigma(k-1), \sigma(k+1), \ldots, \sigma(k+l), \sigma(k)) \\
&= (-1)^{2l}\ \operatorname{sgn}(\sigma(1), \ldots, \sigma(k-2), \sigma(k+1), \ldots, \sigma(k+l), \sigma(k-1), \sigma(k)) \\
&= (-1)^{kl}\ \operatorname{sgn}(\sigma(k+1), \ldots, \sigma(k+l), \sigma(1), \ldots, \sigma(k)) \\
&= (-1)^{kl}\ \operatorname{sgn}(\tilde\sigma(1), \ldots, \tilde\sigma(l), \tilde\sigma(l+1), \ldots, \tilde\sigma(k+l)).
\end{aligned}
$$

Es gilt also für alle $\sigma \in S(1, \ldots, k+l)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{d}y^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{i_k} \wedge \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{j_l}(v_1, \ldots, v_{k+l}) \\
&\quad = \sum_{\sigma \in S(1,\ldots,k+l)} (-1)^{kl} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma)\ \mathbf{d}y^{i_1}(v_{\tilde\sigma(l+1)}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}y^{i_k}(v_{\tilde\sigma(l+k)}) \cdot \mathbf{d}y^{j_1}(v_{\tilde\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}y^{j_l}(v_{\tilde\sigma(l)}) \\
&\quad = (-1)^{kl} \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{j_l} \wedge \mathbf{d}y^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{i_k}(v_1, \ldots, v_{k+l})
\end{aligned}
$$

und damit folgt die Behauptung über die lokale Darstellung von ω und φ.

- *Insbesondere gilt $\mathbf{d}y^i \wedge \mathbf{d}y^j = -\mathbf{d}y^j \wedge \mathbf{d}y^i$, $1 \le i, j \le p$ und speziell $\mathbf{d}y^i \wedge \mathbf{d}y^i = 0$, $1 \le i \le p$.*

11.13 Definition ($\mathbf{C^l}$-k-Formen)
Sei $\mathcal{N}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension p und ω eine k-Form auf $\mathcal{N}$. Sei $U \subset \mathcal{N}$ eine kleine Umgebung mit lokalen Koordinaten von $T_y\mathcal{N}$, $y \in U$. Dann lässt sich ω in U in der dualen Basis darstellen, d.h. es existieren Abbildungen $\eta_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$, $1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_k \le p$, so dass für alle $y \in U$

$$
\omega(y)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le p} \eta_{i_1,\ldots,i_k}(y)\ \mathbf{d}y^{i_1}(y) \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{i_k}(y)(v_1, \ldots, v_k) \quad \forall\ v_1, \ldots, v_n \in T_y\mathcal{N}.
$$

Wir sagen, dass ω eine C^l-k-Form auf $\mathcal{N}$ ist, falls all diese $\eta_{i_1,\ldots,i_k} \in C^l(U, \mathbb{R})$ und $\mathcal{N}$ eine C^k-Mannigfaltigkeit mit $k \ge l+1$ ist.

11.14 Bemerkung
Da Koordinatenwechsel im Tangentialraum von der Klasse C^{k-1} sind, ist somit offensichtlich, dass die obige Definition nicht von den gewählten Koordinaten der Mannigfaltigkeit abhängt.

11.15 Definition (Äußere Ableitung)
Seien $\mathcal{M}^m$ und $\mathcal{N}^n$ zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^N$ der Dimension m bzw. n. Sei weiter $f : \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ eine C^k-Abbildung, $k \ge 1$. Seien $\overline{y} \in \mathcal{M}^m$ und $\overline{z} := f(\overline{y}) \in \mathcal{N}^n$ fixiert. Wir wählen um $\overline{y}$ in $\mathcal{M}^m$ eine Umgebung U und eine Karte $\Phi :\ U \to \mathbb{R}^m$ und bezeichnen die Koordinaten in $\Phi(U)$ mit $(x^j)_{j=1}^m$.
Dann definieren wir die äußere Ableitung *$\mathbf{d}f_{\overline{y}}$ von f an der Stelle $\overline{y}$,*

$$
\mathbf{d}f_{\overline{y}} :\ T_{\overline{y}}\mathcal{M} \to T_{\overline{z}}\mathcal{N},
$$

für ein $v = \sum_{j=1}^m v^j \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x^j}(\Phi(\overline{z})) \in T_{\overline{y}}\mathcal{M}$ *durch*

$$\mathbf{d}f_{\overline{y}}(v) := \frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial x^j}(\Phi(\overline{y}))\; v^j = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\Phi^{-1}\left(\Phi(\overline{y}) + t\begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m\end{bmatrix}\right)) \in T_{\overline{z}}\mathcal{N}.$$

11.16 Bemerkung

- *Zunächst ist diese Definition von* **d** *unabhängig von der Wahl der Karten: In der Tat sei* $\psi : U \to \mathbb{R}^m$ *eine weitere Karte und* $v \in T_{\overline{y}}\mathcal{M}$ *ein fixierter Tangentialvektor. Wir bezeichnen die Koordinaten in* $\psi(U)$ *mit* $(\xi^i)_{i=1}^m$. *Nun definieren wir* $(v^j)_{j=1}^m$ *durch*

$$v = v^j \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x^j}(\Phi(\overline{y})) \tag{11.5}$$

und $(\tilde{v}^i)_{i=1}^m$ *durch*

$$v = \tilde{v}^i \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial \xi^i}(\psi(\overline{y})). \tag{11.6}$$

Wir berechnen zunächst das Transformationsverhalten von v^k *nach* $\tilde{v}^i$*:*

$$\begin{aligned} v^j \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x^j}(\Phi(\overline{y})) &\overset{(11.5)}{=} v \\ &\overset{(11.6)}{=} \tilde{v}^i \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial \xi^i}(\psi(\overline{y})) \\ &= \tilde{v}^i \frac{\partial(\Phi^{-1}\circ\Phi\circ\psi^{-1})}{\partial \xi^i}(\psi(\overline{y})) \\ &= \tilde{v}^i \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x^j}(\Phi(\overline{y}))\; \frac{\partial(\Phi\circ\psi^{-1})^j}{\partial \xi^i}(\psi(\overline{y})) \\ &= \left(\tilde{v}^i\; \frac{\partial(\Phi\circ\psi^{-1})^j}{\partial \xi^i}(\psi(\overline{y}))\right) \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x^j}(\Phi(\overline{y})). \end{aligned}$$

Da $\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x^j}(\Phi(\overline{y}))$ *nach Lemma 11.9 eine Basis von* $T_{\overline{y}}\mathcal{M}$ *ist, folgt daraus*

$$v^j = \tilde{v}^i\; \frac{\partial(\Phi\circ\psi^{-1})^j}{\partial \xi^i}(\psi(\overline{y})). \tag{11.7}$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f\circ\psi^{-1})}{\partial \xi^i}(\psi(\overline{y}))\tilde{v}^i &= \frac{\partial(f\circ\Phi^{-1}\circ\Phi\circ\psi^{-1})}{\partial \xi^i}(\psi(\overline{y}))\tilde{v}^i \\ &= \frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial x^j}(\Phi(\overline{y}))\; \left(\frac{\partial(\Phi\circ\psi^{-1})^j}{\partial \xi^i}(\psi(\overline{y}))\tilde{v}^i\right) \\ &\overset{(11.7)}{=} \frac{\partial(f\circ\Phi^{-1})}{\partial x^j}(\Phi(\overline{y}))v^j. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbf{d}f_{\overline{y}}(v)$ *unabhängig von der gewählten Karte.*

- *Es ist weiter offensichtlich, dass* $\mathbf{d}f_{\overline{y}} :\; T_{\overline{y}}\mathcal{M} \to T_{\overline{z}}\mathcal{N}$ *eine lineare Abbildung ist.*

- *Ist* $\mathcal{M}^m = \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ *ein Gebiet, so ist für* $v = (v^i)_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$, $y \in \mathcal{M}$

$$\mathbf{d}f_y(v) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(y)v^i = \frac{\partial f}{\partial v}(y)$$

die gewöhnliche $\mathbb{R}^m$*-Richtungsableitung von* f *in Richtung* v.

- *Sei* $\mathcal{M}$ *eine Mannigfaltigkeit. Wir betrachten um einen Punkt* $\overline{y} \in \mathcal{M}$ *mit Karte* Φ *die Abbildung* y^i : $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$, $y^i : y \mapsto \Phi^i(y)$. *Setzen wir* $v := \frac{\partial}{\partial y^j}$, *dann ist* $v^i = \delta^i_j$ *und somit*

$$\begin{aligned} \mathbf{d}y^i_{\overline{y}}(v) &= \frac{\partial(y^i\circ\Phi^{-1})}{\partial x^k}\delta^k_j \\ &= \frac{\partial(\Phi^i\circ\Phi^{-1})}{\partial x^j} \\ &= \delta^i_j. \end{aligned}$$

Also entspricht $\mathbf{d}y^i$ *der Definition der dualen Basis der lokalen Koordinaten von Definition 11.11 und es gilt*

$$\mathbf{d}y^i_{\overline{y}}(v) = \mathbf{d}y^i_{\overline{y}}(v^j \frac{\partial}{\partial y^j}) = v^j \delta^i_j = v^i. \tag{11.8}$$

- *Es gilt die folgende Produktregel: Für zwei* C^k*-Abbildungen* $f, g : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $k \geq 1$, *gilt*

$$\mathbf{d}(fg) = f\ \mathbf{d}g + g\ \mathbf{d}f:$$

Dies folgt sofort aus der lokalen Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(fg) &= \frac{\partial (fg)\circ\Phi^{-1}}{\partial x^j} \circ \Phi\ \mathbf{d}y^j \\ &= f\frac{\partial g\circ\Phi^{-1}}{\partial x^j} \circ \Phi\ \mathbf{d}y^j + g\frac{\partial f\circ\Phi^{-1}}{\partial x^j} \circ \Phi\ \mathbf{d}y^j \\ &= f\mathbf{d}g + g\mathbf{d}f. \end{aligned}$$

11.17 Definition (Äußere Ableitung von Formen)
Sei ω *eine* C^k*-l-Form,* $k, l \geq 1$, *auf einer* $C^{k'}$*-Mannigfaltigkeit* $\mathcal{M}$ *der Dimension* m, *wobei* $k' \geq k+1$. *In lokalen Koordinaten in einer Umgebung* U *um* $\overline{y} \in \mathcal{M}$ *sei*

$$\omega(y) = \sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \eta_{i_1,\ldots,i_k}(y)\ \mathbf{d}y^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{i_l} \quad \text{für } y \in U$$

mit $\eta_{i_1,\ldots,i_k} \in C^k(U, \mathbb{R})$.
Wir definieren die äußerere Ableitung *von* ω *an der Stelle* $\overline{y}$ *durch*

$$\mathbf{d}\omega := \sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \mathbf{d}\eta_{i_1,\ldots,i_k} \wedge \mathbf{d}y^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{i_l}.$$

11.18 Bemerkung

- *Für eine* C^1*-Abbildung* $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *gilt in lokalen Koordinaten um* $y \in \mathcal{M}$ *mit einer Karte* Φ

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f\circ\Phi^{-1}}{\partial x^l}(\Phi(y))\ \mathbf{d}y^l,$$

denn für einen Tangentialvektor $w \in T_y\mathcal{M}$, *erhalten wir die Zerlegung* $w = w^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ *durch* $w^i = \mathbf{d}y^i(w)$.

- *Deshalb gilt für* $f \in C^2(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$, *dass* $\mathbf{dd}f = 0$, *denn*

$$\begin{aligned} \mathbf{dd}f &= \mathbf{d}\left(\frac{\partial f\circ\Phi^{-1}}{\partial x^l}(\Phi(y))\ \mathbf{d}y^l\right) \\ &= \mathbf{d}\left(\frac{\partial f\circ\Phi^{-1}}{\partial x^l}(\Phi(y))\right) \wedge \mathbf{d}y^l \\ &= \frac{\partial^2 f\circ\Phi^{-1}}{\partial x^l \partial x^k}(\Phi(y))\mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^l \\ &= \sum_{1\leq l<k\leq m} \frac{\partial^2 f\circ\Phi^{-1}}{\partial x^l \partial x^k}(\Phi(y))(\mathbf{d}y^l \wedge \mathbf{d}y^k + \mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^l) + \sum_{1\leq k\leq m} \frac{\partial^2 f\circ\Phi^{-1}}{(\partial x^k)^2}(\Phi(y))\mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^k \\ &= 0, \end{aligned}$$

da nach Bemerkung 11.12 $\mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^k = 0$ *für* $1 \leq k \leq m$ *und* $\mathbf{d}y^l \wedge \mathbf{d}y^k = -\mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^l$ *für* $1 \leq l, k \leq m$.

- *Daraus folgt nun, dass die Definition von* $\mathbf{d}\omega$ *von der Wahl der Karte unabhängig ist, und somit ist* $\mathbf{d}\omega$ *eine* C^{k-1}*-*$(l+1)$*-Form auf* $\mathcal{M}$*:*
  Seien Φ *und* ψ *zwei Karten von einer Umgebung* $U \subset \mathcal{M}$ *um* $\overline{y} \in \mathcal{M}$*. Wir bezeichnen die Koordinaten von* Φ *mit* y*, die Koordinaten in* $\Phi(U)$ *mit* x*, die Koordinaten von* ψ *mit* z *und die Koordinaten in* $\psi(U)$ *mit* ζ*.*
  Zunächst berechnen wir das Transformationsverhalten von $\mathbf{d}y^j$ *und* $\mathbf{d}z^i$ *und betrachten dazu die Abbildung*
  $$z^i : \ y \to P^i \circ \psi(y).$$
  Dabei sei $P^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *die Abbildung, die einen Vektor in* $\mathbb{R}^n$ *auf seine* i*-te Komponente projiziert. Dann gilt per Definition*
  $$\begin{aligned} \mathbf{d}z^i &= \frac{\partial z^i \circ \Phi^{-1}}{\partial x^j}(\Phi(\cdot))\ \mathbf{d}y^j \\ &= \frac{\partial P^i \circ \psi \circ \Phi^{-1}}{\partial x^j}(\Phi(\cdot))\ \mathbf{d}y^j \\ &= \mathbf{d}(P^i \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\ \mathbf{d}y^j. \end{aligned}$$
  Stellen wir ω *als*
  $$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} \eta_{j_1,\ldots,j_k}\ \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{j_k}$$
  einerseits und als
  $$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \tilde{\eta}_{i_1,\ldots,i_k}\ \mathbf{d}z^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}z^{i_k}$$
  andererseits dar, so können wir letzteres umformen zu
  $$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \tilde{\eta}_{i_1,\ldots,i_k}\ \mathbf{d}(P^{i_1} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right)\ \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}(P^{i_k} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_k}}\right)\ \mathbf{d}y^{j_k} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \tilde{\eta}_{i_1,\ldots,i_k}\ \mathbf{d}(P^{i_1} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}(P^{i_k} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_k}}\right)\ \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{j_k}. \end{aligned}$$
  Darauf wenden wir $\mathbf{d}$ *bezüglich* Φ *an, und erhalten*
  $$\begin{aligned} \mathbf{d}\omega &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathbf{d}\left(\tilde{\eta}_{i_1,\ldots,i_k}\ \mathbf{d}(P^{i_1} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}(P^{i_k} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_k}}\right)\right) \wedge \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{j_k} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \Bigg[\mathbf{d}\tilde{\eta}_{i_1,\ldots,i_k}\ \mathbf{d}(P^{i_1} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}(P^{i_k} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_k}}\right) \\ &\qquad + \tilde{\eta}_{i_1,\ldots,i_k}\ \mathbf{d}\left(\mathbf{d}(P^{i_1} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}(P^{i_k} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_k}}\right)\right)\Bigg] \wedge \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{j_k} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \left(\mathbf{d}\tilde{\eta}_{i_1,\ldots,i_k}\ \mathbf{d}(P^{i_1} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{d}(P^{i_k} \circ \psi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_k}}\right) + 0\right) \wedge \mathbf{d}y^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{j_k} \\ &= \ldots = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathbf{d}\tilde{\eta}_{i_1,\ldots,i_k} \wedge \mathbf{d}z^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}z^{i_k}, \end{aligned}$$
  da - wie in Bemerkung 11.16 gesehen - für $\mathbf{d}$ *auf Funktionen die Produktregel gilt und* $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$*. Da wir schon gezeigt haben, dass* $\mathbf{d}$ *auf Funktionen unabhängig von der Karte wirkt, haben wir damit bewiesen, dass* $\mathbf{d}\omega$ *unabhängig von der gewählten Karte ist.*

- *Es gilt für eine* C^1*-Abbildung* $\eta : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *und eine* C^1*-*k*-Form* ω *auf* $\mathcal{M}$*, dass*
  $$\mathbf{d}(\eta\omega) = \mathbf{d}\eta \wedge \omega + \eta\ \mathbf{d}\omega.$$
  Denn wenn wir lokal für ω *die Darstellung*
  $$\omega = \sum_I \omega_I\ \mathbf{d}y^I$$

wählen (für $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \le i_1 < \ldots i_k \le m$ und $\mathbf{d}y^I = \mathbf{d}y^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}y^{i_k}$), so ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(\eta\omega) &= \sum_I \mathbf{d}(\eta\omega_I) \ \wedge \mathbf{d}y^I \\
&= \sum_I ((\mathbf{d}\eta)\omega_I + \eta(\mathbf{d}\omega_I)) \ \wedge \mathbf{d}y^I \\
&= (\mathbf{d}\eta) \wedge \sum_I \omega_I \mathbf{d}y^I + \eta \sum_I \mathbf{d}\omega_I \wedge \mathbf{d}y^I \\
&= \mathbf{d}\eta \wedge \omega + \eta \ \mathbf{d}\omega.
\end{aligned}$$

- *Für eine C^1-k-Form ω_1 und eine C^1-l-Form ω_2 gilt*

$$\mathbf{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathbf{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \mathbf{d}\omega_2.$$

Dies folgt sofort aus der lokalen Darstellung

$$\omega_1 = \sum_I \eta_I \mathbf{d}y^I$$

und

$$\omega_2 = \sum_J \tilde{\eta}_J \mathbf{d}y^J.$$

Denn dann gilt

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{I,J} \eta_I \tilde{\eta}_J \ \mathbf{d}y^I \wedge \mathbf{d}y^J$$

und mit der Definition von $\mathbf{d}$ *erhalten wir*

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \sum_{I,J} \mathbf{d}(\eta_I \ \tilde{\eta}_J) \wedge \mathbf{d}y^I \wedge \mathbf{d}y^J \\
&\overset{B.11.16}{=} \sum_{I,J} ((\mathbf{d}\eta_I)\tilde{\eta}_J + \eta_I(\mathbf{d}\tilde{\eta}_J)) \wedge \mathbf{d}y^I \wedge \mathbf{d}y^J \\
&= \sum_{I,J} \big((\mathbf{d}\eta_I)\tilde{\eta}_J \wedge \mathbf{d}y^I \wedge \mathbf{d}y^J + \eta_I(\mathbf{d}\tilde{\eta}_J) \wedge \mathbf{d}y^I \wedge \mathbf{d}y^J\big) \\
&= \sum_{I,J} \big((\mathbf{d}\eta_I \wedge \mathbf{d}y^I) \wedge (\tilde{\eta}_J \mathbf{d}y^J) + \mathbf{d}\tilde{\eta}_J \wedge (\eta_I \mathbf{d}y^I) \wedge \mathbf{d}y^J\big) \\
&= \mathbf{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + \sum_{I,J} (-1)^k (\eta_I \mathbf{d}y^I) \wedge (\mathbf{d}\tilde{\eta}_J) \wedge \mathbf{d}y^J \\
&= \mathbf{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \mathbf{d}\omega_2.
\end{aligned}$$

11.19 Proposition (Darstellung von $\mathbf{d}\omega$)
Sei $\mathcal{N}^n \subset \mathbb{R}^N$ eine C^2-Mannigfaltigkeit, ω eine C^1-2-Form auf $\mathcal{N}$. Wir definieren lokal in einer Umgebung U von einem $y_0 \in \mathcal{N}$ mit Karte Φ

$$\omega_{ij}(y) := \omega(y)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right).$$

Dann ist für ein $\overline{y} \in U$ und $u = u^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, $v = v^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, $w = w^i \frac{\partial}{\partial y^i} \in T_{\overline{y}}\mathcal{N}$

$$\mathbf{d}\omega(u, v, w) = \left(\frac{\partial \omega_{ij} \circ \Phi^{-1}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \omega_{\alpha i} \circ \Phi^{-1}}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_{\alpha j} \circ \Phi^{-1}}{\partial x^j}\right) \circ \Phi \ u^i \ v^j \ w^\alpha.$$

Beweis. Zunächst erhalten wir die Darstellung

$$\omega = \sum_{1\le k<l\le n} \eta_{kl}\ \mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^l.$$

Definieren wir $\eta_{lk} := -\eta_{kl}$ für $k < l$ und $\eta_{kk} = 0$, so erhalten wir die Darstellung

$$2\omega = \sum_{1\le k,l\le n} \eta_{kl}\ \mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^l$$

und

$$\mathbf{d}(2\omega) = \sum_{1\le k,l\le n} \mathbf{d}\eta_{kl}\ \wedge \mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^l.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
2\omega_{ij}(y) &= \sum_{1\le k,l\le n} \eta_{kl}(y)\ \mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^l \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\
&= \sum_{1\le k,l\le n} \eta_{kl}(y)\ \det \begin{pmatrix} \mathbf{d}y^k\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) & \mathbf{d}y^k\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ \mathbf{d}y^l\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) & \mathbf{d}y^l\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{1\le k,l\le n} \eta_{kl}(y)\ \det \begin{pmatrix} \delta_i^k & \delta_j^k \\ \delta_i^l & \delta_j^l \end{pmatrix} \\
&= \sum_{1\le k,l\le n} \eta_{kl}(y)\ (\delta_i^k\ \delta_j^l - \delta_i^l\ \delta_j^k) \\
&= \eta_{ij} - \eta_{ji} \\
&= 2\eta_{ij}(y).
\end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
2\mathbf{d}\omega(u,v,w) &= \sum_{1\le k,l\le n} \mathbf{d}\eta_{kl} \wedge \mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^l(u,v,w) \\
&= \sum_{1\le k,l\le n} \frac{\partial \eta_{kl}\circ\Phi^{-1}}{\partial x^s} \circ \Phi\ \mathbf{d}y^s \wedge \mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^l(u,v,w) \\
&= \sum_{1\le k,l\le n} \frac{\partial \eta_{kl}\circ\Phi^{-1}}{\partial x^s} \circ \Phi\ \mathbf{d}y^s \wedge \mathbf{d}y^k \wedge \mathbf{d}y^l\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}, \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) u^i v^j w^\alpha \\
&= u^i v^j w^\alpha \sum_{1\le k,l\le n} \frac{\partial \eta_{kl}\circ\Phi^{-1}}{\partial x^s} \circ \Phi\ \det \begin{pmatrix} \mathbf{d}y^s\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) & \mathbf{d}y^s\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) & \mathbf{d}y^s(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}) \\ \mathbf{d}y^k\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) & \mathbf{d}y^k\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) & \mathbf{d}y^k(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}) \\ \mathbf{d}y^l\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) & \mathbf{d}y^l\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) & \mathbf{d}y^l(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}) \end{pmatrix} \\
&= u^i v^j w^\alpha \sum_{1\le k,l\le n} \frac{\partial \eta_{kl}\circ\Phi^{-1}}{\partial x^s} \circ \Phi\ \det \begin{pmatrix} \delta_i^s & \delta_j^s & \delta_\alpha^s \\ \delta_i^k & \delta_j^k & \delta_\alpha^k \\ \delta_i^l & \delta_j^l & \delta_\alpha^l \end{pmatrix} \\
&= u^i v^j w^\alpha \sum_{1\le k,l\le n} \frac{\partial \eta_{kl}\circ\Phi^{-1}}{\partial x^s} \circ \Phi\ (\delta_i^s\delta_j^k\delta_\alpha^l + \delta_i^k\delta_j^l\delta_\alpha^s + \delta_j^s\delta_\alpha^k\delta_i^l - \delta_\alpha^s\delta_j^k\delta_i^l - \delta_\alpha^k\delta_j^l\delta_i^s - \delta_j^s\delta_i^k\delta_\alpha^l) \\
&= u^i v^j w^\alpha \sum_{1\le k,l\le n} \frac{\partial \eta_{kl}\circ\Phi^{-1}}{\partial x^s} \circ \Phi\ (\delta_i^s(\delta_j^k\delta_\alpha^l - \delta_\alpha^k\delta_j^l) + (\delta_i^k\delta_j^l - \delta_j^k\delta_i^l)\delta_\alpha^s + \delta_j^s(\delta_\alpha^k\delta_i^l - \delta_i^k\delta_\alpha^l)) \\
&\overset{(11.9)}{=} u^i v^j w^\alpha \sum_{1\le k,l\le n} \frac{\partial \eta_{kl}\circ\Phi^{-1}}{\partial x^s} \circ \Phi\ (2\delta_i^s\delta_j^k\delta_\alpha^l + 2\delta_i^k\delta_j^l\delta_\alpha^s + 2\delta_j^s(\delta_\alpha^k\delta_i^l))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2u^i v^j w^\alpha \frac{\partial \eta_{j\alpha} \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i} \circ \Phi + \frac{\partial \eta_{ij} \circ \Phi^{-1}}{\partial x^\alpha} \circ \Phi \ + \frac{\partial \eta_{\alpha i} \circ \Phi^{-1}}{\partial x^j} \circ \Phi \\
&= 2u^i v^j w^\alpha \Big(-\frac{\partial \omega_{\alpha j} \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i} \circ \Phi + \frac{\partial \omega_{ij} \circ \Phi^{-1}}{\partial x^\alpha} \circ \Phi + \frac{\partial \omega_{\alpha i} \circ \Phi^{-1}}{\partial x^j} \circ \Phi\Big),
\end{aligned}
$$

denn es gilt

$$
\eta_{kl}\delta^k_\alpha \delta^l_\beta \overset{k\leftrightarrow l}{=} -\eta_{kl}\delta^l_\alpha \delta^k_\beta, \quad 1 \le k, l, \alpha, \beta \le n. \tag{11.9}
$$

□

Eine weitere wichtige Operation für k-Formen auf Mannigfaltigkeiten, neben der Anwendung $\mathbf{d}$, ist der sogenannte Pullback. Dabei wird eine Form, definiert zunächst auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$, über eine Abbildung $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ "zurückgezogen" auf die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Für die Definition des Pullbacks, Definition 11.21, bzw. für eine direkte Folgerung daraus benötigen wir die folgende einfache

11.20 Proposition (Koeffizientenfunktionen sind glatt)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ein offenes Gebiet und $b_1, \dots, b_m \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $1 \le m \le n$, $k \ge 0$, so dass $(b_1(x), \dots .b_m(x))$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$ für alle $x \in \Omega$.
Dann existiert für jedes $x_0 \in \Omega$ ein offenes $\Omega' = \Omega'(x_0) \subset \Omega$ und eine Koeffizientenfunktion $\lambda_i : \ \Omega' \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für b_i, $1 \le i \le m$, so dass

$$
v = \sum_{i=1}^m \lambda_i(x, v) b_i(x) \quad \text{für alle } v \in \operatorname{span}(b_1(x), \dots, b_m(x)),\ x \in \Omega',
$$

und $\lambda_i \in C^k(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, $1 \le i \le m$.

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ fixiert. Wir ergänzen $(b_1(x_0), \dots, b_m(x_0))$ zu einer Basis

$$
(b_1(x_0), \dots, b_m(x_0), b_{m+1}, \dots, b_n)
$$

von $\mathbb{R}^n$.
Dann ist $(b_1(x), \dots, b_m(x), b_{m+1}, \dots, b_n)$ auch Basis von $\mathbb{R}^n$ in einer kleinen offenen Umgebung $\Omega' \subset \Omega$ von x_0. Nun definieren wir Koeffizientenfunktionen λ_i, $1 \le i \le n$ durch die Cramersche Regel

$$
\lambda_i(x, v) = \frac{\det(b_1(x)| \dots b_{i-1}(x)|v|b_{i+1}(x) \dots |b_n)}{\det(b_1(x)| \dots |b_n)}, \quad v \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega'.
$$

Da die Determinante in einer C^∞-Abhängigkeit zu den jeweiligen Matrix-Einträgen steht, ist auch $\lambda_i(x, v)$ in einer C^∞-Abhängigkeit von den Einträgen $b_1, \dots, b_n$ und v, und dies impliziert $\lambda_i(x, v) \in C^k(\Omega' \times \mathbb{R}^n)$, $1 \le i \le m$. □

11.21 Definition (Pullback)
Seien $\mathcal{M}^m$ und $\mathcal{N}^n \subset \mathbb{R}^N$ zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Sei weiter ω eine k-Form auf $\mathcal{N}^n$ und $f : \ \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^n$ eine C^1-Abbildung. Dann definieren wir den Pullback *von ω unter f durch*

$$
f^*\omega(y)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(y))(\mathbf{d}f_y(v_1), \dots, \mathbf{d}f_y(v_k)) \quad \text{für } v_1, \dots, v_k \in T_y\mathcal{M},\ y \in \mathcal{M}.
$$

11.22 Bemerkung

- *Es gilt $f^*(u \wedge v) = f^*u \wedge f^*v$, wie man sich leicht anhand von lokalen Koordinaten klarmacht.*
- *Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ jeweils C^l-Mannigfaltigkeiten und sei $f \in C^l(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, $l \ge 1$. Sei $\overline{y}$ in $\mathcal{M}$ und sei $\overline{z} := f(\overline{y})$. Um $\overline{y}$ wählen wir eine Umgebung $U \subset \mathcal{M}$ und eine Karte $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ und ebenso um $\overline{z}$ eine Umgebung $V \subset \mathcal{N}$ und eine Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen die lokalen Koordinaten um $\overline{z}$ mit z^k.*
  Dann ist $f^*\mathbf{d}z^k$ eine C^{l-1}-1-Form auf $\mathcal{M} \cap U$ für ein ggf. noch etwas kleineres U:
  Zunächst ist klar, dass $f^*\mathbf{d}z^k$ eine 1-Form auf $M \cap U$ ist, da $\mathbf{d}z^k$ eine C^l-1-Form ist und $f \in C^1$, also $\mathbf{d}f$ wohldefiniert.
  Wir bezeichnen die Koordinaten in $\psi(V)$ mit $(\zeta^j)_{j=1}^n$ und die Koordinaten in $\Phi(U)$ mit $(x^i)_{i=1}^m$. Sei $v \in T_{\overline{y}}\mathcal{M}$. Wir zerlegen v, so dass $v = v^i \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x^i}(\Phi(\overline{y}))$. Dann ist $v^i = \mathbf{d}y^i_{\overline{y}}(v)$, $1 \le i \le m$ nach (11.8). Also gilt

$$
\mathbf{d}f_{\overline{y}}(v) = \frac{\partial f \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i}(\Phi(\overline{y}))\mathbf{d}y^i_{\overline{y}}(v).
$$

Daraus folgt, dass für jedes $v \in T_{\overline{y}}\mathcal{M}$

$$(f^*\mathbf{d}z^k)(\overline{y})(v) = \mathbf{d}z^k_{f(\overline{y})}\left(\frac{\partial f \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i}(\Phi(\overline{y}))\mathbf{d}y^i_{\overline{y}}(v)\right) = \mathbf{d}z^k_{f(\overline{y})}\left(\frac{\partial f \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i}(\Phi(\overline{y}))\right)\ \mathbf{d}y^i_{\overline{y}}(v).$$

Wir betrachten noch $\mathbf{d}z^k_{f(\overline{y})}\left(\frac{\partial f \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i}(\Phi(\overline{y}))\right)$:
Es gilt für jeden Tangentialvektor $w \in T_{\overline{z}}\mathcal{N}$, *dass wenn wir* $w = w^i \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial \zeta^i}(\psi(\overline{z}))$ *zerlegen,*

$$\mathbf{d}z^k_{\overline{z}}(w) = w^k.$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial f \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i}(\Phi(\overline{y})) = \mathbf{d}f_{\overline{y}}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \in T_{\overline{z}}\mathcal{N}, \quad 1 \le i \le m.$$

In $\overline{y}$ *ist dieser Ausdruck* C^{l-1}, *d.h. für* $\overline{y} := \Phi(\overline{x})$ *ist*

$$\mathbf{d}f_{\Phi(\cdot)}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \in C^{l-1}(\Phi(U), \mathbb{R}^N).$$

Das Berechnen der Koordinaten w^i *ist nach Proposition 11.20 in* C^{l-1} *modulo eines kleineren* V *und somit modulo eines kleineren* $U \subset \mathcal{M}$ *und wir haben*

$$\eta_i := \mathbf{d}z^k_{f(\cdot)}\left(\frac{\partial f \circ \Phi^{-1}}{\partial x^i}(\Phi(\cdot))\right) \in C^{l-1}(U, \mathbb{R}), \quad 1 \le i \le m,$$

als Verknüpfung von C^{l-1}*-Funktionen. Also ist (lokal)*

$$f^*\mathbf{d}z^k = \eta_i \mathbf{d}y^i$$

und $\eta_i(\cdot)$ *eine* C^{l-1}*-Abbildung von* $U \to \mathbb{R}$. *Dies impliziert, dass* $f^*\mathbf{d}z^k$ *eine* C^{l-1}*-Form ist.*

- *Weiter ist klar, dass die Anwendung von* $\wedge$ *diese Regularität nicht ändert, und somit haben wir gezeigt, dass für eine* C^{k-1}*-Form* ω *und eine* C^k*-Abbildung* f *zwischen* C^k*-Mannigfaltigkeiten die Form* $f^*\omega$ *eine* C^{k-1}*-Form ist.*

11.23 Proposition (Vertauschung von d und Pullback)
Seien $\mathcal{M}^m$, $\mathcal{N}^n$ *zwei* C^k*-Mannigfaltigkeiten der Dimension* m *bzw.* n *und* $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *eine* C^k*-Abbildung,* $k \ge 2$. *Sei weiter auf* $\mathcal{N}$ *die* C^1*-*l*-Form* ω *definiert. Wir betrachten den Pullback* $f^*\omega$, *eine* C^{k-1}*-*l*-Form auf* $\mathcal{M}$. *Dann gilt*

$$\mathbf{d}(f^*\omega) = f^*(\mathbf{d}\omega).$$

Beweis. Es reicht, die Behauptung lokal zu zeigen. Wir fixieren ein $\overline{y} \in \mathcal{M}$ und setzen $\overline{z} := f(\overline{y})$. Dann wählen wir eine Umgebung U in $\mathcal{M}$ von $\overline{y}$ mit Karte Φ und eine Umgebung V in $\mathcal{N}$ von $\overline{z}$ mit Karte ψ.Zunächst betrachten wir eine C^2-Abbildung $f:\ \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ und eine C^1-Abbildung $g:\ \mathcal{N} \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f^*g = g \circ f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Somit gilt für ein $v \in T_y\mathcal{M}$ mit der Zerlegung $(v^\alpha)_\alpha$, so dass $v^\alpha \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x^\alpha} = v$:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(f^*g)(v) &= \frac{\partial g \circ f \circ \Phi^{-1}}{\partial x^\alpha} \circ \Phi\ v^\alpha \\ &= \frac{\partial g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \Phi^{-1}}{\partial x^\alpha} \circ \Phi\ v^\alpha \\ &= \frac{\partial g \circ \psi^{-1}}{\partial \zeta^\gamma} \circ \psi \circ f\ \frac{\partial (\psi \circ f \circ \Phi^{-1})^\gamma}{\partial x^\alpha} \circ \Phi\ v^\alpha. \end{aligned}$$

Weiter folgt wegen

$$\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial \zeta^\beta} \circ \psi \circ f \frac{\partial (\psi \circ f \circ \Phi^{-1})^\beta}{\partial x^\alpha} \circ \Phi\ v^\alpha = \frac{\partial (\psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \Phi^{-1})}{\partial x^\alpha} \circ \Phi\ v^\alpha = \mathbf{d}f(v)$$

und da $(\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial \zeta^\beta} \circ \psi \circ f)_\beta$ eine Basis von $T_{f(\cdot)}\mathcal{N}$ ist, dass $\frac{\partial(\psi \circ f \circ \Phi^{-1})^\beta}{\partial x^\alpha} \circ \Phi\ v^\alpha$ die Koeffizienten für die Darstellung von $\mathbf{d}f(v)$ in der Basis $(\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial \zeta^\beta})_\beta$ sind und dies impliziert

$$\mathbf{d}(f^*g)(v) \quad = \quad \frac{\partial g \circ \psi^{-1}}{\partial \zeta^\gamma} \circ \psi \circ f\ (\mathbf{d}f(v))^\gamma = (f^*\mathbf{d}g)(v).$$

Also gilt für solche f und g schon, dass

$$\mathbf{d}(f^*g) = f^*(\mathbf{d}g). \tag{11.10}$$

Nun stellen wir ω lokal dar als

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \eta_{i_1,\ldots,i_l} \mathbf{d}z^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}z^{i_l}.$$

Der Übersicht halber nehmen wir an, dass

$$\omega = \eta(z)\mathbf{d}z^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}z^l.$$

Dann gilt mit (11.10)

$$f^*\omega = f^*\eta\ \mathbf{d}(f^*z^1) \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}(f^*z^k).$$

Nach Anwendung von $\mathbf{d}$ erhalten wir mit Bemerkung 11.18 für $\mathbf{d}(\varphi \wedge \omega)$ und $\mathbf{d} \circ \mathbf{d}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}f^*\omega &= \mathbf{d}(\eta \circ f)\ \wedge \mathbf{d}(f^*z^1) \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}(f^*z^k) + 0 \\
&= f^*\mathbf{d}\eta \wedge f^*(\mathbf{d}z^1) \wedge \ldots \wedge f^*(\mathbf{d}z^k) \\
&= f^*(\mathbf{d}\eta \wedge \mathbf{d}z^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}z^k) \\
&= f^*(\mathbf{d}\omega).
\end{aligned}$$

□

11.2. Projektionen

In unserer Anwendung wollen wir ein Funktional $F(u)$ für eine ABbildung $u \in W^{1,2}(D^2, \mathcal{N})$ variieren. Wir möchten also für ein $\varphi \in C_0^\infty(D^2, \mathbb{R}^n)$ die erste Variation

$$\delta F(u, \varphi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(u + t\varphi)$$

berechnen. Nun ist aber $u(\cdot) + t\varphi(\cdot)$ nicht notwendig punktweise fast überall in $\mathcal{N}$, also ist $F(u + t\varphi)$ unter Umständen gar nicht definiert. Allerdings ist $u + t\varphi$ für t hinreichend klein, aufgrund der L^∞-Eigenschaft von φ punktweise fast überall nahe bei $\mathcal{N}$. Um der Variation also Sinn zu geben, benötigen wir eine Projektion $\Pi : V\mathcal{N} \to \mathcal{N}$, von einer Umgebung $V\mathcal{N}$ von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}$. Den Beweis der Existenz und erste Folgerungen wollen wir in diesem Abschnitt vorstellen, vgl. auch [Hél02], Kapitel 1 und [Sim96], Appendix 2.12.3.

Zunächst benötigen wir für den Beweis der Existenz der Projektion einige Regularitätsaussagen über den Zusammenhang zwischen Räumen und ihren Basen:

11.24 Proposition (Stetige Abhängigkeit vom Fußpunkt für Orthonormalbasen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, eine offene Umgebung der 0. Seien weiter für ein n und N mit $1 \leq n \leq N < \infty$ stetige Abbildungen $b_1, \ldots, b_n :\ U \to \mathbb{R}^N$ gegeben, so dass punktweise für alle $y \in U$ gilt

$$(b_1(y), \ldots, b_n(y)) \quad \textit{linear unabhängig in } \mathbb{R}^N.$$

Dann existiert eine offene Umgebung $U' \subset U$ der 0^p, sowie $o_1, \ldots, o_N : U' \to \mathbb{R}^N$ ebenfalls stetig, so dass für alle $y \in U'$

$$(o_1(y), \ldots, o_N(y)) \quad \textit{Orthonormalbasis von } \mathbb{R}^N$$

und

$$\mathrm{span}(o_1(y), \ldots, o_n(y)) = \mathrm{span}(b_1(y), \ldots, b_n(y)) \quad \textit{für alle } y \in U'.$$

Beweis. Wir ergänzen zunächst $b_1(0), b_2(0), \dots, b_n(0)$ zu einer Basis $(b_1(0), \dots, b_n(0), b_{n+1}, \dots, b_N)$ von $\mathbb{R}^N$. Dann existiert unter Benutzung dass $|\det(b_1(0)|b_2(0)|\dots|b_N)| > 0$ und $|\det(\cdot)|$ eine stetige Abbildung ist und $(b_k(y))_{k=0}^n$ stetige Funktionen um 0 sind, eine kleine Umgebung $U' \subset U$ der 0, so dass für ein kleines $\gamma > 0$

$$|\det(b_1(0)|b_2(0)|\dots|b_N)| > \gamma \quad \text{für alle } y \in U',$$

also

$$(b_1(y), \dots, b_n(y), b_{n+1}, \dots b_N) \quad \text{linear unabhängig für alle } y \in U'$$

und somit ist $(b_1(y), \dots, b_N)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ für alle $y \in U'$.
Für jedes $y \in U'$ orthonormalisieren wir die Basis $(b_1(y), \dots, b_N)$ von $\mathbb{R}^N$ mit dem GRAM-SCHMIDT-Verfahren zu einer Orthonormalbasis $(o_1(y), \dots, o_N(y))$, d.h. wir definieren rekursiv für $y \in U'$

$$\tilde{o}_1(y) := b_1(y),$$

$$o_1(y) := \frac{\tilde{o}_1(y)}{\|\tilde{o_1(y)}\|},$$

$$\tilde{o}_{i+1}(y) := b_{i+1}(y) - \sum_{j=1}^{i} \langle b_{i+1}(y), o_j(y)\rangle \; o_j(y), \quad i = 1, \dots, n-1 \text{ und}$$

$$o_{i+1}(y) := \frac{o_i(y)}{\|o_i(y)\|}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Dann sind $o_i(y)$, $1 \le i \le N$, stetig in U', da $\tilde{o}_i(y) \neq 0$ und somit $\|\tilde{o}_i(y)\| > 0$ und stetig. Weiterhin folgt

$$\operatorname{span}(o_1(y), \dots, o_n(y)) = \operatorname{span}(b_1(y), \dots, b_n(y)) \quad \text{für alle } y \in U'$$

aus den Eigenschaften des GRAM-SCHMIDT-Verfahrens. □

11.25 Proposition
Sei $A \in C^k(U, \mathbb{R}^{n\times n})$, $k \ge 0$, eine Abbildung für ein offenes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^p$. Weiter gelte, dass $\operatorname{rang} A \equiv \gamma$ in U für ein $\gamma \in \mathbb{N}$. Für jedes $y_0 \in U$ existiert dann eine offene Menge $U' \subset U$ mit $y_0 \in U'$ und Abbildungen $b_1, \dots, b_\gamma \in C^k(U', \mathbb{R}^n)$, so dass $b_1, \dots, b_\gamma$ linear unabhängig punktweise in U' und

$$\operatorname{span}(b_1(y), \dots, b_\gamma(y)) = \operatorname{Im} A(y) \quad \textit{für alle } y \in U'.$$

Insbesondere existiert eine C^k-Orthonormalbasis von $\operatorname{Im} A$ in U'.

Beweis. Sei also $A \in C^k(U, \mathbb{R}^{n\times n})$ von konstantem Rang γ. Wir wählen $(a_1, \dots, a_n) = A$, $a_1, \dots, a_n \in C^k(U, \mathbb{R}^{n\times n})$, und nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $(a_1(y_0), \dots, a_\gamma(y_0))$ linear unabhängig sind. Dann folgt

$$\operatorname{Im} A(y_0) = \operatorname{span}(a_1, \dots, a_\gamma).$$

Also existiert eine offene Umgebung $U' \subset U$ von y_0, so dass $(a_1(y), \dots, a_\gamma(y))$ für alle $y \in U'$ linear unabhängig ist. Wegen $\operatorname{rang} A(y) = \gamma$ folgt

$$\operatorname{Im} A(y) = \operatorname{span}(a_1(y), \dots, a_\gamma(y)), \quad \text{für alle } y \in U'.$$

Die C^k-Orthonormalbasis erhalten wir aus dem GRAM-SCHMIDT-Verfahren. □

Nun sind wir in der Lage die Existenz der gewünschten Projektion zu beweisen:

11.26 Lemma (Existenz einer Projektion)
(vgl. [Hél02], Exercises, S.44,45; [Sim96], Appendix 2.12.3, Theorem 1, Seite 43f.)
Sei $k \ge 1$ und $\mathcal{N}$ eine kompakte, p-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$.
*Dann existiert eine offene Umgebung $V\mathcal{N} = B_\delta(\mathcal{N})$ für ein kleines $\delta > 0$ in $\mathbb{R}^n$, so dass eine C^k-*Projektion *$P : \overline{V\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ und eine* orthogonale *C^{k-1}-*Projektion *$\Pi : \overline{V\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ existiert.*
Dabei nennen wir P eine Projektion von $V\mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}$, wenn $P : V\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ und wenn $P\big|_{\mathcal{N}} \equiv \mathrm{Id}_{\mathcal{N}}$, d.h. P auf $\mathcal{N}$ die Identität ist.
Weiter nennen wir eine Projektion $\Pi : V\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ orthogonal, wenn gilt

$$\operatorname{dist}(z, \Pi(z)) < \operatorname{dist}(z, y) \quad \textit{für alle } z \in V\mathcal{N} \textit{ und } y \in \mathcal{N} \backslash \{\Pi(z)\}.$$

Für die orthogonale Projektion[40] *gilt weiter*

$$\pi(y+v) = \pi(y) \quad \textit{für alle } v \in T_y^\perp \mathcal{N} \textit{ mit } |v| < \delta.$$

Beweis. (i) Zunächst zur orthogonalen Projektion Π. Dieser Teil folgt der Darstellung in [Sim96], Appendix 2.12.3, Theorem 1, Seite 43f.

Schritt 1:

Es reicht, für jeden Punkt $y_0 \in \mathcal{N}$ einen Radius $r_{y_0} > 0$ zu finden, so dass

$$\Pi_{y_0}: \ B_{r_{y_0}}(y_0) \to \mathcal{N} \in C^{k-1},$$

$$\Pi_{y_0}(y) = y \quad \text{für alle } y \in \mathcal{N} \cap B_{r_{y_0}}(y_0)$$

und

$$|\Pi_{y_0}(x) - x| < |y - x| \quad \text{für alle } y \in \mathcal{N} \backslash \{\Pi_{y_0}(x)\},\ x \in \mathcal{N} \cap B_{r_{y_0}}(y_0). \tag{11.11}$$

Denn dann bilden diese $(B_{r_y}(y))_{y\in\mathcal{N}}$ eine offene Überdeckung von $\mathcal{N}$ und da $\mathcal{N}$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $(B_{r_\alpha}(y_\alpha))_\alpha$ von $\mathcal{N}$.

Ist $V := B_{r_\alpha}(y_\alpha) \cap B_{r_{\alpha'}}(y_{\alpha'}) \neq \emptyset$, so gilt $\Pi_\alpha(x) = \Pi_{\alpha'}(x)$ für alle $x \in V$, denn wegen der strikten Abschätzung (11.11) für y_α, $y_{\alpha'}$ folgt sonst für ein Gegenbeispiel $x \in V$

$$|\Pi_\alpha(x) - x| < |\Pi_{\alpha'}(x) - x| < |\Pi_\alpha(x) - x|.$$

Dies ist ein Widerspruch und somit gilt $\Pi_\alpha(x) = \Pi_{\alpha'}(x)$ für alle $x \in V$.

Daher ist die Abbildung

$$\Pi: \ \bigcup_\alpha B_{r_\alpha}(y_\alpha) \to \mathcal{N}$$

definiert durch

$$\Pi(x) := \Pi_\alpha(x) \quad \text{für ein } \alpha \text{ mit } x \in B_{r_\alpha}(y_\alpha)$$

wohldefiniert und $\Pi \in C^{k-1}$.

Definieren wir $\delta := \frac{1}{2}\min\{r_\alpha\}$ und $V\mathcal{N} := B_\delta(\mathcal{N})$, so gilt

$$\Pi \in C^k(\overline{V\mathcal{N}}, \mathcal{N}).$$

Es reicht also für ein festes $y_0 \in \mathcal{N}$ den Radius r_{y_0} und die Abbildung Π_{y_0} zu finden.

Schritt 2:

Für jedes $y_0 \in \mathcal{N}$ existiert eine offene Umgebung $W \equiv W_{y_0}$ um 0 in $T_{y_0}\mathcal{N}$ und ein C^k-Diffeomorphismus $u: W \to \mathcal{N}$ mit

$$u(w) - (y_0 + w) \in T_{y_0}^\perp \mathcal{N} \quad \text{für alle } w \in W. \tag{11.12}$$

Um dies zu zeigen, wählt man eine relativ offene Umgebung U um y_0 in $\mathcal{N}$ so klein, dass eine Karte

$$\Phi: U \to \mathbb{R}^p$$

existiert. Sei dabei ohne Einschränkung $\Phi(y_0) = 0$.

Seien weiter

$$o_1, \ldots, o_p \quad \text{eine Orthonormalbasis von } T_{y_0}\mathcal{N}$$

und

$$o_{p+1}, \ldots, o_n \quad \text{eine Orthonormalbasis von } T_{y_0}^\perp \mathcal{N}.$$

Dann definieren wir

$$T: \ \Phi(U) \times T_{y_0}\mathcal{N} \to T_{y_0}\mathcal{N}$$

durch

$$T(x,w) := \sum_{j=1}^p \langle \Phi^{-1}(x) - y_0, o_j \rangle o_j - w.$$

Dabei ist $\sum_{j=1}^p \langle \Phi^{-1}(x) - y_0, o_j \rangle$ gerade die Projektion von $\Phi^{-1}(x) - y_0 \in \mathbb{R}^n$ auf $T_{y_0}\mathcal{N}$.

Dann gilt

[40] Die punktweise Eindeutigkeit der orthogonalen Projektion lässt sich leicht aus der strikten Abschätzung für $|\Pi(z) - z|$ zeigen.

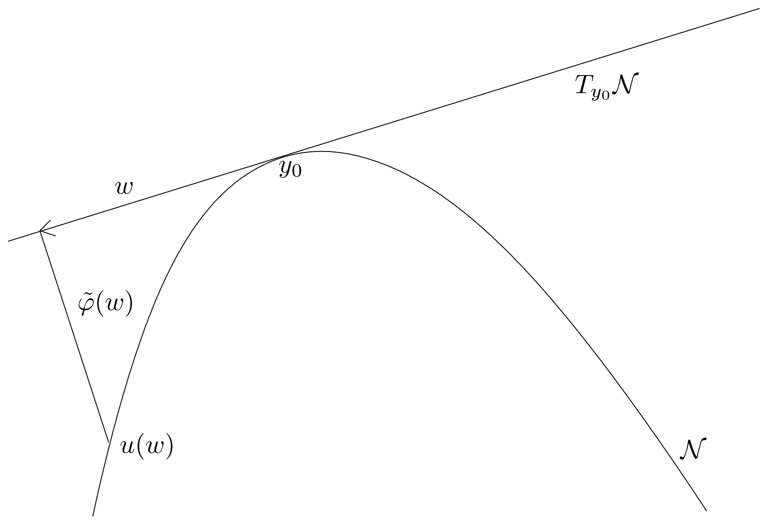

Abbildung 11.2: Projektion vom (affinen) Tangentialraum $y_0 + T_{y_0}\mathcal{N}$ auf $\mathcal{N}$.

- $T(0,0) = 0$ und
- $T \in C^k(\Phi(U) \times T_{y_0}\mathcal{N}, T_{y_0}\mathcal{N})$. (Wir beachten hierbei, dass $T_{y_0}\mathcal{N}$ ein p-dimensionaler, reeller Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, so dass die Differenzierbarkeit wohldefiniert ist).
- Definieren wir weiter für ein $v \in \mathbb{R}^p$

$$H(v) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} T(0+tv,0) = \sum_{j=1}^{p} \langle \underbrace{\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi^{-1}(tv)}_{\in T_{y_0}\mathcal{N}}, o_j\rangle o_j = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi^{-1}(tv),$$

  dann ist $H(v)$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}^p$ nach $T_{y_0}\mathcal{N}$, da $\frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x^\alpha}(0) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(y_0)$ nach Lemma 11.9 eine Basis von $T_{y_0}\mathcal{N}$ ist.

Es folgt mit dem Satz über implizite Funktionen, Satz 3.5, dass es eine offene Umgebung W der 0 in $T_{y_0}\mathcal{N}$, eine offene Umgebung $V \subset \Phi(U)$ der 0 in $\mathbb{R}^p$ sowie eine C^k-Abbildung $\tilde{u} : W \to V$ gibt, so dass

$$T(\tilde{u}(w), w) = 0 \quad \text{für alle } w \in W. \tag{11.13}$$

Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $V = \Phi(U)$.
Wir definieren $u := \Phi^{-1} \circ \tilde{u} : W \to \mathcal{N}$ in $C^k(W, \mathcal{N})$. Dann gilt mit (11.13)

$$\sum_{j=1}^{p} \langle u(w) - y_0, o_j\rangle o_j - w = 0 \quad \text{für alle } w \in W.$$

Definieren wir $\tilde{\varphi}(w) := u(w) - (y_0 + w)$, so folgt wegen $w = \sum_{j=1}^{p} \langle w, o_j\rangle o_j$ (da $w \in T_{y_0}\mathcal{N}$ und $(o_j)_{j=1}^{p}$ eine Orthonormalbasis von $T_{y_0}\mathcal{N}$)

$$\tilde{\varphi}(w) \in T_y^{\perp}\mathcal{N} \quad \text{für alle } w \in W.$$

Weiterhin können wir $\tilde{u}$ invertieren, da aus $T(\tilde{u}(w), w) = 0$ folgt

$$w = \sum_{j=1}^{p} \langle \Phi^{-1}(\tilde{u}(w)) - y_0, o_j\rangle o_j,$$

also

$$\tilde{u}^{-1}(x) = \sum_{j=1}^{p} \langle \Phi^{-1}(x) - y_0, o_j\rangle o_j \;\in C^k(\Phi(U), T_{y_0}\mathcal{N}).$$

Setzen wir $u^{-1} := \tilde{u}^{-1} \circ \Phi$, so erhalten wir, dass $u : W \subset T_{y_0}\mathcal{N} \to u(W) \subset \mathcal{N}$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.
Nun ist $u(W)$ eine relativ offene Umgebung von y_0 in $\mathcal{N}$, da $\tilde{u}(W)$ eine offene Umgebung der 0 in $\mathbb{R}^p$ ist. Also können wir u^{-1} als eine Karte von der Umgebung $u(W)$ von y_0 in den p-dimensionalen, reellen Vektorraum $T_{y_0}\mathcal{N}$ auffassen. Dann folgt mit Lemma 11.9, dass

$$\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u(w + to_j) \right)_{j=1}^{p} \quad \text{ist eine Basis von } T_{u(w)}\mathcal{N} \text{ für alle } w \in W. \tag{11.14}$$

Wir setzen

$$\frac{\partial}{\partial u^j}(w) \equiv \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u(w + to_j), \quad 1 \leq j \leq p.$$

Über das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsungsverfahren erhalten wir, wenn wir wieder mit W eine ggf. noch kleinere Umgebung von 0 in $T_{y_0}\mathcal{N}$ bezeichnen, folgende Abbildungen

$$\gamma_{p+1}, \ldots, \gamma_n : \; W \to \mathbb{R}^n$$

mit

$$\gamma_i(0) = o_i, \quad p+1 \leq i \leq n$$

und

$$(\gamma_{p+1}(w), \ldots, \gamma_n(w)) \quad \text{ist eine Orthonormalbasis von } T^{\perp}_{u(w)}\mathcal{N}.$$

Weiter gilt $\gamma_i \in C^{k-1}(W, \mathbb{R}^n)$, $p+1 \leq i \leq n$, da $\frac{\partial}{\partial u^j} \in C^{k-1}(W, \mathbb{R}^n)$.
<u>Schritt 3:</u>
Wir definieren

$$S : \underbrace{W}_{\subset T_{y_0}\mathcal{N}} \times T^{\perp}_{y_0}\mathcal{N} \to \mathbb{R}^n$$

durch

$$S(w, v) := u(w) + \sum_{j=p+1}^{n} \langle v, o_j \rangle \underbrace{\gamma_j(w)}_{\in C^{k-1}}. \tag{11.15}$$

Dann ist $S \in C^{k-1}$ und $S(0,0) = y_0$.
Weiter gilt

$$S(0, v) = y_0 + v \quad \text{für alle } v \in (T_{y_0}\mathcal{N})^{\perp}. \tag{11.16}$$

Sei $e = e_1 \oplus e_2 \in \mathbb{R}^n$, wobei $e_1 \in T_{y_0}\mathcal{N}$ und $e_2 \in T^{\perp}_{y_0}\mathcal{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} S(0 + te_1, 0 + te_2) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(u(0 + te_1) + t \sum_{j=p}^{n} \langle e_2, o_j \rangle \; \gamma_j(te_1) \right) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u(te_1) + \sum_{j=p+1}^{n} \langle e_2, o_j \rangle \underbrace{\gamma_j(0)}_{=o_j} + 0 \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u(te_1) + \underbrace{\sum_{j=p+1}^{n} \langle e_2, o_j \rangle o_j}_{=e_2} + 0 \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u(te_1) \oplus e_2.
\end{aligned}$$

Dies ist ein Isomorphismus in e, da $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} u(te_1)$ ein Isomomorphismus in e_1 ist, weil u eine Karte ist.
Aus dem Satz über die inverse Funktion, Theorem 3.6, folgt, dass S lokal um $(0,0)$ invertierbar ist, d.h. es existieren eine ggf. noch kleinere Umgebung der Null W in $T_{y_0}\mathcal{N}$, eine offene Umgebung der Null V in $T^{\perp}_{y_0}\mathcal{N}$ und eine offene Umgebung $Z \subset \mathbb{R}^n$ von y_0, so dass

$$S : W \times V \to Z \quad \text{ist ein } C^{k-1}\text{-Diffeomorphismus.}$$

Definieren wir für $r > 0$, $v \in T_{y_0}\mathcal{N}$

$$B_r^\top(v) := \{v' \in T_{y_0}\mathcal{N},\ |v' - v| < r\}, \quad B_r^\top \equiv B_r^\top(0),$$

und für $v \in T_{y_0}^\perp\mathcal{N}$

$$B_r^\perp(v) := \{v' \in T_{y_0}^\perp\mathcal{N},\ |v' - v| < r\}, \quad B_r^\perp \equiv B_r^\perp(0)$$

Bälle in $T_{y_0}\mathcal{N}$ bzw. in $T_{y_0}^\perp\mathcal{N}$, so existiert nach dem Satz über die inverse Funktion ein $\delta_0 = \delta_0(\mathcal{N}, y_0) > 0$, so dass für alle $\delta \leq \delta_0$ und für

$$Z_\delta := S(B_\delta^\top \times B_\delta^\perp)$$

gilt:

$$S : B_\delta^\top \times B_\delta^\perp \to Z_\delta \text{ ist ein } C^{k-1}\text{-Diffeomorphismus.}$$

Insbesondere existiert wegen $k \geq 2$ eine Konstante $C = C(\mathcal{N}, y_0)$, so dass für alle $\delta \leq \delta_0$ gilt

$$\|DS^{-1}\|_{L^\infty(Z_\delta)} + \|DS\|_{L^\infty(B_\delta^\top \times B_\delta^\perp)} \leq C(\mathcal{N}, y_0).$$

Sei $\delta' \equiv \delta'(\mathcal{N}, y_0) > 0$, $\delta' < \delta_0$ so klein, dass für alle $\delta < \delta'$ gilt

$$|z - y| \geq \delta \quad \text{für alle } z \in Z_\delta \text{ und } y \notin Z_{\delta_0}. \tag{11.17}$$

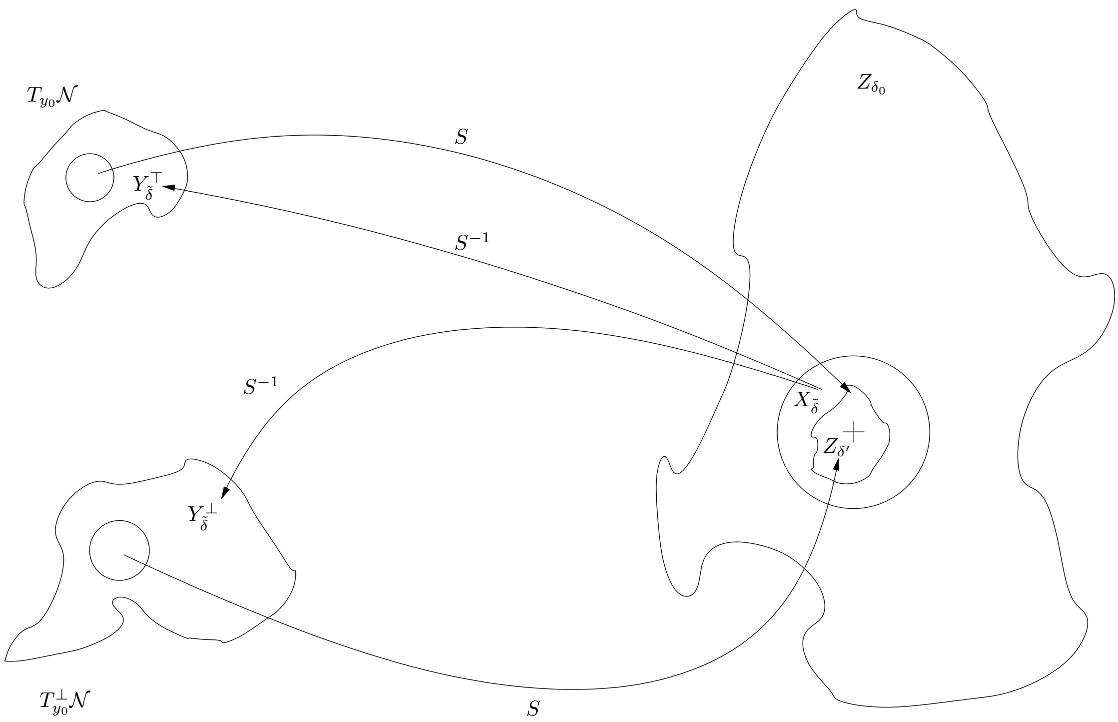

Abbildung 11.3: Existenz von δ'.

Beweis der Existenz von δ'. (vgl. Abbildung 11.3)
Zunächst ist Z_{δ_0} eine Umgebung von y_0 in $\mathbb{R}^n$. Wir wählen $\tilde\delta > 0$, so dass $\tilde\delta < \delta_0$, $X_{\tilde\delta} := B_{\tilde\delta}^n(y_0) \subset Z_{\delta_0}$ und $\operatorname{dist}(X_{\tilde\delta}, \partial Z_{\delta_0}) > \tilde\delta$.
Wir bilden $S^{-1}(X_{\tilde\delta})$ und erhalten zwei offene Umgebungen $Y_{\tilde\delta}^\top \subset T_{y_0}\mathcal{N}$ und $Y_{\tilde\delta}^\perp \subset T_{y_0}^\perp\mathcal{N}$ der Null in $T_{y_0}\mathcal{N}$ bzw. $T_{y_0}^\perp\mathcal{N}$, so dass

$$S(Y_{\tilde\delta}^\top, Y_{\tilde\delta}^\perp) \subset X_{\tilde\delta}.$$

Jetzt wählen wir $\delta' > 0$, so dass

$$B_{\delta'}^\top(0) \times B_{\delta'}^\perp(0) \subset S^{-1}(X_{\tilde\delta}).$$

Dann gilt

$$\mathrm{dist}(Z_{\delta'}, \mathbb{R}^n \backslash Z_{\delta_0}) \geq \mathrm{dist}(X_{\tilde{\delta}}, \mathbb{R}^n \backslash Z_{\delta_0}) > \tilde{\delta} > \delta'.$$

Somit gilt auch für alle $\delta \in (0, \delta']$

$$\mathrm{dist}(Z_{\delta}, \mathbb{R}^n \backslash Z_{\delta_0}) \geq \mathrm{dist}(Z_{\delta'}, \mathbb{R}^n \backslash Z_{\delta_0}) > \delta' > \delta.$$

Also ist für $\delta' = \delta'(y_0, \mathcal{N})$ die Ungleichung (11.17) etabliert. ||

Sei im Folgenden $\delta < \delta'$.
Wir betrachten für ein $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, welches wir später wählen, ein beliebiges $z \in S(B^{\top}_{\frac{\delta}{2}} \times B^{\perp}_{\theta\delta})$ und erhalten eindeutige

$$\xi \equiv \xi_z \in B^{\top}_{\frac{\delta}{2}} \subset T_{y_0}\mathcal{N}, \quad \eta \in B^{\perp}_{\theta\delta} \subset T^{\perp}_{y_0}\mathcal{N},$$

so dass

$$z = S(\xi, \eta).$$

Nach Definition von S, (11.15), gilt nun

$$u(\xi) = S(\xi, 0)$$

und deshalb

$$|z - u(\xi)| = |S(\xi, \eta) - S(\xi, 0)| \leq |\eta| \; \|DS\|_{L^\infty} \leq C(y_0, \mathcal{N}) \; \theta\delta.$$

Weil $u(\zeta) \in \mathcal{N}$ für alle $\zeta \in B^{\top}_{\frac{\delta}{2}} \subset B^{\top}_{\delta_0}$ ist, gilt

$$\mathrm{dist}(z, \mathcal{N}) \leq |z - u(\xi)| \leq C \; \theta\delta. \tag{11.18}$$

Andererseits gilt für $(\alpha, \beta) \in B^{\top}_{\delta_0} \times B^{\perp}_{\delta_0} \backslash B^{\top}_{\frac{3\delta}{4}} \times B^{\perp}_{\frac{3\delta}{4}}$, wobei wir $\tilde{z} := S(\alpha, \beta)$ setzen,

$$\delta\frac{1}{4} \leq |(\xi, \eta) - (\alpha, \beta)| = \left|S^{-1}(z) - S^{-1}(\tilde{z})\right| \leq \|DS^{-1}\|_{L^\infty(Z_{\delta_0})} \; |z - \tilde{z}|,$$

und somit hat man für alle $\theta < \frac{1}{2}$ und $\delta < \delta'$

$$\mathrm{dist}(z, Z_{\delta_0} \backslash Z_{\frac{3\delta}{4}}) \geq \frac{1}{C(\mathcal{N}, y_0)} \frac{1}{4}\delta. \tag{11.19}$$

Insgesamt erhalten wir für alle $\theta < \frac{1}{2}$, $\delta < \delta'$ und $z \in S(B^{\top}_{\frac{\delta}{2}} \times B^{\perp}_{\theta\delta})$ aus (11.19) und (11.17)

$$\mathrm{dist}(z, \mathbb{R}^n \backslash Z_{\frac{3\delta}{4}}) \geq c(\mathcal{N}, y_0)\delta. \tag{11.20}$$

Nun wählen wir $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ so klein, dass aus (11.18) folgt

$$\mathrm{dist}(z, \mathcal{N}) \leq |z - u(\xi)| \leq C \; \theta\delta \overset{\theta \ll 1}{<} \delta \tag{11.21}$$

und aus (11.20)

$$\mathrm{dist}(z, \mathbb{R}^n \backslash Z_{\frac{3\delta}{4}}) \geq c(\mathcal{N}, y_0)\delta \overset{\theta \ll 1}{>} C \; \theta\delta \geq |z - u(\xi)|. \tag{11.22}$$

Dann gilt nämlich mit (11.21)

$$\min_{x \in \overline{B^{\top}_{\delta}}} |u(x) - z| < \delta, \tag{11.23}$$

und wegen (11.22) folgt, dass dieses Minimum nur in $\overline{B^{\top}_{\frac{3\delta}{4}}} \subset B^{\top}_{\delta}$, also im Inneren von $\overline{B^{\top}_{\delta}}$ angenommen wird.
Wir betrachten einen Minimierer $\overline{x} \in B^{T}_{\delta}$ mit

$$|u(\overline{x}) - z| = \min_{x \in \overline{B^{\top}_{\delta}}} |u(x) - z|.$$

Da $\overline{x}$ im Inneren von $\overline{B_\delta^T}$ liegt, gilt für $1 \le i \le p$ und für jedes t betraglich hinreichend klein, dass $\overline{x} + to_i \in \overline{B_\delta^T}$ und folglich

$$\begin{aligned}
|u(\overline{x}) - z|^2 &\le |u(\overline{x} + to_i) - z|^2 \\
&= |u(\overline{x} + to_i) - u(\overline{x}) + u(\overline{x}) - z|^2 \\
&= |u(\overline{x} + to_i) - u(\overline{x})|^2 + |u(\overline{x}) - z|^2 + 2\langle u(\overline{x} + to_i) - u(\overline{x}), u(\overline{x}) - z\rangle.
\end{aligned}$$

Dies ist für $t > 0$, $t \ll 1$ äquivalent zu

$$0 \le t \underbrace{\left|\frac{u(\overline{x} + to_i) - u(\overline{x})}{t}\right|^2}_{\xrightarrow{t\to 0} |\frac{\partial}{\partial u^i}(\overline{x})|^2} + 2\langle \underbrace{\frac{u(\overline{x} + to_i) - u(\overline{x})}{t}}_{\xrightarrow{t\to 0} \frac{\partial}{\partial u^i}(\overline{x})}, u(\overline{x}) - z\rangle,$$

und dies impliziert für $t \to 0$

$$0 \le 2\langle \frac{\partial}{\partial u^i}(\overline{x}), u(\overline{x}) - z\rangle.$$

Ist $t < 0$ so folgt analog

$$0 \ge 2\langle \frac{\partial}{\partial u^i}(\overline{x}), u(\overline{x}) - z\rangle,$$

und deshalb gilt

$$\langle \frac{\partial}{\partial u^i}(\overline{x}), u(\overline{x}) - z\rangle = 0, \quad 1 \le i \le p.$$

Da $(\frac{\partial}{\partial u^i}(\overline{x}))_{i=1}^p$ nach Schritt 2 eine Basis von $T_{u(\overline{x})}\mathcal{N}$ ist, gilt

$$u(\overline{x}) - z \in T^\perp_{u(\overline{x})}\mathcal{N}.$$

Nun hatten wir in Schritt 2 auch eine Orthonormalbasis $(\gamma_j(\overline{x}))_{j=p+1}^n$ von $T_{u(\overline{x})}\mathcal{N}$ erzeugt, und erhalten folglich für eine Sequenz $(\lambda_j)_{j=p+1}^n \subset \mathbb{R}$

$$u(\overline{x}) - z = \sum_{j=p+1}^n \lambda_j \gamma_j(\overline{x}).$$

Dies ist aber nach Definition von S, (11.15), genau

$$z = S(\overline{x}, -\lambda),$$

wenn wir $\lambda := \sum_{j=p+1}^n \lambda_j o_j \in T_{y_0}\mathcal{N}$ definieren.
Weiter gilt mit dem Satz von Pythagoras

$$|u(\overline{x}) - z|^2 = \sum_{j=p+1}^n |\lambda_j|^2 = |\lambda|^2_{T^\perp_{y_0}\mathcal{N}}$$

und deshalb mit (11.23)

$$|\lambda|_{T^\perp_{y_0}} = |u(\overline{x}) - z| < \delta.$$

Es folgt

$$S(\xi, \eta) = S(\overline{x}, -\lambda),$$

was wegen (ξ, η), $(\overline{x}, -\lambda) \in B^\top_{\delta_0} \times B^\perp_{\delta_0}$ nach Anwendung von S^{-1}

$$\xi = \overline{x} \quad \text{und} \quad \eta = -\lambda$$

ergibt. Wir erhalten also die strikte Abschätzung

$$\min_{x \in \overline{B_\delta^\top}} |u(x) - z| = |u(\xi) - z| < |u(\tilde{x}) - z| \quad \text{für alle } \tilde{x} \in \overline{B_\delta^\top} \backslash \{\xi\}. \tag{11.24}$$

Schritt 4:
Wählen wir ein $\delta = \delta(\mathcal{N}, y_0) < \delta'$ hinreichend klein, so dass $u(B^{\top}_{\delta_0}) \supset S(B^{\top}_{\delta} \times B^{\perp}_{\delta}) \cap \mathcal{N}$, so gilt für alle $\tilde{z} \in \overline{Z_{\frac{3\delta}{4}}} \cap \mathcal{N} \subset Z_{\delta_0} \cap \mathcal{N}$, dass $\tilde{z} = u(\tilde{\xi})$ für ein $\tilde{\xi} \in \overline{B^{\top}_{\frac{3\delta}{4}}}$, da u ein Diffeomorphismus von $B^{\top}_{\delta_0}$ nach $u(B^{T}_{\delta_0}) \supset S(B^{\top}_{\delta} \times B^{\perp}_{\delta}) \cap \mathcal{N} \ni \tilde{z}$.
Also gilt für alle $z \in S(B^{\top}_{\frac{\delta}{2}} \times B^{\perp}_{\theta\delta})$, $z = S(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in B^{\top}_{\frac{\delta}{2}} \times B^{\perp}_{\theta\delta}$

$$|z - u(\xi)| = \min_{x \in \overline{B^{\top}_{\delta}}} |u(x) - z| \le \min_{y \in \overline{Z_{\frac{3\delta}{4}}} \cap \mathcal{N}} |y - z|,$$

und (falls $\mathbb{R}^n \backslash Z_{\frac{3\delta}{4}}) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$) gilt weiter

$$\min_{x \in \overline{B^{\top}_{\delta}}} |u(x) - z| \overset{(11.24)}{=} |z - u(\xi)| \overset{(11.22)}{<} \operatorname{dist}(z, (\mathbb{R}^n \backslash Z_{\frac{3\delta}{4}}) \cap \mathcal{N}).$$

Zusammen ergibt dies

$$|z - u(\xi)| = \min_{y \in \mathcal{N}} |z - y| \tag{11.25}$$

und

$$|z - u(\xi)| < |z - y| \quad \text{für alle } y \in \mathcal{N} \backslash \{u(\xi)\} \tag{11.26}$$

für jedes $z \in S(B^{\top}_{\frac{\delta}{2}} \times B^{\perp}_{\theta\delta})$.
Weiter ist wegen $S^{-1} \in C^{k-1}$ die Abbildung $z \mapsto \xi$ eine C^{k-1}-Abbildung, und da $u \in C^k$ ist, folgt, dass die Abbildung $z \mapsto u(\xi)$ in $C^{k-1}(S(B^{\top}_{\frac{\delta}{2}} \times B^{\perp}_{\theta\delta}), \mathcal{N})$ liegt.
$S(B^{\top}_{\frac{\delta}{2}} \times B^{\perp}_{\theta\delta})$ ist eine Umgebung von y_0 in $\mathbb{R}^n$, und damit lässt sich ein kleines $\gamma = \gamma(\mathcal{N}, y_0) > 0$ finden, so dass die orthogonale Projektion

$$\Pi_{y_0} : B^n_{\gamma}(y_0) \to \mathcal{N}$$

wohldefiniert und von der Klasse C^{k-1} ist.
Weiter folgt aus (11.16) und aus der Diffeomorphismuseigenschaft von S, dass falls $z \in B^n_{\gamma}(y_0)$ und $z - y \in (T_{y_0}\mathcal{N})^{\perp}$, dann $\pi_{y_0}(z) = y_0$. Wir erhalten also insgesamt $\Pi(y + v) = y$ für alle $v \in T_y\mathcal{N}$, wenn $|v| < \gamma$.

(ii) Nun zur Projektion P. Dieser Teil folgt der Anleitung in [Hél02], Exercises, S.44,45.
Schritt 1:
Sei $q := n - p$ die Co-Dimension von $\mathcal{N}$. Wir bezeichnen mit $Gr_q(n)$ den GRASSMANN*ian* von q-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{R}^n$, also

$$Gr_q(n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid \text{V ist } q\text{-dimensionaler Unterraum von } \mathbb{R}^n\}.$$

Weiter erinnern wir uns an die Definition aus Beispiel 11.7 der Klasse $\mathcal{P}_q(n)$ von symmetrischen Projektions-Matrizen mit spur $= q$, also

$$\mathcal{P}_q(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T = A^2, \text{ spur } A = q\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $Gr_q(n)$ mit $\mathcal{P}_q(n)$ identifizierbar ist.
Wie im Beispiel 11.7 gesehen, folgt für ein $A \in \mathcal{P}_q(n)$ die Existenz einer Orthogonalmatrix Q und der Diagonalmatrix D_q mit den ersten q Diagonalelementen 1 und den restlichen Einträgen 0, so dass $A = Q\, D_q Q^T$.
Anschaulich dreht A angewendet auf einen Vektor v in $\mathbb{R}^n$ den Vektor v mit Q auf $\tilde{v} = Qv$, projiziert diesen neuen Vektor $\tilde{v}$ auf q seiner Komponenten und dreht ihn wieder mit Q^T zurück. Wir vermuten folglich, dass wir zu jedem q-dimensionalen Unterraum V von $\mathbb{R}^n$ genau eine Matrix $A \in \mathcal{P}_q(n)$ finden, so dass $\operatorname{Im} A = V$ und $\operatorname{Ker} A = V^{\perp}$ und umgekehrt zu jeder dergestalten Matrix genau einen q-dimensionalen Unterraum V von $\mathbb{R}^n$ finden, so dass $\operatorname{Im} A = V$ und $\operatorname{Ker} A = V^{\perp}$.
Aus den Rechnungen in Beispiel 11.7 ist für die Orthonormalbasis $(o_1, \dots, o_n)$ von $\mathbb{R}^n$, so dass $Q = (o_1|\dots|o_n)$ und $A = QD_qQ^T$

$$Ao_i = \begin{cases} o_i, & 1 \le i \le q, \\ 0, & q+1 \le i \le n, \end{cases}$$

also ist $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}(o_1, \ldots, o_q)$ und $\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}(o_{q+1}, \ldots, o_n) = \operatorname{Im} A^{\perp}$. Folglich erzeugt $A \in \mathcal{P}_q(n)$ genau einen q-dimensionalen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{Im} A = V$ und $\operatorname{Ker} A = V^{\perp}$.

Sei V ein q-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Wir wählen eine Orthonormal-Basis $(b_1, \ldots, b_q)$ von V und wir erweitern diese zu einer orthonormalen Basis $(b_1, \ldots, b_q, b_{q+1}, \ldots, b_n)$ von $\mathbb{R}^n$. Wir setzen $Q := (b_1|b_2|\ldots|b_n)$. Dann ist Q eine orthogonale Matrix und

$$Q^T b_k = e_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

für die Einheitsvektoren $(e_k)_k$ von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren wieder $D_q := \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{q}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-q})$ und setzen $A := QD_qQ^T$. Dann erhalten wir

$$Ab_k = \begin{cases} b_k, & 1 \leq k \leq q, \\ 0 & q+1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Da $(b_k)_k$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ ist und $V = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_q)$, gilt

$$\operatorname{Im} A = V$$

und

$$\operatorname{Ker} A = V^{\perp}.$$

Damit haben wir *eine* Matrix $A \in \mathcal{P}_q(n)$ gefunden (wir können die Bedingungen für $A \in \mathcal{P}_q(n)$ leicht mit den obigen Rechnungen überprüfen), die dem Raum V entspricht.
Zur Eindeutigkeit seien zwei Matrizen A_1, $A_2 \in \mathcal{P}_q(n)$ gegeben mit

$$\operatorname{Im} A_1 = \operatorname{Im} A_2 =: V$$

und

$$\operatorname{Ker} A_1 = \operatorname{Ker} A_2 = V^{\perp}.$$

Wir wählen eine Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_q)$ von V und ergänzen diese zu einer Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_n)$ von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $A_1 b_k = b_k = A_2 b_k$ für alle $1 \leq k \leq q$ und $A_1 b_j = 0 = A_2 b_j$ für alle $q+1 \leq j \leq n$. Folglich ist $A_1 = A_2$, da $(b_k)_k$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ ist.
Somit existiert also für jeden q-dimensionalen Unterraum V von $\mathbb{R}^n$ genau eine zugehörige Matrix $A \in \mathcal{P}_q(n)$.
<u>Schritt 2:</u>
Wir normieren den Raum der $n \times n$-Matrizen mit der Hilbert-Schmidt-Norm $|\cdot|_{HS}$.
Dabei ist

$$|(a_{ij})|_{HS} := \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es gibt eine kleine Umgebung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{P}_q(n)$ in M_n, so dass eine C^∞-Projektion ψ von $\mathcal{V}$ auf $\mathcal{P}_q(n)$ existiert, so dass

$$|\psi(A) - A|_{HS} = \operatorname{dist}_{HS}(A, \mathcal{P}_q(n)) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{V}.$$

Dies folgt aus der Tatsache, gezeigt in Beispiel 11.7, dass $\mathcal{P}_q(n)$ eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n\times n}$ bezüglich der Hilbert-Schmidt-Norm ist. Mit (i) erhalten wir dann die Projektion ψ.
<u>Schritt 3:</u>
Wir betrachten für jeden Punkt $y \in \mathcal{N}$ den orthogonalen Tangentialraum $(T_y\mathcal{N})^{\perp}$. Dies ist ein $p - n =: q$-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$ und lässt sich somit nach Schritt 1 mit einem $A_y \in \mathcal{P}_q(n)$ identifizieren.
Wir wollen zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Folge $(y_\alpha, r_\alpha)_\alpha$ mit $y_\alpha \in \mathcal{N}$ und $r_\alpha > 0$ existiert, so dass

$$\mathcal{N} \subset \bigcup_{\alpha} B^n_{r_\alpha}(y_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$$

und so dass für jedes α und für alle $y \in B_{r_\alpha}(y_\alpha) \cap \mathcal{N}$ gilt

$$|A_{y_\alpha} - A_y|_{HS} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.27}$$

Dabei reicht es, für jedes $y_\alpha =: \overline{y} \in \mathcal{N}$ ein $r_\alpha =: r_{\overline{y}} > 0$ zu finden, so dass (11.27) erfüllt ist, denn wegen der Kompaktheit von $\mathcal{N}$ können wir dann aus den Bällen $(B_{r_{\overline{y}}}(\overline{y}))_{\overline{y}\in\mathcal{N}}$ endlich viele auswählen, die immer noch ganz $\mathcal{N}$ überdecken.
Sei also $\overline{y} \in \mathcal{N}$. Wir wählen zunächst ein $r > 0$ hinreichend klein, so dass $U := \mathcal{N} \cap B_r(\overline{y})$ in einer Karte liegt. Sei Φ diese Karte und sei ohne Einschränkung $\Phi(\overline{y}) = 0$.
Wir betrachten die Koordinatenbasis $(\frac{\partial}{\partial y^i}(y))$ des Tangentialraums $T_y(\mathcal{N})$ für Φ mit $y \in U$.
Dann ist (wir beachten, dass $\mathcal{N}$ eine C^k-Mannigfaltigkeit, $k \geq 1$ ist)

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(\Phi^{-1}(x)) \quad \text{immer noch stetig von } \Phi(U) \text{ nach } \mathbb{R}^n.$$

Nach Proposition 11.24 gibt es eine kleine offene Umgebung $V' \subset \Phi(U)$ mit $0 \in V'$ und Orthonormalbasen $o_1, \ldots, o_n : V' \to \mathbb{R}^n$ stetig abhängig von $x \in V'$, so dass

$$o_{p+1}(x), \ldots, o_n(x) \perp \frac{\partial}{\partial y^i}(\Phi^{-1}(x)) \quad \text{punktweise in } V',\ i = 1, \ldots, p.$$

Wir wählen $r > 0$ unter Umständen noch kleiner, so dass $\Phi(B_r(\overline{y}) \cap \mathcal{N}) \subset V$ und betrachten die Abbildungen $o_i(\Phi(y))$ für $y \in U' := B_r(\overline{y}) \cap \mathcal{N}$.
Dann ist $o_i(\Phi(y))$ stetig in U' und

$$(o_{p+1}(\Phi(y)), \ldots, o_n(\Phi(y))) \quad \text{ist eine in } y \text{ stetige Orthonormalbasis von } T_y\mathcal{N}$$

für alle $y \in U'$.
Wir identifizieren der Übersicht halber $o_i(\Phi(y))$ mit $o_i(y)$.
Nun definieren wir $B(y) := (o_1(y)|\ldots|o_n(y)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und erhalten eine orthogonale Matrix.
Nach Schritt 1 ist $A_y = B(y)\operatorname{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-p})B^T(y) \in \mathcal{P}_q(n)$ und wegen $o_i(y)$ stetig abhängig von y in $B_r(\overline{y}) \cap \mathcal{N}$ ist dann auch A_y stetig abhängig von $y \in B_r(\overline{y}) \cap \mathcal{N}$.
Insbesondere können wir für jedes $\varepsilon > 0$ den Radius $r = r(\varepsilon, \overline{y}) > 0$ noch kleiner wählen, so dass

$$|A_y - A_{\overline{y}}|_{HS} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für alle } y \in B_r(\overline{y}) \cap \mathcal{N}.$$

<u>Schritt 4:</u>
Wir definieren die Umgebung $V\mathcal{N} := \bigcup_\alpha B_{r_\alpha}(y_\alpha)$ von $\mathcal{N}$ in $\mathbb{R}^n$.
Weiter definieren wir η_α eine Partition der Eins über $\mathcal{N}$, d.h.

$$\eta_\alpha \in C_0^\infty(B_{r_\alpha}(y_\alpha)),$$
$$0 \leq \eta_\alpha \leq 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \text{ und für alle } \alpha, \text{ sowie}$$
$$\sum_\alpha \eta_\alpha(y) = 1 \quad \text{für alle } y \in \mathcal{N}.$$

Dann ist $\eta_\alpha(y)$ eine C^k-Funktion in dem Sinne, dass für eine Karte Φ von einer relativ offenen Menge $U \subset \mathcal{N}$ nach $\mathbb{R}^p$ die Abbildung $\eta(\Phi^{-1}(x))$ für $x \in \Phi(U)$ in C^k liegt, da $\eta \in C_0^\infty$ und Φ^{-1} in C^k liegt.
Nun definieren wir (für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$) die Abbildung $\gamma : \mathcal{N} \to \mathcal{P}_q(n)$ punktweise durch

$$\gamma(y) = \psi(\sum_\alpha A_{y_\alpha}\eta_\alpha(y))$$

für die orthogonale Projektion ψ aus Schritt 2.
Zunächst müssen wir untersuchen, ob diese Abbildung wohldefiniert ist: Dazu müssen wir überprüfen, ob $\sum_\alpha A_{y_\alpha}\eta_\alpha(y) \in \mathcal{V}$ (vgl. Schritt 2).Es gilt (wir beachten $\sum_\alpha \eta_\alpha(y) = 1$ und $\eta_\alpha \geq 0$)

$$\begin{aligned}\left|\sum_\alpha A_{y_\alpha}\eta_\alpha(y) - A_y\right|_{HS} &= \left|\sum_\alpha (A_{y_\alpha} - A_y)\eta_\alpha(y)\right|_{HS} \\ &\leq \sum_\alpha \eta_\alpha |A_{y_\alpha} - A_y|_{HS} \\ &< \sum_\alpha \eta_\alpha \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

denn falls $\eta_\alpha(y) \neq 0$, dann gilt $y \in B_{r_\alpha}(y_\alpha)$ und somit nach Schritt 3 $|A_{y_\alpha} - A_y|_{HS} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Somit gilt für alle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon^{|\cdot|_{HS}}(\mathcal{P}_q(n)) \subset \mathcal{V}$, dass $\gamma(y)$ punktweise in $\mathcal{N}$ wohldefiniert ist, da $A_y \in \mathcal{P}_q(n)$.
Weil ψ die Distanz von Matrizen in $\mathcal{V}$ zu $\mathcal{P}_q(n)$ realisiert, haben wir

$$\begin{aligned}
|\gamma(y) - A_y|_{HS} &\leq \left|\gamma(y) - \sum_\alpha A_{y_\alpha}\eta_\alpha(y)\right|_{HS} + \underbrace{\left|\sum_\alpha A_{y_\alpha}\eta_\alpha(y) - A_y\right|_{HS}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \\
&< \underbrace{\left|\psi(\sum_\alpha A_{y_\alpha}\eta_\alpha(y)) - \sum_\alpha A_{y_\alpha}\eta_\alpha(y)\right|_{HS}}_{\leq \left|A_y - \sum_\alpha A_{y_\alpha}\eta_\alpha(y)\right|_{HS} < \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nun ist auch $\gamma \in C^k(\mathcal{N}, \mathcal{P}_q(n))$ in dem Sinne, dass für jede relativ offene Umgebung U in $\mathcal{N}$ mit Karte Φ die Abbildung $\gamma \circ \Phi^{-1} : \Phi(U) \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Funktion ist.
Anschaulich liefert uns $\gamma(y)$ also einen q-dimensionalen Unterraum, der "beinahe" (bezüglich der Hilbert-Schmidt-Norm auf Matrizen) der orthogonale Tangentialraum $T_y^\perp\mathcal{N}$ ist, aber in einer C^k-Abhängigkeit zu y steht, statt wie der orthogonale Tangentialraum in einer C^{k-1}-Abhängigkeit, was der Grund war, dass in (i) die orthogonale Projektion eine Regularitätsstufe verloren hatte.
Schritt 5:
Sei ein $y_0 \in \mathcal{N}$ fixiert. Wir wählen eine Umgebung U um y_0 und eine Karte $\Phi : U \to \mathbb{R}^p$, so dass $\Phi(y_0) = 0$. Wir betrachten die C^k-Abbildung $\gamma \circ \Phi^{-1} : \Phi(U) \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt für alle $x \in \Phi(U)$, dass der Rang der Matrix $\gamma\circ\Phi^{-1}(x)$ konstant q und der Rang von $\gamma\circ\Phi^{-1}(x) - I$ konstant p ist, da $\gamma\circ\Phi^{-1}(x) \in \mathcal{P}_q(n)$. Nach Proposition 11.25 existiert dann wegen $\gamma \circ \Phi^{-1} \in C^k$ für ein ggf. kleineres U eine C^k-Orthonormalbasis $(o_1, \dots, o_p, o_{p+1} \dots, o_n)$, so dass $\mathrm{span}(o_1, \dots, o_p) = \mathrm{Im}(\gamma \circ \Phi - I)$ und $\mathrm{span}(o_{p+1}, \dots, o_n) = \mathrm{Im}\,\gamma \circ \Phi$.
Wir definieren $S : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ durch

$$S(y, z) := \sum_{i=1}^p \langle(\gamma(y) - I)(y - z), o_i(y)\rangle e_i,$$

für die Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_p$ von $\mathbb{R}^p$. Dann gilt:

- $S(y, z) = 0$ genau dann, wenn $(\gamma(y) - I)(y - z) = 0$, da $\mathrm{Im}(\gamma(y) - I) = \mathrm{span}(o_1, \dots, o_p)$, also

$$S(y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y - z \in \mathrm{Im}\,\gamma(y), \tag{11.28}$$

  und insbesondere $S(y, y) = 0$ für alle $y \in U$,
- $\tilde{S}(\cdot, \cdot) := S(\Phi^{-1}(\cdot), \cdot) \in C^k(\Phi(U) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$,
- $\tilde{S}(0, y_0) = S(y_0, y_0) = 0$ und
- für alle $v \in \mathbb{R}^p$ gilt

$$\tilde{H}(v) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{S}(tv, y_0) = \sum_{i=1}^p \langle(\gamma(y_0) - I)\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi^{-1}(tv), o_i(y_0)\rangle e_i,$$

  wobei wir beachten, dass γ und o_i beide in C^k, $k \geq 1$ sind und somit die Produktregel angewendet werden kann. Wir wollen zeigen, dass $\tilde{H} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ ein Isomorphismus ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass $H(v) := (\gamma(y_0) - I)\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Phi^{-1}(tv)$ ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^p$ und $\mathrm{Im}(\gamma(y_0) - I)$ ist.
  Wir bezeichnen mit $A_{y_0} \equiv A \in \mathcal{P}_q(n)$ die erzeugende Matrix von $T_{y_0}^\perp\mathcal{N}$ aus Schritt 3 mit $\mathrm{Im}\,A = T_{y_0}^\perp\mathcal{N}$ und $\mathrm{Ker}\,A = T_{y_0}\mathcal{N}$. Dann gilt $A\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Phi^{-1}(tv) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^p$ und deshalb $(\gamma(y_0) - I)\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Phi^{-1}(tv) = (\gamma(y_0) - A - I)\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Phi^{-1}(tv)$.
  Weiter folgt nach Schritt 4, dass $|\gamma(y) - A_y|_{HS} < \varepsilon$ für ein noch zu wählendes $\varepsilon > 0$. Mit der Neumann-Reihe, vgl. Lemma 8.14, erhalten wir, dass für jedes $\varepsilon \ll 1$

$$\gamma(y) - A_y - I \in GL(n), \quad \text{für alle } y \in \mathcal{N}.$$

Weil $(o_i(y_0))_{i=1}^m$ linear unabhängig ist, gilt

$$\begin{aligned} H(v)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\gamma(y_0)-I)\,\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi^{-1}(tv)=0\\ &\Leftrightarrow \quad (\gamma(y_0)-A-I)\,\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi^{-1}(tv)=0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi^{-1}(tv)=0\\ &\Leftrightarrow \quad v=0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $H(v)$ injektiv ist, und dass für $\frac{\partial}{\partial y^i} := \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Phi^{-1}(te_i)$, $1\le i\le p$, die Sequenz $(H\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{i=1}^p)$ linear unabhängig ist. Damit ist $H:\mathbb{R}^p\to \operatorname{Im}(\gamma(y_0)-I)$ ein Isomorphismus, da $\dim(\operatorname{Im}(y_0-I))=p$ ist.

Der Satz über implizite Funktionen, Theorem 3.5, liefert ein $r_0>0$ und ein $\rho_0>0$, so dass für $y\in B_{\rho_0}(y_0)\cap\mathcal{N}$ und ein $z\in B_{r_0}(y_0)$ gilt

$$S(y,z)=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=\psi(z),$$

für eine Abbildung $\psi\in C^k(B_{r_0}(y_0),\mathcal{N}\cap B_{\rho_0}(y_0))$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $r_0\le\rho_0$. Insbesondere gilt dann $\psi(y)=y$ für $y\in\mathcal{N}\cap B_{r_0}(y_0)$. Wir wählen ein $R_0\le\frac{r_0}{8}$, so dass $\psi(B_{R_0}(y_0))\subset B_{\frac{r_0}{8}}(y_0)\cap\mathcal{N}$. Wir definieren $\psi_0:\ B_{R_0}(y_0)\to\mathcal{N}$ als Einschränkung von ψ auf $B_{R_0}(y_0)$. Dann gilt für alle $z\in B_{R_0}(y_0)$

$$|\psi_0(z)-z|\le|\psi_0(z)-y_0|+|y_0-z|<\frac{r_0}{8}+R_0\le\frac{r_0}{4}. \tag{11.29}$$

<u>Schritt 6:</u>
Seien y_0, y_1 zwei Punkte in $\mathcal{N}$ mit den Radien r_0, ρ_0, R_0 und r_1, ρ_1, R_1 und den Abbildungen ψ_0, S_0 und ψ_1, S_1. Sei weiter $z\in B_{R_0}(y_0)\cap B_{R_1}(y_1)$. Wir wollen zeigen, dass $\psi_0(z)=\psi_1(z)$:
Sei dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r_1\le r_0$. Es gilt

$$|\psi_1(z)-\psi_0(z)|\le|\psi_1(z)-z|+|\psi_2(z)-z|\overset{(11.29)}{<}\frac{r_1}{4}+\frac{r_0}{4}\le\frac{r_0}{2}.$$

Daraus folgt

$$|\psi_1(z)-y_0|\le|\psi_1(z)-\psi_0(z)|+|\psi_0(z)-y_0|<\frac{r_0}{2}+\frac{r_0}{8}<r_0\le\rho_0.$$

Nun gilt aber nach (11.28) für S_1, dass $\psi_1(z)-z\in\gamma(\psi_1(z))$ und somit wieder nach (11.28) für S_0, dass $S_0(\psi_1(z),z)=0$. Wegen $\psi_1(z)\in B_{\rho_0}(y_0)\cap\mathcal{N}$ und $z\in B_{R_0}(y_0)\subset B_{r_0}(y_0)$ folgt daraus $\psi_1(z)=\psi_0(z)$.
Definieren wir also

$$P: V\mathcal{N}:=\bigcup_{y_\alpha\in\mathcal{N}}B_{R_\alpha}(y_\alpha)\to\mathcal{N}$$

durch

$$P(z):=\psi_\alpha(z)\quad \text{für ein } y_\alpha\in\mathcal{N} \text{ mit } z\in B_{R_\alpha}(y_\alpha),$$

so ist P wohldefiniert und $P\in C^k(V\mathcal{N},\mathcal{N})$. Weiterhin ist P eine Projektion, da $P(y)=\psi_\alpha(y)=y$ für alle $y\in\mathcal{N}$. □

Nun betrachten wir einige Eigenschaften der soeben erhaltenen Projektionen:

11.27 Proposition (Eigenschaften von Projektionen)
Sei $\mathcal{N}$ eine C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension q in $\mathbb{R}^n$, $k\ge1$ mit einer beliebigen Projektion $P:V\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ und der orthogonale Projektion $\Pi:V\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ aus Lemma 11.26, so dass P und Π von der Klasse C^1 sind. Dann gilt für alle $x\in\mathcal{N}$, $v,w\in\mathbb{R}^n$

(i) $\mathbf{d}\Pi_x(v):=\frac{\partial\Pi}{\partial x^\alpha}v^\alpha\in T_x\mathcal{N}$ *und* $\mathbf{d}P_x(v)\in T_x\mathcal{N}$,

(ii) $\langle v,\Pi(z)-z\rangle=0$ *für alle* $z\in V\mathcal{N}$ *und* $v\in T_{\Pi(z)}\mathcal{N}$,

(iii) $\mathbf{d}P_x(v) = v$ *und* $\mathbf{d}\Pi_x(v) = v$ *für alle* $x \in \mathcal{N}$, $v \in T_x\mathcal{N}$ *und*

(iv) $\mathbf{d}\Pi_x(w) = 0$ *für alle* $x \in \mathcal{N}$, $w \in (T_x\mathcal{N})^\perp$.

(v) Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, *so dass* $u, w \in T_x\mathcal{N}$ *für ein fixiertes* $x \in \mathcal{N}$. *Ist* Π *von der Klasse* C^2, *dann ist*[41]

$$u^i \frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta}(x) \; v^\alpha w^\beta = \frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta}(x) \left(\delta^\gamma_\alpha - \frac{\partial \pi^\alpha}{\partial x^\gamma}(x) \right) \; u^i \; v^\gamma \; w^\beta.$$

11.28 Bemerkung
Insbesondere impliziert Proposition 11.27(i), dass aus $v \in \mathbb{R}^n$ *und* $\mathbf{d}\Pi_x(v) = v$ *folgt, dass* $v \in T_x\mathcal{N}$.
Weiter gilt somit auch, dass für $x \in \mathcal{N}$ *die Abbildung* $\mathbf{d}\Pi_x : \mathbb{R}^n \to T_x\mathcal{N}$ *die orthogonale Projektion auf* $T_x\mathcal{N}$ *ist: Für eine Orthonormalbasis* $(o_1, \ldots, o_q, o_{q+1}, \ldots, o_n)$ *von* $\mathbb{R}^n$, *wobei* $(o_1, \ldots, o_q)$ *eine Orthonormalbasis von* $T_x\mathcal{N}$ *ist, gilt für* $v = \sum_{i=1}^n v^i o_i$

$$\mathbf{d}\Pi_x(v) = \sum_{i=1}^q v^i o_i.$$

Damit erhalten wir auch, dass die Abbildung $(\cdot) - \mathbf{d}\Pi_x(\cdot) : \mathbb{R}^n \to T_x^\perp\mathcal{N}$ *die orthogonale Projektion von* $\mathbb{R}^n$ *auf* $T_x^\perp\mathcal{N}$ *ist, da*

$$v - \mathbf{d}\Pi_x(v) = \sum_{i=q+1}^n v^i o_i.$$

Insbesondere ist $v - \mathbf{d}\Pi_x(v) \in T_x^\perp\mathcal{N}$ *für alle* $v \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{N}$.

Beweis von Proposition 11.27. *(i)* Sei $x \in \mathcal{N}$. Es gilt für P (und für Π analog)

$$\mathbf{d}P_x(v) = \frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(x) v^\alpha = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} P(x + tv).$$

Nun ist $f(t) := P(x + tv)$ für kleine t wohldefiniert und $f(0) = P(x) = x$. Somit folgt

$$\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(x) v^\alpha = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(t) \in T_{P(x)}\mathcal{N}.$$

(ii) Wir wollen zeigen $z - \Pi(z) \in (T_x\mathcal{N})^\perp$ für alle $Z \in V\mathcal{N}$.
Für die orthogonale Projektion gilt nach Lemma 11.26

$$|z - \Pi(z)| < |z - p| \quad \text{für alle } p \in \mathcal{N} \backslash \{\Pi(z)\}. \tag{11.30}$$

Sei $v \in T_{\Pi(z)}\mathcal{N}$ beliebig mit einem dazugehörigen $f \in C^((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^n)$, $f(t) \in \mathcal{N}$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $f(0) = \Pi(z)$ und $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(t) = v$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\underbrace{f(0)}_{=\Pi(z)} - z|^2 &\overset{(11.30)}{\leq} |f(t) - z|^2 \\ &= |f(t) - f(0) + f(0) - z|^2 \\ &= |f(t) - f(0)|^2 + |f(0) - z|^2 + 2\langle f(t) - f(0), \Pi(z) - z \rangle. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$0 \leq |f(t) - f(0)|^2 + 2\langle f(t) - f(0), \Pi(z) - z \rangle \quad \text{für alle } |t| \ll 1,$$

woraus seinerseits folgt

$$0 \leq t \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right|^2 + 2 \left\langle \frac{f(t) - f(0)}{t}, \Pi(z) - z \right\rangle \quad \text{für alle } t > 0,\ |t| \ll 1.$$

[41] Für eine allgemeinere Version dieser Aussage siehe z.B. [Sim96], Appendix 2.12.3, Theorem 1, (iv).

Für $t \to 0$ folgt

$$0 \leq 0 \cdot |v|^2 + 2\langle v, \Pi(z) - z\rangle = 2\langle v, \Pi(z) - z\rangle.$$

Da wir dies für beliebiges $v \in T_{\Pi(z)}\mathcal{N}$ gilt, insbesondere auch für $w := -v \in T_{\Pi(z)}\mathcal{N}$, erhalten wir schließlich

$$0 \leq 2\langle v, \Pi(z) - z\rangle \leq 0.$$

Damit gilt also

$$\langle v, \Pi(z) - z\rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in T_{\Pi(z)}\mathcal{N}.$$

(iii) Sei P wieder eine (ggf. nicht orthogonale) C^1-Projektion von $V\mathcal{N}$ nach $\mathcal{N}$. Gegeben sei ein $v \in T_x\mathcal{N}$ und ein zugehöriges $f \in C^1$ mit $f(0) = x$, $f(t) \in \mathcal{N}$ für $|t| \ll 1$ und $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(t) = v$. Dann gilt wegen $P(y) = y$ für alle $y \in \mathcal{N}$

$$v = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} P(f(t)) = \frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(f(0)) \; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f^\alpha(t) = \frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(x) \; v^\alpha = \mathbf{d}P_x(v),$$

also gilt

$$v = \mathbf{d}P_x(v) \quad \text{für alle } v \in T_x\mathcal{N}.$$

(iv) Sei $w \in (T_x\mathcal{N})^\perp$, $x \in \mathcal{N}$. Mit (11.30) folgt für hinreichend kleine t

$$|\Pi(x + tw) - (\underbrace{\Pi(x)}_{=x} + tw)|^2 \leq |x - (x + tw)|^2 = t^2|w|^2.$$

Division durch t^2 liefert dann für alle $|t| \ll 1$, $t \neq 0$

$$\left|\frac{\Pi(x + tw) - \Pi(x)}{t} - w\right|^2 \leq |w|^2$$

und somit erhalten wir für $t \to 0$

$$|\underbrace{\mathbf{d}\Pi_x(w)}_{\in T_x\mathcal{N}} - \underbrace{w}_{\in T_x^\perp\mathcal{N}}|^2 \leq |w|^2$$

und deshalb mit dem Satz von Pythagoras

$$|\mathbf{d}\Pi_x(w)|^2 + |w|^2 \leq |w|^2,$$

also

$$\mathbf{d}\Pi_x(w) = 0 \quad \text{für alle } w \in (T_x\mathcal{N})^\perp.$$

(v) Seien $x \in \mathcal{N}$ fixiert, u, $w \in T_x\mathcal{N}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Für einen beliebigen Vektor $\tilde{w} \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir $\tilde{w}^\perp := \tilde{w} - \mathbf{d}\Pi_x(\tilde{w})$ und $\tilde{w}^\top := \mathbf{d}\Pi_x(\tilde{w})$. Es gilt dann $\tilde{w} = \tilde{w}^\perp \oplus \tilde{w}^\top$, $\tilde{w}^\perp \in (T_x\mathcal{N})^\perp$ und $\tilde{w}^\top \in T_x\mathcal{N}$. Weiter setzen wir für zwei Vektoren $\tilde{w}_1$ und $\tilde{w}_2 \in \mathbb{R}^n$ die symmetrische, bilineare Abbildung

$$\operatorname{Hess}\Pi(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) := \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}(x)\tilde{w}_1^\alpha \; \tilde{w}_2^\beta.$$

Mit diesen Konventionen erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned}
u \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v, w) &= (u^\perp + u^\top) \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v^\perp + v^\top, w^\perp + w^\top) \\
&= u^\perp \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v^\perp, w^\perp) && (11.31) \\
&\quad + u^\perp \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v^\perp, w^\top) && (11.32) \\
&\quad + u^\perp \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v^\top, w^\perp) && (11.33) \\
&\quad + u^\perp \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v^\top, w^\top) && (11.34) \\
&\quad + u^\top \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v^\perp, w^\perp) && (11.35) \\
&\quad + u^\top \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v^\perp, w^\top) && (11.36) \\
&\quad + u^\top \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v^\top, w^\perp) && (11.37) \\
&\quad + u^\top \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v^\top, w^\top). && (11.38)
\end{aligned}$$

Nun gilt $u^\perp = 0$ und $w^\perp = 0$, also (11.31), (11.32), (11.33), (11.34), (11.35) und (11.37) $= 0$. Wir beobachten, dass

$$\mathbf{d}\Pi_{\Pi(x+t\xi)}(\psi - \mathbf{d}\Pi_{\Pi(x+t\xi)}\psi) = 0 \quad \text{für alle } \psi,\, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } |t| \ll 1,$$

da wir nach (iii) und (iv) wissen, dass $\mathbf{d}\Pi_{\Pi(x+t\xi)}$ die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf $T_{\Pi(x+t\xi)}\mathcal{N}$ und $\psi - \mathbf{d}\Pi_{\Pi(x+t\xi)}\psi$ die orthogonale Projektion von ψ auf $T^\perp_{\Pi(x+t\xi)}(\mathcal{N})$ ist. Dies impliziert

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathbf{d}\Pi_{\Pi(x+t\xi)}(\psi - \mathbf{d}\Pi_{\Pi(x+t\xi)}\psi) = 0 \quad \text{für alle } \psi, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

und man erhält

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial \Pi}{\partial x^\alpha}(\Pi(x+t\xi))(\psi^\alpha - \frac{\partial \Pi^\alpha}{\partial x^\beta}(\Pi(x+t\xi))\psi^\beta) \\
&= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^\alpha\, \partial x^i}(x)\frac{\partial \Pi^i}{\partial x^j}(x)\xi^j(\psi^\alpha - (\mathbf{d}\Pi_x\psi)^\alpha) - \frac{\partial \Pi}{\partial x^\alpha}(x)\frac{\partial^2 \Pi^\alpha}{\partial x^\beta\, \partial x^k}(x)\frac{\partial \Pi^k}{\partial x^l}(x)\xi^l\psi^\beta \\
&= \operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\perp) - (\operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi))^\top \\
&= \operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\perp) - (\operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\perp))^\top - (\operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\top))^\top \\
&= (\operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\perp))^\perp - (\operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\top))^\top,
\end{aligned}$$

also

$$T_x^\perp\mathcal{N} \ni \quad (\operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\perp))^\perp = (\operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\top))^\top \quad \in T_x\mathcal{N}.$$

Daraus folgt wegen $T_x^\perp\mathcal{N} \cap T_x\mathcal{N} = \{0\}$

$$(\operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\perp))^\perp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\perp) \in T_x\mathcal{N}$$

und

$$(\operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\top))^\top = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Hess}\Pi(\xi^\top, \psi^\top) \in T_x^\perp\mathcal{N}. \tag{11.39}$$

Aus (11.39) folgt (11.38) $= 0$ und wegen $u = u^\top$ und $w = w^\top$ ergibt sich folglich

$$u \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v, w) = u \cdot \operatorname{Hess}\Pi(v^\perp, w) = \frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta}(x)\left(\delta^\gamma_\alpha - \frac{\partial \pi^\alpha}{\partial x^\gamma}(x)\right)\; u^i\; v^\gamma\; w^\beta.$$

□

Eine hilfreiche Anwendung aus der Existenz der Projektion, Lemma 11.26, liefert das

11.29 Lemma (Approximation von $\mathbf{W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})}$ in $\mathbf{C^k}$)
(vgl. [Str00], Theorem 6.2, p. 218)
Sei $\mathcal{N}$ eine kompakte C^k-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$. Sei weiter $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^\infty$. Dann existiert für jedes $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ und $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine Approximation $u_m \in C^k(\overline{\Omega'}, \mathcal{N})$ mit

$$\|u_m - u\|_{W^{1,2}(\Omega', \mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

Zum Beweis dieses von Lemma 11.29 benötigen wir die folgenden zwei Hilfsresultate:

11.30 Proposition
Sei $B \subset\subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, konvexes Gebiet und $f \in L^p(B)$, $1 \leq p < \infty$. Dann gilt

$$\fint_B \fint_B \int_0^1 |f(tx + (1-t)y)|^p \,\mathbf{d}t\, \mathbf{d}x\, \mathbf{d}y \leq 2^n\, \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)}\, \|f\|^p_{L^p(B)}.$$

Beweis von Proposition 11.30. Es gilt für $t' = 1-t$

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(tx+(1-t)y)|^p \,\mathbf{d}t &= \int_0^{\frac12} |f(tx+(1-t)y)|^p \,\mathbf{d}t + \int_{\frac12}^1 |f(tx+(1-t)y)|^p \,\mathbf{d}t \\ &= \int_0^{\frac12} |f(tx+(1-t)y)|^p \,\mathbf{d}t + \int_0^{\frac12} |f((1-t')x+t'y)|^p \,\mathbf{d}t' \\ &= \int_0^{\frac12} |f(tx+(1-t)y)|^p \,\mathbf{d}t + \int_0^{\frac12} |f((1-t)x+ty)|^p \,\mathbf{d}t.\end{aligned}$$

Weiter gilt mit Transformationsregel ($\xi := tx + (1-t)y$) und der Beobachtung, dass wegen der Konvexität von B für alle $t \in (0,1)$, x, $y \in B$ gilt, dass $tx + (1-t)y \in B$,

$$\begin{aligned}\fint_B \int_0^{\frac12} |f(tx+(1-t)y)|^p \,\mathbf{d}t \,\mathbf{d}y &\leq \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)} \int_0^{\frac12} \underbrace{\frac{1}{(1-t)^n}}_{\leq 2^n} \int_B |f(\xi)|^p \,\mathbf{d}\xi \,\mathbf{d}t \\ &\leq 2^n \frac12 \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)} \,\|f\|^p_{L^p(B)} \\ &= 2^{n-1} \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)} \,\|f\|^p_{L^p(B)},\end{aligned}$$

und analog

$$\fint_B \int_0^{\frac12} |f((1-t)x+ty)|^p \,\mathbf{d}t \,\mathbf{d}x \leq 2^{n-1} \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)} \,\|f\|^p_{L^p(B)}.$$

Daraus schließt man

$$\begin{aligned}\fint_B \fint_B \int_0^1 |f(tx+(1-t)y|^p \,\mathbf{d}t \,\mathbf{d}x \,\mathbf{d}y &= \fint_B \fint_B \int_0^{\frac12} |f(tx+(1-t)y)|^p \,\mathbf{d}t \,\mathbf{d}y \,\mathbf{d}x \\ &\quad + \fint_B \fint_B \int_0^{\frac12} |f((1-t)x+ty)|^p \,\mathbf{d}t \,\mathbf{d}x \,\mathbf{d}y \\ &\leq 2 \cdot 2^{n-1} \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)} \,\|f\|^p_{L^p(B)} \\ &= 2^n \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)} \,\|f\|^p_{L^p(B)}.\end{aligned}$$

□

11.31 Proposition
Für $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ gilt für punktweise fast alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$v(x) - v(y) = \int_0^1 \nabla v(x + t(y-x)) \,(y-x) \,\mathbf{d}t.$$

Beweis von Proposition 11.31. Wir approximieren zunächst v durch $v_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für punktweise fast alle x, $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\left| v(x) - v(y) - \int_0^1 \nabla v(x+t(y-x)) \,(y-x) \,\mathbf{d}t \right| &\leq \underbrace{|v(x) - v_m(x)|}_{\to 0} + \underbrace{|v(y) - v_m(y)|}_{\to 0} \\ &\quad + \int_0^1 |\nabla(v - v_m)(x + t(y-x))| \,|x-y| \,\mathbf{d}t.\end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, dass punktweise fast alle x, $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_0^1 |\nabla(v - v_m)(x+t(y-x))| \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig, $r > 0$. Wir setzen $B := B_r(x_0)$. Nach Proposition 11.30 haben wir

$$\begin{aligned}\int_B \int_B \int_0^1 |\nabla(v - v_m)(x + t(y - x))| \; \mathbf{d}t \; \mathbf{d}x \; \mathbf{d}y &\le C(n,r)\|\nabla(v - v_m)\|_{L^1(B)} \\ &\le C(n,r)\|\nabla(v - v_m)\|_{L^2(B)} \\ &\xrightarrow{m\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\|\int_B \int_0^1 |\nabla(v - v_m)(x + t((\cdot) - x))| \; \mathbf{d}t \; \mathbf{d}x\|_{L^1(B)} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

und somit für punktweise fast alle $y \in B$

$$\int_B \int_0^1 |\nabla(v - v_m)(x + t(y - x))| \; \mathbf{d}t \; \mathbf{d}x \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Dies bedeutet seinerseits

$$\|\int_0^1 |\nabla(v - v_m)((\cdot) + t(y - (\cdot)))| \; \mathbf{d}t\|_{L^1(B)} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

und somit folgt schließlich, dass für punktweise fast alle x und $y \in B$

$$\int_0^1 |\nabla(v - v_m)(x + t(y - x))| \; \mathbf{d}t \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Da $B = B_r(x_0)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ beliebig gewählt wurde, folgt insgesamt, dass für punktweise fast alle x und $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_0^1 |\nabla(v - v_m)(x + t(y - x))| \; \mathbf{d}t \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

□

Beweis von Lemma 11.29. Die Idee des Beweises besteht darin, dass man zeigt, dass die Faltung von u lokal in einer tubularen Umgebung $V\mathcal{N}$ von $\mathcal{N}$ liegt, auf welcher eine C^k-Projektion $P : V\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ wohldefiniert ist. Die Verknüpfung von Projektion und Faltung ergibt dann die approximierende Folge.
Die Glattheit von $\partial\Omega$ benutzend, setzt man zunächst u auf $\tilde{u} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ fort und identifiziert $u \equiv \tilde{u}$. Sei dann η ein Faltungskern, d.h. $\eta \in C_0^\infty(B_1^2(0))$, $0 \le \eta \le 1$ und $\int_{\mathbb{R}^2} \eta = 1$. Wir vereinbaren für $\varepsilon > 0$ wie gewöhnlich, dass $\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$. Komponentenweise setzen wir

$$u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n).$$

Dann gilt komponentenweise

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u \quad \text{in } W^{1,2}(\Omega).$$

Sei ein $\Omega' \subset\subset \Omega$ gegeben. Wir wählen ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\varepsilon < \varepsilon_0$ gilt $B_\varepsilon(\Omega') \subset \Omega$.
Seien ein $x_0 \in \Omega'$, ein $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ und ein $y \in B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega = B_\varepsilon(x_0)$ mit[42] $u(y) \in \mathcal{N}$ fixiert. Dann rechnet man

$$\begin{aligned}(\operatorname{dist}(u_\varepsilon(x_0), \mathcal{N}))^2 &\le |u_\varepsilon(x_0) - u(y)|^2 \\ &= \left|\int_{B_\varepsilon(x_0)} (u(x) - u(y)) \; \eta_\varepsilon(x_0 - x) \; \mathbf{d}x\right|^2 \\ &= \frac{1}{\varepsilon^4}\left|\int_{B_\varepsilon(x_0)} (u(x) - u(y)) \; \eta(\frac{x_0 - x}{\varepsilon}) \; \mathbf{d}x\right|^2 \\ &\le \frac{1}{\varepsilon^4}\left(\int_{B_\varepsilon(x_0)} |u(x) - u(y)|^2 \; \mathbf{d}x\right)\left(\int_{B_\varepsilon(x_0)} \left|\eta(\frac{x_0 - x}{\varepsilon})\right|^2 \mathbf{d}x\right) \\ &\le \frac{1}{\varepsilon^4}\int_{B_\varepsilon(x_0)} |u(x) - u(y)|^2 \; \mathbf{d}x \; \underbrace{\|\eta\|_{L^\infty}}_{\le 1} \; C\varepsilon^2 \\ &\le C \fint_{B_\varepsilon(x_0)} |u(x) - u(y)|^2 \; \mathbf{d}x.\end{aligned} \tag{11.40}$$

[42] Dies gilt für punktweise fast alle $y \in B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega$.

Wir erhalten aus Proposition 11.31 unter Anwendung der Hölder-Ungleichung für $x, y \in B_\varepsilon(x_0)$

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &\le \int_0^1 |\nabla u(y+t(x-y))|\,\mathbf{d}t\ \underbrace{|x-y|}_{\le 2\varepsilon}\\ &\le 2\varepsilon\left(\int_0^1 |\nabla u(y+t(x-y))|^2\,\mathbf{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 1\\ &= 2\varepsilon\left(\int_0^1 |\nabla u(y+t(x-y))|^2\,\mathbf{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(\operatorname{dist}(u_\varepsilon(x_0),\mathcal{N}))^2 &\overset{(11.40)}{\le} C\fint_{B_\varepsilon(x_0)} |u(x)-u(y)|^2\,\mathbf{d}x\\ &\le C\varepsilon^2\fint_{B_\varepsilon(x_0)}\int_0^1 |\nabla u(y+t(x-y))|^2\,\mathbf{d}t\,\mathbf{d}x.\end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt nun, nach Wahl von $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, für fast alle $y\in B_\varepsilon(x_0)$ und somit erhalten wir durch Anwendung von $\fint_{B_\varepsilon(x_0)}\mathbf{d}y$ auf die Ungleichung (wir beachten, dass $\fint_B$ monoton steigend ist) und dann unter Benutzung von Proposition 11.30 mit $B := B_\varepsilon(x_0)$

$$\begin{aligned}(\operatorname{dist}(u_\varepsilon(x_0),\mathcal{N}))^2 &= \fint_B (\operatorname{dist}(u_\varepsilon(x_0),\mathcal{N}))^2\,\mathbf{d}y\\ &\le C\varepsilon^2\fint_{B_\varepsilon(x_0)}\fint_{B_\varepsilon(x_0)}\int_0^1 |\nabla u(y+t(x-y))|^2\,\mathbf{d}t\,\mathbf{d}x\,\mathbf{d}y\\ &\overset{P11.30}{\le} C(n)\varepsilon^2\frac{1}{\mathscr{L}^2(B_\varepsilon(x_0))}\,\|\nabla u\|^2_{L^2(B)}\\ &\overset{\dim=2}{\le} C(n)\|\nabla u\|^2_{L^2(B)}.\end{aligned}\tag{11.41}$$

Nun wird $\int_{B_\varepsilon(x_0)}|\nabla u|^2$ wegen der Absolutstetigkeit des Integrals unabhängig von x_0 klein für kleines ε, da $\nabla u\in L^2(\mathbb{R}^2)$.
Nach Lemma 11.26 existiert eine C^k-Projektion $P: V\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ für eine kleine Umgebung $V\mathcal{N}$ um $\mathcal{N}$ in $\mathbb{R}^n$.
Für $\varepsilon>0$ hinreichend klein, ist wegen (11.41) $u_\varepsilon(x)\in V\mathcal{N}$ für alle $x\in\Omega'$. Deshalb definieren wir für $x\in\Omega'$

$$\tilde u_\varepsilon(x) := P(u_\varepsilon(x))\in C^k(\overline{\Omega'},\mathcal{N}).$$

Nun wollen wir noch $\tilde u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u$ in $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ für eine Teilfolge $\varepsilon\to 0$ zeigen:
Zunächst existiert wegen $u_\varepsilon\xrightarrow{\varepsilon\to 0} u$ in $W^{1,2}(\Omega)$ eine Teilfolge $\varepsilon\to 0$, so dass $u_\varepsilon(x)\xrightarrow{\varepsilon\to 0} u(x)$ punktweise für fast alle $x\in\Omega$ und $\nabla u_\varepsilon(x)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\nabla u(x)$.
Es sind $u(x)$ und $\tilde u_\varepsilon(x)\in\mathcal{N}$ für alle $x\in\Omega'$ und somit gilt wegen der Kompaktheit von $\mathcal{N}$, dass $|u|, |\tilde u_\varepsilon|\le C(\mathcal{N})$.
Wegen der Beschränktheit von Ω' folgt dann mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz, dass

$$\int_{\Omega'}|\tilde u_\varepsilon - u|^2\to 0.$$

Nun betrachten wir noch für $x\in\Omega'$

$$\nabla\tilde u_\varepsilon(x) = \frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(u_\varepsilon(x))\ \nabla(u_\varepsilon(x))^\alpha.$$

Wegen $P\in C^k(\overline{V\mathcal{N}},\mathcal{N})$, $k\ge 1$, ist nach Lemma 11.26 $\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(\cdot)\in C^0(\overline{V\mathcal{N}},\mathbb{R}^n)$ und somit in $L^\infty(V\mathcal{N})$. Wir beachten, dass $\nabla u = \nabla(P\circ u)$ punktweise fast überall in Ω' und $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$, und rechnen damit[43]

$$\int_{\Omega'}\left|\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(\tilde u_\varepsilon(x))\ \nabla(\tilde u_\varepsilon(x))^\alpha - \nabla u\right|^2\,\mathbf{d}x$$

[43] Wegen der Kompaktheit von $\mathcal{N}$ ist $u\in L^\infty(\Omega)$. Da P stetig differenzierbar ist, kann man dann über Approximation zeigen, dass die Produktregel für $P\circ u$ gilt: Es gilt $P(u_m)\xrightarrow{m\to\infty}P(u)$ punktweise fast überall für eine glatte, approximierende Folge $(u_m)_m$ von u. Weiterhin gilt für $P(u_m)$ die Produktregel und wir erhalten über den Satz der majorisierten Konvergenz, dass $(P(u_m))$ eine Cauchy-Folge in $W^{1,2}$ ist. Mit der punktweisen Konvergenz von $\nabla P(u_m)$ erhalten wir dann die Produktregel.

$$\leq 2\left[\int_{\Omega'}\left|\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(\tilde{u}_\varepsilon(x)) - \frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(u(x))\right|^2 |\nabla u^\alpha(x)|^2 \mathbf{d}x + \int_{\Omega'} |\nabla(\tilde{u}_\varepsilon(x))^\alpha - \nabla u(x)^\alpha|^2 \left|\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(\tilde{u}_\varepsilon(x))\right|^2 \mathbf{d}x\right]$$

$$\leq 2\left[\int_{\Omega'}\underbrace{\left|\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(\tilde{u}_\varepsilon(x)) - \frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(u(x))\right|^2 |\nabla u^\alpha(x)|^2}_{\to 0 \quad \text{punktweise}} \mathbf{d}x + \left\|\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}\right\|_{L^\infty} \|\nabla(\tilde{u}_\varepsilon(x))^\alpha - \nabla u(x)^\alpha\|^2_{L^2(\Omega')}\right]$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

denn wegen $\left|\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(\tilde{u}_\varepsilon(x)) - \frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(u(x))\right| \leq 2\|\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}\|_{L^\infty(V\mathcal{N})}$ und $|\nabla u^\alpha|^2 \in L^1(\Omega')$ können wir den Satz über die majorisierte Konvergenz anwenden.
Somit gilt

$$\tilde{u}_\varepsilon \to u \quad \text{in } W^{1,2}(\Omega').$$

□

11.32 Korollar ($\partial_i \mathbf{u} \in \mathbf{T_u}(\mathcal{N})$ für $\mathbf{u} \in \mathbf{W^{1,2}}(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{N})$)
Sei $\mathcal{N}$ eine kompakte C^1-differenzierbare Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ und $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ für ein $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$ und $\partial\Omega \in C^\infty$.
Dann gilt für $i = 1, 2$, dass $\partial_i u(x) \in T_{u(x)}\mathcal{N}$ für punktweise fast alle $x \in \Omega$.

Beweis. Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Mit Lemma 11.29 erhalten wir eine Approximation $u_m \in C^1(\overline{\Omega'}, \mathcal{N})$ von u. Wir definieren

$$v_m(x) := \partial_i u_m(x), \quad x \in \Omega'$$

und

$$y_m(x) := u_m(x), \quad x \in \Omega'.$$

Dann ist $v_m(x) \in T_{y_m(x)}\mathcal{N}$ und somit gilt mit einer C^1-Projektion P aus Lemma 11.26 nach Proposition 11.27(iii), dass für alle m

$$\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(y_m)\ (v_m)^\alpha = v_m, \quad x \in \Omega'.$$

Nun gilt $v_m(x) \xrightarrow{m \to \infty} \partial_i u(x) =: v(x)$ und $y_m(x) \xrightarrow{m \to \infty} u(x) =: y(x)$ in $\mathbb{R}^n$ für punktweise fast alle $x \in \Omega'$ und da $\frac{\partial \Pi}{\partial x^\alpha}(\cdot)$ stetig ist, folgt

$$\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}(y)\ v^\alpha(x) = v(x), \quad \text{für punktweise fast alle } x \in \Omega'$$

und somit folgt mit Proposition 11.27(i), dass $v(x) \in T_{u(x)}\mathcal{N}$ für punktweise fast alle $x \in \Omega'$. Da $\Omega' \subset\subset \Omega$ beliebig gewählt war, folgt insgesamt die Behauptung. □

11.3. Regularitätssatz für kritische Punkte konform invarianter Variationsprobleme

Um zum gewünschten Ergebnis, Theorem 11.34 (Theorem I.2 in [Riv07a]) zu gelangen, müssen wir zunächst die Euler-Lagrange-Gleichungen des Funktionals

$$\int_{D^2} |\nabla u|^2 + \omega(u)(\partial_x u, \partial_y u)$$

berechnen. Dies geschieht im

11.33 Lemma (Euler-Lagrange-Gleichungen)
Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte C^k-Mannigfaltigkeit, $k \geq 3$, ω eine C^1-2-Form auf $\mathcal{N}$. Sei weiter $\Pi : V\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ die orthogonale C^{k-1}-Projektion aus Lemma 11.26.
Wir definieren für $w \in W^{1,2}(D^2, \mathcal{N})$

$$E(w) \equiv E_{\mathcal{N}}(w) := \int_{D^2} \langle \partial_x w, \partial_x w \rangle + \langle \partial_y w, \partial_y w \rangle$$

und

$$F(w) \equiv F_{\mathcal{N}}(w) := \int_{D^2} \omega(w)(\partial_x w, \partial_y w).$$

Sei $u \in W^{1,2}(D^2, \mathcal{N})$ ein kritischer Punkt *des Funktionals $F + E$, d.h. es gelte*

$$\lim_{t \to 0} \frac{E(\Pi(u+tv)) + F(\Pi(u+tv)) - E(u) - F(u)}{t} = 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2} \cap L^\infty(D^2, \mathbb{R}^n). \tag{11.42}$$

Dann existieren $A_{ij}^k \in L^\infty(V\mathcal{N})$ mit $\sum_k A_{ij}^k(u) \nabla u^k = 0$ in D^2 sowie $\lambda_{ij}^k \in L^\infty(V\mathcal{N})$ mit $\lambda_{ij}^k = -\lambda_{kj}^i$ und $\lambda_{ij}^k = -\lambda_{ik}^j$ auf $\mathcal{N}$, so dass für alle $v \in C_0^\infty(D^2)$ gilt

$$\int_{D^2} \nabla u^k \cdot \nabla v + (A_{ij}^k(u)\ \nabla u^i \cdot \nabla u^j + \lambda_{i,j}^k(u)\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j) v = 0, \quad 1 \le k \le n,$$

also schwach in D^2

$$\triangle u^k = A_{ij}^k(u) \nabla u^i \cdot \nabla u^j + \lambda_{ij}^k(u)\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j, \quad 1 \le k \le n. \tag{11.43}$$

Beweis. Schritt 1:
Für diesen Schritt gehen wir analog zu [Hél02] Lemma 1.4.10 vor. Gegeben sei ein $v \in W_0^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty$ mit $\operatorname{supp}(v) \subset\subset D^2$. Wegen $v \in L^\infty$ existiert ein $t_0 > 0$, so dass für alle $0 \le |t| < t_0$

$$u + tv \in V\mathcal{N} \quad \text{punktweise fast überall in } D^2.$$

Wir definieren

$$w_t := \frac{1}{t}(-u + \Pi(u+tv)). \tag{11.44}$$

Wir benutzen, dass die Projektion $\Pi \in C^{k-1}$, und somit punktweise fast überall $\Pi(x + tv)$ eine C^1-Funktion von t ist, da $k \ge 3$, und rechnen

$$\begin{aligned} w_t &= \frac{1}{t}(\Pi(u) - \Pi(u+tv)) \\ &= \frac{1}{t}\int_{s=0}^1 \frac{d}{ds}(\Pi(u+tsv))\ \mathbf{d}s \\ &= \frac{t}{t}\int_0^1 \frac{\partial \Pi}{\partial x^\alpha}(u+tsv)\ v^\alpha\ \mathbf{d}s \\ &= \left(\int_{s=0}^1 \frac{\partial \Pi}{\partial x^\alpha}(u+tsv)\ \mathbf{d}s\right)\ v^\alpha \quad \text{punktweise fast überall in } D^2 \text{ für } t \neq 0. \end{aligned} \tag{11.45}$$

Weiter gilt $w_t \in W_0^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty$, denn einerseits ist nach (11.44) $w_t \in W^{1,2} \cap L^\infty$, da $u \in W^{1,2} \cap L^\infty$ ($\mathcal{N}$ ist kompakt, also beschränkt), $\Pi \in C^{k-1} \cap L^\infty$ und $v \in W^{1,2} \cap L^\infty$. Andererseits ist nach (11.45) $\operatorname{supp} w_t \subset\subset D^2$, da $\operatorname{supp} v \subset\subset D^2$, und somit ist $w_t \in W_0^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^n)$.
Wir wollen zunächst eine Zwischenbehauptung beweisen:

Zwischenbehauptung. *Es gilt*

$$w_t \xrightarrow{t \to 0} \mathbf{d}\Pi_u(v) \quad \text{in } W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^n).$$

Denn zunächst gilt punktweise für fast alle $x \in D^2$ (nämlich für alle $x \in D^2$ mit $u(x) \in \mathcal{N}$, da dann $\Pi(u(x)) = u(x)$) und $v \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty$ mit (11.44)

$$w_t = \frac{\Pi(u+tv) - \Pi(u)}{t} \xrightarrow{t \to 0} \mathbf{d}\Pi_u(v).$$

Weiter gilt mit der Darstellung (11.45) von w_t

$$w_t - \mathbf{d}\Pi_u(v) = \int_{s=0}^1 (\frac{\partial \Pi}{\partial x^\gamma}(u + stv) - \frac{\partial \Pi}{\partial x^\gamma}(u))\ \mathbf{d}s\ \underbrace{v^\gamma}_{\in L^2}$$

und deshalb

$$|w_t - \mathbf{d}\Pi_u(v)| \le 2|v^\gamma|\ \|\nabla \Pi\|_{L^\infty(V\mathcal{N})} \quad \in L^2(D^2).$$

Mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz folgt dann

$$w_t - \mathbf{d}\Pi_u(v) \xrightarrow{t \to 0} 0 \quad \text{in } L^2(D^2).$$

Für die Konvergenz des Gradienten betrachten wir punktweise (hier benötigen wir $\Pi \in C^2$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\beta} w_t &= \frac{1}{t}\Big(\frac{\partial \Pi}{\partial x^\gamma}(u+tv)\ \frac{\partial}{\partial x^\beta}(u^\gamma + tv^\gamma) - \frac{\partial}{\partial x^\beta} u\Big) \\
&= \frac{t}{t}\frac{\partial \Pi}{\partial x^\gamma}(u+tv)\ \frac{\partial}{\partial x^\beta} v^\gamma + \frac{1}{t}\Big(\frac{\partial \Pi}{\partial x^\gamma}(u+tv)\ \frac{\partial}{\partial x^\beta} u^\gamma - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \underbrace{u}_{\Pi(u)}\Big) \\
&= \frac{\partial \Pi}{\partial x^\gamma}(u+tv)\ \frac{\partial}{\partial x^\beta} v^\gamma + \frac{1}{t}\Big(\frac{\partial \Pi}{\partial x^\gamma}(u+tv) - \frac{\partial \Pi}{\partial x^\gamma}(u)\Big)\ \frac{\partial}{\partial x^\beta} u^\gamma \\
&\xrightarrow{t\to 0} \tfrac{\partial \Pi}{\partial x^\gamma}(u)\ \tfrac{\partial}{\partial x^\beta} v^\gamma + \tfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha}(u)\ v^\alpha\ \tfrac{\partial}{\partial x^\beta} u^\gamma .
\end{aligned} \tag{11.46}$$

Andererseits gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\mathbf{d}\Pi_u(v) = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Big(\frac{\partial \Pi}{\partial x^\gamma}(u) v^\gamma\Big)$$

und somit gilt punktweise fast überall in D^2, da $\Pi \in C^2(V\mathcal{N}, \mathcal{N})$ und $u \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2, \mathcal{N})$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} w_t \xrightarrow{t\to 0} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\mathbf{d}\Pi_u(v).$$

Weiter gilt mit den Rechnungen von (11.46), da die dortige Konvergenz wegen u, $v \in L^\infty$ gleichässig bezüglich x ist

$$|\nabla w_t| \le 2(\|\nabla \Pi\|_{L^\infty(V\mathcal{N})}\ |\nabla v| + \|\nabla^2 \Pi\|_{L^\infty(V\mathcal{N})}\ \underbrace{|v|}_{\in L^\infty}\ |\nabla u|) \quad \in L^2(D^2).$$

Damit erhalten wir schließlich unter nochmaliger Anwendung des Satzes Über die majorisierte Konvergenz

$$w_t \xrightarrow{t\to 0} \mathbf{d}\Pi_u(v) \quad \text{in } W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^n).$$

Die Zwischenbehauptung gezeigt, insbesondere gilt $\mathbf{d}\Pi_u(v) \in W^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^n)$ undwegen $\operatorname{supp} v \subset\subset D^2$ und daher $\operatorname{supp} \mathbf{d}\Pi_u(v) \subset\subset D^2$ auch $\mathbf{d}\Pi_u(v) \in W_0^{1,2}(D^2)$. ||

Nach Definition von w_t gilt

$$\Pi(u+tv) = u + tw_t,$$

und folglich

$$E(\Pi(u+tv)) = E(u+tw_t) = E(u) + t\int_{D^2} \langle \partial_x u, \partial_x w_t\rangle + \langle \partial_y u, \partial_y w_t\rangle + t^2 E(w_t).$$

Wir beachten, dass $E(w_t) \to E(\mathbf{d}\Pi_u(v)) < \infty$, da $w_t \to \mathbf{d}\Pi_u(v)$ in $W^{1,2}$ und folgern

$$\begin{aligned}
\frac{E(\Pi(u+tv)) - E(u)}{t} &= \int_{D^2} \langle \partial_x u, \partial_x w_t\rangle + \langle \partial_y u, \partial_y w_t\rangle + tE(w_t) \\
&\xrightarrow{t\to 0} \textstyle\int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla(\mathbf{d}\Pi_u(v))^i\rangle + 0 \cdot E(\mathbf{d}\Pi_u(v)) \\
&= \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla(\mathbf{d}\Pi_u(v))^i\rangle .
\end{aligned} \tag{11.47}$$

<u>Schritt 2:</u>
Nun betrachten wir noch F. Sei dazu wieder $v \in W_0^{1,2} \cap L^\infty(D^2, \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(v) \subset\subset D^2$ beliebig.
Es gilt

$$F(\Pi(u+tv)) = \int_{D^2} \omega(\Pi(u+tv))(\partial_x \Pi(u+tv), \partial_y \Pi(u+tv)).$$

Wir definieren $\tilde\omega := \Pi^*\omega$ den Pullback von ω unter Π. Sei $(e_i)_{i=1}^n$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^n$, und somit auch die Basis in lokalen Koordinaten von $T_x(V\mathcal{N})$ für die Karte $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Wir setzen

$$\tilde\omega_{ij}(x) := \tilde\omega(x)(e_i, e_j) = \omega(\Pi(x))\Big(\frac{\partial \Pi}{\partial x^i}(x), \frac{\partial \Pi}{\partial x^j}(x)\Big)\ , \quad 1 \le i, j \le n.$$

Dabei beachten wir, dass $\frac{\partial \Pi}{\partial x^k} = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Pi(x+te_k) \in T_x\mathcal{N}$, $1 \le k \le n$. Wir erhalten folgende Eigenschaften:

(a) $(\tilde{\omega}_{ij})_{ij} \in so(m)$ punktweise in $V\mathcal{N}$, da ω eine 2-Form ist,

(b) da $\omega(x)(\cdot,\cdot)$ bilinear für alle $x \in \mathcal{N}$, gilt

$$\omega(\Pi(u+tv))(\partial_x\Pi(u+tv), \partial_y\Pi(u+tv)) = \tilde{\omega}_{ij}(u+tv)\partial_x(u+tv)^i\ \partial_y(u+tv)^j \tag{11.48}$$

und

(c) es gilt $\tilde{\omega}_{ij} \in C^1(\overline{V\mathcal{N}})$, denn sei $\xi \in V\mathcal{N}$ und sei $U \subset \mathcal{N}$ eine relativ offene Umgebung von $\Pi(\xi)$ in $\mathcal{N}$, so dass eine C^2-Karte $\Phi : U \to \mathbb{R}^p$ existiert. Dann existiert eine (bezüglich $\mathbb{R}^n$) offene Umgebung V von ξ in $V\mathcal{N}$, so dass $\Pi(V) \subset U$.
Wir erhalten lokale Koordinaten $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{i=1}^p$ und stellen ω lokal über

$$\omega(x)(\tau,\sigma) = \eta_{st}(x)\ \mathbf{d}y^s \wedge \mathbf{d}y^t(\tau,\sigma), \quad \tau,\, \sigma \in T_x\mathcal{N}$$

dar, wobei $\eta_{st} \circ \Phi^{-1} \in C^1(\Phi(U))$.
Für alle $p \in V$ ist $\frac{\partial \Pi}{\partial x^i}(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Pi(p+te_i) \in T_{\Pi(p)}\mathcal{N}$ und somit existiert eine lokale Darstellung

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x^i}(p) =: w^k(p;i)\frac{\partial}{\partial y^k}(\Pi(p)).$$

Wir erhalten folglich,

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{ij}(p) &= \eta_{st}(\Pi(p))\ \mathbf{d}y^s \wedge \mathbf{d}y^t\ (\frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l})w^k(p;i)w^l(p;j)\\ &= \underbrace{\eta_{st}(\Pi(p))}_{C^1}\ (\delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k)w^k(p;i)w^l(p;j)\end{aligned}$$

Nun gilt nach Proposition 11.20 lokal, also für ggf. noch kleineres V um ξ, dass $w^k(p;i) \in C^{k-2} \subset C^1$, da die lokalen Koordinaten $b_i := \frac{\partial}{\partial y^i}(\Pi(p))$ in C^{k-1} und $v := \frac{\partial \Pi}{\partial x^k}$ in C^{k-2}.
Also folgt $\tilde{\omega}_{ij}(\cdot) \in C^1(V\mathcal{N})$, da $k \geq 3$.
Ohne Einschränkung ist dann $\tilde{\omega}_{ij}(p) \in C^1(\overline{V\mathcal{N}})$, modulo des Wechsels auf eine kleinere Umgebung $V'\mathcal{N} \subset\subset V\mathcal{N}$.

Wir beachten $\tilde{\omega}_{ij} \in L^\infty(V\mathcal{N})$, da $\tilde{\omega}_{ij} \in C^1(\overline{V\mathcal{N}})$ nach (c) und rechnen

$$\begin{aligned}F(\Pi(u+tv)) &= \int_{D^2}\omega(\Pi(u+tv))(\partial_x(\Pi(u+tv)), \partial_y(\Pi(u+tv)))\\ &\overset{(11.48)}{=} \int_{D^2}\tilde{\omega}_{ij}(u+tv)\ \partial_x(u^i+tv^i)\partial_y(u^j+tv^j)\\ &= \int_{D^2}\tilde{\omega}_{ij}(u+tv)\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j + t\int_{D^2}\tilde{\omega}_{ij}(u+tv)(\partial_x v^i\ \partial_y u^j + \partial_x u^i\ \partial_y v^j)\\ &\quad +t^2\int_{D^2}\underbrace{\tilde{\omega}_{ij}(u+tv)}_{\in L^\infty}\ \underbrace{\partial_x v^i}_{L^2}\ \underbrace{\partial_y v^j}_{L^2}\\ &= \int_{D^2}\tilde{\omega}_{ij}(u)\partial_x u^i\partial_y u^j + t\int_{D^2}\frac{-\tilde{\omega}_{ij}(u)+\tilde{\omega}_{ij}(u+tv)}{t}\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j\\ &\quad +t\int_{D^2}\tilde{\omega}_{ij}(u)(\partial_x v^i\ \partial_y u^j + \partial_x u^i\ \partial_y v^j)\\ &\quad +t\int_{D^2}(\tilde{\omega}_{ij}(u+tv)-\tilde{\omega}_{ij}(u))(\partial_x v^i\ \partial_y u^j + \partial_x u^i\partial_y v^j) + o(t) \quad \text{für } t \to 0.\end{aligned} \tag{11.49}$$

Nun gilt $(\tilde{\omega}_{ij}) \in so(m)$ nach (a) und deshalb (mit Vertauschung von Bezeichnung von i und j)

$$\tilde{\omega}_{ij}(u)\partial_x u^i\ \partial_y v^j \overset{so(m)}{=} -\tilde{\omega}_{ji}(u)\partial_x u^i\ \partial_y v^j \overset{i\leftrightarrow j}{=} -\tilde{\omega}_{ij}(u)\partial_x u^j\ \partial_y v^i$$

und analog

$$\tilde{\omega}_{ij}(u+tv)\partial_x u^i\ \partial_y v^j = -\tilde{\omega}_{ij}(u+tv)\partial_x u^j\ \partial_y v^i.$$

Weiter gilt $\partial_x v^i \partial_y u^j - \partial_x u^j \partial_y v^i = \nabla^\perp v^i \cdot \nabla u^j$ und somit folgt aus (11.49)

$$\begin{aligned}
F(\Pi(u+tv)) &= F(u) + t\int_{D^2} \frac{\tilde{\omega}_{ij}(u+tv) - \tilde{\omega}_{ij}(u)}{t}\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j + t\int_{D^2} \tilde{\omega}_{ij}(u)(\partial_x v^i\ \partial_y u^j - \partial_x u^j\ \partial_y v^i) \\
&\quad + t\int_{D^2} (\tilde{\omega}_{ij}(u+tv) - \tilde{\omega}_{ij}(u))(\partial_x v^i\ \partial_y u^j - \partial_x u^j\ \partial_y v^i) + o(t) \\
&= F(u) + t\int_{D^2} \frac{\tilde{\omega}_{ij}(u+tv) - \tilde{\omega}_{ij}(u)}{t}\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j + t\int_{D^2} \tilde{\omega}_{ij}(u)\nabla^\perp v^i\ \nabla u^j \\
&\quad + t\int_{D^2} (\tilde{\omega}_{ij}(u+tv) - \tilde{\omega}_{ij}(u))\nabla^\perp v^i \cdot \nabla u^j + o(t) \quad \text{für } t \to 0.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}(F(\Pi(u+tv)) - F(u)) = {} & \underbrace{\int_{D^2} \frac{\tilde{\omega}_{ij}(u+tv) - \tilde{\omega}_{ij}(u)}{t}\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j}_{I} + \int_{D^2} \tilde{\omega}_{ij}(u)\nabla^\perp v^i\ \nabla u^j \\
& + \underbrace{\int_{D^2} (\tilde{\omega}_{ij}(u+tv) - \tilde{\omega}_{ij}(u))\nabla^\perp v^i\ \nabla u^j}_{II} + o(1) \quad \text{für } t \to 0.
\end{aligned} \tag{11.50}$$

<u>Zunächst zu I:</u>
Es gilt wegen $\tilde{\omega}_{ij} \in C^1$ zunächst punktweise für fast alle $x \in D^2$

$$\frac{\tilde{\omega}_{ij}(u+tv) - \tilde{\omega}_{ij}(u)}{t}\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j \xrightarrow{t\to 0} \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u)\ v^\alpha \partial_x u^i\ \partial_y u^j$$

und für t hinreichend klein gilt

$$\left| \frac{\tilde{\omega}_{ij}(u+tv) - \tilde{\omega}_{ij}(u)}{t} \partial_x u^i\ \partial_y u^j \right| \le \|\nabla\tilde{\omega}_{ij}\|_{L^\infty(V\mathcal{N})}\ \|v\|_{L^\infty(D^2)}\ |\nabla u|^2 \in L^1$$

und somit folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz

$$I \xrightarrow{t\to 0} \int_{D^2} \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u)\ v^\alpha\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j.$$

<u>Nun noch zu II:</u>
Es gilt wegen der Stetigkeit von $\tilde{\omega}_{ij}$ punktweise fast überall in D^2

$$\tilde{\omega}_{ij}(u+tv) - \tilde{\omega}_{ij}(u) \to 0$$

und

$$\left|(\tilde{\omega}_{ij}(u+tv) - \tilde{\omega}_{ij}(u))\ \nabla^\perp v^i \cdot \nabla u^j\right| \le 2\|\tilde{\omega}_{ij}\|_{L^\infty(V\mathcal{N})}\ \underbrace{|\nabla v^i|}_{L^2}\ \underbrace{|\nabla u^j|}_{L^2} \in L^1.$$

Wieder folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz

$$II \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Also erhält man insgesamt aus (11.50)

$$\frac{1}{t}(F(\Pi(u+tv)) - F(u)) \xrightarrow{t\to 0} \int_{D^2} \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u)\ v^\alpha\ \partial_x u^i \partial_y u^j + \int_{D^2} \tilde{\omega}_{ij}(u)\ \nabla^\perp v^i \cdot \nabla u^j. \tag{11.51}$$

Nun gilt

$$\tilde{\omega}_{ij}(u)\nabla^\perp v^i = \nabla^\perp(\tilde{\omega}_{ij}(u)v^i) - \nabla^\perp(\tilde{\omega}_{ij}(u))v^i$$

und

$$\nabla^\perp(\tilde{\omega}_{ij}(u)) = \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u)\ \nabla^\perp u^\alpha.$$

Weiter gilt wegen[44] $\tilde{\omega}_{ij}(u) \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2)$ und $v^i \in W^{1,2} \cap L^\infty(D^2)$ und $\operatorname{supp} v \subset\subset D^2$ nach Proposition 4.26, dass $v^i \tilde{\omega}_{ij}(u) \in W_0^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^n)$ und somit, wegen $u^j \in W^{1,2}$ nach Proposition 4.22

$$\int_{D^2} \nabla^\perp(\tilde{\omega}_{ij}(u) v^i)\ \nabla u^j = 0.$$

Wir folgern

$$\begin{aligned}\int_{D^2} \tilde{\omega}_{ij}\ \nabla^\perp v^i \cdot \nabla u^j &= \int_{D^2} \nabla^\perp(\tilde{\omega}_{ij}(u)\ v^i)\ \nabla u^j - \int_{D^2} \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u) \nabla^\perp u^\alpha \cdot \nabla u^j\ v^i \\ &= -\int_{D^2} \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u) \nabla^\perp u^\alpha \cdot \nabla u^j v^i.\end{aligned}$$

Mit dieser Überlegung erhält man aus (11.51)

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(F(\Pi(u+tv)) - F(u)) &\xrightarrow{t \to 0} \textstyle\int_{D^2} \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u)\ (v^\alpha\ \partial_x u^i \partial_y u^j - \nabla^\perp u^\alpha \cdot \nabla u^j v^i) \\ &= \int_{D^2} \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u)\ (v^\alpha\ \partial_x u^i \partial_y u^j + \partial_y u^\alpha\ \partial_x u^j\ v^i - \partial_x u^\alpha\ \partial_y u^j\ v^i).\end{aligned}$$

Nun gilt durch Vertauschung der Indizes ($i \to \alpha$, $\alpha \to j$ und $j \to i$)

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u)\ \partial_y u^\alpha\ \partial_x u^j v^i = \frac{\partial \tilde{\omega}_{\alpha i}}{\partial x^j}(u)\ \partial_y u^j\ \partial_x u^i v^\alpha$$

und ($i \to \alpha$, $\alpha \to i$ und $j \to j$)

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u)\ \partial_x u^\alpha\ \partial_y u^j v^i = \frac{\partial \tilde{\omega}_{\alpha j}}{\partial x^i}(u)\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j v^\alpha.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(F(\Pi(u+tv)) - F(u)) &\xrightarrow{t \to 0} \textstyle\int_{D^2} v^\alpha\ \partial_x u^i\ \partial_y u^j \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}(u) + \frac{\partial \tilde{\omega}_{\alpha i}}{\partial x^j}(u) - \frac{\partial \tilde{\omega}_{\alpha j}}{\partial x^i}(u)\right)}_{\lambda^\alpha_{ij}(u)} \\ &= \int_{D^2} v^\alpha\ \frac{\partial}{\partial x} u^i\ \frac{\partial}{\partial y} u^j\ \lambda^\alpha_{ij}(u) \\ &= \int_{D^2} \mathbf{d}\tilde{\omega}(v, \frac{\partial}{\partial x} u,\ \frac{\partial}{\partial y} u^j).\end{aligned} \tag{11.52}$$

Der letzte Schritt folgt dabei aus Proposition 11.19. Nun ist nach Proposition 11.23

$$\mathbf{d}\tilde{\omega} = \Pi^*(\mathbf{d}\omega),$$

und somit gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$, da $\mathbf{d}\Pi_u(\mathbf{d}\Pi_u(v)) = \mathbf{d}\Pi_u(v)$ nach Proposition 11.27 (i) und (iii),

$$\mathbf{d}\tilde{\omega}_u(\mathbf{d}\Pi_u(v), \cdot, \cdot) = \mathbf{d}\tilde{\omega}_u(v, \cdot, \cdot). \tag{11.53}$$

Es gilt $\lambda^\alpha_{ij}(x) \in L^\infty(V\mathcal{N})$, da $\omega \in C^1(\overline{V\mathcal{N}})$. Wir wissen $\tilde{\omega}_{\alpha i} = -\tilde{\omega}_{i\alpha}$, woraus $\lambda^\alpha_{ij} = -\lambda^i_{\alpha j}$ folgt:

$$\lambda^i_{\alpha j} = \frac{\partial \tilde{\omega}_{\alpha j}}{\partial x^i} + \frac{\partial \tilde{\omega}_{i\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha} = -(-\frac{\partial \tilde{\omega}_{\alpha j}}{\partial x^i} + \frac{\partial \tilde{\omega}_{\alpha i}}{\partial x^j} + \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^\alpha}) = -\lambda^\alpha_{ij}.$$

Analog zeigt man, dass $\lambda^\alpha_{ij} = -\lambda^j_{i\alpha}$.
<u>Schritt 3:</u>
Nun wollen wir die bisher erhaltenen Ergebnisse zusammensetzen (vgl. Darstellung in [Hél02], Beweis von

[44] Mit Lemma 11.29 erhalten wir für jedes offene Gebiet $\Omega \subset\subset D^2$ eine Approximation $u_m \in C^k(\Omega, V\mathcal{N})$. Dann können wir den Gradienten von $\tilde{\omega}_{ij}(u_m)$ über die Kettenregel bilden. Dieser Gradient konvergiert nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz in L^2, da $\tilde{\omega}_{ij} \in C^1(\overline{V\mathcal{N}})$; somit erhalten wir, dass der schwache Gradient auf ganz D^2 gegeben ist durch $\nabla \tilde{\omega}_{ij}(u) = \frac{\partial \tilde{\omega}_{ij}}{\partial x^k}(u)\ \nabla u^k$. Dieser ist in $L^2(D^2)$, da $\mathbf{d}\omega_{ij}$ in $L^\infty(V\mathcal{N})$ und somit ist $\tilde{\omega}_{ij}(u) \in W^{1,2}(D^2)$.

Lemma 1.2.4):
Sei $v \in C_0^\infty(D^2, \mathbb{R}^n)$. Zunächst gilt nach Bemerkung 11.28

$$w - \mathbf{d}\Pi_u(w) \in T_u^\perp \mathcal{N} \quad \text{punktweise fast überall in } D^2\text{, für alle } w \in \mathbb{R}^n,$$

und deshalb

$$\partial_x v - \mathbf{d}\Pi_u(\partial_x v),\ \partial_y v - \mathbf{d}\Pi_u(\partial_y v) \in T_u^\perp \mathcal{N} \quad \text{punktweise fast überall in } D^2,$$

also mit Korollar 11.32

$$\langle \partial_x u, \partial_x v - \mathbf{d}\Pi_u(\partial_x v)\rangle + \langle \partial_y u, \partial_y v - \mathbf{d}\Pi_u(\partial_y v)\rangle = 0 \quad \text{punktweise fast überall in } D^2.$$

Daraus folgt (wir beachten, dass $\mathbf{d}\Pi_u(v) \in W_0^{1,2}(D^2, \mathbb{R}^n)$, nach der Zwischenbehauptung in Schritt 1)[45]

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{D^2} \langle \partial_x u, \partial_x v - \mathbf{d}\Pi_u(\partial_x v)\rangle + \langle \partial_y u, \partial_y v - \mathbf{d}\Pi_u(\partial_y v)\rangle \\
&= \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla v^i\rangle - \langle \partial_x u, \mathbf{d}\Pi_u(\partial_x v)\rangle - \langle \partial_y u, \mathbf{d}\Pi_u(\partial_y v)\rangle \\
&= \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla v^i\rangle - \int_{D^2} \langle \partial_x u, \frac{\partial \Pi}{\partial x^\alpha}(u)\partial_x v^\alpha\rangle + \langle \partial_y u, \frac{\partial \Pi}{\partial x^\alpha}(u)\partial_y v^\alpha\rangle \\
&= \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla v^i\rangle - \int_{D^2} \partial_x u^i \, \frac{\partial \Pi^i}{\partial x^\alpha}(u)\partial_x v^\alpha + \partial_y u^i \frac{\partial \Pi^i}{\partial x^\alpha}(u)\partial_y v^\alpha \\
&= \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla v^i\rangle - \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \frac{\partial \Pi^i}{\partial x^\alpha}(u)\ \nabla v^\alpha\rangle \\
&= \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla v^i\rangle - \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla\left(\frac{\partial \Pi^i}{\partial x^\alpha}(u)\ v^\alpha\right)\rangle + \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla\left(\frac{\partial \Pi^i}{\partial x^\alpha}(u)\right)\ v^\alpha\rangle \\
&= \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla v^i\rangle - \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla \mathbf{d}\Pi_u(v)^i\rangle + \int_{D^2} \langle \nabla u^i \ \frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial x^\gamma\, \partial x^\alpha}(u), \nabla u^\gamma\rangle\ v^\alpha.
\end{aligned}$$

Wegen ∇u^i komponentenweise in $T_u\mathcal{N}$ folgt mit Proposition 11.27(v) (wir beachten, dass Π von der Klasse C^2 ist)

$$\langle \nabla u^i \ \frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial x^\gamma\, \partial x^\alpha}(u), \nabla u^\gamma\rangle\ v^\alpha = \underbrace{\frac{\partial^2 \Pi^i}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta}(u)\left(\delta_\alpha^\gamma - \frac{\partial \Pi^\alpha}{\partial x^\gamma}(u)\right)}_{=:A_{i\beta}^\gamma(u)}\ v^\gamma\ \langle \nabla u^i, \nabla u^\beta\rangle.$$

Aus $\Pi \in C^2(V\mathcal{N})$ folgt $A_{ij}^k \in L^\infty(V\mathcal{N})$. Weiterhin folgt aus $(\mathrm{Id} - \mathbf{d}\Pi_u)\nabla u = 0$, da ∇u komponenten- und punktweise im Tangentialraum $T_u\mathcal{N}$ liegt, nach Konstruktion von A_{ij}^k

$$A_{ij}^k \nabla u^k = 0 \quad 1 \le i, j \le m.$$

Wir haben also bisher folgende Gleichung hergeleitet:

$$0 = \langle \nabla u^i, \nabla v^i\rangle - \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla \underbrace{\mathbf{d}\Pi_u(v)^i}_{W_0^{1,2}\cap L^\infty}\rangle + \int_{D^2} A_{i\beta}^\gamma(u)\langle \nabla u^i, \nabla u^\beta\rangle\ v^\gamma. \tag{11.54}$$

In Schritt 1 haben wir erhalten, dass

$$\int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla \mathbf{d}\Pi_u(v)^i\rangle \overset{(11.47)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{E(\Pi(u + t\mathbf{d}\Pi_u(v))) - E(u)}{t}.$$

Mit der Voraussetzung (11.42) folgt daraus

$$\lim_{t\to 0} \frac{E(\Pi(u + t\mathbf{d}\Pi_u(v))) - E(u)}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{F(\Pi(u + t\mathbf{d}\Pi_u(v))) - F(u)}{t}.$$

[45] Mit Lemma 11.29 erhalten wir eine Approximation $u_m \in C^\infty(\overline{D^2}, \mathbb{R}^n)$ mit $u_m(\mathrm{supp}(v)) \subset \mathcal{N}$. Für dieses u_m gilt schon die Kettenregel für $\nabla\left(\frac{\partial \Pi^i}{\partial x^\alpha}(u_m)\right)$. Durch Grenzwertbildung erhalten wir diese Regel dann auch für u auf $\mathrm{supp}(v)$.

Zusammen mit Schritt 2 (11.52) ergibt dies

$$\begin{aligned}\int_{D^2} \nabla u^i \cdot \nabla \mathbf{d}\Pi_u(v)^i &= -\int_{D^2} \Pi^* \mathbf{d}\omega_u(\mathbf{d}\Pi_u(v), \partial_x u, \partial_y u)\\ &= -\int_{D^2} \Pi^* \mathbf{d}\omega_u(v, \partial_x u, \partial_y u)\\ &= -\int_{D^2} \lambda^\alpha_{ij}(u) v^\alpha \ \partial_x u^i \ \partial_y u^j.\end{aligned}$$

Eingesetzt in (11.54) erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla v^i \rangle - \int_{D^2} \nabla u^i \cdot \nabla \mathbf{d}\Pi_u(v)^i + \int_{D^2} A^\alpha_{i\gamma}(u) \ \nabla u^i \cdot \nabla u^\gamma \ v^\alpha \\ &= \int_{D^2} \langle \nabla u^i, \nabla v^i \rangle + \int_{D^2} \lambda^\alpha_{ij}(u) v^\alpha \ \partial_x u^i \ \partial_y u^j + \int_{D^2} A^\alpha_{i\gamma}(u) \ \nabla u^i \cdot \nabla u^\gamma \ v^\alpha. \end{aligned} \tag{11.55}$$

Ist ein $\varphi \in C_0^\infty(D^2, \mathbb{R})$, so setzen wir $v \equiv v_{\varphi,k} := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ mit φ an k-ter Position.

Dann folgt aus (11.55)

$$0 = \int_{D^2} \nabla u^k \cdot \nabla \varphi + \int_{D^2} \lambda^k_{ij}(u) \ \partial_x u^i \ \partial_y u^j \ \varphi + \int_{D^2} \nabla u^i \ A^k_{i\gamma}(u) \nabla u^\gamma \ \varphi, \quad 1 \le k \le n. \tag{11.56}$$

□

11.34 Theorem (Stetigkeit kritischer Punkte)
(vgl. [Riv07a], Theorem I.2)Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte C^k-Mannigfaltigkeit, $k \ge 3$, ω eine C^1-2-Form auf $\mathcal{N}$.
Sei weiter $\Pi : V\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ die orthogonale C^{k-1}-Projektion aus Lemma 11.26.
Sei $u \in W^{1,2}(D^2, \mathcal{N})$ ein kritischer Punkt des Funktionals $F + E$ aus Lemma 11.33.
Dann ist $u \in C^0(D^2, \mathcal{N})$.

Beweis. Aus Lemma 11.33 folgt, dass schwach

$$\triangle u^k = A^k_{ij}(u) \nabla u^i \cdot \nabla u^j + \lambda^k_{ij}(u) \ \partial_x u^i \ \partial_y u^j, \quad 1 \le k \le n \tag{11.43}$$

Nun gilt (wir benutzen $\lambda^k_{ij} = -\lambda^k_{ji}$ und vertauschen dann die Bezeichnung i und j)

$$\begin{aligned} \lambda^k_{ij} \partial_x u^i \ \partial_y u^j &= \lambda^k_{ij} \ \nabla^\perp u^i \ \nabla u^j + \lambda^k_{ij} \partial_y u^i \partial_x u^j \\ &= \lambda^k_{ij} \ \nabla^\perp u^i \ \nabla u^j - \lambda^k_{ij} \partial_y u^j \partial_x u^i, \end{aligned}$$

also

$$\lambda^k_{ij} \partial_x u^i \ \partial_y u^j = \underbrace{\frac{1}{2} \lambda^k_{ij} \ \nabla^\perp u^i}_{\Omega^1_{kj}} \ \nabla u^j.$$

Dann ist $(\Omega^1_{kj}) \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$, da $\lambda^k_{ij} \in L^\infty(V\mathcal{N})$.
Weiterhin gilt nach Lemma 11.33

$$A^\alpha_{\beta\gamma}(u) \nabla u^\alpha = 0, \quad 1 \le \beta, \gamma \le n$$

und deshalb

$$A^j_{ik}(u) \nabla u^i \cdot \nabla u^j = 0,$$

also

$$A_{ij}^k(u)\ \nabla u^i \cdot \nabla u^j = \underbrace{(A_{ij}^k(u) - A_{ik}^j(u))\ \nabla u^i}_{=:\Omega_{kj}^2}\ \nabla u^j.$$

Dann ist auch $(\Omega_{kj}^2) \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$.
Somit ist für $\Omega := \Omega^1 + \Omega^2 \in L^2(D^2, so(m) \otimes \mathbb{R}^2)$ der kritische Punkt $u \in W^{1,2}(D^2, \mathcal{N})$ eine schwache Lösung von

$$\triangle u = \Omega \cdot \nabla u \quad \text{in } D^2,$$

und aus Theorem 10.8 folgt die Stetigkeit. □

11.35 Bemerkung
In [Riv07a], Theorem I.2, wird Theorem 11.34 mit einer zusätzlichen Voraussetzung an ω unter der Annahme gezeigt, dass $\mathcal{N}$ eine C^2-Mannigfaltigkeit ist.

Literatur

[AF03] R. Adams and J.F. Fournier. *Sobolev Spaces (Second Edition).* Elsevier Science Ltd, Oxford, 2003.

[Alt99] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis.* Springer Berlin [ua], 1999.

[BC84] H. Brezis and J.-M. Coron. Multiple Solutions of H-Systems and Rellich's Conjecture. *Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXVII*, pages 149–187, 1984.

[Bet93] F. Bethuel. On the singular set of stationary harmonic maps. *Manuscripta Math. 78*, pages 417–443, 1993.

[Boo86] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Academic Press Orlando, 1986.

[CLMS93] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer, and S. Semmes. Compensated Compactness and Hardy spaces. *J. Math. Pures Appl., 72*, pages 247 – 286, 1993.

[DC92] M.P. Do Carmo. *Riemannian Geometry.* Birkhäuser Verlag Basel Boston Berlin, 1992.

[DC94] M.P. Do Carmo. *Differential Forms and Applications.* Springer Berlin [ua], 1994.

[DiB95] E. DiBenedetto. *Partial Differential Equations.* Birkhäuser Verlag Basel Boston Berlin, 1995.

[Eva91] C. Evans. Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres. *Arch. Rat. Mech. Anal. 116*, pages 101–113, 1991.

[Eva98] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society Providence RI., 1998.

[Fol76] G.B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations.* Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton New Jersey, 1976.

[For99] O. Forster. *Analysis 3, 3. Auflage.* Vieweg Braunschweig/Wiesbaden, 1999.

[GH96] M. Giaquinta and S. Hildebrandt. *Calculus of Variations I.* Springer Berlin [ua], 1996.

[Gra04] L. Grafakos. *Classical and Modern Fourier Analysis.* Pearson Education New Jersey, 2004.

[Grü84] M. Grüter. Conformally invariant variational integrals and the removability of isolated singularities. *Manuscripta Math. 47, no 1-3*, pages 85–104, 1984.

[GT83] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer Berlin [ua], 1983.

[Hei86] E. Heinz. Über die Regularität schwacher Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, no 1*, pages 1–15, 1986.

[Hél90] F. Hélein. Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphère. *C.R. Acad. Sci. Paris 311, Série I*, pages 519–524, 1990.

[Hél91] F. Hélein. Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne. *C.R. Acad. Sci. Paris 312, Série I*, pages 591–596, 1991.

[Hél02] F. Hélein. *Harmonic maps, conservation laws and moving frames.* Cambridge Tracts in Mathematics 150, Cambridge University Press, 2002.

[Hil82] S. Hildebrandt. Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings. *Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Vol. 1,2,3, Beijing, Science Press*, pages 481–615, 1982.

[Hil83] S. Hildebrandt. Quasilinear elliptic systems in diagonal form. *Systems of nonlinear partial differential equations (Oxford, 1982), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 111, Reidel, Dordrecht*, pages 173–217, 1983.

[Hir76] M.W. Hirsch. *Differential Topology.* Springer Berlin [ua], 1976.

[Hun66] R. Hunt. On $L(p,q)$ Spaces. *L'Enseignement Mathématique, Vol. 12*, pages 249 – 276, 1966.

[HW75] S. Hildebrandt and K.-O. Widman. Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order. *Math. Z. 142*, pages 67–86, 1975.

[IM01] T. Iwaniec and G. Martin. *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis.* Oxford University Press, Clarendon, 2001.

[Jos98] J. Jost. *Partielle Differentialgleichungen.* Springer Berlin [ua], 1998.

[Jos05] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis, fourth edition.* Springer Berlin [ua], 2005.

[LRiv07] T. Lamm and T. Rivière. Conservation laws for fourth order systems in four dimensions. *To appear in Comm.P.D.E., www.math.ethz.ch/∼riviere/papers/lammriv0706.ps*, 2007.

[LU68] O.A. Ladyzhenskaya and N.N. Ural'tseva. *Linear and quasilinear elliptic equations.* Academic Press, New York-London, 1968.

[Mor66] C.B. Jr. Morrey. *Multiple integrals in the calculus of variations.* Springer Berlin [ua], New York, 1966.

[Mül90] S. Müller. Higher Integrability of determinants and weak convergence in L^1. *J. Reine Angew. Math. 412*, pages 20–34, 1990.

[Riv07a] T. Rivière. Conservation laws for conformal invariant variational problems. *Invent. Math., 168, pp. 1-22, www.math.eth.ch/∼riviere/papers/riviere210306.ps*, 2007.

[Riv07b] T. Rivière. Analysis aspects of Willmore surfaces. *preprint, www.math.ethz.ch/∼riviere/papers/willmore.ps*, 2007.

[Riv07c] T. Rivière. The role of Integrability by Compensation in Conformal Geometric Analysis. *preprint, www.math.ethz.ch/∼riviere/papers/integrabcomp.pdf*, 2007.

[RivS07] T. Rivière and M. Struwe. Partial regularity for harmonic maps, and related problems. *To appear in Comm. Pure and Applied Math, www.math.ethz.ch/∼riviere/papers/harmregu.ps*, 2007.

[Sch03] R. Schätzle. Vorlesungskript Harmonische Analysis. *Universität Bonn, unveröffentlicht*, 2002/2003.

[Sem94] S. Semmes. A Primer on Hardy Spaces, and some remarks on a theorem of Evans and Müller. *Commun. in Partial Differential Equations, 19, pp. 277-319*, 1994.

[Sha88] J. Shatah. Weak solutions and development of singularities of the $SU(2)$ σ-model. *Comm. Pure Appl. Math. 41, no. 4, pp. 459-469*, 1988.

[Sim96] L. Simon. *Theorems on Regularity and Singularity of Energy Minimizing Maps.* Birkhäuser Verlag Basel Boston Berlin, 1996.

[Ste93] E. M. Stein. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, 1993.

[Str00] M. Struwe. *Variational Methods, Third Edition.* Springer Berlin [ua], 2000.

[SW71] E.M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourieranalysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, New Jersey, 1971.

[Tar84] L. Tartar. Remarks on Oscillations and Stokes' Equation. *Lecture Notes in Physics, 230, macroscopic Modelling of Turbulent Flows, Proceedings, Sophia-Antipolis, France*, pages 24–31, 1984.

[Tay96] M.E. Taylor. *Partial Differential Equations - Basic Theory.* Springer Berlin [ua], 1996.

[Uhl82] K.K. Uhlenbeck. Connections with L^p Bounds on Curvature. *Comm. Math. Phys., 83, pp. 32-42*, 1982.

[Weh04] K. Wehrheim. *Uhlenbeck Compactness.* European Mathematical Society, Zürich, 2004.

[Wen69] H.C. Wente. An existence theorem for surfaces of constant mean curvature. *J. Math. Anal. Appl. 26, pp. 318-344*, 1969.

[Zei95] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis - Main Principles and Their Applications; Applied Mathematical Sciences 109.* Springer Berlin [ua], 1995.

[Zie89] P. Ziemer. *Weakly Differentiable Funcions.* Springer Berlin [ua], 1989.

Index

Erklärung

Ich versichere hiermit, dass die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Prüfungsarbeit eingereicht worden.