Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mathematische Logik

Sommersemester 2012
Anwesenheitsaufgaben

1. Wir betrachten das folgende Modell $\mathfrak{M}$:
   Das Universum bestehe aus einer Familie: Vater, Mutter und drei Töchter. Diese sitzen um einen runden Tisch; im Uhrzeigersinn (von oben betrachtet): Mutter, eine Tochter, Vater, die beiden andern Töchter. m, d seien Konstantenzeichen und f_r, f_l einstellige Funktionszeichen. $m^{\mathfrak{M}}$ sei die Mutter, $d^{\mathfrak{M}}$ der Vater; $f_r^{\mathfrak{M}}$ gebe die rechts, $f_l^{\mathfrak{M}}$ die links von jemandem sitzende Person an; $W^{\mathfrak{M}}$ sei die einstellige Relation „ist weiblich" und $T^{\mathfrak{M}}$ die zweistellige Relation „ist Tochter von". Die Belegung β habe auf allen Variablen v_i, $i \in \mathbb{N}$, als Wert die zwischen Vater und Mutter sitzende Tochter.

   (a) Werten Sie die folgenden Terme unter β aus:

   $$f_l(v_0)[\beta] \qquad f_l(f_l(f_l(f_l(f_l(v_0)))))[\beta] \qquad f_r(f_r(f_l(v_0)))[\beta] \qquad f_r(f_r(f_r(m)))[\beta]$$

   (b) Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in die Prädikatenlogik:
   – Es gibt jemanden, der links neben der Mutter und rechts neben dem Vater sitzt.
   – Alle Personen außer dem Vater sind weiblich.
   – Für alle Personen gilt: wenn sie die Tochter von jemandem sind, dann sind sie weiblich.
   – Wenn jemand Tochter von einer Person ist, dann ist diese Person der Vater.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Das Land X hat $2 \cdot n$ Einwohner. Es sind zwei Sorten: der eine Teil sagt immer die Wahrheit, der andere Teil lügt immer. Eine Forscherin besucht X und will herausfinden, wieviele Lügner in X wohnen. Sie stellt jedem Einwohner immer dieselbe Frage: „Wieviele Lügner gibt es in X?" Der erste, den sie fragt, antwortet: „Bei uns gibt es mindestens einen Lügner." Der zweite, den sie fragt, antwortet: „Bei uns gibt es mindestens zwei Lügner", der m-te, den sie fragt (für $m \leq 2 \cdot n$), antwortet: „Bei uns gibt es mindestens m Lügner." Wieviele Lügner wohnen in X?

3. Zeichnen Sie ein Diagramm, das alle Implikationen zwischen den folgenden Formeln enthält, und begründen Sie die Fälle, in denen keine Implikation vorliegt, durch ein Beispiel, indem Sie $\varphi(x,y)$ als „x und y sind in dem gerichteten Graphen (V,E) durch eine Kante verbunden, d.h. $(x,y) \in E$" interpretieren für einen geeigneten gerichteten Graphen, den Sie am besten als Bildchen skizzieren.

   $$\forall x \varphi(x,x), \quad \forall x \forall y \varphi(x,y), \quad \forall x \exists y \varphi(x,y), \quad \forall y \exists x \varphi(x,y)$$

   $$\exists x \exists y \varphi(x,y), \quad \exists x \varphi(x,x), \quad \exists x \forall y \varphi(x,y), \quad \exists y \forall x \varphi(x,y)$$

   Ein gerichteter Graph (V,E) ist ein Paar, dessen erste Komponente eine nicht leere Menge V (die Menge der Vertizes) ist und dessen zweite Komponente $E \subseteq V \times V$ eine Menge von geordneten

Paaren ist. (E steht für edge, Kante.) Beispiel:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

4. Wir definieren induktiv die Menge der K-Terme über $\{[,]\}$:

   (1) $[\,]$ ist ein K-Term.

   (2) Falls v, w K-Terme, ist $[vw]$ ein term.

   (a) Ist $[\,][\,]$ ein K-Term? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (b) Wir definieren F : Menge der K-Terme $\to \mathbb{N}$ durch folgende Regeln:

   $$\begin{aligned} F([\,]) &:= 1 \\ F([vw]) &:= 1 + \max\{F(v), F(w)\} \end{aligned}$$

   Man zeige, dass F wohldefiniert ist.

* * *

Ad libitum. Interessieren Sie sich für die Ausdrucksstärken von Sprachen im herkömmlichen Sinn? Dann sind sind Sie eingeladen, weitere Übersetzungen hinzuzufügen und an andere Beispiele zu denken. Welche Sprachen sind in den letzten beiden Beispielen vertreten? Natürlich kann man in den meisten Sprachen die fehlende Information durch andere Ausdrücke hinzufügen. Welcher Sprache Syntax und Semantik können schon in einer Vorlesungsstunde vollständig beschrieben werden? Dies ist wirklich eine Spezialität von Logiken und von Programmiersprachen.

You are intelligent.

Du bist intelligent.
Sie sind intelligent. (Singular oder Plural)
Ihr seid intelligent.

Tu es intelligent.
Tu es intelligente.
Vous êtes intelligent.
Vous êtes intelligente.
Vous êtes intelligents. (Geduzt oder gesiezt im Plural)
Vous êtes intelligentes.

(phonetisch transkribiert)
Ata chacham. („Du", männlich, geduzt oder gesiezt)
At chachama. („Du", weiblich)
Atem chachamim. („Ihr", männlich oder gemischte Gruppe)
Aten chachamot. („Ihr", weiblich)

Sinä olet viisas. („Du" männlich oder weiblich)
Te olette viisas. („Sie" im Singular)
Te olette viisaita. (Geduzt oder gesiezt im Plural, keine Abhängigkeit vom Geschlecht.)

Man kann also maximal Du oder Sie (im Japanischen gibt es sogar fünf Anreden), Numerus und Genus unterscheiden. Der Unterschied kann sich im Personalpronomen, im Prädikat oder im prädikativen Adjektiv ausdrücken.