**Abteilung für Mathematische Logik**
*Prof. Dr. Heike Mildenberger*
*Übungen: Jeff Serbus*

# Mathematische Logik

Sommersemester 2012

Übungsblatt 1, Abgabe: 02.05.2012

1. Sei $\mathfrak{A}$ eine $L$-Struktur und $B$ eine nicht-leere Teilmenge von $A$, die die Interpretationen $c^{\mathfrak{A}}$ aller Konstanten enthält und unter allen Operationen $f^{\mathfrak{A}}$ abgeschlossen ist. Wenn man die Interpretation der Zeichen aus $L$ auf $B$ einschränkt, erhält man eine $L$-Struktur $\mathfrak{B}$ eine *Unterstruktur* von $\mathfrak{A}$.
   (a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt einer Familie von Unterstrukturen von $\mathfrak{A}$ entweder leer ist oder wieder eine Unterstruktur. Daraus folgt, dass jede nicht-leere Teilmenge $S$ von $A$ in einer kleinsten Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ enthalten ist, der *von $S$ erzeugten* Unterstruktur.
   (b) Kann man das gleiche über die Vereinigung sagen? Beweisen Sie die analogen Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

2. Zeigen Sie, daß $\{\wedge, \vee, \neg\}$ ein *vollständiges Junktorensystem* ist. Das heißt, dass sich jede Funktion $\mathcal{F} : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ durch eine aussagenlogische Formel $f(p_1, \ldots, p_n)$ darstellen lässt, also dass
$$\mathcal{F}(\mu(p_1), \ldots, \mu(p_n)) = \mu(f)$$
für alle Belegungen $\mu : \{p_1, \ldots, p_n\} \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$.

3. Ist der *Sheffersche* Strich
$$(f|g) = \neg(f \wedge g)$$
(genau genommen ist die Einermenge des Shefferschen Strichs gemeint) ein vollständiges Junktorensystem? Begründen Sie Ihre Anwort.

4. Nun seien Terme im Sinne der Sprache der ersten Stufe gemeint. Lässt sich jedes Endstück eines Terms eindeutig als
   - Term schreiben?
   - endliche Folge von Termen schreiben?

   Begründen Sie Ihre Antwort.