Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mathematische Logik

Sommersemester 2012

Übungsblatt 2, Abgabe: 09.05.2012

1. Sei $L = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \boxplus, \circ, \mathtt{P}, \lhd\}$; dabei seien $\mathtt{0}, \mathtt{1}$ Konstantenzeichen, $\boxplus, \circ$ zweistellige Funktionszeichen und $\mathtt{P}$ ein einstelliges und $\lhd$ ein zweistelliges Relationszeichen. Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als L-Struktur $\mathfrak{N}$, indem wir die Zeichen wie folgt interpretieren:
$$\mathtt{0}^{\mathfrak{N}} = 0,\ \mathtt{1}^{\mathfrak{N}} = 1,\ \boxplus^{\mathfrak{N}} = +,\ \circ^{\mathfrak{N}} = \cdot,\ \mathtt{P}^{\mathfrak{N}} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl}\},\ \lhd^{\mathfrak{N}} = <$$
Weiter sei $\beta : \{v_n : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N}$ die Belegung mit $\beta(v_n) = 2n$.
   (a) Berechnen Sie jeweils $t^{\mathfrak{N}}[\beta]$, für:
   - $t = \boxplus \circ \mathtt{0} \boxplus v_0 v_1 v_3$,
   - $t = \boxplus \boxplus \boxplus \boxplus \boxplus v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$.

   (b) Entscheiden Sie jeweils, ob gilt:
   - für alle $i \geq 2$: $\mathfrak{N} \models \neg \mathtt{P} v_i[\beta]$
   - $\mathfrak{N} \models \forall v_0 (\lhd v_1 v_0 \to \neg \mathtt{P} v_0)[\beta]$
   - $\mathfrak{N} \models \forall v_0 \forall v_1 (\lhd v_0 v_1 \vee \lhd v_1 v_0)[\beta]$
   - für alle $i \in \mathfrak{N}$: $\mathfrak{N} \models (\lhd v_i v_{i+1} \vee \lhd v_{i+1} v_i)[\beta]$
   - für alle $i \in \mathfrak{N}$: $\mathfrak{N} \models \boxplus v_i v_i \doteq v_{2i}[\beta]$
   - für alle $i \in \mathfrak{N}$: $\mathfrak{N} \models \circ v_i v_i \doteq v_{i^2}[\beta]$

2. (a) Ist $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$?
   (b) Ist $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ elementar äquivalent zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$?
   (c) Ist $(\mathbb{Z}, +)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, +)$?
   (d) Sind $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(\mathbb{Z}, \leq)$ elementar äquivalent?

3. Sei $L = \{f, g\}$ mit einem zweistelligen g und einem dreistelligen f. Sei
$$\alpha = \exists v_1 \exists v_2 f(v_0, v_1, v_2) \doteq v_0.$$
   (a) Ist in α die Variable v_0 durch $g(v_0, v_2)$ ersetzbar, d.h., ist v_0 frei für $g(v_0, v_2)$ in α? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (b) Geben Sie ein (möglichst einfaches) α', so dass α und α' äquivalent sind und v_0 in α' durch $g(v_0, v_2)$ ersetzbar ist.

4. Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus einer Struktur in sich selbst.
   (a) Wir betrachten $L = \{P\}$ mit einem einstelligen Relationszeichen P.
   Sei $\mathfrak{A} = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0\})$, also $P^{\mathfrak{A}} = \{0\}$. Wie viele Automorphismen hat $\mathfrak{A}$? Wie viele zu $\mathfrak{A}$ isomorphe Strukturen gibt es auf $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?
   (b) Sei immer noch $L = \{P\}$ mit einem einstelligen Prädikatenzeichen P.
   Sei $\mathfrak{A} = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2\})$. Wie viele Automorphismen hat $\mathfrak{A}$? Wie viele zu $\mathfrak{A}$ isomorphe Strukturen gibt es auf $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?
   (c) Sei L nun beliebig, und sei A endlich. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Wie hängt die Anzahl der Automorphismen von $\mathfrak{A}$ mit der Anzahl der zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Strukturen auf A zusammen? Können Sie eine Formel erraten und danach ihre Richtigkeit beweisen?