Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Übungen: Jeff Serbus

Mathematische Logik

Sommersemester 2012

Übungsblatt 3, Abgabe: 16.05.2012

1. Wir schreiben für die Aussagenlogik $\phi \models \psi$, wenn für alle Wahrheitsbelegungen μ gilt: Wenn $\mu(\phi) = W$, so $\mu(\psi) = W$. Für Satzmengen sei $\Phi \models \psi$ entsprechend definiert: Für alle μ, wenn μ alle $\phi \in \Phi$ wahr macht, so $\mu(\psi) = W$.

   Sei $\mathscr{L}$ eine Sprache erster Stufe oder eine Menge aussagenlogischer Formeln. $\Phi \subseteq \mathscr{L}$ heißt unabhängig, wenn für alle paarweise verschiedenen ϕ_1, $\phi_2 \in \Phi$ nicht $\phi_1 \models \phi_2$. Ξ heißt Axiomatisierung von Φ, wenn für alle $\phi \in \mathscr{L}$ gilt: $\Xi \models \phi$ gdw $\Phi \models \phi$.

   (a) Hat jede Formelmenge eine unabhängige Axiomatisierung?

   (b) Hat jede Formelmenge eine unabhängige Axiomatisierung, die Teilmenge von ihr ist?

2. Eine Struktur (V, E) heißt (ungerichteter) Graph, wenn V eine nicht leere Menge ist und $E \subseteq [V]^2$. Hierbei ist $[V]^2$ die Menge aller ungeordneten Zweiertupel aus V, technisch $[V]^2 = \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$.

   Sei m endlich und ungleich 0. Ein Graph (V, E) heißt m-färbbar, wenn es eine Einteilung der Vertizes in m disjunkte Teilmengen gibt, so dass je zwei Vertizes, die derselben Teilmenge angehören, durch keine Kante verbunden sind.

   Gilt folgendes: Sei (V, E) ein abzählbarer Graph, d.h., V ist abzählbar. Wenn jeder endliche Teilgraph $(V_0, E \cap [V_0]^2)$ m-färbbar ist, so ist ganz (V, E) m-färbbar?

   Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Sei $\mathscr{L} = \mathscr{L}(A_1, A_2 \dots)$ mit abzählbar unendlich vielen Satzvariablen.

   Zwei $\mathscr{L}$-Theorien T_1, T_2 heißen äquivalent gdw für alle $\mathscr{L}$-Formeln gilt:

   $$T_1 \models \phi \text{ gdw } T_2 \models \phi.$$

   (a) Wie viele $\mathscr{L}$-Formeln gibt es?

   (b) Wie viele konsistente $\mathscr{L}$-Theorien gibt es?

   (c) Wie viele paarweise nicht äquivalente $\mathscr{L}$-Theorien gibt es?

4. Wir setzen die vorige Aufgabe fort. Sei $\mathscr{L}$ wie oben.

   (d) Sei nun ϕ ein $\mathscr{L}$-Formel. Wie viele paarweise nicht äquivalente $\mathscr{L}$-Theorien gibt es, die ϕ enthalten?

   (e) Sei T eine konsistente $\mathscr{L}$-Theorie. Zeigen Sie: T hat modulo Äquivalenz endliche viele oder abzählbar unendlich viele oder $|\mathbb{R}|$-viele Vervollständigungen.