Mathematisches Institut der Universität Freiburg 23.05.07
Prof. Dr. W. Soergel

Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen

SS 2007

Aufgabe 1

Man beschreibe die Exponentialabbildung für die Liegruppe $(\mathbb{R}, +)$. Man beschreibe die Exponentialabbildung für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum, aufgefaßt als Liegruppe.

Aufgabe 2

Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Die Logarithmusreihe liefert eine inverse Abbildung.

Aufgabe 3

Das linksinvariante Vektorfeld auf der Gruppe $G = \mathrm{GL}(2; \mathbb{R})$, dessen Wert beim neutralen Element durch die Matrix $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ gegeben wird, muß sich als Linearkombination der partiellen Ableitungen nach den Matrixeinträgen $\sum f_{ij}\partial_{ij}$ mit gewissen glatten Funktionen f_{ij} als Koeffizienten schreiben lassen. Man berechne diese Funktionen und prüfe explizit, daß die linksinvariante Fortsetzung in diesem Fall ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist, wenn wir $\mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ mit der durch den üblichen Kommtator gegebenen Struktur einer Liealgebra versehen. Mutige rechnen dasselbe allgemeiner für $G = \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ und auch für rechtsinvariante Felder, beachten dabei jedoch die nachfolgende Übung.

Aufgabe 4

Sei G eine Lie-Gruppe. Wir betrachten das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & \left\{ \text{glatte Vektorfelder auf } G \right\} & \\
\left\{ \begin{array}{c} \text{glatte linksinvariante} \\ \text{Vektorfelder auf } G \end{array} \right\} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \left\{ \begin{array}{c} \text{glatte rechtsinvariante} \\ \text{Vektorfelder auf } G \end{array} \right\} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \left\{ \begin{array}{c} \text{Tangentialraum von } G \\ \text{am neutralen Element} \end{array} \right\} &
\end{tikzcd}
$$

wo die beiden unteren Pfeile durch das Auswerten am neutralen Element definiert werden. Die obere Hälfte unseres Diagramms besteht aus Lie-Algebren und Lie-Algebren-Homomorphismen. Die beiden unteren Pfeile sind Isomorphismen und versehen den Tangentialraum am neutralen Element T_eG mit zwei Lie-Algebra-Strukturen. Der Leser möge als Übung zeigen, daß hier die Lieklammer für die eine Struktur auf T_eG gerade das Negative der Lieklammer für die andere Struktur ist. Hinweis: Man fasse die Inversenabbildung $G \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{opp}}$ auf als Homomorphismus in die Gruppe mit der opponierten Multiplikation.