

Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen

SS 2007

Aufgabe 1

Man beschreibe die Exponentialabbildung für die Liegruppe $(\mathbb{R}, +)$. Man beschreibe die Exponentialabbildung für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum, aufgefaßt als Liegruppe.

Aufgabe 2

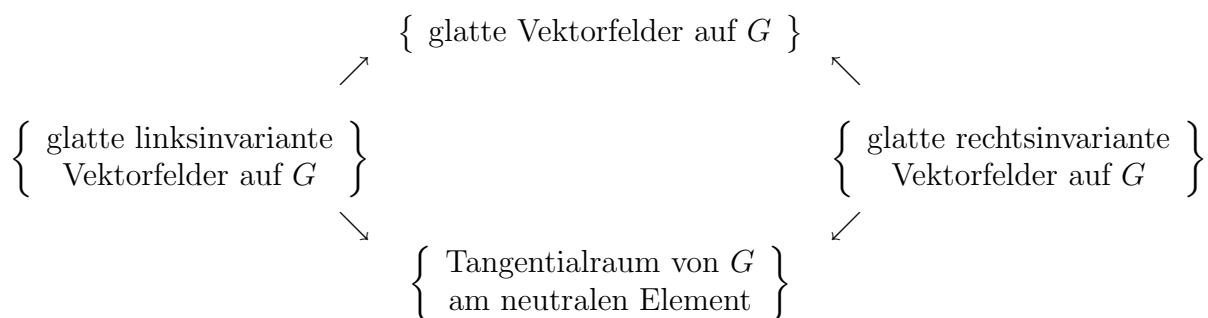
Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Die Logarithmusreihe liefert eine inverse Abbildung.

Aufgabe 3

Das linksinvariante Vektorfeld auf der Gruppe $G = GL(2; \mathbb{R})$, dessen Wert beim neutralen Element durch die Matrix $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ gegeben wird, muß sich als Linearkombination der partiellen Ableitungen nach den Matrixeinträgen $\sum f_{ij} \partial_{ij}$ mit gewissen glatten Funktionen f_{ij} als Koeffizienten schreiben lassen. Man berechne diese Funktionen und prüfe explizit, daß die linksinvariante Fortsetzung in diesem Fall ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist, wenn wir $M(2 \times 2; \mathbb{R})$ mit der durch den üblichen Kommtator gegebenen Struktur einer Liealgebra versehen. Mutige rechnen dasselbe allgemeiner für $G = GL(n; \mathbb{R})$ und auch für rechtsinvariante Felder, beachten dabei jedoch die nachfolgende Übung.

Aufgabe 4

Sei G eine Lie-Gruppe. Wir betrachten das Diagramm



wo die beiden unteren Pfeile durch das Auswerten am neutralen Element definiert werden. Die obere Hälfte unseres Diagramms besteht aus Lie-Algebren und Lie-Algebren-Homomorphismen. Die beiden unteren Pfeile sind Isomorphismen und versehen den Tangentialraum am neutralen Element $T_e G$ mit zwei Lie-Algebra-Strukturen. Der Leser möge als Übung zeigen, daß hier die Lieklammer für die eine Struktur auf $T_e G$ gerade das Negative der Lieklammer für die andere Struktur ist. Hinweis: Man fasse die Inversenabbildung $G \xrightarrow{\sim} G^{\text{opp}}$ auf als Homomorphismus in die Gruppe mit der opponierten Multiplikation.