Mathematisches Institut der Universität Freiburg
Prof. Dr. W. Soergel 20.06.07

Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen [1]

SS 2007

Die Aufgaben sollen in den Übungsgruppen besprochen nicht mehr abgegeben werden.

Aufgabe 1

Man zeige, daß in der Gruppe $\mathrm{U}(n)$ die unitären Diagonalmatrizen einen maximalen Torus bilden, und zeige direkt, daß in diesem Fall je zwei maximale Tori konjugiert sind. Hinweis: Eine Menge von paarweise kommutierenden diagonalisierbaren Matrizen ist simultan diagonalisierbar.

Aufgabe 2

Gegeben eine Liegruppe G mit einer abgeschlossenen Untergruppe K und ein Element $t \in G$ hat die Abbildung $G \times K \to G$, $(g,k) \mapsto t^{-1}gtkg^{-1}$ an der Stelle $(1,1)$ das Differential

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Lie} G \times \operatorname{Lie} K & \to & \operatorname{Lie} G \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & (\operatorname{Ad} t^{-1})(x) + y - x \end{array}$$

Aufgabe 3

Ist G eine topologische Gruppe und H eine kompakte abelsche Liegruppe, so induziert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion zwischen den stetigen Gruppenhomomorphismen von $G \to H$ und den Morphismen abelscher Gruppen $X(H) \to X(G)$ in die Gegenrichtung,

$$\operatorname{Grpto}(G,H) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ab}(X(H), X(G))$$

Hinweis: Jede kompakte abelsche Liegruppe ist das Produkt von einem Torus mit einer endlichen Gruppe.

Aufgabe 4

Die maximalen abelschen Unteralgebren der Liealgebra einer kompakten Liegruppe sind genau die Liealgebren der maximalen Tori.

Aufgabe 5

Eine maximale abelsche Unteralgebra einer Liealgebra liefert eine maximale abelsche Unteralgebra unter jeder Erweiterung des Grundkörpers.

[1] Internetseite der Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Ana4/Hauptseite.html