Mathematisches Institut der Universität Freiburg
Prof. Dr. W. Soergel

Klausur zur Vorlesung
Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen im SS 2007

Bitte füllen Sie die nachstehenden Angaben gut leserlich aus und legen Sie Ihren Studentenausweis zur Kontrolle bereit.

Vor- und Nachname: ....

Geburtstag: .... Geburtsort: ....

Matrikelnummer: .... Gruppennummer: ....

Studiengang und -fach: .... Semesterzahl: ....

Achten Sie darauf, Ihren Lösungsweg verständlich zu machen und nicht nur das Ergebnis anzugeben. Für ein richtiges Ergebnis ohne Hinweis darauf, wie es erzielt wurde, werden keine Punkte vergeben. Jeder Betrugsversuch führt zum unmittelbaren Nicht-Bestehen der Klausur. Geben Sie am Ende der Bearbeitungszeit Ihre Lösungen einschließlich des Deckblattes persönlich ab.
Es gibt für jede Aufgabe 12 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 40 Punkte ausreichend.

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Summe	

Aufgabe 1

Man zeige, daß im allgemeinen für Teilmengen M, N eines topologischen Raums $(M \cup N)^\circ \neq M^\circ \cup N^\circ$. Welche Inklusion gilt stets und warum?

Aufgabe 2

Jede stetige Abbildung g, für die es einen stetigen Schnitt gibt alias eine stetige Abbildung s mit $g \circ s = \mathrm{id}$, ist final.

Aufgabe 3

Operiert eine topologische Gruppe G stetig auf einem topologischen Raum X und ist $N \subset G$ ein Normalteiler, dessen Elemente X punktweise festhalten, so ist auch die induzierte Operation von G/N auf X stetig.

Aufgabe 4

Sei G eine Liegruppe. Man bestimme das Differential am neutralen Element der Abbildung $G \to G$, $g \mapsto g^3$.

Aufgabe 5

Für welche Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ ist $f\partial_x + g\partial_y$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf $\mathbb{C}^\times$, wobei x den Realteil und y den Imaginärteil einer komplexen Zahl bedeuten mögen?

Aufgabe 6

Gegeben eine endlichdimensionale stetige Darstellung $G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Liegruppe mit der abgleiteten Darstellung ihrer Liealgebra zeige man die Formel

$$g(X(g^{-1}v)) = ((\mathrm{Ad}\, g)(X))v \quad \forall g \in G,\ X \in \mathrm{Lie}\, G,\ v \in V$$

Aufgabe 7

Ist A eine endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Algebra und $G \subset \mathrm{GL}(A)$ ihre Automorphismengruppe, so besteht $\mathrm{Lie}\, G \subset \mathrm{End}(A)$ genau aus allen Derivationen von A.

Aufgabe 8

Man bestimme alle stetigen Gruppenhomomorphismen $S^1 \to (\mathbb{R} \times S^1)$.