Mathematisches Institut der Universität Freiburg
Prof. Dr. W. Soergel

Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen

SS 2007 — Probeklausur

Aufgabe 1

Man zeige, daß im allgemeinen für Teilmengen M, N eines topologischen Raums $\overline{M \cap N} \neq \overline{M} \cap \overline{N}$. Welche Inklusion gilt stets und warum?

Aufgabe 2

Jede stetige Abbildung f, für die es eine stetige Abbildung g gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}$, ist initial.

Aufgabe 3

Gegeben $G \supset H \supset K$ eine topologische Gruppe mit zwei Normalteilern ist der Isomorphismus aus dem noetherschen Isomorphiesatz ein Homöomorphismus $G/H \xrightarrow{\sim} (G/K)/(H/K)$.

Aufgabe 4

Sei G eine Liegruppe. Man bestimme das Differential bei (e, e) der Abbildung $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$.

Aufgabe 5

Für welche Funktionen $f(a, b)$ und $g(a, b)$ ist $f\partial_a + g\partial_b$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit zwei Zeilen und Spalten und Determinante Eins, wobei a und b die beiden Einträge der ersten Zeile bedeuten mögen?

Aufgabe 6

Man zeige, daß gegeben eine Liegruppe G für jedes Gruppenelement $g \in G$ die Abbildung $\mathrm{Ad}(g)$ ein Liealgebrenhomomorphismus ist.

Aufgabe 7

Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear und $G \subset \mathrm{GL}(V)$ die Gruppe aller g mit $\omega(gv, gw) = \omega(v, w)$ für alle $v, w \in V$, so besteht $\mathrm{Lie}\, G \subset \mathrm{End}(V)$ genau aus allen Endomorphismen X mit $\omega(Xv, w) + \omega(v, Xw) = 0$ für alle $v, w \in V$.

Aufgabe 8

Man bestimme alle stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R}^\times \to S^1$.