Mathematisches Institut der Universität Freiburg 09.01.07
Prof. Dr. W. Soergel

Analysis III [1]

WS 2006/2007 — Blatt 10

Abgabe: **16.01.07, vor der Vorlesung**

Aufgabe 1

Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $v \in \mathcal{H}$ ein Vektor und $\varphi : L^2(\mathbb{R};\mu) \hookrightarrow \mathcal{H}$ unsere kanonische Einbettung. Man zeige $\mu\left(\mathbb{R}\backslash\sigma(T)\right) = 0$.

Aufgabe 2

Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einem selbstadjungierten Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ und einem zyklischen Vektor $v \in \mathcal{H}$ zeige man, daß die Algebra aller Operatoren $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $AT = TA$ kommutativ ist.
Hinweis: Man identifiziere $\mathcal{H} \cong L^2(\mathbb{R};\mu)$.

Aufgabe 3

Gegeben ein von Null verschiedener Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit selbstadjungiertem Operator T hat $T \times T$ auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ nie einen zyklischen Vektor.

Aufgabe 4

Gegeben eine Familie $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ von Hilberträumen bildet die Menge aller Tupel $(v_i)_{i\in I}$ mit $\sum_{i\in I}\|v_i\|^2 < \infty$ mit dem Skalarprodukt $\langle(v_i),(w_i)\rangle = \sum_{i\in I}\langle v_i, w_i\rangle$ wieder einen Hilbertraum. Dieser Raum, der auch

$$\hat{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{H}_i$$

notiert wird, enthält $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ als dichten Teilraum.

[1] Internetseite der Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/AnaIII/Hauptseite.html