Mathematisches Institut der Universität Freiburg
Prof. Dr. W. Soergel 23.01.07

Analysis III [1]

WS 2006/2007 — Blatt 12

Abgabe: **30.01.07, vor der Vorlesung**

Aufgabe 1

Man zeige
$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$
Im übrigen bilden alle Matrizen der angegebenen Gestalt ohne die Bedingung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ den Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen, so daß SU(2) als die Einheitssphäre in $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ aufgefaßt werden kann. Aus der Operation durch Konjugation von SU(2) auf dem Raum der schiefadjungierten Matrizen mit Spur Null konstruiere man einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ mit Kern $\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$.

Aufgabe 2

Man zeige, daß die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+$ aller quadratischen reellen Matrizen mit positiver Determinante wegzusammenhängend ist.
Hinweis: Man mag zuerst die erste Spalte bis auf Vorzeichen zu einem der Standardbasisvektoren schieben, dann die entspsrechende Zeile ausräumen und so weiter, bis man bei einer Matrix landet, die in jeder Spalte und jeder Zeile nur einen von Null verschiedenen Eintrag hat, der auch noch ± 1 ist. Dann multipliziere man mit geeigneten Drehmatrizen.

Aufgabe 3

Die Unter-Liealgebra $\mathbb{R}\,\mathrm{diag}(\mathrm{i}, \alpha\,\mathrm{i}) \subset \mathfrak{gl}(2;\mathbb{C})$ ist genau dann die Lie-Algeba einer abgeschlossenen Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$, wenn α nicht zu $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ gehört.

Aufgabe 4

Gegeben differenzierbare Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to L$ von Untermannigfaltigkeiten erfüllen die Differentiale für jeden Punkt $x \in M$ die Kettenregel
$$\mathrm{d}_{f(x)} g \circ \mathrm{d}_x f = \mathrm{d}_x (g \circ f)$$

Aufgabe 5

Ist $M \subset V$ eine glatte Untermannigfaltigkeit, so ist auch das Tangentialbündel $TM \subset V \times V$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Weiter ist für jede glatte Abbildung $f : M \to N$ auch das Differential eine glatte Abbildung $\mathrm{d}f : TM \to TN$.

[1] Internetseite der Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/AnaIII/Hauptseite.html

Donnerstag, 25.01.2007, 18.30-20.00 Uhr, Hörsaal Rundbau, Albertstr. 21a :

Mensch & Mathematik

Professor Knut Radbruch: Ein mathematischer Blick auf die philosophische Geschichte der Gottesbeweise Professor Radbruch ist Autor der Bücher “Mathematische Spuren in der Literatur” und von “Mathematik in den Geisteswissenschaften”.