Mathematisches Institut der Universität Freiburg
Prof. Dr. W. Soergel 31.10.06

Analysis III [1]

WS 2006/2007 — Blatt 2

Abgabe: **07.11.06, vor der Vorlesung**

Aufgabe 1

Sei X ein normierter reeller Raum, $U \Subset X$ offen, $A : U \to \vec{X}$ ein Vektorfeld und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Gilt $(\mathrm{d}_x f)(A(x)) \geq 0$ bzw. > 0 für alle $x \in U$, so ist für jede Integralkurve $\varphi : I \to U$ unseres Vektorfelds die Verknüpfung $f \circ \varphi$ monoton bzw. streng monoton wachsend.

Aufgabe 2

Man finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f + f' + f'' + f''' = 0$ und $f(0) = 0$.

Aufgabe 3

Man zeige: Für ein Vektorfeld $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $A(x) \perp x$ für alle x ist jede Integralkurve in einer Sphäre um den Ursprung enthalten und alle maximalen Integralkurven sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{x}$ und $y'' + 6y' + 9y = 6x\,\mathrm{e}^{-3x} + 16\,\mathrm{e}^{x}$.
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'' + y = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

[1] Internetseite der Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/AnaIII/Hauptseite.html