Mathematisches Institut der Universität Freiburg 07.11.06
Prof. Dr. W. Soergel

Analysis III [1]

WS 2006/2007 — Blatt 3

Abgabe: **14.11.06, vor der Vorlesung**

Aufgabe 1

Man transformiere das Vektorfeld $y\partial_x$ in Polarkoordinaten. Man wende es an auf die Funktion $f(x, y) = xy$ und prüfe, daß in diesem Fall der Koordinatenwechsel mit dem Anwenden des Vektorfeldes vertauscht.

Aufgabe 2

Man berechne den Kommutator von Vektorfeldern $[x\partial_y + y\partial_x, x\partial_x]$ und prüfe, daß das Bilden des Kommutators in diesem Fall mit dem Übergang zu Polarkoordinaten verträglich ist. Man gebe den Fluß des Vektorfelds $x\partial_y$ explizit an, berechne den Kommutator $[x\partial_y, y\partial_x]$ und prüfe, daß er wie versprochen das Vertauschen der Flüsse mißt.

Aufgabe 3

Seien X, Y endlichdimensionale reelle Räume und $U \subset X$, $V \subset Y$ offene Teilmengen.

a) Gegeben eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U \to V$ und zeitabhängige Vektorfelder $A : \mathbb{R} \times U \to \vec{X}$ und $B : \mathbb{R} \times V \to \vec{Y}$ mit $(\mathrm{d}_x\, g)A(t, x) = B(t, g(x))$ für alle $x \in U$ ist für jede Integralkurve φ von A auch $g \circ \varphi$ Integralkurve von B.

b) Man prüfe: Gegeben eine Abbildung $M : \mathbb{R} \to M(n \times n; \mathbb{R})$ und $g = \det : M(n \times n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ und $A : (t, P) \mapsto M(t)P$ und $B : (t, x) \mapsto \mathrm{tr}(M(t))x$ sind die Bedingungen aus a) erfüllt. Man erinnere hier das Differential der Determinante aus Analysis II.

c) Man zeige: Löst $X : \mathbb{R} \to M(n \times n; \mathbb{R})$ die Differentialgleichung $\dot{X}(t) = M(t)X(t)$, so löst $x(t) = \det X(t)$ die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \mathrm{tr}(M(t))x(t)$.

d) Die Funktionaldeterminante des Flusses Φ eines Vektorfelds A in Richtung der räumlichen Koordinaten erfüllt die Differentialgleichung

$$(\det \Phi')^{\cdot} = \mathrm{tr}\, A'(\Phi(t, x)) \cdot (\det \Phi')$$

Speziell erhält man für $t = 0$ die Formel $(\det \Phi')^{\cdot}|_{t=0} = (\mathrm{div}\, A) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$.

[1] Internetseite der Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/AnaIII/Hauptseite.html