

Analysis III ¹

WS 2006/2007 — Blatt 6

Abgabe: **05.12.06, vor der Vorlesung**

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Die Funktion $x \mapsto e^{-x \cdot x}$ liegt im Schwartz-Raum.

Aufgabe 2

Für $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $g|_{(-\infty, 0]} = 0$ gibt es eine holomorphe Funktion $g^\wedge$ auf der komplexen unteren Halbebene $\operatorname{Re} z < 0$, die die Fouriertransformierte $g^\wedge$ stetig fortsetzt. Die Funktion $t \mapsto g^\wedge(-it)$ nennt man im übrigen die “Laplace-Transformierte” von g .

Aufgabe 3

Ist $L : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler reeller Vektorräume und μ ein komplexes Maß auf V , so stimmt die Fouriertransformation seines Bildmaßes überein mit der Fouriertransformation des Maßes selbst verknüpft mit der auf den Charakteren induzierten Abbildung, in Formeln $(L_*\mu)^\wedge = \mu^\wedge \circ \hat{L}$. Spezieller zeige man für die durch Multiplikation mit einer invertierbaren quadratischen Matrix A gegebene Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine integrierbare Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Formel $(f \circ A)^\wedge = |\det A|^{-1} f^\wedge \circ (A^\top)^{-1}$.

Aufgabe 4

Gegeben integrierbare Funktionen $f_1, \dots, f_n$ ist die Fouriertransformierte der Produktfunktion $f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$ das Produkt $f^\wedge(y) = f_1^\wedge(y_1) \dots f_n^\wedge(y_n)$. Speziell ist die Funktion $e^{-x \cdot x/2}$ auf $\mathbb{R}^n$ ihre eigene Fouriertransformierte. Was ist die Fouriertransformierte von e^{-xAx} für eine positiv definite symmetrische reelle Matrix A ?

¹Internetseite der Vorlesung: <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/AnaIII/Hauptseite.html>