Mathematisches Institut der Universität Freiburg 05.12.06
Prof. Dr. W. Soergel

Analysis III [1]

WS 2006/2007 — Blatt 7

Abgabe: **12.12.06, vor der Vorlesung**

Aufgabe 1

Für die verzerrten und dann wieder auf Integral Eins normierten Gauss'schen Glockenkurven $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2\sigma^2)$ gilt

$$G_\sigma * G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$$

Aufgabe 2

Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\mu \in M(V)$ ein komplexes Maß, $f : V \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt und λ ein Haar'sches Maß auf V, so gilt $(\mu * f)\lambda = \mu * (f\lambda)$. Ist ν ein weiteres komplexes Maß, so gilt $\nu * (\mu * f) = (\nu * \mu) * f$.

Aufgabe 3

Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum $(X, \mathcal{M})$ erklärt man ein positives reelles Maß $|\mu|$, seine *Variation* durch die Vorschrift

$$|\mu|(A) = \sup \sum |\mu(A_\nu)|$$

wo das Supremum über alle Zerlegungen $A = \coprod A_\nu$ von A in eine disjunkte Vereinigung einer abzählbaren Familie von meßbaren Teilmengen gebildet werden soll. Man zeige: Die Variation $|\mu|$ eines komplexes Maßes nimmt Werte in $[0, \infty)$ an und ist ein Maß auf $\mathcal{M}$. Jedes komplexe Maß μ auf einem Meßraum läßt sich darstellen als Linearkombination von vier nichtnegativen Maßen in der Form $\mu = \mu_1 - \mu_2 + \mathrm{i}\,\mu_3 - \mathrm{i}\,\mu_4$ und so, daß zusätzlich gilt $\mu_r \leq |\mu|$ für $1 \leq r \leq 4$ als da heißt $\mu_r(A) \leq |\mu|(A)$ für jede meßbare Menge $A \subset X$. Hinweis: Man mag etwa mit $\mu_1 = |\mu|$ beginnen.

Aufgabe 4

Gegeben ein komplexes Maß μ auf einem Meßraum $(X, \mathcal{M})$ gibt es genau eine Linearform $L^1(X; |\mu|) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int f\mu$ mit der Eigenschaft

$$\int f\mu = \int f\mu_1 - \int f\mu_2 + \mathrm{i} \int f\mu_3 - \mathrm{i} \int f\mu_4$$

für eine und jede Darstellung von μ wie in Aufgabe 3. Man zeige weiter die Abschätzung $|\int f\mu| \leq \int |f||\mu|$. Hinweis: Man beginne mit dem Fall, daß f eine Stufenfunktion ist.

[1] Internetseite der Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/AnaIII/Hauptseite.html