Mathematisches Institut der Universität Freiburg 12.12.06
Prof. Dr. W. Soergel

Analysis III [1]

WS 2006/2007 — Blatt 8

Abgabe: **19.12.06, vor der Vorlesung**

Aufgabe 1

Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ bezeichne $\rho(t) \in \mathrm{O}(3)$ die Drehung um die x-Achse um den Winkel t im Bogenmaß (in der Richtung, bei der für kleine t die positive y-Achse in Richtung der positiven z-Achse gedreht wird). Man bestimme den infinitesimalen Erzeuger dieser Operation.

Aufgabe 2

Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein Operator, so nennen wir ein Element $v \in \mathcal{H}$ einen *zyklischen Vektor* genau dann, wenn die $T^n v$ mit $n \in \mathbb{N}$ dicht liegen in $\mathcal{H}$. Man zeige: Ist in einer unitären Darstellung von $\mathbb{R}$ jeder Vektor differenzierbar, so sind die zyklischen Vektoren unserer Darstellung genau die zyklischen Vektoren ihres infinitesimalen Erzeugers.

Aufgabe 3

Gegeben ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, eine stetige lineare Abbildung $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ und eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ zeige man, daß auch die Abbildung $t \mapsto \exp(tS)f(t)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $S\exp(tS)f(t) + \exp(tS)f'(t)$. Hinweis: Man beachte dazu die Differenzierbarkeit von $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}), t \mapsto tS$, von $\exp : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bei Null und von der Operation $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Aufgabe 4

Definition: Gegeben Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ heißen lineare Abbildungen $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ und $B : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ *adjungiert* genau dann, wenn gilt $\langle Av, v' \rangle = \langle v, Bv' \rangle$ für alle $v \in \mathcal{H}, v' \in \mathcal{H}'$.
Man zeige:
Jede stetige lineare Abbildung von Hilberträumen hat genau eine adjungierte Abbildung, und diese ist auch stetig. Man notiert die adjungierte Abbildung zu A als A^*. Mit dieser Notation zeige man weiter $(A^*)^* = A$ und $(AB)^* = B^*A^*$ und $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\|A\| = \|A^*\|$ sowie $\|A^*A\| = \|A\|^2$ für die Operatornorm. Hinweis: Zuerst mag der Riesz'sche Darstellungssatz helfen, dann die Erkenntnis $\|A\| = \sup_{\|v\|=\|v'\|=1}\langle Av, v' \rangle$ im Fall, daß keiner unserer beiden Räume der Nullraum ist.

[1] Internetseite der Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/AnaIII/Hauptseite.html