Mathematisches Institut der Universität Freiburg
Prof. Dr. W. Soergel

Analysis III [1]

WS 2006/2007

Lösung des letzten Teils von Blatt 2, Aufgabe 4:
Wir wollen $y''+y=\tan x$ für $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ lösen. Die homogene Gleichung $y''+y=0$ hat die allgemeine Lösung $y=a\sin x+b\cos x$ mit $a,b\in\mathbb{R}$. Es gilt, noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Als System erster Ordnung hat unsere Gleichung die Gestalt

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tan t \end{pmatrix}$$

Die Methode der Variation der Konstanten führt zum Ansatz

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Weiterrechnen mit diesem Ansatz führt zur Gleichung

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan t \end{pmatrix}$$

und damit zu

$$\begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tan t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \tan t \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir etwa $b(t)=-\cos t$ aber für $a(t)$ muß noch mehr gerechnet werden. Nun,

$$\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -\cos\cdot\frac{\sin t}{\cos t} + \int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

und

$$\int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}\right) \frac{2}{1+\tau^2}\,\mathrm{d}\tau$$

mit der Standardsubstitution $\tau=\tan(t/2)$, und

$$\int \frac{2}{1-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau = \int \frac{1}{1-\tau}+\frac{1}{1+\tau}\,\mathrm{d}\tau = \log(1+\tau)-\log(1-\tau) = \log(1+\tan(t/2))-\log(1-\tan(t/2))$$

und damit schließlich

$$a(t) = -\log(1+\tan(t/2)) + \log(1-\tan(t/2)) + \sin t$$

Damit erhalten wir als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(t) = (-\log(1+\tan(t/2)) + \log(1-\tan(t/2)) + \sin t)\cos t - \cos t \sin t$$

und die allgemeine Lösung ergibt sich durch Addition von $a\cos t+b\sin t$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ beliebig.

[1] Internetseite der Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/AnaIII/Hauptseite.html