Andersen-Filtrierung und harter Lefschetz

Wolfgang Soergel

2. Mai 2006

Für Joseph Bernstein

Zusammenfassung

We consider the principal block of category $\mathcal{O}$ and its $\mathbb{Z}$-graded version introduced in [BGS96]. On the space of homomorphisms from a Verma module to an indecomposable tilting module we may define natural filtrations following Andersen [And96]. The arguments given in this article prove that these filtrations are compatible with the $\mathbb{Z}$-graded structure, although explicitely we only show that the dimensions of the sucessive subquotients of the filtration are compatible with this intuition. This statement is very similar to the semisimplicity of the subquotients of the Jantzen filtration proved in [BB93], but the method of proof is quite different. I would like to know how to directly relate both results, as this would give an alternative proof of said semisimplicity.

1 Deformationen der Kategorie $\mathcal{O}$

Bemerkung 1.1. In diesem und dem nächsten Abschnitt wiederholen wir Resultate von [GJ81] in einer für unsere Ziele angepaßten Sprache, die auch [Fie] sehr nahe steht. Seien $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$ eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, eine Borel'sche und eine Cartan'sche. Sei $S = S\mathfrak{h} = \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$ die symmetrische Algebra von $\mathfrak{h}$. Wir betrachten die Kategorie Kring^S aller kommutativen unitären Ringe T mitsamt einem ausgezeichneten Homomorphismus $\varphi : S \to T$. Gegeben $T \in \mathrm{Kring}^S$ betrachten wir die Kategorie $\mathfrak{g}\text{-Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}T$ aller $\mathfrak{g}$-T-Bimoduln, auf denen die Rechts- und die Linksoperation von $\mathbb{C}$ zusammenfallen. Nicht weiter spezifizierte Tensorprodukte sind stets über $\mathbb{C}$ zu verstehen.

Definition 1.2. Gegeben $T = (T, \varphi) \in \mathrm{Kring}^S$ erklären für alle $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ in jedem Bimodul $M \in \mathfrak{g}\text{-Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}T$ den **deformierten Gewichtsraum** M^λ durch die Vorschrift

$$M^\lambda = M^\lambda_T = \{m \in M \mid (H - \lambda(H))m = m\varphi(H) \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

Bemerkung 1.3. Gegeben $M \in \mathfrak{g}\text{-Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}T$ ist die kanonische Abbildung von der direkten Summe seiner deformierten Gewichtsräume nach M stets eine Injektion $\bigoplus_\lambda M^\lambda \hookrightarrow M$. Im Fall $T = \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$ ist das offensichtlich, da die Gewichtsräume M^λ als $T \otimes T$-Moduln gerade Träger im Graphen von $(\lambda+) : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ haben und da diese Graphen paarweise disjunkt sind. Im allgemeinen haben unsere Gewichtsräume Träger im Urbild unserer Graphen unter der von $\mathrm{id} \otimes \varphi$ induzierten Abbildung $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \otimes T) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(\mathfrak{h}^*) \otimes \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*))$ und sind damit ebenfalls disjunkt.

Definition 1.4. Für jedes $T \in \mathrm{Kring}^S$ definieren wir in unserer Kategorie von Bimoduln eine volle Unterkategorie, die **deformierte Kategorie**

$$\mathcal{O}(T) \subset \mathfrak{g}\text{-Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}T$$

als die Kategorie aller Bimoduln, die lokal endlich sind unter $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ und die die Summe ihrer deformierten Gewichtsräume sind.

Bemerkung 1.5. Besonders prominente Objekte dieser Kategorie sind die **deformierten Vermamoduln**

$$\Delta_T(\lambda) = \mathrm{prod}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}_\lambda \otimes T) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (\mathbb{C}_\lambda \otimes T)$$

für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, wobei zu verstehen ist, daß die Rechtsoperation von T nur den letzten Tensorfaktor bewegt, die Operation von $U(\mathfrak{b})$ auf $\mathbb{C}_\lambda \otimes T$ aber vermittels der kanonischen Surjektion $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}$ von der Tensoroperation von $\mathfrak{h}$ herkommt, wobei $H \in \mathfrak{h}$ auf $\mathbb{C}_\lambda$ operieren möge durch den Skalar $\lambda(H)$ und auf T durch Multiplikation mit $\varphi(H)$.

Bemerkung 1.6. Die Kategorie $\mathcal{O}(T)$ ist stabil unter dem Tensorieren von links mit endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{g}$, wobei wir als Linksoperation von $\mathfrak{g}$ auf solch einem Tensorprodukt die Tensoroperation nehmen und als Rechtsoperation von T die Rechtsoperation auf dem zweiten Tensorfaktor. Mit einem Bimodul enthält $\mathcal{O}(T)$ auch alle seine Subquotienten. Im Spezialfall $T = \mathbb{C}$ und φ dem Auswerten am Nullpunkt von $\mathfrak{h}^*$ ist $\mathcal{O}(T)$, wenn man vom Fehlen gewisser Endlichkeitsbedingungen einmal absieht, schlicht die übliche Kategorie $\mathcal{O}$ von Bernstein-Gelfand-Gelfand, und $\Delta_{\mathbb{C}}(\lambda) = \Delta(\lambda)$ ist der Vermamodul mit höchstem Gewicht λ.

Definition 1.7. Wir betrachten weiter die bezüglich $\mathfrak{h}$ zu $\mathfrak{b}$ opponierte Borel'sche $\bar{\mathfrak{b}} \subset \mathfrak{g}$ und für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ den Unterbimodul

$$\nabla_T(\lambda) \subset \operatorname{ind}_{\bar{\mathfrak{b}}}^{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}_\lambda \otimes T) = \operatorname{Hom}_{U(\bar{\mathfrak{b}})}(U(\mathfrak{g}), \mathbb{C}_\lambda \otimes T)$$

der als die Summe aller deformierten Gewichtsräume im fraglichen Hom-Raum erklärt wird. Wir nennen ihn den **deformierten Nabla-Modul** mit höchstem Gewicht λ.

Bemerkung 1.8. Unter der durch die Restriktion gegebenen Identifikation unseres Hom-Raums mit $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(U(\mathfrak{n}), \mathbb{C}_\lambda \otimes T)$ entspricht $\nabla_T(\lambda)$ genau denjenigen Homomorphismen, die nur auf endlich vielen $\mathfrak{h}$-Gewichtsräumen aus $U(\mathfrak{n})$ von Null verschieden sind. Die deformierten Nabla-Moduln gehören auch zu $\mathcal{O}(T)$.

Bemerkung 1.9. Alle Gewichtsräume von $\nabla_T(\lambda)$ und $\Delta_T(\lambda)$ sind über T frei und endlich erzeugt, und ist T nicht der Nullring, so haben die deformierten Gewichtsräume zum Gewicht $(\lambda - \nu)$ in beiden Moduln den Rang $\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{n})^\nu$. Wir haben kanonische T-Modul-Morphismen $T \xrightarrow{\sim} \Delta_T(\lambda)^\lambda \hookrightarrow \Delta_T(\lambda)$ sowie $\nabla_T(\lambda) \twoheadrightarrow \nabla_T(\lambda)^\lambda \xrightarrow{\sim} T$ und für jede Ringerweiterung $T \to T'$ kanonische Isomorphismen $\Delta_T(\lambda) \otimes_T T' \xrightarrow{\sim} \Delta_{T'}(\lambda)$ sowie $\nabla_T(\lambda) \otimes_T T' \xrightarrow{\sim} \nabla_{T'}(\lambda)$.

Bemerkung 1.10. Wir wählen nun für unsere Lie-Algebra einen involutiven Automorphismus $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ mit der Eigenschaft $\tau|_{\mathfrak{h}} = -\operatorname{id}$ und definieren einen kontravarianten Funktor

$$d = d_\tau : \mathfrak{g}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}T \to \mathfrak{g}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}T$$

durch die Vorschrift, daß $dM \subset \operatorname{Hom}_{-T}(M, T)^\tau$ die Summe aller deformierten Gewichtsräume sein soll im fraglichen Hom-Raum mit der durch τ vertwisteten $\mathfrak{g}$-Operation. Ist $M \in \mathfrak{g}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}T$ die Summe seiner deformierten Gewichtsräume, so haben wir einen kanonischen Morphismus $M \to ddM$, und sind zusätzlich alle deformierten Gewichtsräume von M frei und endlich erzeugt über T, so ist dieser Morphismus ein Isomorphismus.

Bemerkung 1.11. Die Restriktion auf den höchsten deformierten Gewichtsraum definiert zusammen mit der universellen Eigenschaft der induzierten Darstellung einen kanonischen Homomorphismus

$$\operatorname{Hom}_{-T}(\operatorname{prod}_{\bar{\mathfrak{b}}}^{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}_\lambda \otimes T), T) \xrightarrow{\sim} \operatorname{ind}_{\bar{\mathfrak{b}}}^{\mathfrak{g}} \operatorname{Hom}_{-T}(\mathbb{C}_\lambda \otimes T, T)$$

von dem man durch Betrachtung der deformierten Gewichtsräume erkennt, daß er einen Isomorphismus von Bimoduln

$$d\Delta_T(\lambda) \cong \nabla_T(\lambda)$$

liefert. Mit unseren Vorüberlegungen folgt dann auch $d\nabla_T(\lambda) \cong \Delta_T(\lambda)$. Nach der Tensoridentität hat weiter $E \otimes \Delta_T(\lambda)$ eine Filtrierung mit Subquotienten $\Delta_T(\lambda + \nu)$, wo ν über die Multimenge $P(E)$ der Gewichte von E läuft, und da $E\otimes$ bis auf die Wahl eines Isomorphismus $dE \cong E$ mit der Dualität d vertauscht, gilt Analoges für $E \otimes \nabla_T(\lambda)$.

EHo **Proposition 1.12.** *1. Für alle λ induziert die Restriktion auf den deformierten Gewichtsraum zum Gewicht λ zusammen mit den beiden kanonischen Identifikationen $\Delta_T(\lambda)^\lambda \xrightarrow{\sim} T$ und $\nabla_T(\lambda)^\lambda \xrightarrow{\sim} T$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(T)}(\Delta_T(\lambda), \nabla_T(\lambda)) \xrightarrow{\sim} T$$

2. Für $\lambda \neq \mu$ aus $\mathfrak{h}^*$ gilt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(T)}(\Delta_T(\lambda), \nabla_T(\mu)) = 0$.

3. Für alle $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ gilt $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}(T)}(\Delta_T(\lambda), \nabla_T(\mu)) = 0$.

Beweis. Bezeichne $R^+ \subset \mathfrak{h}^*$ die Wuzeln von $\mathfrak{n}$ und $|R^+\rangle \subset \mathfrak{h}^*$ das von R^+ erzeugte Untermonoid und $\leq$ die partielle Ordnung auf $\mathfrak{h}^*$ mit $\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu \in \lambda + |R^+\rangle$. Jede kurze exakte Sequenz $\nabla_T(\mu) \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \Delta_T(\lambda)$ mit $M \in \mathcal{O}(T)$ und $\lambda \not\leq \mu$ spaltet, da jedes Urbild in M^λ des kanonischen Erzeugers von $\Delta_T(\lambda)$ bereits von $\mathfrak{n}$ annulliert werden muß und folglich eine Spaltung liefert. Im Fall $\lambda \leq \mu$ gehen wir mit d zur dualen Situation über. Das zeigt die Trivialität der fraglichen Erweiterungen. Den einfacheren Fall der Räume von Homomorphismen behandelt man genauso. □

BCH **Korollar 1.13.** *Seien $M, N \in \mathcal{O}(T)$. Ist M ein direkter Summand eines Objekts mit endlicher Δ_T-Fahne und N ein direkter Summand eines Objekts mit endlicher ∇_T-Fahne, so ist der Morphismenraum $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(T)}(M, N)$ ein endlich erzeugter projektiver T-Modul und für jede Erweiterung $T \to T'$ liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(T)}(M, N) \otimes_T T' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(T')}(M \otimes_T T', N \otimes_T T')$$

Beweis. Das folgt sofort aus EHo 1.12. Die Details überlasse ich dem Leser. □

he *Bemerkung* 1.14. Ist $Q \in \mathrm{Kring}^S$ ein Körper und landen für alle Wurzeln α die Kowurzeln $\alpha^\vee$ unter $S \to Q$ nicht in $\mathbb{Z} \subset Q$, so ist die Kategorie $\mathcal{O}(Q)$ halbeinfach (d.h. alle Surjektionen spalten) mit einfachen Objekten $\Delta_Q(\lambda) = \nabla_Q(\lambda)$ für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

2 Deformation unzerlegbarer Kippmoduln

Bemerkung 2.1. Bezeichne $D = S_{(0)}$ der lokale Ring am Nullpunkt von $\mathfrak{h}^*$. Ist $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ gegeben mit $\Delta(\lambda)$ einfach, so ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$\Delta_D(\lambda) \xrightarrow{\sim} \nabla_D(\lambda)$$

In der Tat reicht es zu zeigen, daß diese Abbildung Isomorphismen auf allen Gewichtsräumen induziert, und diese sind freie Moduln von endlichem Rang über dem lokalen Ring D. Es reicht also nach Nakayama zu zeigen, daß unsere Abbildung unter $\otimes_D \mathbb{C}$ ein Isomorphismus wird, und das folgt sofort aus unserer Voraussetzung.

Definition 2.2. Gegeben $T \in \mathrm{Kring}^S$ bezeichne $\mathcal{K}(T) \subset \mathcal{O}(T)$ die kleinste Unterkategorie, die (1) diejenigen $\Delta_T(\lambda)$ umfaßt, für die die kanonische Abbildung einen Isomorphismus $\Delta_T(\lambda) \xrightarrow{\sim} \nabla_T(\lambda)$ liefert, die (2) stabil ist unter dem Tensorieren mit endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{g}$, die (3) stabil ist unter dem Bilden direkter Summanden und die (4) mit jedem Objekt auch alle dazu isomorphen Objekte enthält. Wir nennen $\mathcal{K}(T)$ die Kategorie der **T-deformierten Kippmoduln**.

Bemerkung 2.3. Für $\mathbb{C} = \mathbb{C}_0 \in \mathrm{Kring}^S$ sind die Objekte von $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ die üblichen Kippmoduln in der klassischen BGG-Kategorie $\mathcal{O}$.

CTD **Proposition 2.4.** *Ist $T \in \mathrm{Kring}^S$ ein vollständiger lokaler Ring "unter S" derart, daß das Urbild in S seines maximalen Ideals gerade das Verschwindungsideal des Nullpunkts von $\mathfrak{h}^*$ ist, so induziert das Spezialisieren*

$$\otimes_T \mathbb{C} : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{K}(\mathbb{C})$$

eine Bijektion auf Isomorphieklassen.

Beweis. Die Kippmoduln in $\mathcal{O}$ sind gerade die direkten Summanden von Tensorprodukten einfacher Vermamoduln mit endlichdimensionalen Darstellungen. Die Proposition folgt mit BCH 1.13 aus den Definitionen und allgemeinen Tatsachen Ben [Ben91] über das Liften von Idempotenten. □

Bemerkung 2.5. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ notieren wir $K_T(\lambda) \in \mathcal{K}(T)$ die T-Deformation des unzerlegbaren Kippmoduls $K(\lambda) \in \mathcal{O}$ mit höchstem Gewicht λ.

3 Die Andersen-Filtrierung

Bemerkung 3.1. Seien gegeben $K \in \mathfrak{g}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}T$ und $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir hier die Abkürzungen $\Delta_T(\lambda) = \Delta$, $\nabla_T(\lambda) = \nabla$

und $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}-T} = \mathrm{Hom}$ und betrachten die durch die Komposition gegebene T-bilineare Paarung

$$\mathrm{Hom}(\Delta, K) \times \mathrm{Hom}(K, \nabla) \to \mathrm{Hom}(\Delta, \nabla) = T$$

Bezeichnen wir für jeden T-Modul H mit H^* den T-Modul $\mathrm{Hom}_T(M, T)$, so induziert unsere Paarung eine Abbildung

$$E = E_\lambda(K) : \mathrm{Hom}(\Delta, K) \to \mathrm{Hom}(K, \nabla)^*$$

Ist hier K ein Kippmodul, so geschieht unsere Abbildung nach 1.13 zwischen endlich erzeugten projektiven T-Moduln. Ist zusätzlich $T \in \mathrm{Kring}^S$ ein Integritätsbereich und erfüllt $Q = \mathrm{Quot}\, T$ die Bedingung aus Bemerkung 1.14, ist also $\mathcal{O}(Q)$ halbeinfach mit einfachen Objekten $\Delta_Q(\lambda) = \nabla_Q(\lambda)$, so ist unsere Paarung nichtentartet über Q und unsere Abbildung $E_\lambda(K)$ induziert einen Isomorphismus über Q und ist insbesondere eine Injektion. Ist speziell $T = \mathbb{C}[[t]]$ der Ring der formalen Potenzreihen längs einer Gerade $t\delta \subset \mathfrak{h}^*$, die in keiner Spiegelebene der Weylgruppe enthalten ist, so erfüllt $Q = \mathrm{Quot}\, \mathbb{C}[[t]]$ die Bedingung aus Bemerkung 1.14. Ist dann $K \in \mathcal{K}(\mathbb{C}[[t]])$ ein deformierter Kippmodul, so können wir vermittels der Einbettung

$$E_\lambda(K) : \mathrm{Hom}(\Delta, K) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(K, \nabla)^*$$

zwischen freien $\mathbb{C}[[t]]$-Moduln von endlichem Rang die offensichtliche Filtrierung auf der rechten Seite durch die $t^i\, \mathrm{Hom}(K, \nabla)^*$ nach links zurückziehen und so eine Filtrierung auf $\mathrm{Hom}(\Delta, K) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}-\mathbb{C}[[t]]}(\Delta_{\mathbb{C}[[t]]}(\lambda), K)$ erhalten.

DAF **Definition 3.2.** Ist $K_{\mathbb{C}} \in \mathcal{K}(\mathbb{C})$ ein Kippmodul der üblichen Kategorie $\mathcal{O}$ und $K \in \mathcal{K}(\mathbb{C}[[t]])$ eine $\mathbb{C}[[t]]$-Deformation im Sinne von 2.4 mit $S \to \mathbb{C}[[t]]$ der Restriktion auf eine formale Umgebung des Nullpunkts in der Gerade $t\rho$ mit ρ wie in 4.3, so nennen wir das Bild der eben erklärten Filtrierung unter der Spezialisierung $\otimes_{\mathbb{C}[[t]]}\mathbb{C}$ die **Andersen-Filtrierung auf** $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), K_{\mathbb{C}})$.

Bemerkung 3.3. Es bleibe dem Leser überlassen, die Unabhängigkeit dieser Filtrierung von der Wahl der nur bis auf nichteindeutigen Isomorphismus wohldefinierten Deformation unseres Kippmoduls nachzuweisen. Das Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der Dimensionen der Subquotienten der Andersen-Filtrierung auf $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), K(\mu))$ für alle $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ oder vielmehr ihre Beschreibung durch Koeffizienten von Kazhdan-Lusztig-Polynomen. Die endgültige Formel für die Dimension des i-ten Subquotienten einer beliebigen Andersen-Filtrierung lautet

$$\dim_{\mathbb{C}} \bar{F}^i\, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda_{\bar{y}}), K(\lambda_{\bar{x}})) = h^i_{y,x}$$

Hierbei gehen wir aus von einem ρ-dominanten Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ im Sinne von 4.3. Es liefert zwei Untergruppen $W_{\bar{\lambda}} \supset W_\lambda$ der Weylgruppe wie in 4.6 ausgeführt wird, und $\bar{x}, \bar{y}$ meinen Nebenklassen aus $W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$ mit x, y als längsten Repräsentanten. Schließlich meint $\lambda_{\bar{x}} = w_{\bar{\lambda}}\bar{x} \cdot \lambda$ wie in 9.2 mit $w_{\bar{\lambda}}$ dem längsten Element von $W_{\bar{\lambda}}$, und $h^i_{y,x}$ wird dadurch charakterisiert, daß in den Notationen von Kazhdan und Lusztig das KL-Polynom $P_{y,x}$ in Bezug auf die Coxetergruppe $W_{\bar{\lambda}}$ mit ihrer Längenfunktion l gegeben wird durch die Formel

$$P_{y,x} = \sum h^i_{y,x} q^{(l(x)-l(y)-i)/2}$$

In Wirklichkeit zeigen wir, daß die fragliche Filtrierung mit der Graduierungsfiltrierung zusammenfällt, die von der graduierten Version der Kategorie $\mathcal{O}$ induziert wird, aber es schien mir nicht möglich, diese Erkenntnis im Rahmen eines Zeitschriftenartikels verständlich darzustellen.

Bemerkung 3.4. Die Jantzen-Filtrierung auf einem Vermamodul $\Delta(\lambda)$ induziert natürlich Filtrierungen auf $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P(\mu), \Delta(\lambda))$ für $P(\mu) \twoheadrightarrow \Delta(\mu)$ die projektive Decke in $\mathcal{O}$. Diese Filtrierungen hinwiederum kommen in derselben Weise her von den durch $\Delta_{\mathbb{C}[[t]]}(\lambda) \to \nabla_{\mathbb{C}[[t]]}(\lambda)$ induzierten Einbettungen

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}-\mathbb{C}[[t]]}(P_{\mathbb{C}[[t]]}(\mu), \Delta_{\mathbb{C}[[t]]}(\lambda)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}-\mathbb{C}[[t]]}(P_{\mathbb{C}[[t]]}(\mu), \nabla_{\mathbb{C}[[t]]}(\lambda))$$

mit $P_{\mathbb{C}[[t]]}(\mu) \twoheadrightarrow \Delta_{\mathbb{C}[[t]]}(\lambda)$ den projektiven Decken in $\mathcal{O}(\mathbb{C}[[t]])$. Das zeigt die Analogie zwischen beiden Filtrierungen. Ich erwarte, daß Archipov's Kippfunktor sogar diese Filtrierungen identifiziert, kann es aber leider nicht beweisen, ohne die Jantzen-Vermutung vorauszusetzen.

4 Deformierte Verschiebung

Bemerkung 4.1. Bezeichnet $Z \subset U(\mathfrak{g})$ das Zentrum, so operiert natürlich $Z \otimes T$ auf jedem Bimodul $M \in \mathfrak{g}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}T$. Wir betrachten nun das pushout-Diagramm von $\mathbb{C}$-Algebren

$$\begin{tikzcd}
 & Z \otimes T \arrow[dr] & \\
Z \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \otimes T \\
 & \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

wobei wir für $\xi : Z \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ stets die Variante des Harish-Chandra-Homomorphismus mit $\xi(z) - z \in U\mathfrak{n}$ nehmen. Er liefert eine endliche Ringerweiterung und dasselbe gilt dann auch für beide nach unten gerichteten Pfeile unseres

Diagramms. Der Graph der Addition mit einem $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ist eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*])$ und dasselbe gilt für sein Bild in $\operatorname{Spec}(Z \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*])$. Das Urbild in $\operatorname{Spec}(Z \otimes T)$ dieses Bildes bezeichnen wir mit $\Xi_\lambda \underset{\mathcal{A}}{\subset} \operatorname{Spec}(Z \otimes T)$. Per definitionem haben $\Delta_T(\lambda)$ und $\nabla_T(\lambda)$ beide als $Z \otimes T$-Moduln Träger in Ξ_λ.

Lemma 4.2. *Der Träger in* $\operatorname{Spec}(Z \otimes T)$ *jedes Elements eines Moduls* $M \in \mathcal{O}(T)$ *ist enthalten in einer endlichen Vereinigung von Mengen der Gestalt* Ξ_λ *mit* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Beweis. Sei v unser Element. Wir dürfen annehmen, daß gilt $v \in M^\lambda$ für ein $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Wir dürfen weiter annehmen, daß das Erzeugnis von v enthalten ist in $\bigoplus_{\mu \leq \nu} M^{\lambda+\mu}$ für ein dominantes ganzes Gewicht $\nu \in X^+$. Dann besitzt

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \tau_{\leq \lambda+\nu} \left(U(\mathfrak{b}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} (\mathbb{C}_\lambda \otimes T) \right)$$

mit hoffentlich selbsterklärendem $\tau_{\leq \lambda+\nu}$ eine endliche Δ_T-Fahne und unser v liegt im Bild eines Homomorphismus von besagtem Objekt nach M. □

rhod **Definition 4.3.** Bezeichne $\rho = \rho(R^+)$ die Halbsumme der positiven Wurzeln. Wir setzen

$$\mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{-1, -2, \ldots\} \; \forall \alpha \in R^+\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge die **ρ-dominanten Gewichte**. Wir verwenden die übliche Notation $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ für die zum Fixpunkt $-\rho$ verschobene Operation der Weylgruppe.

Satz 4.4 (Zerlegung deformierter Kategorien). *Sei* T *ein* $S_{(0)}$*-Ring, d.h. der Morphismus* $S \to T$ *faktorisiere über den lokalen Ring* $S_{(0)}$ *von* $\mathfrak{h}^*$ *am Ursprung. So haben wir eine Zerlegung*

$$\mathcal{O}(T) = \prod_{\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}} \mathcal{O}_\lambda(T)$$

wobei $\mathcal{O}_\lambda(T)$ *aus allen Objekten* $M \in \mathcal{O}(T)$ *besteht mit* $M = \bigoplus_{\nu \in \lambda + \mathbb{Z}R} M^\nu$ *und* $\operatorname{supp}_{Z \otimes T} M \subset \bigcup_{w \in W} \Xi_{w \cdot \lambda}$.

Beweis. Aus $\Xi_\lambda \cap \Xi_\mu \neq \emptyset$ folgt für $T = S_{(0)} = D$ bereits $W \cdot \lambda = W \cdot \mu$. Der Rest des Arguments läuft wie im Fall $T = \mathbb{C}$. □

Bemerkung 4.5. Ebenso wie im nichtdeformierten Fall haben wir für $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ mit ganzer Differenz $\lambda - \mu \in X$ Verschiebungsfunktoren

$$T_\lambda^\mu : \mathcal{O}_\lambda(T) \to \mathcal{O}_\mu(T)$$

die exakt sind und Adjunktionen $(T^\mu_\lambda, T^\lambda_\mu)$ erfüllen und auch sonst die üblichen Eigenschaften haben. Wir nennen sie die **deformierten Verschiebungen**. Die Kategorie der deformierten Kippmoduln in einem unserer Blöcke notieren wir $\mathcal{K}T) \cap \mathcal{O}_\lambda(T) = \mathcal{K}_\lambda(T)$.

WLL *Bemerkung* 4.6. Ist T eine D-Algebra, so ist für $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ der deformierte Verma-Modul $\Delta_T(\lambda)$ projektiv in $\mathcal{O}_\lambda(T)$. Die Isotropiegruppe eines Gewichts $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ unter der dot-Operation der Weylgruppe notieren wir W_λ, die Isotropiegruppe seiner Nebenklasse $\bar\lambda = \lambda + \langle R \rangle$ unter dem Wurzelgitter $W_{\bar\lambda}$. Das längste Element von $W_{\bar\lambda}$ notieren wir $w_{\bar\lambda}$, die Ringe der Invarianten für die natürliche Operation der Gruppen $W_\lambda \subset W_{\bar\lambda}$ auf D bezeichnen wir mit $D^\lambda \supset D^{\bar\lambda}$.

Satz 4.7 (Deformation projektiver Objekte). *Der Funktor* $\otimes_D \mathbb{C} : \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen endlich erzeugter projektiver Objekte in beiden Kategorien.*

Beweis. So-A [Soe90]. □

Definition 4.8. Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ bezeichne $P_D(\lambda) \in \mathcal{O}(D)$ das endlich erzeugte projektive Objekt, das unter $\otimes_D \mathbb{C}$ zu $P(\lambda)$ spezialisiert. Wir nennen es die **Deformation des Projektiven** $P(\lambda)$**.** Gegeben $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ benutzen wir für den deformierten antidominanten Projektiven die Abkürzung $P_D(w_{\bar\lambda} \cdot \lambda) = A_D(\lambda) = A(\lambda)$.

Satz 4.9 (Endomorphismen antidominanter Projektiver). *Gegeben* $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ *induziert die Multiplikation eine Surjektion* $Z \otimes D \twoheadrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}(D)} A(\lambda)$*. Bezeichnet* $(+\lambda)^\sharp : S \to S$ *den Komorphismus zu* $(+\lambda) : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$*, so hat die Komposition*

$$Z \otimes D \xrightarrow{\xi \otimes \mathrm{id}} S \otimes D \xrightarrow{(+\lambda)^\sharp \otimes \mathrm{id}} S \otimes D \to D \otimes_{D^{\bar\lambda}} D$$

das Bild $D^\lambda \otimes_{D^{\bar\lambda}} D$ *und denselben Kern wie die Surjektion aus dem ersten Teil und wir erhalten so einen Isomorphismus*

$$D^\lambda \otimes_{D^{\bar\lambda}} D \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{O}(D)} A(\lambda)$$

Beweis. Für λ ganz wird das in HCH [Soe92] gezeigt. Der Beweis im Allgemeinen ist im Wesentlichen derselbe. □

Bemerkung 4.10. Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir im Folgenden meist die Abkürzungen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(D)} = \mathrm{Hom}$ und $\mathrm{End}_{\mathcal{O}(D)} = \mathrm{End}$. Jede Wahl eines deformierten antidominanten Projektiven $A(\lambda)$ für $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ liefert vermittels der Vorschrift $\mathbb{V} = \mathbb{V}_D = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(D)}(A(\lambda), \;)$ einen exakten Funktor

$$\mathbb{V} : \mathcal{O}(D) \to D^\lambda\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}D$$

der natürlich nur auf $\mathcal{O}_\lambda(D)$ von Null verschieden ist. Ist weiter $\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ gegeben mit $\lambda - \mu \in X$ und $W_\mu \supset W_\lambda$ und wählen wir einen Isomorphismus $T_\mu^\lambda A(\mu) \xrightarrow{\sim} A(\lambda)$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D^\mu \otimes_{D^{\bar{\mu}}} D & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{End} A(\mu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^\lambda \otimes_{D^{\bar{\mu}}} D & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{End} A(\lambda) \end{array}$$

mit der von der Einbettung $D^\mu \subset D^\lambda$ induzierten linken Vertikale und der durch T_μ^λ und unseren Isomorphismus induzierten rechten Vertikale, siehe [Soe92]. Halten wir so einen Isomorphismus fest und wählen außerdem eine Adjunktion $(T_\mu^\lambda, T_\lambda^\mu)$, so erhalten wir Isomorphismen

$$\operatorname{Hom}(A(\mu), T_\lambda^\mu M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(T_\mu^\lambda A(\mu), M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(A(\lambda), M)$$

die zusammen eine Äquivalenz von Funktoren definieren, bis auf die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\lambda(D) & \xrightarrow{\mathbb{V}} & D^\lambda\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}D \\ T_\lambda^\mu \downarrow & & \downarrow \mathrm{res} \\ \mathcal{O}_\mu(D) & \xrightarrow{\mathbb{V}} & D^\mu\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}D \end{array}$$

kommutiert. Mithilfe der Adjunktionen finden wir auch eine Äquivalenz von Funktoren, bis auf die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\mu(D) & \xrightarrow{\mathbb{V}} & D^\mu\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}D \\ T_\mu^\lambda \downarrow & & \downarrow D^\lambda \otimes_{D^\mu} \\ \mathcal{O}_\lambda(D) & \xrightarrow{\mathbb{V}} & D^\lambda\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}D \end{array}$$

kommutiert.

Bemerkung 4.11. Gegeben $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ mit ganzer Differenz kann man allgemeiner die Verschiebungen $T_\lambda^\mu : \mathcal{O}_\lambda(D) \to \mathcal{O}_\mu(D)$ betrachten, die sich bekanntlich auch schreiben lassen als $T_\lambda^\mu \cong T_\nu^\mu T_\lambda^\nu$ für ein und jedes $\nu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ mit ganzer Differenz zu λ und μ und der Eigenschaft $W_\nu = W_\lambda \cap W_\mu$. Bilden wir $D_\lambda^\mu = D^{W_\lambda \cap W_\mu} \in D^\mu\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}D^\lambda$, so können wir unsere Diagramme zusammenfassen zum bis auf natürliche Äquivalenz kommutierenden funktoriellen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_\lambda(D) \arrow[r, "\mathbb{V}"] \arrow[d, "T_\lambda^\mu"'] & D^\lambda\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}D \arrow[d, "D_\lambda^\mu \otimes_{D^\lambda}"] \\ \mathcal{O}_\mu(D) \arrow[r, "\mathbb{V}"] & D^\mu\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}\text{-}D \end{tikzcd}$$

Gehen wir zu den Adjungierten der Vertikalen über, so erhalten wir auch ein bis auf natürliche Äquivalenz von Funktoren kommutierendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_\mu(D) \arrow[r, "\mathbb{V}"] \arrow[d, "T_\mu^\lambda"'] & D^\mu\text{-Mod}_{\mathbb{C}}\text{-} D \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{D^\mu}(D_\lambda^\mu, \quad)"] \\
\mathcal{O}_\lambda(D) \arrow[r, "\mathbb{V}"] & D^\lambda\text{-Mod}_{\mathbb{C}}\text{-} D
\end{tikzcd}$$

Theorem 4.12 (Struktursatz für deformierte Kippmoduln). *Die Funktoren $\mathbb{V}$ sind volltreu auf deformierten Kippmoduln. Genauer gilt für beliebiges $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$:*

1. *Gegeben $K \in \mathcal{K}_\lambda(D)$ und $F \in \mathcal{O}_\lambda(D)$ ein Objekt mit Δ_D-Fahne induziert $\mathbb{V}$ einen Isomorphismus*
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}-D}(F, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^\lambda - D}(\mathbb{V}F, \mathbb{V}K)$$
2. *Gegeben $K \in \mathcal{K}_\lambda(D)$ und $F \in \mathcal{O}_\lambda(D)$ ein Objekt mit ∇_D-Fahne induziert $\mathbb{V}$ einen Isomorphismus*
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}-D}(K, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^\lambda - D}(\mathbb{V}K, \mathbb{V}F)$$

Bemerkung 4.13. In größerer Allgemeinheit wird die erste Aussage als Theorem 10 in [Fie] gezeigt: Die Funktoren $\mathbb{V}$ sind sogar volltreu auf beliebigen Objekten mit einer endlichen Filtrierung, bei der alle Subquotienten deformierte Vermamoduln sind.

Bemerkung 4.14. Im nichtdeformierten Fall $T = \mathbb{C}$ ist der Funktor $\mathbb{V}$ volltreu auf den Kippmoduln eines gegebenen Blocks. In der Tat liefert ja für jedes maximale Ideal $\chi \subset Z$ und beliebig vorgegebene projektive Funktoren $F, G : U/\chi U\text{-mod} \to U\text{-mod}$ und einen beliebigen Vermamodul Δ mit $\chi\Delta = 0$ das Anwenden auf Δ eine Bijektion

$$\mathrm{Trans}_{U/\chi U\text{-mod}\to}(F, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F\Delta, G\Delta)$$

Das wird für projektive Vermamoduln bewiesen in [BG80], und da nach [BGG75] die Einhüllende surjektiv auf die ad-endlichen Endomorphismen jedes Vermamoduls geht, funktioniert der dort gegebene Beweis allgemeiner für jeden Vermamodul. Die Einbettung eines einfachen Vermamoduls Δ_e in einen projektiven Vermamodul Δ_p liefert also Bijektionen

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F\Delta_e, G\Delta_e) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F\Delta_p, G\Delta_p)$$

Da sie auch Bijektionen $\mathbb{V}F\Delta_e \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}F\Delta_p$ liefert, folgt die Behauptung. Im nichtdeformierten Fall kann jedoch von Volltreuheit auf Morphismen von Kippmoduln zu dualen Vermamoduln oder von Vermamoduln zu Kippmoduln keine Rede sein.

Beweis. Gegeben $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ mit ganzer Differenz sei $D^\lambda_\mu \in D^\lambda\text{-Mod}_{\mathbb{C}}\text{-} D^\mu$ der Bimodul $D^{W_\lambda \cap W_\mu}$. Die vorhergehenden Überlegungen zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}-D}(F, T^\mu_\lambda K) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}-D}(T^\lambda_\mu F, K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{D^\mu-D}(\mathbb{V}F, \mathbb{V}T^\mu_\lambda K) & & \mathrm{Hom}_{D^\lambda-D}(\mathbb{V}T^\lambda_\mu F, \mathbb{V}K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{D^\mu-D}(\mathbb{V}F, \mathrm{Hom}_{D^\lambda}(D^\lambda_\mu, \mathbb{V}K)) & \to & \mathrm{Hom}_{D^\lambda-D}(D^\lambda_\mu \otimes_{D^\mu} \mathbb{V}F, \mathbb{V}K) \end{array}$$

kommutiert, wenn wir die beiden unteren vertikalen Morphismen mithilfe der eben eingeführten natürlichen Äquivalenzen erklären und die waagerechten Morphismen mithilfe der Adjunktionen. In diesem Diagramm sind alle Morphismen mit Ausnahme der beiden oberen Vertikalen offensichtlich Isomorphismen. Ist die rechte obere Vertikale ein Isomorphismus, so mithin auch die linke obere Vertikale. Gilt in anderen Worten unsere Behauptung für K, so auch für $T^\mu_\lambda K$. Damit müssen wir sie nur für K einen deformierten einfachen Vermamodul prüfen. Indem wir die Vermafahne von oben abarbeiten, dürfen wir sogar annehmen, daß F eine direkte Summe von Kopien eben dieses einfachen Verma-Moduls ist. In dem Fall ist aber die erste Behauptung klar. Die zweite Behauptung zeigt man analog. □

5 Geometrische Argumente

Notation 5.1. Bezeichne gMod-A die Kategorie der graduierten Rechtsmoduln über einem graduierten Ring A. Bezeichne $\mathrm{Der}_G(X)$ bzw. $\mathrm{Der}^+_G(X)$ die äquivariante bzw. die äquivariante gegen die Pfeile beschränkte derivierte Kategorie zu einer komplexen algebraischen Varietät X mit einer Operation einer komplexen algebraischen Gruppe G und bezeichne $\mathrm{Der}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ die Morphismen in diesen Kategorien.

AGSU *Bemerkung* 5.2. Wir arbeiten im folgenden in der Kohomologie stets mit komplexen Koeffizienten. Seien ganz allgemein X eine komplexe algebraische Varietät mit einer Operation einer algebraischen Gruppe B. Sei $X = \coprod_{a \in A} X_a$ eine Stratifizierung in irreduzible lokal abgeschlossene glatte B-stabile Untervarietäten derart, daß der Abschluß jedes Stratums eine Vereinigung von Strata ist. Bezeichne $|a|$ die Dimension von X_a und $\mathcal{C}_a = \underline{X_a}[|a|]$ die "konstante perverse Garbe" in $\mathrm{Der}_B(X_a)$. Bezeichne weiter $j_a : X_a \hookrightarrow X$ die Einbettung. Seien nun $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Der}_B(X)$ gegeben mit der Eigenschaft, daß für alle $a \in A$ gilt

$$\begin{array}{rcl} j_a^* \mathcal{F} & \cong & \bigoplus_\nu f_a^\nu \mathcal{C}_a[\nu] \\ j_a^! \mathcal{G} & \cong & \bigoplus_\nu g_a^\nu \mathcal{C}_a[\nu] \end{array}$$

in $\mathrm{Der}_B(X_a)$ für geeignete $f_a^\nu, g_a^\nu \in \mathbb{N}$. Haben wir unter diesen Annahmen zusätzlich $f_a^\nu = 0 = g_a^\nu$ für $\nu + |a|$ ungerade und $H_B^\nu(X_a) = 0$ für ν ungerade, so induziert $\mathbb{H}_B$ f"ur alle $*$ eine Injektion

$$\mathrm{Der}_B(\mathcal{F}, \mathcal{G}[*]) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{H}_B\mathcal{F}, \mathbb{H}_B\mathcal{G})$$

und die Dimensionen der homogenen Komponenten auf der linken Seite werden gegeben durch die Formel

$$\dim \mathrm{Der}_B(\mathcal{F}, \mathcal{G}[n]) = \sum_{\nu-\mu+k=n,\ a\in A} f_a^\nu g_a^\mu \dim H_B^k(X_a)$$

Der Beweis läuft völlig analog zum Beweis von Proposition 3 auf Seite 404 von So-L [Soe01] und soll hier nicht wiederholt werden.

Bemerkung 5.3. Seien $G \supset P = P_\iota \supset B \supset T$ eine halbeinfache komplexe algebraische Gruppe, eine Parabolische, eine Borel und ein maximaler Torus. Seien $W_\iota \subset W$ die Weylgruppen von $P \subset G$ und sei $L \supset T$ die Levi von P. Wir lassen $B \times P$ operieren auf G vermittels der Vorschrift $(b,p)g = bgp^{-1}$. Bekanntlich wird der äquivariante Kohomologiering $H^*_{B\times P}(G)$ mit dem Zurückholen ein Quotient von $H^*_{B\times P}(\mathrm{pt}) = H^*_{T\times L}(\mathrm{pt}) = R \otimes_{\mathbb{C}} R^\iota$ für $R = \mathcal{O}(\mathrm{Lie}\, T)$ der Ring der regulären Funktionen auf $\mathrm{Lie}\, T$, graduiert durch die Bedingung, daß Linearformen homogen vom Grad Zwei sein sollen, und R^ι die W_ι-Invarianten in R. Wir erhalten damit einen kanonischen Isomorphismus

$$c : R \otimes_{R^W} R^\iota \xrightarrow{\sim} H^*_{B\times P}(G)$$

So liefert die äquivariante Hyperkohomologie

$$\mathbb{H}^*_{B\times P} : \mathrm{Der}^+_{B\times P}(G) \to \mathrm{gMod}\text{-}\, H^*_{B\times P}(\mathrm{pt})$$

unter unserer Identifikation des äquivarianten Kohomologierings und der Identifikation $\mathrm{Der}^+_{B\times P}(G) \cong \mathrm{Der}^+_B(G/P)$ einen Funktor in die $\mathbb{Z}$-graduierten R-R^ι-Bimoduln

$$\mathbb{H}_B = \mathbb{H}^*_B : \mathrm{Der}^+_B(G/P) \to R\text{-gMod-}\,R^\iota$$

Betrachten wir in $\mathrm{Der}^+_B(G/P)$ für $x \in W/W_\iota$ nun den Schnittkohomologiekomplex $\mathcal{IC}_x$ zum Abschluß von BxP/P. Sei $\mathcal{C}_y$ die konstante perverse Garbe auf ByB/P, die also als Komplex von gewöhnlichen Garben im Grad $-l(y)$ konzentriert ist, und bezeichne $j_y : ByB/P \hookrightarrow G/P$ die Einbettung.

VTM **Satz 5.4.** *Der Funktor $\mathbb{H}_B$ ist volltreu für Morphismen $\mathcal{IC}_x \to j_{y*}\mathcal{C}_y[n]$ und $j_{x!}\mathcal{C}_y \to \mathcal{IC}_y[n]$ und $\mathcal{IC}_x \to \mathcal{IC}_y[n]$ in $\mathrm{Der}^+_B(G/P)$.*

Beweis. In [Soe01], Proposition 2, Seite 402 wird der Satz für Homomorphismen $\mathcal{IC}_x \to \mathcal{IC}_y[n]$ und $P = B$ bewiesen. Ich werde im folgenden darlegen, in welcher Weise der dort gegebene Beweis mit eher unwesentlichen Änderungen auch diesen allgemeineren Satz zeigt. Zunächst beschränken wir uns auf den Fall $P = B$. Nach Lemma 6 auf Seite 405 von loc.cit. in Verbindung mit 5.2 ist der Funktor im Lemma schon mal treu und die Dimension der fraglichen Hom-Räume ist bekannt. Nach Resultaten in [Soe06] kennen wir jedoch auch die Dimensionen der Hom-Räume im Bild und damit können wir das Argument mit einem Dimensionsvergleich abschließen. Genauer ergibt sich mit 5.2 die Formel

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Der}_B(\mathcal{IC}_x, j_{y*}\mathcal{C}_y[n]) = \sum_{k+i=n} n^i_{y,x} \dim_{\mathbb{C}} H^k_B(ByB/B)$$

Hier werden die $n^i_{y,x}$ gegeben als Koeffizienten von Kazhdan-Lusztig-Polynomen und es gilt genauer

$$\sum_{y,i} n^i_{y,x} q^{-i/2} \tilde{T}_y = C'_x$$

in Lusztig's Notationen für die Hecke-Algebra alias $\sum_{y,i} n^i_{y,x} v^i H_y = \underline{H}_x$ in den Notationen aus [Soe97]. Andererseits wird in loc.cit. Lemma 5, Seite 402 für $P = B$ bewiesen, daß die $\mathbb{H}_B \mathcal{IC}_x$ gerade die speziellen Bimoduln

$$\mathbb{H}_B \mathcal{IC}_x \cong B_x$$

sind, die in [Soe92] und [Soe06] diskutiert werden. Nun erinnern wir an den graduierten Bimodul R_y aus [Soe06], der frei ist vom Rang Eins von rechts und von links mit ein- und demselben Erzeuger 1_y im Grad Null und der Eigenschaft $r1_y = 1_y r^y$ für $r^y = y^{-1}(r)$, sowie an seine beiden in der Graduierung verschobenen Versionen $\Delta_y = R_y[-l(y)]$ und $\nabla_y = R_y[l(y)]$. Man zeigt unschwer $\mathbb{H}_B j_{y*}\mathcal{C}_y \cong \nabla_y$ und $\mathbb{H}_B j_{y!}\mathcal{C}_y \cong \Delta_y$. Wir müssen also die Gleichheit der Dimensionen

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Der}_B(\mathcal{IC}_x, j_{y*}\mathcal{C}_y[n]) = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{gMod}_{R-R}(B_x, \nabla_y[n])$$

zeigen. Nach [Soe06], Theorem 5.15 ist jedoch $\operatorname{Mod}_{R-R}(B_x, \nabla_y)$ graduiert frei als R-Rechtsmodul, und notieren wir $h^i_{y,x}$ die Zahl der im Grad i benötigten Erzeuger, so liefert Theorem 5.3 von loc.cit. in der Hecke-Algebra die Formel

$$C'_x = \sum_{y \in W} h^i_{y,x} q^{-1/2} \tilde{T}_y = \sum_{y \in W} h^i_{y,x} v^i H_y$$

in den Notationen von Lusztig bzw. von [Soe97]. In anderen Worten haben wir $h^i_{y,x} = n^i_{y,x}$, und wegen $H^*_B(ByB/B) \cong R$ ergibt sich die behauptete

Gleichheit der Dimensionen in jedem Grad. Der zweite Fall folgt dual und damit ist das Lemma im Fall $P = B$ vollständig bewiesen. Im allgemeinen Fall folgt die Treuheit unseres Funktors ganz genauso, aber für den Dimensionsvergleich müssen wir uns noch etwas mehr anstrengen. Wir behandeln hier nur die beiden Fälle $\mathcal{IC} \to \mathcal{IC}$ und $\mathcal{IC} \to \mathcal{C}$, der verbleibende Fall kann dual behandelt werden. Bezeichnet $\pi : G/B \twoheadrightarrow G/P$ die Projektion, so haben wir $\mathbb{H}_B \pi_* \mathcal{G} \cong \operatorname{res}_{R-R}^{R-R^\iota} \mathbb{H}_B \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}_B \pi^* \mathcal{F} \cong \mathbb{H}_B \mathcal{F} \otimes_{R^\iota} R$. Damit erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Der}_B(\mathcal{F}, \pi_* \mathcal{G}\,[n]) & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \operatorname{Der}_B(\pi^* \mathcal{F}, \mathcal{G}\,[n]) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{gMod}_{R-R^\iota}(\mathbb{H}_B \mathcal{F}, \mathbb{H}_B \pi_* \mathcal{G}\,[n]) & & \operatorname{gMod}_{R-R}(\mathbb{H}_B \pi^* \mathcal{F}, \mathbb{H}_B \mathcal{G}\,[n]) \\
\| & & \| \\
\operatorname{gMod}_{R-R^\iota}(\mathbb{H}_B \mathcal{F}, \operatorname{res}_{R-R}^{R-R^\iota} \mathbb{H}_B \mathcal{G}\,[n]) & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \operatorname{gMod}_{R-R}(\mathbb{H}_B \mathcal{F} \otimes_{R^\iota} R, \mathbb{H}_B \mathcal{G}\,[n])
\end{array}$$

und mit der rechten oberen Vertikalen muß auch die linke Vertikale ein Isomorphismus sein. Damit folgen die beiden Fälle $\mathcal{IC} \to \mathcal{IC}$ und $\mathcal{IC} \to \mathcal{C}$ für allgemeines P aus dem Fall $P = B$. $\square$

6 Singuläre Bimoduln

Bemerkung 6.1. Sei $\mathcal{W}$ eine endliche Gruppe von Automorphismen eines endlichdimensionalen affinen Raums E über $\mathbb{Q}$, die von Spiegelungen erzeugt wird, und sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ eine Wahl von einfachen Spiegelungen. Bezeichne R die regulären Funktionen auf dem Raum der Richtungsvektoren, graduiert durch die Vorschrift, daß lineare Funktionen homogen vom Grad 2 sein mögen. So gibt es nach [Soe06] bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmte $\mathbb{Z}$-graduierte R-Bimoduln $B_x = B_x(\mathcal{W}) = B_x(\mathcal{W}, \mathcal{S}, E) \in R$-gMod-$R$ derart, daß gilt

1. Die B_x sind unzerlegbar.

2. Für e das neutrale Element ist $B_e = R$.

3. Ist $s \in \mathcal{S}$ eine einfache Spiegelung mit $xs > x$, so gibt es eine Zerlegung

$$B_x \otimes_{R^s} R[1] \cong B_{xs} \oplus \bigoplus_{l(y) \leq l(x)} m(y) B_y$$

   für geeignete Vielfachheiten $m(y) \in \mathbb{N}$.

Im übrigen besteht nach loc.cit. der Endomorphismenring dieser Bimoduln nur aus Skalaren, insbesondere bleiben sie unzerlegbar unter Erweiterung der

Skalare. Sei nun $\mathcal{S}_\iota \subset \mathcal{S}$ eine Teilmenge der Menge der einfachen Spiegelungen, $\mathcal{W}_\iota = \langle \mathcal{S}_\iota \rangle \subset \mathcal{W}$ ihr Erzeugnis, $w_\iota \in \mathcal{W}_\iota$ das längste Element und R^ι der Teilring der $\mathcal{W}_\iota$-Invarianten. So behaupten wir unter denselben Annahmen:

Lemma 6.2. *Für jede Nebenklasse $\bar{x} \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\iota$ gibt es genau einen unzerlegbaren $\mathbb{Z}$-graduierten R-R^ι-Bimodul $B^\iota_{\bar{x}} = B^\iota_{\bar{x}}(\mathcal{W}, \mathcal{W}_\iota) \in R\text{-gMod-}R^\iota$ mit der Eigenschaft, daß für $x \in \mathcal{W}$ den längsten Repräsentanten der Nebenklasse $\bar{x}$ gilt*

$$\operatorname{res}^{R-R^\iota}_{R-R} B_x \cong \bigoplus_{z \in \mathcal{W}_\iota} B^\iota_{\bar{x}}[l(w_\iota) - 2l(z)]$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß $\mathcal{W}$ nur einen einzigen Fixpunkt hat. Da es sich nach Annahme um eine rationale und mithin kristallographische Spiegelungsgruppe handelt, finden wir dann $G \supset B \supset T$ eine komplexe halbeinfache algebraische Gruppe G mit Borel B und maximalem Torus T und Coxetersystem $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$. Identifizieren wir in $\mathcal{W}$-äquivarianter Weise $H^2_T(\mathrm{pt}; \mathbb{Q})$ mit der homogenen Komponente R^2 von R, so gibt es nach [Soe01] einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-graduierten R-Bimoduln

$$B_x \cong \mathbb{H}_B \mathcal{IC}(\overline{BxB/B})$$

Ist $P = P_\iota$ eine Parabolische mit $G \supset P \supset B$, so zeigt der Zerlegungssatz von [BL94], angewandt auf die Projektion $p : G/B \twoheadrightarrow G/P$, für x maximal in seiner $\mathcal{W}_\iota$-Nebenklasse schnell die Existenz einer Zerlegung

$$p_* \mathcal{IC}(\overline{BxB/B}) \cong \bigoplus_{z \in \mathcal{W}_\iota} \mathcal{IC}(\overline{BxP/P})[l(w_\iota) - 2l(z)]$$

in $\mathrm{Der}^+_B(G/P)$. Andererseits haben wir aber $\mathbb{H}_B \circ p_* = \operatorname{res}^{R-R^\iota}_{R-R} \circ \mathbb{H}_B$ und die $\mathbb{H}_B \mathcal{IC}(\overline{BxP/P})$ sind unzerlegbar als graduierte R-R^ι-Bimoduln, da nach 5.4 die Skalare ihre einzigen Endomorphismen vom Grad ≤ 0 sind. □

7 Die Bimoduln zu Kippmoduln

Bemerkung 7.1. Gegeben $y \in W$ bezeichne $\hat{S}_y$ den Bimodul, der von links schlicht $\hat{S}$ ist, von rechts jedoch die mit y getwistete Operation $r1_y = 1_y r^y$ von $\hat{S}$ trägt. Gegeben ein Bimodul B zu zwei kommutativen Ringen bezeichne $\tilde{B}$ den Bimodul, der daraus durch Vertauschen der Linksoperation mit der Rechtsoperation entsteht.

BiKi **Satz 7.2.** *Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ und seien $W_\lambda \subset W_{\bar{\lambda}} \subset W$ wie in 4.6. Gegeben $\bar{x} \in W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$ gilt für die Deformation des unzerlegbaren Kippmoduls mit höchstem Gewicht $w_{\bar{\lambda}}\bar{x} \cdot \lambda$ die Formel*

$$\mathbb{V} K_{\hat{S}}(w_{\bar{\lambda}}\bar{x} \cdot \lambda) \cong \widetilde{B}^\lambda_{\bar{x}} \otimes_S \hat{S}_{w_{\bar{\lambda}}}$$

Bemerkung 7.3. Unsere Bimoduln $B^{\iota}_{\bar{x}}$ sind graduiert frei von endlichem Rang über R, folglich ist $\hat{R} \otimes_R B^{\iota}_{\bar{x}}$ schlicht der längs der Graduierung komplettierte Bimodul und er trägt insbesondere eine Rechtsoperation von $\hat{R}^{\iota}$.

Beweis. Bekanntlich bleibt ein unzerlegbarer Kippmodul unzerlegbar, wenn wir ihn aus Wänden rücken. Genauer gilt für $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ mit $\lambda + X = \mu + X$ und $W_\mu = 1$ und $x \in W_{\bar{\lambda}}$ maximal in seiner Nebenklasse xW_λ notwendig

$$T_\lambda^\mu K(w_{\bar{\lambda}} x \cdot \lambda) = K(w_{\bar{\mu}} x \cdot \mu)$$

Da $T_\mu^\lambda T_\lambda^\mu$ eine Summe von $|W_\lambda|$ Kopien des Indentitätsfunktors ist, können wir uns beim Beweis des Satzes also auf den Fall λ regulär beschränken. Ist $x = st \ldots r$ eine reduzierte Darstellung durch einfache Spiegelungen von $W_{\bar{\lambda}}$, so können wir dann $K_{\hat{S}}(w_{\bar{\lambda}} x \cdot \lambda)$ induktiv charakterisieren als den unzerlegbaren Summanden von

$$\vartheta_r \ldots \vartheta_t \vartheta_s \Delta_{\hat{S}}(w_{\bar{\lambda}} \cdot \lambda)$$

der nicht isomorph ist zu einem $K_{\hat{S}}(w_{\bar{\lambda}} y \cdot \lambda)$ für $y < x$. Wenden wir $\mathbb{V}$ an, so erhalten wir daraus den unzerlegbaren Summanden von

$$\hat{S} \otimes_{\hat{S}^r} \hat{S} \ldots \otimes_{\hat{S}^t} \hat{S} \otimes_{\hat{S}^s} \hat{S}_{w_{\bar{\lambda}}}$$

der nicht "schon vorher vorkam". Das ist aber nach der Definition der speziellen Bimoduln genau $\widetilde{B}_x \otimes_S \hat{S}_{w_{\bar{\lambda}}}$. □

8 Ergänzungen zum Wechsel der Gruppe

Bemerkung 8.1. Für G eine komplexe zusammenhängende algebraische Gruppe setzen wir $A_G = H^*(BG)$. Ist X eine komplexe algebraische G-Varietät und sind $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Der}^+_G(X)$ Objekte der äquivarianten derivierten Kategorie, so bilden wir den graduierten A_G-Modul

$$\mathrm{Der}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G}[*]) = \bigoplus_n \mathrm{Der}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G}[n])$$

GruWe **Proposition 8.2.** *Seien $G \supset H$ eine zusammenhängende komplexe algebraische Gruppe und eine zusammenhängende abgeschlossenen Untergruppe. Sei X eine algebraische G-Varietät und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Der}_G(X)$ konstruierbare Komplexe. Ist $\mathrm{Der}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G}[*])$ graduiert frei über A_G, so induziert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$A_H \otimes_{A_G} \mathrm{Der}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G}[*]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_H(\mathcal{F}, \mathcal{G}[*])$$

Beweis. Wir betrachten die konstante Abbildung $k : X \to \mathrm{pt}$ und den volltreuen Funktor $\gamma_G : \mathrm{Der}^{\mathrm{c}}_G(\mathrm{pt}) \to A_G\text{-dgDer}$ nach [BL94] und beachten

$$\mathrm{Der}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G}[*]) = H^* \gamma_G k_* \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

wo wir $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ in $\mathrm{Der}^+_G(X)$ bilden und k_* das direkte Bild in $\mathrm{Der}^+_G(\mathrm{pt})$ meint. Ist das nun ein freier A_G-Modul, so ist $\gamma_G k_* \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ bereits quasiisomorph zu seiner Kohomologie und diese Kohomologie ist homotopieprojektiv in $A_G\text{-dgMod}$. Mit dem derivierten Funktor $A_H \otimes^L_{A_G} : A_G\text{-dgDer} \to A_H\text{-dgDer}$ haben wir nach [BL94], 12.7.1 weiter kanonisch

$$A_H \otimes^L_{A_G} \circ \gamma_G = \gamma_H \circ \mathrm{res}^H_G$$

und bei homotopieprojektiven Objekten $M \in A_G\text{-dgMod}$ haben wir zusätzlich

$$A_H \otimes^L_{A_G} M = A_H \otimes_{A_G} M$$

Da k_* und Hom mit der Restriktion der Gruppenoperation vertauschen, zeigt das die Proposition. □

9 Geometrie der Filtrierung

Bemerkung 9.1. Gegeben ein Ring R, ein Ringhomomorphismus $R \to \mathbb{C}[[t]]$, drei R-Moduln H, H', H'' und eine R-bilineare Abbildung

$$\varphi : H \times H' \to H''$$

können wir auf $\mathbb{C}[[t]] \otimes_R H$ eine Filtrierung erklären durch die Vorschrift

$$F^i(\mathbb{C}[[t]] \otimes_R H) = \left\{ h \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(h, h') \in t^i \mathbb{C}[[t]] \otimes_R H'' \\ \text{für alle } h' \in \mathbb{C}[[t]] \otimes_R H' \end{array} \right\}$$

und erhalten dann natürlich auch eine induzierte Filtrierung auf $\mathbb{C} \otimes_R H$, deren Subquotienten wir $\bar{F}^i(\mathbb{C} \otimes_R H)$ notieren.

NZ *Bemerkung* 9.2. Ist zum Beispiel $\hat{S}$ die Komplettierung von $S = \mathcal{O}(\mathfrak{h}^*)$ längs der natürlichen Graduierung und $\hat{S} \twoheadrightarrow \mathbb{C}[[t]]$ die Restriktion auf die Gerade $t\rho$ wie in 3.2, so liefert die durch Komposition gegebene Paarung

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}-\hat{S}}(\Delta_{\hat{S}}(\lambda), K_{\hat{S}}(\mu)) \times \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}-\hat{S}}(K_{\hat{S}}(\mu), \nabla_{\hat{S}}(\lambda)) \\ \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}-\hat{S}}(\Delta_{\hat{S}}(\lambda), \nabla_{\hat{S}}(\lambda)) \end{aligned}$$

die Andersen-Filtrierung auf dem Raum $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda), K(\mu))$, der ja durch BCH 1.13 mit $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}-\hat{S}}(\Delta_{\hat{S}}(\lambda), K_{\hat{S}}(\mu)) \otimes_{\hat{S}} \mathbb{C}$ identifiziert werden kann. Natürlich gibt es auch ein $p \in \hat{S}$ derart, daß $\mathbb{V}$ einen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}-\hat{S}}(\Delta_{\hat{S}}(\lambda), \nabla_{\hat{S}}(\lambda)) \xrightarrow{\sim} p \operatorname{Hom}_{\hat{S}}(\mathbb{V}\Delta_{\hat{S}}(\lambda), \mathbb{V}\nabla_{\hat{S}}(\lambda))$$

induziert, und mit diesem p können wir unsere Paarung umschreiben zu der wieder durch Komposition gegebenen Paarung

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\hat{S}^\lambda-\hat{S}}(\mathbb{V}\Delta_{\hat{S}}(\lambda), \mathbb{V}K_{\hat{S}}(\mu)) \times \operatorname{Hom}_{\hat{S}^\lambda-\hat{S}}(\mathbb{V}K_{\hat{S}}(\mu), \mathbb{V}\nabla_{\hat{S}}(\lambda)) \\ \to p \operatorname{Hom}_{\hat{S}^\lambda-\hat{S}}(\mathbb{V}\Delta_{\hat{S}}(\lambda), \mathbb{V}\nabla_{\hat{S}}(\lambda)) \end{aligned}$$

Hier kann ein mögliches p dadurch bestimmt werden, daß unsere Paarung für $\lambda = \mu$ eine surjektive Abbildung liefern muß. Nun wechseln wir die Parameter, wählen $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{dom}}$ und notieren $\lambda_{\bar{x}} = w_{\bar{\lambda}}\bar{x} \cdot \lambda$ für $\bar{x} \in W_{\bar{\lambda}}/W_\lambda$. Um uns nicht hoffnungslos in der Notation zu verheddern, definieren wir weiter eine Variante $\widetilde{\mathbb{V}}$ von $\mathbb{V}$ durch die Vorschrift

$$\widetilde{\mathbb{V}}M = \hat{S}_{w_{\bar{\lambda}}} \otimes_{\hat{S}} \widetilde{\mathbb{V}M}$$

so daß sich BiKi 7.2 vereinfacht zu $\widetilde{\mathbb{V}}K_{\hat{S}}(\lambda_{\bar{x}}) \cong \hat{B}^\lambda_{\bar{x}}$, wobei der Hut die Komplettierung längs der Graduierung meint. Mit weniger Mühe prüft man auch

$$\widetilde{\mathbb{V}}\Delta_{\hat{S}}(\lambda_{\bar{y}}) \cong \widetilde{\mathbb{V}}\nabla_{\hat{S}}(\lambda_{\bar{y}}) \cong \hat{S}^\lambda_{\bar{y}}$$

in $\hat{S}$-mod-$\hat{S}^\lambda$, womit wieder der Bimodul gemeint ist, der von links schlicht $\hat{S}$ ist, von rechts jedoch die mit $\bar{y}$ getwistete Operation $r1_y = 1_y r^y$ von $\hat{S}^\lambda$ trägt. Ersetzen wir also $\mathbb{V}$ durch $\widetilde{\mathbb{V}}$, so landen wir bis auf einen Twist der $\hat{S}$-Struktur um $w_{\bar{\lambda}}$ bei der Paarung

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\hat{S}-\hat{S}^\lambda}(\hat{S}^\lambda_{\bar{y}}, \hat{B}^\lambda_{\bar{x}}) \times \operatorname{Hom}_{\hat{S}-\hat{S}^\lambda}(\hat{B}^\lambda_{\bar{x}}, \hat{S}^\lambda_{\bar{y}}) \\ \to p_1 \operatorname{Hom}_{\hat{S}-\hat{S}^\lambda}(\hat{S}^\lambda_{\bar{y}}, \hat{S}^\lambda_{\bar{y}}) \end{aligned}$$

von $\hat{S}$-Moduln und unsere Filtrierung entspricht eben der Filtrierung, die sich hier ergibt, wenn wir unser $\hat{S} \twoheadrightarrow \mathbb{C}[[t]]$ dadurch abändern, daß wir es mit $w_{\bar{\lambda}}$ vertwisten. Hier meint p_1 das Bild von p unter $w_{\bar{\lambda}}$. Da es bei der Wahl von p_1 eh nicht auf Einheiten von $\hat{S}$ ankommt, können wir auch p_1 bereits im noch nicht komplettierten Ring wählen, und die entsprechende Paarung "vor Komplettierung"

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{S-S^\lambda}(S^\lambda_{\bar{y}}, B^\lambda_{\bar{x}}) \times \operatorname{Hom}_{S-S^\lambda}(B^\lambda_{\bar{x}}, S^\lambda_{\bar{y}}) \\ \to p_1 \operatorname{Hom}_{S-S^\lambda}(S^\lambda_{\bar{y}}, S^\lambda_{\bar{y}}) \end{aligned}$$

liefert am Ende auch denselben filtrierten $\mathbb{C}$-Vektorraum. Diese Paarung hinwiederum interpretieren wir nun geometrisch.

Bemerkung 9.3. Bezeichnet $X \subset \mathfrak{h}^*$ das Gitter der ganzen Gewichte, so gibt es ein Paar $G^\vee \supset T^\vee$ bestehend aus einer reduktiven zusammenhängenden komplexen algebraischen Gruppe mit einem maximalen Torus derart, daß $X = X(T^\vee)$ die Gruppe seiner Einparameteruntergruppen ist und daß für ihre Weylgruppe gilt $W(G^\vee, T^\vee) = W_{\bar{\lambda}}$. In $G^\vee$ wählen wir dann eine Borel $B^\vee$ zu $\mathcal{S} \cap W_{\bar{\lambda}}$ und eine Parabolische $P^\vee \supset B^\vee$ zu W_λ. Bezeichnet nun

$$\mathcal{IC}_{\bar{x}} = \mathcal{IC}(\overline{B^\vee \bar{x} P^\vee / P^\vee})$$

den Schnittkohomologiekomplex der entsprechenden Schubertvarietät und $\mathcal{C}_{\bar{y}}$ die konstante perverse Garbe auf $B^\vee \bar{y} P^\vee / P^\vee$, so haben wir $B^\lambda_{\bar{x}} \cong \mathbb{H}_{B^\vee} \mathcal{IC}_{\bar{x}}$ und unsere Paarung "vor Komplettierung" vom Schluß der vorhergehenden Bemerkung läßt sich mithilfe von VTM 5.4 interpretieren als die immer noch durch Komposition gegebene Paarung

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}^*_{B^\vee}(j_{\bar{y}!}\mathcal{C}_{\bar{y}}, \mathcal{IC}_{\bar{x}}) \times \mathrm{Der}^*_{B^\vee}(\mathcal{IC}_{\bar{x}}, j_{\bar{y}*}\mathcal{C}_{\bar{y}}) \\ \to \mathrm{Der}^*_{B^\vee}(j_{\bar{y}!}\mathcal{C}_{\bar{y}}, j_{\bar{y}*}\mathcal{C}_{\bar{y}}) \end{aligned}$$

In der Tat muß hier auf der rechten Seite kein p-Faktor ergänzt werden, da der Rückzug auf die dicke Zelle rasch zeigt, daß im Fall $\bar{x} = \bar{y}$ unsere Paarung eine Surjektion liefert. Die Frage ist also, welchen filtrierten Vektorraum diese Paarung von $A_{B^\vee}$-Moduln liefert unter dem Homomorphismus $A_{B^\vee} \twoheadrightarrow \mathbb{C}[t]$, der durch die Einbettung $\mathbb{C}^\times \hookrightarrow T^\vee$ mit Parameter $w_{\bar{\lambda}}\rho$ gegeben wird. Nach GruWe 8.2 führt uns jedoch die Spezialisierung auf $\mathbb{C}[t]$ zur durch Komposition gegebenen Paarung

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}^*_{\mathbb{C}^\times}(j_{\bar{y}!}\mathcal{C}_{\bar{y}}, \mathcal{IC}_{\bar{x}}) \times \mathrm{Der}^*_{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{IC}_{\bar{x}}, j_{\bar{y}*}\mathcal{C}_{\bar{y}}) \\ \to \mathrm{Der}^*_{\mathbb{C}^\times}(j_{\bar{y}!}\mathcal{C}_{\bar{y}}, j_{\bar{y}*}\mathcal{C}_{\bar{y}}) \end{aligned}$$

Bezeichne $\bar{y}$ im Folgenden auch den Punkt $\bar{y}P^\vee$ von $G^\vee/P^\vee$. Für ein geeignetes Produkt U von Wurzelgruppen aus $G^\vee$ definiert die Multiplikation $u \mapsto u\bar{y}$ eine Einbettung $U \hookrightarrow G^\vee/P^\vee$, deren Bild eine zur Zelle $B^\vee \bar{y} P^\vee / P^\vee$ transversale Zelle ist, die unter unserem $\mathbb{C}^\times$ auf $\bar{y}$ kontrahiert wird. Setzen wir $Z = U\bar{y} \cap \overline{B^\vee \bar{x} P^\vee / P^\vee}$, so wird auch Z von $\mathbb{C}^\times$ auf $\bar{y}$ kontrahiert, und bezeichnet $a : Z \hookrightarrow G^\vee/P^\vee$ die Einbettung, so wird das Restringieren auf Z unsere Paarung von eben nicht ändern. Setzen wir nun $d = \dim B^\vee \bar{y} P^\vee / P^\vee$ und bezeichnen mit $j : \mathrm{pt} \hookrightarrow Z$ die Einbettung von $\bar{y}$ und mit $\underline{\mathrm{pt}}$ die konstante Garbe auf einem Punkt, so erhalten wir $a^* j_{\bar{y}!}\mathcal{C}_{\bar{y}} \cong j_*\underline{\mathrm{pt}}[d] \cong a^* j_{\bar{y}*}\mathcal{C}_{\bar{y}}$ und $a^*\mathcal{IC}_{\bar{x}} \cong \mathcal{IC}[d]$ wird der verschobene Schnittkohomologiekomplex $\mathcal{IC} = \mathcal{IC}(Z)$ von Z und unsere Paarung verwandelt sich in die durch Komposition gegebene Paarung

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}^*_{\mathbb{C}^\times}(j_*\underline{\mathrm{pt}}, \mathcal{IC}) \times \mathrm{Der}^*_{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{IC}, j_*\underline{\mathrm{pt}}) \\ \to \mathrm{Der}^*_{\mathbb{C}^\times}(j_*\underline{\mathrm{pt}}, j_*\underline{\mathrm{pt}}) \end{aligned}$$

Nun können wir den ersten unserer gepaarten Moduln identifizieren mit dem Kohalm $j^!\mathcal{IC}$ und den Zweiten mit dem Dualen des Halms $j^*\mathcal{IC}$ und unsere Paarung liefert folglich denselben filtrierten Vektorraum wie die Einbettung von freien $\mathbb{C}[t]$-Moduln $j^!\mathcal{IC} \hookrightarrow j^*\mathcal{IC}$. Jetzt besagt aber das "Fundamental example" aus Abschnitt 14 von [BL94] gerade, daß der Kokern dieser Einbettung identifiziert werden kann mit der Schnittkohomologie der projektiven Varietät $\overline{Z} = (Z - \{\overline{y}\})/\mathbb{C}^\times$ verschoben um Eins, in Formeln also mit $IC(\overline{Z})[1]$, aufgefaßt als $\mathbb{C}[t]$-Modul aufzufassen ist in der Weise, daß t als der Lefschetzoperator wirkt. Der harte Lefschetz für die Schnittkohomologie aus [BBD82] sagt uns nun, daß die fragliche Filtrierung auf $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[t]} j^!\mathcal{IC}$ übereinstimmt mit der durch die $\mathbb{Z}$-Graduierung gegebenen Filtrierung, und diese kann bekanntlich durch Kazhdan-Lusztig-Polynome beschrieben werden. Genauer erhalten wir

$$\begin{aligned}\bar{F}^i(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[t]} j^!\mathcal{IC}) &\cong H^{-i}(j^!\mathcal{IC}) \\ &\cong \mathrm{Der}(\mathcal{C}_{\bar{y}}[i], j^!_{\bar{y}}\mathcal{IC}_{\bar{x}}) \\ &\cong \mathrm{Der}(j_{\bar{y}!}\mathcal{C}_{\bar{y}}[i], \mathcal{IC}_{\bar{x}})\end{aligned}$$

und dieser Raum hat bekanntlich die Dimension $h^i_{y,x}$ für y, x die längsten Repräsentanten von $\bar{y}, \bar{x}$. Das ist also auch die Dimension des i-ten Subquotienten der Andersen-Filtrierung auf

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Delta(\lambda_{\bar{y}}), K(\lambda_{\bar{x}}))$$

Literatur

AFil [And96] Henning Haahr Andersen, *Filtrations and tilting modules*, Aarhus Preprint No 7, 1996.

BB-J [BB93] Alexander A. Beilinson and Joseph N. Bernstein, *A proof of Jantzen conjectures*, I. M. Gelfand Seminar, Adv. Soviet Math., 16, Part 1, AMS, 1993, pp. 1–50.

BBD [BBD82] Alexander A. Beilinson, Joseph N. Bernstein, and Pierre Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque **100** (1982), 1–172.

Ben [Ben91] D. J. Benson, *Representations and cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 30, Cambridge University Press, 1991.

BG [BG80] Joseph N. Bernstein and Sergei I. Gelfand, *Tensor products of finite and infinite representations of semisimple Lie algebras*, Compositio Math. **41** (1980), 245–285.

BGG-Aff [BGG75] Joseph N. Bernstein, Israel M. Gelfand, and Sergei I. Gelfand, *Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules*, Lie groups and their Representations (I. M. Gelfand, ed.), Halsted: New York, 1975, pp. 21–64.

BGSo [BGS96] Alexander A. Beilinson, Victor Ginzburg, and Wolfgang Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, JAMS **9** (1996), no. 2, 473–527.

BeLu [BL94] Joseph N. Bernstein and Valery Lunts, *Equivariant sheaves and functors*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1578, Springer, 1994.

FieC [Fie] Peter Fiebig, *The combinatorics of category $\mathcal{O}$ over symmetrizable Kac-Moody algebras*, 21 pages, to appear (2005).

GJ [GJ81] Ofer Gabber and Anthony Joseph, *Towards the Kazhdan-Lusztig conjecture*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4^{e} série **14** (1981), 261–302.

So-A [Soe90] Wolfgang Soergel, *Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, Journal of the AMS **3** (1990), 421–445.

HCH [Soe92] ———, *The combinatorics of Harish-Chandra bimodules*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **429** (1992), 49–74.

So-K [Soe97] ———, *Kazhdan-Lusztig-Polynome und eine Kombinatorik für Kipp-Moduln*, Representation Theory (An electronic Journal of the AMS) **1** (1997), 37–68, english 83–114.

So-L [Soe01] ———, *Langlands' philosophy and Koszul duality*, Algebra-Representation Theory (Roggenkamp and Stefanescu, eds.), Kluwer, 2001, Proceedings of NATO ASI 2000 in Constanta, pp. 379–414.

SoBi [Soe06] ———, *Kazhdan-Lusztig-Polynome und unzerlegbare Bimoduln über Polynomringen*, JMIJ (2006).