Séminaire BOURBAKI Novem-
bre 1994
47ème année, 1994-95, n° 793

CONJECTURES DE LUSZTIG

par **Wolfgang SOERGEL**

1. INTRODUCTION

Soit $n \geq 2$ un entier. À tout anneau commutatif unitaire A, on peut associer le groupe

$$G(A) = SL_n(A) = \{D \in M(n \times n, A) \mid \det D = 1\}.$$

Problème 1 : *Soient k un corps, p un premier. Quelle est la structure des $kG(\mathbf{F}_p)$-modules simples, c'est-à-dire des représentations irréductibles de $G(\mathbf{F}_p)$ sur k ?*

Le cas $k = \mathbf{C}$ des représentations complexes de $G(\mathbf{F}_p)$ est traité par Deligne-Lusztig et Lusztig, voir par exemple l'exposé [Ca87] dans ce séminaire. Le présent exposé traite le cas $k = \bar{\mathbf{F}}_p$. Remarquons tout de suite que Lusztig ([Lu79], Problem IV et [Lu80]) a conjecturé une solution qui serait valable pour p suffisamment grand. On sait maintenant démontrer que cette conjecture est valable pour presque tout nombre premier p, c'est-à-dire que, pour n donné, il y a au plus un nombre fini d'exceptions. Par contre, pour un nombre premier p donné, on ne sait toujours pas décider s'il est une exception ou non. On s'attend à ce que la conjecture soit valable pour tout $p \geq n$. Plus généralement soit R un système de racines (réduit et fini). On sait lui associer un schéma en groupes G sur $\mathbf{Z}$, semi-simple et simplement connexe. La conjecture de Lusztig donne une description des $kG(\mathbf{F}_p)$-modules simples, pour $k = \bar{\mathbf{F}}_p$. Lusztig a énoncé sa conjecture pour p suffisamment grand. On suppose qu'elle est valable pour $p \geq h$, où h est le nombre de Coxeter de R. On ne sait le démontrer en ce moment que dans l'hypothèse où toutes les racines ont la même longueur, et même dans ce cas seulement pour presque tout nombre premier p.

Dans mon exposé, je veux esquisser une partie de cette démonstration. Sa stratégie globale est due à Lusztig [Lu90b], [Lu90c]. Elle consiste à traduire notre problème en le problème de calculer la cohomologie d'intersection d'une variété de Schubert de dimension finie dans une variété de drapeaux affine. On sait résoudre ce problème. La traduction passe par les algèbres de Lie restreintes, les groupes quantiques à une racine de l'unité et les algèbres de Lie affines. Pour d'autres informations, voir [An94]. Je commence par la première étape qui est bien connue.

2. DES GROUPES DE CHEVALLEY AUX ALGÈBRES DE LIE

Soient p un premier et $k = \bar{\mathbf{F}}_p$. Considérons le groupe algébrique $G(k)$ et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Par exemple, pour $G(k) = SL_n(k)$, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(k) = \{D \in M(n \times n, k) \mid \mathrm{tr} D = 0\}$. Considérons le diagramme fonctoriel :

$$
\begin{array}{ccc}
 & G(k)\text{-modules rationnels} & \\
\swarrow & & \searrow \\
kG(\mathbf{F}_p)\text{-modules} & & \mathfrak{g}\text{-modules}
\end{array}
$$

où la flèche de gauche est la restriction, la flèche de droite la différentiation. L'algèbre de Lie d'un groupe algébrique en caractéristique positive vient toujours avec une opération $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $D \mapsto D^{[p]}$ appelée "puissance p-ième formelle". Dans le cas $\mathfrak{sl}_n(k)$ ce n'est rien d'autre que la puissance p-ième d'une matrice. Une représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k V$ de $\mathfrak{g}$ est dite "restreinte" si et seulement si $\rho(D)^p = \rho(D^{[p]})$ dans $\mathrm{End}_k V$, pour tout $D \in \mathfrak{g}$. L'algèbre enveloppante restreinte $U^{res}(\mathfrak{g}) = U^{res}$ est définie comme le quotient de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ par l'idéal engendré par tous les $D^p - D^{[p]}$. Elle est de dimension finie sur k. Par définition, une représentation restreinte de $\mathfrak{g}$ n'est rien d'autre qu'un objet de U^{res}-mod. On sait qu'en différenciant des $G(k)$-modules algébriques, on obtient toujours des $\mathfrak{g}$-modules restreints. Plus précisement, d'après Steinberg et Curtis [Ca63], on obtient ainsi des bijections :

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} G(k)\text{-modules rationnels simples} \\ \text{de plus haut poids restreint} \end{array} & \\
\swarrow & & \searrow \\
\begin{array}{c} kG(\mathbf{F}_p)\text{-modules} \\ \text{simples} \end{array} & & \begin{array}{c} U^{res}\text{-modules} \\ \text{simples} \end{array}
\end{array}
$$

La notion de poids restreint sera expliquée dans la section 3.4. Mais peu importe, notre problème formulé dans l'introduction est alors équivalent au :

Problème 2 : *Quelle est la structure des U^{res}-modules simples?*

C'est là un problème clef de toute la théorie. D'une solution, on saurait déduire (voir [Ca63]) des formules pour les caractères de tous les $G(k)$-modules simples rationnels, ainsi que pour toutes les représentations irréductibles des $G(\mathbf{F}_{p^r})$ sur k.

3. DES ALGÈBRES DE LIE AUX GROUPES QUANTIQUES

3.1. Motivation

Pour tout corps k, le groupe $SL_2(k)$ opère sur l'algèbre symétrique $S(k^2) = k[X,Y]$ et stabilise ses composantes homogènes $k[X,Y]^m$. Pour $k = \mathbf{C}$, les $k[X,Y]^m$ pour $m = 0, 1, \ldots$ sont simples, et tout $SL_2(k)$-module simple rationnel est isomorphe à un et un seul d'entre eux. Pour $k = \bar{\mathbf{F}}_p$, ce n'est plus le cas. En effet, il est facile de voir que $kX^p + kY^p$ est un sous-module de $k[X,Y]^p$. En général, la classification des $G(k)$-modules simples par leur plus haut poids reste valable pour $\mathrm{char} k > 0$, mais le caractère de ces modules simples n'est plus en général donné par la formule de caractères de Weyl.

Notons que les éléments $e = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $f = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $h = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ de $\mathfrak{sl}_2(k)$ opèrent sur $k[X,Y]^m$ par les opérateurs $X\partial_Y$, $Y\partial_X$ et $X\partial_X - Y\partial_Y$. Si l'on pose $b_i = X^iY^{m-i}$ on a alors :

$$eb_i = (m-i)b_{i+1}$$
$$fb_i = ib_{i-1}$$
$$hb_i = (2i-m)b_i.$$

Considérons maintenant le cas des groupes quantiques. L'algèbre enveloppante quantique U_v correspondant à $\mathfrak{sl}_2$ est une algèbre sur le corps de fonctions $\mathbf{C}(v)$ donnée par les générateurs E, F, K, K^{-1} et les relations $KK^{-1} = K^{-1}K = 1$, $KEK^{-1} = v^2E$, $KFK^{-1} = v^{-2}F$, $EF - FE = \frac{K-K^{-1}}{v-v^{-1}}$. Dans toute dimension $(m+1)$, elle admet deux représentations simples $V_\pm^m$. Dans une base appropriée $b_0, \ldots, b_m$, ces représentations sont données par les formules

$$Eb_i = [m-i]b_{i+1}$$
$$Fb_i = \pm[i]b_{i-1}$$
$$Kb_i = \pm v^{2i-m}b_i$$

où $[i]$ est le "nombre quantique" $[i] = v^{i-1} + v^{i-3} + \ldots v^{-i+1} = \frac{v^i - v^{-i}}{v - v^{-1}} \in \mathbf{Z}[v, v^{-1}]$. En fait U_v et ses modules $V_\pm^m$ sont déja définis sur $\mathbf{C}[v, v^{-1}, (v - v^{-1})^{-1}]$ et de là on peut spécialiser v à n'importe quel $\zeta \in \mathbf{C} - \{0, 1, -1\}$. Si l'on prend pour ζ une p-ième racine d'unité, p impair, on a $[i](\zeta) = 0$ si et seulement si i est divisible par p, et l'on voit que la structure de $V_\pm^m$ pour $v = \zeta$ est très semblable à celle du $U(\mathfrak{sl}_2(k))$-module $k[X,Y]^m$ pour $\mathrm{char} k = p$. On peut alors s'attendre à ce que la théorie des représentations modulaires en caractéristique p soit semblable à celle des groupes quantiques à une p-ième racine de l'unité. Dans les deux sections suivantes, on va formuler ce phénomène de façon plus précise.

3.2. Indépendance de la caractéristique, version brute

Soit A une algèbre (associative, unitaire) de dimension finie sur un corps k. Il se peut que A se décompose en produit de sous-algèbres $A = \times_B B$. Il y a toujours certainement une telle décomposition maximale. Celle-ci est unique, et les sous-algèbres correspondantes sont appelées les blocs de A. Tout A-module simple (ou même indécomposable) M est annulé par tous les blocs sauf un, le bloc de M. Dans un contexte de théorie des représentations, le bloc de la représentation triviale k est appelé le “bloc principal”.

Deux algèbres A et B sur un corps k sont dites “Morita-équivalentes” si et seulement si les catégories A-mof et B-mof de leurs modules de dimension finie sont équivalentes (en tant que k-catégories). Soient R, h comme avant. Posons $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[b^{-1} \mid 1 < b < h]$.

THÉORÈME 1.— *Il existe une algèbre $\mathcal{E}$ sur $\mathbf{Z}'$, libre de rang fini en tant que $\mathbf{Z}'$-module, telle que :*

(i) *pour tout $p > h$, la $\bar{\mathbf{F}}_p$-algèbre $\mathcal{E} \otimes_{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{F}}_p$ est Morita-équivalente au bloc principal de l'algèbre enveloppante restreinte U^{res} associée à R et p,*

(ii) *pour tout $\ell > h$ premier à tous les coefficients de la matrice de Killing-Cartan de R et toute racine primitive ℓ-ième de l'unité ζ, la $\mathbf{Q}(\zeta)$-algèbre $\mathcal{E} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\zeta)$ est Morita-équivalente au bloc principal de l'algèbre enveloppante restreinte quantique $\mathbf{u}_\zeta$ associée à R et ζ.*

Il faut encore définir cette $\mathbf{Q}(\zeta)$-algèbre $\mathbf{u}_\zeta$. Rappelons d'abord que, dans le cas classique, U^{res} peut s'obtenir comme suit : On commence avec l'algèbre de Lie semi-simple complexe associée à R et on prend son algèbre enveloppante U. Un choix de générateurs de Chevalley dans notre algèbre de Lie nous donne une $\mathbf{Z}$-forme $U_{\mathbf{Z}}$ de U, dite “de Kostant”, qui contient nos générateurs. Puis on forme $U_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{F}}_p$ (cette algèbre est connue sous le nom d'hyperalgèbre de $G(\bar{\mathbf{F}}_p)$) et U^{res} en est la sous-algèbre engendrée par les (images des) générateurs de Chevalley.

Le cas quantique est analogue, voir [Lu90a]. On commence avec l'algèbre enveloppante quantique U_v sur $\mathbf{C}(v)$ donnée par générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} pour i dans un système de racines simples de R, et certaines relations. Puis on y définit une $\mathbf{Q}(v, v^{-1})$-forme qui est un analogue de la $\mathbf{Z}$-forme de Kostant et, en spécialisant v

on obtient des $\mathbf{Q}(\zeta)$-algèbres U_ζ pour tout $\zeta \in \mathbf{C}^\times$. Si $\ell > 2$ est premier à tous les coéfficients de la matrice de Killing-Cartan de R et ζ est une racine primitive ℓ-ième de l'unité, on peut définir $\mathbf{u}_\zeta$ comme la sous-algèbre de U_ζ engendrée par les images de nos générateurs.

Au lieu d'expliquer la démonstration (tres longue) du théorème contenue dans [AJS94], je vais donner $\mathcal{E}$ dans le cas $\mathfrak{sl}_2$. Dans ce cas le bloc principal a deux modules simples: k resp. $\mathbf{Q}(\zeta)$ et $k[X,Y]^{p-2}$ resp. V_+^{l-2}. On peut calculer explicitement les recouvrements projectifs de ces modules ainsi que les homomorphismes entre ces projectifs, et on trouve que le bloc principal est Morita-équivalent à l'algèbre du carquois avec deux points p et q, quatre flèches $a, i : p \to q$, $a, i : q \to p$ et les six relations $aa = ii = ai = 0$. On prendra alors pour $\mathcal{E}$ l'algèbre sur $\mathbf{Z}'$ de ce carquois avec relations.

Notons que le théorème implique :

COROLLAIRE 1 : *La matrice de Cartan du bloc principal de U^{res} ne dépend pas de p, pour p suffisamment grand, et elle est alors égale à la matrice de Cartan du bloc principal de $\mathbf{u}_\zeta$, pour tout ζ comme dans le théorème.*

Il suffit de réaliser que les endomorphismes de tous nos objets simples sont réduits aux scalaires. Le corollaire découle alors du théorème par des arguments standards, voir [Ben].

Malheureusement il n'est pas possible de déduire la structure des modules simples de la connaissance de la matrice de Cartan. Pour cela il nous faut une version beaucoup plus fine du théorème, qui sera expliquée dans la section suivante.

3.3. Indépendance de la caractéristique, version fine

Commençons par des rappels sur la théorie des représentations restreintes de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire des U^{res}-modules. Pour plus de détails on pourra consulter [Jan]. D'abord on travaillera sur un corps fixe $k = \bar{\mathbf{F}}_p$. Soient $T \subset B \subset G(k)$ un tore maximal et un sous-groupe de Borel. Soient $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ les algèbres de Lie correspondantes. Tout caractère du tore $\nu \in X = X(T)$ admet une différentielle $\bar{\nu} \in \mathfrak{h}^*$. Elle nous donne une représentation $k_{\bar{\nu}}$ de $\mathfrak{h}$ que l'on étend à $\mathfrak{b}$ de la manière usuelle. Ensuite on induit pour obtenir le "petit Verma" :

$$Z(\bar{\nu}) = Z_k(\bar{\nu}) = U^{res} \otimes_{U(\mathfrak{b})} k_{\bar{\nu}} \in U^{res}\text{-mod.}$$

Il admet un quotient simple $L(\bar{\nu})$ unique et l'application $\nu \mapsto L(\bar{\nu})$ établit une bijection :

$$X/pX \xrightarrow{\sim} \{U^{res}\text{-modules simples}\}.$$

On connaît très bien les $Z(\bar{\nu})$; on pourrait alors espérer que, pour comprendre les $L(\bar{\nu})$, il suffit de connaître les multiplicités $[Z(\bar{\nu}) : L(\bar{\lambda})]$. Mais la matrice de ces multiplicités est singulière, donc elle ne permet pas de traduire nos connaissances sur les $Z(\bar{\nu})$ en connaissances sur les $L(\bar{\lambda})$.

Pour relever ce défi, notons que le tore T agit sur $\mathfrak{g}$ et U^{res}, qui sont donc X-graduées. On considère alors la catégorie $U^{res}\text{-mof}_X$ de tous les U^{res}-modules X-gradués $M = \bigoplus_{\nu \in X} M_\nu$ de dimension finie, et la sous-catégorie $\mathcal{C} = \mathcal{C}_k$ des M telles que $Hm = \bar{\nu}(H)m$ pour tous $H \in \mathfrak{g}$, $\nu \in X$, $m \in M_\nu$. Cette catégorie est connue sous le nom de G_1T-modules. Tout $\lambda \in X$ nous donne un objet $Z(\lambda) = Z_k(\lambda) = U^{res} \otimes_{U(\mathfrak{b})} k_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{C}$ dont la X-graduation est déterminée par $Z(\lambda)_\lambda = k(1 \otimes 1)$. Les $Z(\lambda)$ ont des quotients simples uniques $L(\lambda) = L_k(\lambda)$ et l'application $\lambda \mapsto L(\lambda)$ est une bijection :

$$X \xrightarrow{\sim} \{\text{objets simples de } \mathcal{C}\}.$$

De plus, on sait que $L(\lambda) = L(\bar{\lambda})$ en tant que $\mathfrak{g}$-module. Notre problème 2 peut maintenant se préciser comme suit.

Problème 3 : *Calculer* $\dim_k L(\lambda)_\nu$ *pour* $\lambda, \nu \in X$.

Puisque les $\dim Z(\lambda)_\nu$ sont connues et la matrice des multiplicités de Jordan-Hölder $[Z(\lambda) : L(\mu)]$ est triangulaire unipotente, c'est encore équivalent au :

Problème 4 : *Calculer* $[Z(\lambda) : L(\mu)]$ *pour tous* $\lambda, \mu \in X$.

Soit $\mathcal{W}$ le groupe de Weyl affine. C'est le produit semi-direct du réseau de racines $\mathbf{Z}R$ avec le groupe de Weyl fini W. Il opère sur X de manière standard. Pour tout entier $\ell \geq 1$, on definit une autre opération en posant :

$$x \cdot_\ell \lambda = \ell x \ell^{-1}(\lambda + \rho) - \rho,$$

où ρ est la demi-somme des racines R^+ de B. C'est l'opération standard conjugée avec une homothétie d'abord et une translation par ρ ensuite. Par des principes ("linkage principle" et "Verschiebungsprinzip") que je ne veux pas détailler, il est possible pour tout $p \geq h$ de réduire notre problème aux cas spéciaux suivants.

Problème 5 : *Calculer* $[Z(x \cdot_p 0), L(y \cdot_p 0)]$ *pour tout* $x, y \in \mathcal{W}$.

Lusztig a énoncé dans [Lu80] des conjectures qui expriment ces multiplicités en des termes combinatoires. En particulier, on s'attend à ce que pour $p \geq h$ ils soient indépendants de p, ce qui a déjà été conjecturé par Verma. Le théorème suivant rassemblant quelques résultats de [AJS94] va dans cette direction. Posons :

$$\mathcal{C}_k^{triv} = \{M \in \mathcal{C}_k \mid [M : L(\lambda)] \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \mathcal{W} \cdot_p 0\}.$$

C'est un facteur direct de $\mathcal{C}_k$, plus précisément son "bloc principal".

THÉORÈME 2 : *Il existe une $\mathbf{Z}'$-algèbre $\mathbf{Z}R$-graduée $\mathcal{B}$ avec une famille $Z(x)_{x\in\mathcal{W}}$ de $\mathcal{B}$-modules $\mathbf{Z}R$-graduées, telles que $\mathcal{B}$ et les $Z(x)$ sont libres de rang fini sur $\mathbf{Z}'$, et*

(1) *pour tout premier $p \geq h$ il y a une equivalence de $\bar{\mathbf{F}}_p$-catégories*

$$(\mathcal{B} \otimes_{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{F}}_p)\text{-mof}_{\mathbf{Z}R} \cong \mathcal{C}_{\bar{\mathbf{F}}_p}^{triv}$$

tel que $Z(x) \otimes_{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{F}}_p$ corresponde à $Z_{\bar{\mathbf{F}}_p}(x \cdot_p 0)$.

L'algèbre enveloppante restreinte quantique $\mathbf{u}_\zeta$ admet aussi une X-graduation ; on arrive à construire des analogues quantiques $\mathcal{C}_\zeta$, $\mathcal{C}_\zeta^{triv}$, $Z_\zeta(\lambda)$, $L_\zeta(\lambda)$ de nos objets de caractéristique positive d'avant, et maintenant notre théorème admet l'extension suivante :

THÉORÈME 2 (suite) : *... et telles que :*

(2) *pour tout $\ell \geq h$ premier à tous les coefficients de la matrice de Killing-Cartan de R et toute racine primitive ℓ-ième de l'unité ζ, il y a une équivalence de $\mathbf{Q}(\zeta)$-catégories*

$$(\mathcal{B} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\zeta))\text{-mof}_{\mathbf{Z}R} \cong \mathcal{C}_\zeta^{triv}$$

telle que $Z(x) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\zeta)$ corresponde à $Z_\zeta(x \cdot_\ell 0)$.

De ce théorème on déduit par des arguments de changement de base standards le

COROLLAIRE 2 : $[Z_\zeta(x \cdot_\ell 0) : L_\zeta(y \cdot_\ell 0)] = [Z_{\bar{\mathbf{F}}_p}(x \cdot_p 0) : L_{\bar{\mathbf{F}}_p}(y \cdot_p 0)]$ *pour tout ζ comme dans le théorème et pour p suffisamment grand.*

La borne inférieure pour p peut même être choisie indépendemment de x et y: Il suffit de remarquer que $L_{\bar{\mathbf{F}}_p}(\lambda + p\nu)$ n'est rien d'autre que $L_{\bar{\mathbf{F}}_p}(\lambda)$ avec son X-graduation translatée, et pareil pour les L_ζ. Donc si l'on connaît les multiplicités dans un nombre fini de cas bien choisis, on les connaît toutes. Et comme on va l'expliquer dans la section suivante, dans le cas quantique beaucoup de ces multiplicités sont connues.

3.4. Conséquences pour les caractères

Soit $\mathbf{Z}[X]$ l'anneau du groupe X. Pour $\nu \in X$, notons $e^{\nu} \in \mathbf{Z}[X]$ l'élément correspondant. À tout espace vectoriel de dimension finie X-gradué M, on associe son caractère $\mathrm{ch}M = \sum(\dim M_{\nu})e^{\nu}$. Soient maintenant $p > h$ un nombre premier et ζ une racine p-ième de l'unité. On connaît les caractères de tous les Z, et en particulier on sait que $\mathrm{ch}Z_{\zeta}(\lambda) = \mathrm{ch}Z_{\bar{\mathbf{F}}_p}(\lambda)$. D'autre part le "linkage principle" et le "Verschiebungsprinzip" permettent de déduire des égalités $[Z_{\zeta}(x \cdot_p 0) : L_{\zeta}(y \cdot_p 0)] = [Z_{\bar{\mathbf{F}}_p}(x \cdot_p 0) : L_{\bar{\mathbf{F}}_p}(y \cdot_p 0)]$ toutes les égalités $[Z_{\zeta}(\lambda) : L_{\zeta}(\mu)] = [Z_{\bar{\mathbf{F}}_p}(\lambda) : L_{\bar{\mathbf{F}}_p}(\mu)]$. Alors le corollaire précédent implique :

COROLLAIRE 3 : *Il existe une borne $b(R)$ telle que $\mathrm{ch}L_{\zeta}(\lambda) = \mathrm{ch}L_{\bar{\mathbf{F}}_p}(\lambda)$ pour tout premier $p \geq b(R)$ et toute racine primitive p-ième ζ de l'unité.*

En fait, Lusztig [Lu90a] sait même définir une $\mathbf{Z}[\zeta]$-forme de $L_{\zeta}(\lambda)$ qui devrait donner $L_{\bar{\mathbf{F}}_p}(\lambda)$ après réduction modulo p. Que cela soit vrai pour $p \geq b(R)$ est une conséquence du corollaire.

Je veux maintenant expliquer comment on arrive à connaître les $[Z_{\zeta}(x \cdot_{\ell} 0) : L_{\zeta}(y \cdot_{\ell} 0)]$ ou, ce qui est équivalent, les $\mathrm{ch}L_{\zeta}(\lambda)$. Soit ℓ un entier qui est premier à tous les coefficients de la matrice de Killing-Cartan et soit ζ une racine primitive ℓ-ième de l'unité. Considérons dans X l'ensemble des poids dominants $X^+ = \{\lambda \mid \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle \geq 0$ pour tous $\alpha \in R^+\}$ et à l'intérieur de cet ensemble, pour tout ℓ, la boîte des poids restreints $X_{\ell}^{res} = \{\lambda \in X^+ \mid \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle < \ell$ pour toute racine simple $\alpha\}$. Tout U_{ζ}-module de dimension finie admet une X-graduation naturelle. Dans la catégorie U_{ζ}-mof, on prend la sous-catégorie des modules dites "de type 1". Les modules simples de type 1 sont classifiés par leur plus haut poids $\lambda \in X^+$ et notés $\mathcal{L}_{\zeta}(\lambda)$. Pour tout poids restreint $\lambda \in X_{\ell}^{res}$, la restriction de $\mathcal{L}_{\zeta}(\lambda)$ à $\mathbf{u}_{\zeta}$ donne $L_{\zeta}(\lambda)$, voir [Lu89]. Le problème de déterminer les $\mathrm{ch}L_{\zeta}(\lambda)$ revient alors au problème de déterminer les $\mathrm{ch}\mathcal{L}_{\zeta}(\lambda)$.

Dans ce cas, la conjecture peut s'énoncer facilement. Soit $\bar{A}_{\ell} = \{\lambda \in X \mid 0 \geq \langle \lambda + \rho, \alpha^{\vee} \rangle \geq -\ell$ pour tout $\alpha \in R^+\}$ la fermeture de la plus haute alcôve dans la chambre de Weyl négative. C'est un domaine fondamental pour $(\mathcal{W}\cdot_l)$. Pour tout $\lambda \in X^+$, soit

$$\chi(\lambda) = \frac{\sum_{x \in W}(-1)^x x(\lambda + \rho)}{\sum_{x \in W}(-1)^x x(\rho)} \in \mathbf{Z}[X]$$

le "caractère de Weyl". Ici $(-1)^x \in \{+1, -1\}$ mesure si x change l'orientation ou non. Pour $\lambda \notin X^+$, on mettra $\chi(\lambda) = 0$.

Conjecture (Lusztig) : *Soit $\lambda \in X^+$ et soit $w \in \mathcal{W}$ de longueur minimale tel que $w^{-1} \cdot_\ell \lambda \in \bar{A}_\ell$. Alors on a :*

$$\mathrm{ch}\mathcal{L}_\zeta(\lambda) = \sum_{y \in \mathcal{W}} (-1)^{yw} P_{y,w}(1) \chi(yw^{-1} \cdot_\ell \lambda).$$

Ici $\mathcal{W}$ est considéré comme groupe de Coxeter avec reflections simples données par les murs de l'alcôve la plus basse dans la chambre de Weyl positive. Les $P_{y,w}$ sont les polynômes de Kazhdan-Lusztig définis dans [KL80].

Cette conjecture est établie dans le cas où toutes les racines ont la même longueur, avec des restrictions tres faibles sur ℓ ($\ell > 32$ suffit toujours). Comme Mathieu l'a expliqué dans son exposé récent [Ma94], Kazhdan et Lusztig [KL91], [KL93], [KL94] ont traduit cette conjecture dans une conjecture analogue pour les algèbres de Lie affines, et cette conjecture “affine” vient d'être demontrée par Kashiwara et Tanisaki [KT94], qui ont réussi à généraliser la démonstration pour le cas “classique” [Sp82] au cas affine.

Revenons au cas de caractéristique positive. Pour $\lambda \in X^+$, on notera $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{F}}_p}(\lambda)$ le $G(\bar{\mathbf{F}}_p)$-module simple de plus haut poids λ. Du corollaire 3, on déduit pour un système de racines R (qui maintenant n'est pas supposé ADE) :

THÉORÈME 3 : *Il existe une borne $b(R)$ telle que*

$$\mathrm{ch}\mathcal{L}_\zeta(\lambda) = \mathrm{ch}\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{F}}_p}(\lambda)$$

pour tout premier $p \geq b(R)$, ζ une racine p-ième de l'unité, et $\lambda \in X^+$ soumise aux conditions $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \leq p(p - h + 2)$ $\forall \alpha \in R^+$.

Rappelons que h est le nombre de Coxeter. On éspère que le théorème reste vrai pour $b(R) = h$. Par contre la condition à λ est essentielle. Elle vient du fait que le théorème de Steinberg a une forme différente pour les groupes quantiques [Lu89] et pour les groupes algébriques [Ca63].

4. RAMIFICATIONS

On sait que, pour $p \geq h$, la conjecture de Lusztig équivaut à la :

Conjecture : $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(Z(x \cdot_p 0), L(y \cdot_p 0)) = 0$ *si* $(-1)^i \neq (-1)^{xy}$.

Dans le cas classique, cette équivalence est attribuée à Vogan ; dans notre cas c'est [Ka89], voir aussi [CPS92]. Sous cette forme, la conjecture admet une généralisation non-triviale aux murs.

Conjecture: *Soit $p \geq h$ un nombre premier (dans le cas modulaire) ou nombre entier premier aux $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ pour tous $\alpha, \beta \in R$ (dans le cas quantique). Alors il existe une fonction $\epsilon : X \to \{\pm 1\}$ telle que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(Z(\lambda), L(\mu)) = 0$ si $(-1)^i \neq \epsilon(\lambda)\epsilon(\mu)$.*

En fait, $\epsilon(\lambda)\epsilon(\mu)$ devrait être la parité du nombre des hyperplans H de reflection de $\mathcal{W}\cdot_p$ tels que $\lambda \in H^+$ et $\mu \in H^- \cup H$, où l'on note H^+ le demi-plan ouvert qui rencontre tout translat de la chambre de Weyl positive. D'après [AJS94], cette conjecture en implique une autre, que j'aime particulièrement. Soit p comme dans la conjecture précédente.

Conjecture: *Les algèbres U^{res} (resp. $\mathbf{u}_\zeta$) admettent des $\mathbf{Z}$-graduations "de Koszul".*

Pour la définition d'une algèbre de Koszul, je me réfère à l'exposé recent de Loday dans ce séminaire. Notons que la conjecture de Lusztig implique déjà que les blocs principaux de ces algèbres admettent des **Z**-graduations de Koszul. C'est en travaillant avec ces graduations que les coefficients des polynômes de Kazhdan-Lusztig prennent toute leur signification.

BIBLIOGRAPHIE

[AJS94] H. H. ANDERSEN, J. C. JANTZEN and W. SOERGEL - Representations of quantum groups at a p-th root of unity and of semisimple groups in characteristic p : Independence of p, *Astérisque* **220** (1994), 1–321.

[An94] H. H. ANDERSEN - The irreducible characters for semi-simple algebraic groups and for quantum groups, *Proceedings of the ICM94 in Zürich.*

[Ben] D. J. BENSON - *Representations and Cohomology I: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics **30**), Cambridge 1991 (Cambridge Univ).

[Ca63] P. CARTIER - Représentations linéaires des groupes algébriques semi-simples en caractéristique non nulle, *Sém. Bourbaki, exposé* **255** (1963).

[Ca87] P. CARTIER - Détermination des caractères des groupes finis simples: Travaux de Lusztig, *Sém. Bourbaki, Astérisque* **145–146** (1987), 137-161.

[CPS92] E. CLINE, B. PARSHALL and L. SCOTT - Infinitesimal Kazhdan-Lusztig theories, pp. 43–73 in: V. Deodhar (ed.), *Kazhdan-Lusztig Theory and Related Topics,* Proc. Chicago 1989 (Contemporary Mathematics **139**), Providence, R. I. 1992 (Amer. Math. Soc.).

[Jan] J. C. JANTZEN - *Representations of Algebraic Groups* (Pure and Applied Mathematics **131**), Orlando, Fla. 1987 (Academic Press).

[Ka89] M. KANEDA - Extensions of modules for infinitesimal algebraic groups, *Journal of Algebra* **122** (1989), 188–210.

[KL80] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. math.* **53** (1980), 191–213.

[KL91] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - Affine Lie algebras and quantum groups, *Internat. Math. Res. Notices* **1991**, no. 2, 21–29, in: *Duke Math. J.* **62** (1991).

[KL93] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - Tensor structures arising from affine Lie algebras I, II, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), 905–1011.

[KL94] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - Tensor structures arising from affine Lie algebras III, IV, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 335–453.

[KT94] M. KASHIWARA and T. TANISAKI - Kazhdan-Lusztig Conjecture for Affine Lie Algebras with Negative Level, *Preprint RIMS-983* (1994).

[Lu79] G. LUSZTIG - Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups, pp. 313–317 in: B. Cooperstein, G. Mason (eds.), *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (1979),* Proc. Symp. Pure Math. **37**, Providence, R. I. 1980 (Amer. Math. Soc.).

[Lu80] G. LUSZTIG - Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns, *Adv. in Math.* **37**(1980), 121–164.

[Lu89] G. LUSZTIG - Modular representations and quantum groups, pp. 59–77 in: A. J. Hahn, D. G. James, Z.-X. Wan (eds.), *Classical Groups and Related Topics,* Proc. Beijing 1987 (Contemporary Mathematics **82**) Providence, R. I. 1989 (Amer. Math. Soc.).

[Lu90a] G. LUSZTIG - Quantum groups at roots of 1, *Geom. Dedicata* **35** (1990), 89–114.

[Lu90b] G. LUSZTIG - On quantum groups, *J. Algebra* **131** (1990), 466–475.

[Lu90c] G. LUSZTIG - Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 257–296.

[Ma94] O. MATHIEU - Equations de Knizhnik-Zamolodchikov et théorie des représentations, *Sém. Bourbaki, exposé* **78** (1994).

[Sp82] T. A. SPRINGER - Quelques applications de la cohomologie d'intersection, *Sém. Bourbaki, Astérisque* **92–93** (1982), 249–273.

Wolfgang SOERGEL

Mathematisches Institut
der Universität Freiburg
Albertstraße 23B

D-79104 FREIBURG