

Herleitung von Skalarprodukten aus Symmetrieprinzipien

Wolfgang Soergel

25. Juni 2008

Um den uns umgebenden Raum mathematisch zu modellieren, mag man von einem dreidimensionalen reellen affinen Raum ausgehen. Um auch das Messen mit Zollstöcken in dieses Modell zu integrieren, mag man annehmen, daß zusätzlich eine alle Translationen umfassende Untergruppe der Automorphismengruppe unseres affinen Raums vorgegeben sei, deren Elemente “Bewegungen” heißen mögen, und von der wir das folgende fordern: Für je zwei Paare von Teilmengen unseres affinen Raums bestehend aus einer Halbebene und einer Halbgerade auf ihrem Rand soll es genau eine Bewegung geben, die sie ineinander überführt. Der im Anschluß formulierte Satz und insbesondere sein Beweis zeigen, wie man von diesen Annahmen ausgehend im Rahmen einer Grundvorlesung über lineare Algebra zur Definition von Längeneinheiten und Skalarprodukten und von dort natürlich auf dem üblichen Wege auch zu einem Beweis des Satzes von Pythagoras gelangen kann. Ich hebe das deshalb besonders hervor, da bei dem hier vorgeschlagenen Zugang der Satz des Pythagoras anders als üblich beim Übergang vom Anschauungsraum zu seinem mathematischen Modell in keiner Weise eingeht. Als ersten Zugang zum Skalarprodukt würde ich den hier vorgeschlagenen Weg dennoch nicht empfehlen. Ich stelle mir vielmehr vor, daß er zu einem späteren Zeitpunkt als Anwendung und Illustration des Konzepts von Gruppenwirkungen seinen Platz haben könnte, oder auch als Vortragsthema in einem Proseminar. Man mag diese Arbeit als eine Randnotiz zu Kleins Erlanger Programm [1] lesen. Einen sehr viel radikaleren Zugang im ebenen Fall entwickelt Bachmann in [2]: Er konstruiert die euklidische Ebene aus ihrer Bewegungsgruppe zusammen mit der Teilmenge der Spiegelungen, also aus einem Datum bestehend aus einer Gruppe mit einer ausgezeichneten Teilmenge. Der hier vorgeschlagene Zugang ist bescheidener. Nach diesen Vorbemerkungen fangen wir nun nocheinmal von vorne an, nur diesmal in Formeln und ausgehend von einem reellen Vektorraum, etwa dem Richtungsraum unseres affinen Anschauungs-

raums.

Definition. Unter einem **Strahl** L in einem reellen Vektorraum V verstehen wir eine Teilmenge $L \subset V$ mit der Eigenschaft, daß es einen Vektor $v \neq 0$ gibt mit $L = \mathbb{R}_{\geq 0}v$. Unter einer **Halbebene** H in einem reellen Vektorraum V verstehen wir eine Teilmenge $H \subset V$ mit der Eigenschaft, daß es linear unabhängige Vektoren $v, w \in V$ gibt mit $H = \mathbb{R}v + \mathbb{R}_{\geq 0}w$. Unter dem **Rand einer Halbebene** verstehen wir die einzige darin enthaltene Gerade; für die Halbebene $H = \mathbb{R}v + \mathbb{R}_{\geq 0}w$ wäre das also die Gerade $\mathbb{R}v$. Unter einer **Drehgruppe** in einem dreidimensionalen reellen Vektorraum V verstehen wir eine Untergruppe seiner Automorphismengruppe

$$D \subset GL(V)$$

mit der Eigenschaft, daß es für je zwei Paare von Teilmengen unseres Vektorraums bestehend aus einer Halbebene und einem Strahl auf ihrem Rand genau ein Element unserer Untergruppe gibt, die das eine Paar in das andere überführt. Die Elemente einer solchen Drehgruppe bezeichnen wir dann auch als **Drehungen**.

Satz (Drehgruppen und Skalarprodukte). *Gegeben ein dreidimensionaler reeller Vektorraum V , liefert die Abbildung $b \mapsto SO(V; b)$ eine Bijektion*

$$\{\text{Skalarprodukte auf } V\} / \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \{\text{Drehgruppen } D \subset GL(V)\}$$

Bemerkung. Nehmen wir unsere Drehgruppe D als abgeschlossen an, so kann man ihre Kompaktheit aus der Existenz eines kompakten homogenen Raums folgern und ein invariantes Skalarprodukt durch Integration erhalten. Das Ziel der folgenden Argumente ist es, einen elementareren Weg aufzuzeigen, der bereits im Rahmen der Grundvorlesungen gangbar ist und zu einem besseren Verständnis der beteiligten Konzepte führen mag, indem er eine in beiden Richtungen gangbare Brücke zwischen dem algebraisch besonders einfachen Konzept eines Skalarprodukts und dem der Anschauung besonders gut zugänglichen Begriff einer Drehgruppe bereitstellt. Aus dem vorhergehenden Satz folgt insbesondere für jeden dreidimensionalen reellen Vektorraum V mit einer ausgezeichneten Drehgruppe die Gültigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes in der folgenden Gestalt: Stehen zwei Vektoren $v, w \in V$ aufeinander senkrecht in dem Sinne, daß es eine Drehung gibt, die den einen festhält und den anderen auf sein Negatives abbildet, und werden die Vektoren v, w und $v + w$ durch Drehungen auf die Vielfachen an, bn und cn eines festen Vektors $n \neq 0$ abgebildet, so gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

In der Tat liefert der vorhergehende Satz ein unter unserer Drehgruppe invariantes Skalarprodukt b mit $b(n, n) = 1$. Aus der eben präzisierten Orthogonalitätsbedingung folgt $b(v, w) = b(-v, w)$, also $b(v, w) = 0$. Damit erhalten wir dann wie üblich $c^2 = b(v + w, v + w) = b(v, v) + b(w, w) = a^2 + b^2$. In allen Büchern zur linearen Algebra, die ich studiert habe, wird der Satz des Pythagoras in seiner aus der Schule bekannten Gestalt vorausgesetzt, um von dort ausgehend die Brücke von der Anschauung zur abstrakten Theorie euklidischer Vektorräume zu schlagen. Ich denke jedoch, daß der Satz des Pythagoras auch eine Diskussion und Präzisierung im Rahmen des Studiums verdient. Mir selbst gefällt die hier vorgeschlagene Präzisierung recht gut. Der Beweis gefällt mir weniger, aber ich habe keinen besseren finden können.

Beweis. Den Nachweis, daß für jedes Skalarprodukt b auf V die Gruppe $SO(V; b) = \{d \in GL(V) \mid b(dv, dw) = b(v, w) \ \forall v, w \in V \text{ und } \det d = 1\}$ in der Tat eine Drehgruppe ist, überlasse ich dem Leser und beginne gleich mit der Konstruktion der Umkehrabbildung. Sei also V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum und $D \subset GL(V)$ eine Drehgruppe im Sinne unserer Definition. Gegeben $v, w \in V$, vereinbaren wir die Sprechweise, w **stehe senkrecht auf** v oder auch **sei orthogonal zu** v und schreiben

$$w \perp v$$

genau dann, wenn es eine Drehung $r \in D$ gibt mit $r(w) = -w$ und $r(v) = v$. Aus $v \perp w$ folgt leicht $dv \perp dw$ für jede Drehung d und $\lambda v \perp \mu w$ für alle $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Des weiteren steht nur der Nullvektor auf sich selber senkrecht. Um $(w \perp v) \Rightarrow (v \perp w)$ zu zeigen, müssen wir etwas weiter ausholen. Gegeben linear unabhängige Vektoren $v, w \in V$, vereinbaren wir für das folgende die Notation

$$[v, w] = (\mathbb{R}v + \mathbb{R}_{\geq 0}w, \mathbb{R}_{\geq 0}v)$$

für das dadurch bestimmte Paar aus einer Halbebene nebst einem Strahl auf ihrem Rand. Unsere Definition einer Drehgruppe besagt in dieser Notation, daß es für je zwei Paare (v, w) und (v', w') von linear unabhängigen Vektoren genau ein Element r unserer Drehgruppe gibt mit $r : [v, w] \mapsto [v', w']$.

Lemma 1. *Seien $v, w \in V$ linear unabhängig.*

1. *Für die Drehung r mit $r : [v, w] \mapsto [-v, w]$ haben wir $r^2 = \text{id}$ und $rv = -v$.*
2. *Für die Drehung r mit $r : [v, w] \mapsto [v, -w]$ haben wir $r^2 = \text{id}$ und $rv = v$, und die einzige weitere Drehung s mit $sv = v$ und $s(\mathbb{R}v + \mathbb{R}w) = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ ist die Identität.*

3. Für die Drehung r mit $r : [v, w] \mapsto [w, v]$ haben wir $r^2 = \text{id}$ und es gibt $\lambda > 0$ mit $rv = \lambda w$ und $r\lambda w = v$.

Beweis. 1. Aus $r^2 : [v, w] \mapsto [v, w]$ folgt $r^2 = \text{id}$, so daß für r nur die Eigenwerte ± 1 in Frage kommen. Aus $rv \in \mathbb{R}_{<0}v$ folgt dann $rv = -v$.

2. Aus $r^2 : [v, w] \mapsto [v, w]$ folgt $r^2 = \text{id}$, so daß für r nur die Eigenwerte ± 1 in Frage kommen. Aus $rv \in \mathbb{R}_{>0}v$ folgt dann $rv = v$. Für eine weitere Drehung s wie oben kommen nur die beiden Möglichkeiten $sw \in \mathbb{R}v + \mathbb{R}_{>0}w$ und $sw \in \mathbb{R}v + \mathbb{R}_{<0}w$ in Betracht. Im ersten Fall folgt $s : [v, w] \mapsto [v, w]$, also $s = \text{id}$, im letzteren Fall $s : [v, w] \mapsto [v, -w]$, also $s = r$.

3. Die Restriktion von r auf die Ebene $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ hat negative Determinante, da ihre Matrix in der Basis v, w oben links eine Null hat und in der Nebendiagonalen positive Einträge. Damit hat unsere Matrix zwei verschiedene reelle Eigenwerte und r^2 hat zwei positive reelle Eigenwerte, etwa mit Eigenvektoren n und m . Wegen $r^2 : [n, m] \mapsto [n, m]$ folgt dann $r^2 = \text{id}$. Der Rest des Lemmas ergibt sich leicht. \square

Lemma 2. *Es gilt $w \perp v \Rightarrow v \perp w$.*

Beweis. Für linear unabhängige v, w folgt das unmittelbar aus dem dritten Teil des vorhergehenden Lemmas 1. Gilt $w \perp v$ für linear abhängige Vektoren, so muß mindestens einer der Nullvektor sein. Im Fall $v = 0$ ist $v \perp w$ offensichtlich, bereits die Identität hält dann w fest und bildet v auf sein Negatives ab. Es reicht also, wenn wir $v \perp 0$ zeigen für alle $v \neq 0$, und das folgt unmittelbar aus dem ersten Teil des vorhergehenden Lemmas 1. \square

Lemma 3. *Gegeben ein von Null verschiedener Vektor $n \neq 0$, bilden die darauf senkrecht stehenden Vektoren eine Ebene und es gibt genau eine Drehung r_n mit $r_n n = n$ und $u \perp n \Rightarrow r_n u = -u$.*

Beweis. Gegeben eine Gerade G in einer Ebene $E \subset V$, gibt es nach dem zweiten Teil von Lemma 1 genau eine Drehung, die die Gerade G punktweise festhält und die Ebene E zwar in sich selbst überführt, aber nicht punktweise festhält. Diese Drehung ist dann natürlich ihr eigenes Inverses. Die Menge der auf allen Vektoren von G senkrecht stehenden Vektoren von E muß also eine Gerade G' sein, nämlich der (-1) -Eigenraum dieser Drehung geschnitten mit E . Nach Lemma 2 ist die Menge der auf allen Vektoren von G' senkrecht stehenden Vektoren von E dann wieder unsere ursprüngliche Gerade G . Gegeben linear unabhängige Vektoren $v, w \in E$ mit $v \perp w$, hat die Drehung d mit $d : [v, w] \mapsto [w, -v]$ folglich die Eigenschaft $d(w) \in \mathbb{R}v$ und dann sogar $d(w) \in \mathbb{R}_{<0}v$, und es ergibt sich sofort $d : [w, -v] \mapsto [-v, -w]$, also $d^4 = \text{id}$. Wir folgern $d^2 v = -v$, $d^2 w = -w$ und damit $d^2 u = -u$ für alle $u \in E$.

Andererseits haben wir $d^2 \neq -\text{id}$, etwa da die Determinante eines Quadrats nie negativ sein kann, folglich hat d^2 einen von Null verschiedenen Fixvektor n und wir erhalten $E \subset \{u \in V \mid n \perp u\}$. Hier muß sogar Gleichheit gelten, da sonst der Schnitt der rechten Seite mit einer geeigneten n umfassenden Ebene echt größer wäre als eine Gerade. Wir erkennen so, daß die auf einem vorgegebenen von Null verschiedenen Vektor $n \neq 0$ senkrechten Vektoren stets eine Ebene bilden, und daß es dazu stets eine Drehung r_n gibt mit $r_n(n) = n$ und $u \perp n \Rightarrow r_n(u) = -u$. \square

Übung. Gegeben ein Vektor $n \neq 0$, gilt für jede Drehung d die Identität $r_{dn} = d \circ r_n \circ d^{-1}$, und für jeden von Null verschiedenen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ haben wir $r_{\lambda n} = r_n$.

Lemma 4. *Bildet eine Drehung einen Strahl bijektiv auf sich selbst ab, so hält sie ihn bereits punktweise fest.*

Bemerkung. Dies Lemma formalisiert die Erfahrungstatsache, daß eine Achse beim Drehen ihre Länge nicht ändert, und es mag lächerlich wirken, das beweisen zu wollen. In der Tat hätten wir diese Aussage auch als zusätzliche Bedingung zu unserer Definition des Begriffs einer Drehgruppe mit hinzunehmen können. Daß ich das nicht getan habe, hat rein ästhetische Gründe: Wir können so eine größere Wegstrecke mit reiner Logik zurücklegen.

Beweis. Es gilt für $u \neq 0$ und jede Drehung $d \in D$ zu zeigen

$$d(\mathbb{R}_{\geq 0}u) = \mathbb{R}_{\geq 0}u \Rightarrow du = u.$$

Die Idee des Beweises ist rasch erklärt: Wir schreiben unsere Drehung als die Komposition von zwei Drehungen, die jeweils u auf sein Negatives abbilden. Dazu wählen wir $v \neq 0$ mit $v \perp u$. Gilt $dv \in \mathbb{R}v$, so folgt $d^2v \in \mathbb{R}_{>0}v$ und damit $d^2 : [u, v] \mapsto [u, v]$ und so $d^2 = \text{id}$ und dann $du = u$. Sonst spannen v und dv die zu u senkrechte Ebene auf. Nach dem letzten Teil von Lemma 1 gibt es $\lambda > 0$ und eine Drehung r , die λv mit dv vertauscht und deren Quadrat die Identität ist. Daraus folgt leicht $ru = -u$. Für die Verknüpfung rr_v gilt dann $\lambda v \mapsto dv$ und $u \mapsto u$, woraus folgt $rr_v : [u, v] \mapsto [u, dv]$, also $rr_v = d$, und damit dann $du = u$ wie gewünscht. \square

Lemma 5. *Jede Bahn einer Drehgruppe trifft jeden Strahl in genau einem Punkt.*

Beweis. Daß jede Bahn jeden Strahl in höchstens einem Punkt trifft, folgt sofort aus Lemma 4. Daß jede Bahn jeden Strahl in mindestens einem Punkt trifft, folgt unmittelbar aus unserer Definition einer Drehgruppe. \square

Definition. Eine D -Bahn $l \subset (V \setminus 0)$ nennen wir auch eine **Längeneinheit**. Gegeben eine Längeneinheit l erklären wir die zugehörige Norm

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ v &\mapsto \|v\|_l = \|v\| \end{aligned}$$

durch die Vorschrift $\|\lambda v\| = \lambda$ für alle $\lambda \geq 0$ und $v \in l$.

Nach diesen Vorbereitungen machen wir uns nun an den eigentlichen Beweis des Satzes und konstruieren ein Skalarprodukt. Gegeben linear unabhängige v, w , gilt für unser r_v aus Lemma 3 sicher $r_v w = \alpha v - \gamma w$ mit $\gamma \geq 0$. Wegen $r_v^2 w = \alpha v - \alpha \gamma v + \gamma^2 w = w$ folgt $\gamma = 1$. Gegeben ein festes $v \neq 0$, gibt es folglich für alle $w \in V$ genau eine reelle Zahl $\alpha_v(w)$ mit der Eigenschaft

$$r_v w + w = \alpha_v(w)v.$$

Man erkennt unschwer, daß α_v eine Linearform auf V ist. Wir können α_v auch charakterisieren als die eindeutig bestimmte Linearform, die auf v den Wert 2 annimmt und auf allen zu v senkrechten Vektoren den Wert Null. Unsere Definitionen liefern für jede weitere Drehung d die Identität $\alpha_{dv} \circ d = \alpha_v$ alias $\alpha_{dv} = \alpha_v \circ d^{-1}$ und für jeden von Null verschiedenen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ die Identität $\alpha_{\lambda v} = \lambda^{-1} \alpha_v$. Werden zwei von Null verschiedene Vektoren v, w durch eine Drehung miteinander vertauscht, so gilt für unsere Ausdrücke weiter die Identität $\alpha_v(w) = \alpha_w(v)$. In der Tat, aus $rv = w$ und $rw = v$ folgt $r_w r = r r_v$, und die von der Mitte ausgehend zu entwickelnde Gleichungskette

$$\alpha_w(v)w - v = r_w(v) = r_w r w = r r_v w = r(\alpha_v(w)v - w) = \alpha_v(w)w - v$$

liefert dann die Behauptung. Nun wählen wir eine Längeneinheit l und erklären eine Abbildung $b = b_l : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$b(v, w) = \begin{cases} \|v\|^2 \alpha_v(w) / 2 & v \neq 0; \\ 0 & v = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\|v\|^2 = b(v, v)$, und $w \mapsto b(v, w)$ ist linear für alle v . Schließlich beachten wir, daß für je zwei von Null verschiedene Vektoren $v, w \in V$ die Vektoren $\|v\|^{-1}v$ und $\|w\|^{-1}w$ durch eine Drehung miteinander vertauscht werden. Nach dem vorhergehenden folgt $\|v\| \|w\|^{-1} \alpha_v(w) = \|w\| \|v\|^{-1} \alpha_w(v)$ alias $\|v\|^2 \alpha_v(w) = \|w\|^2 \alpha_w(v)$ und damit $b(v, w) = b(w, v)$ erst für je zwei von Null verschiedene Vektoren, aber dann auch sofort für alle $v, w \in V$. Folglich ist b ein Skalarprodukt auf V , und wir haben wie versprochen eine Abbildung in die Gegenrichtung konstruiert. Daß unsere beiden Abbildungen in der Tat zueinander invers sind, mag der Leser selbst prüfen. \square

Literatur

- [1] Felix Klein. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Erster Band: Liniengeometrie, Grundlegung der Geometrie, zum Erlanger Programm, Herausgegeben von R. Fricke und A. Ostrowski (von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen), Reprint der Erstauflagen [Verlag von Julius Springer, Berlin, 1921].
- [2] Friedrich Bachmann. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer, 1973.