ÜBER DIE BEZIEHUNG VON SCHNITTKOHOMOLOGIE UND DARSTELLUNGSTHEORIE IN ENDLICHER CHARAKTERISTIK

WOLFGANG SOERGEL

Zusammenfassung. In dieser Arbeit untersuchen wir die Beziehung zwischen der rationalen Darstellungstheorie halbeinfacher algebraischer Gruppen über einem Körper k endlicher Charakteristik p und der Schnittkohomologie mit Koeffizienten in k von (komplexen) Schubert-Varietäten.

Inhaltsverzeichnis

partially supported by the EC TMR network "Algebraic Lie Representations", EC-contract no ERB FMRX-CT97-0100.

1. Einleitung

Sei k ein Körper positiver Charakteristik p und seien $G \supset B \supset T$ eine halbeinfache spaltende einfach zusammenhängende algebraische Gruppe über k mitsamt einer Borelschen und einem maximalen Torus. Jedes Gewicht auf dem Torus $\lambda \in X(T)$ führt zu einer induzierten Darstellung $\mathrm{ind}_B^G k_\lambda = H^0(G/B, \mathcal{O}(\lambda)) = H^0(\lambda)$. Ist diese induzierte Darstellung nicht null, so hat sie genau eine einfache Unterdarstellung $L(\lambda) \subset H^0(\lambda)$, und jeder einfache G-Modul ist isomorph zu genau einem solchen $L(\lambda)$, siehe zum Beispiel [Jan87].

Man möchte gerne die Multiplizität $[H^0(\lambda) : L(\mu)] \in \mathbb{N}$ berechnen, mit der $L(\mu)$ in einer Kompositionsreihe von $H^0(\lambda)$ vorkommt, für Gewichte λ, μ mit $H^0(\lambda) \neq 0 \neq H^0(\mu)$. Für diese Multiplizitäten hat Lusztig Vermutungen [Lus80] aufgestellt. Es ist mittlerweile bewiesen [AJS94], daß diese Vermutungen für jedes vorgegebene Wurzelsystem in hinreichend großer Charakteristik stimmen. Bei Wurzelsystemen verschieden von A_1, A_2, A_3, B_2, G_2 weiß man aber für keine einzige Charakteristik, ob sie hinreichend groß ist.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, dieses Problem an die Topologen oder Geometer weiterzureichen. Es ist ja klar, daß Schnittkohomologie von (komplexen) Schubert-Varietäten mit Koeffizienten in einem Körper hinreichend großer Charakteristik sich so verhält, als ob der Körper Charakteristik Null hätte. Wieder weiß man aber für keine einzige Charakteristik, ob sie hinreichend groß ist. Wir wollen erklären, wie eine Lösung dieses topologisch-geometrischen Problems zumindest einen Teil unseres darstellungstheoretischen Problems lösen würde.

Um das genauer zu formulieren brauchen wir mehr Notationen. Seien $X(T) \supset R \supset R^+$ das Gewichtegitter, das Wurzelsystem $R = R(G,T)$ und das System positiver Wurzeln $R^+ = -R(B,T)$. Insbesondere gilt $H^0(\lambda) \neq 0$ genau dann, wenn λ dominant ist. Bezeichne h die Coxeterzahl unseres Wurzelsystems. Sei $\rho \in X(T)$ die Halbsumme der positiven Wurzeln und (W, S) das Coxetersystem zu $G \supset B$. Insbesondere bezeichnet also W die (endliche) Weylgruppe.

Betrachten wir andererseits $\mathcal{G} \supset \mathcal{B}$ eine halbeinfache komplexe algebraische Gruppe zum dualen Wurzelsystem $R^\vee$ mit einer Borelschen und identifizieren das zugehörige Coxetersystem mit (W, S) in offensichtlicher Weise. Bezeichne $\mathrm{st} = (p-1)\rho \in X(T)$ das "Steinberg-Gewicht". Hier und im folgenden versehen wir komplexe Varietäten stets mit ihrer natürlichen "metrischen" Topologie, nie mit der Zariski-Topologie. In Abschnitt 2.11 werden wir zeigen:

Theorem 1.1. *Sei die Charakteristik unseres Körpers k größer als die Coxeter-Zahl unseres Wurzelsystems. Für festes $y \in W$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $[H^0(\mathrm{st} + x\rho) : L(\mathrm{st} + y\rho)] = 1$ *für alle $x \in W$ mit $x \leq y$ in der Bruhat-Ordnung.*
2. *Der Kohomologiering $H^\bullet(\overline{\mathcal{B}y\mathcal{B}/\mathcal{B}}; k)$ mit Koeffizienten in k der komplexen Schubert-Varietät $\overline{\mathcal{B}y\mathcal{B}/\mathcal{B}}$ erfüllt Poincaré-Dualität.*

Bemerkung 1.2. Man bezeichne eine (komplexe) Varietät X als "k-glatt", wenn $H^\bullet(X; k)$ Poincaré-Dualität erfüllt. Für Wurzelsysteme vom Typ ADE ist jede $\mathbb{Q}$-glatte Schubert-Varietät schon glatt nach unveröffentlichten Resultaten von Peterson [Car94] und damit k-glatt für alle k. Im allgemeinen gilt das nicht. Es wäre interessant zu wissen, ob jede $\mathbb{Q}$-glatte Schubert-Varietät zumindest k-glatt ist für alle k mit $\mathrm{char} k >$ Coxeterzahl.

Man betrachte weiter die nach unten beschränkte derivierte Kategorie $D^+\mathrm{Sh}_k(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ zur Kategorie $\mathrm{Sh}_k(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ aller Garben von k-Vektorräumen auf der komplexen Varietät $\mathcal{G}/\mathcal{B}$. Bezeichne $\mathcal{K} \subset D^+\mathrm{Sh}_k\mathcal{G}/\mathcal{B}$ die volle Unterkategorie, die aus allen Objekten der Form $R\pi_*(k_{\mathrm{BS}})$ mitsamt ihren direkten Summen und Summanden und deren [ ]-Verschobenen besteht, wo k_{BS} die konstante Garbe k auf einer Bott-Samelson-Varietät BS bezeichnet und $\pi : \mathrm{BS} \to \mathcal{G}/\mathcal{B}$ die Projektion. In Formeln ausgedrückt nehmen wir also alle Varietäten BS von der Form

$$\mathrm{BS} = \mathcal{P}_s \times^{\mathcal{B}} \mathcal{P}_t \times^{\mathcal{B}} \ldots \times^{\mathcal{B}} \mathcal{P}_r \times^{\mathcal{B}} \mathcal{B}/\mathcal{B}$$

für eine beliebige Folge $s, t, \ldots, r \in S$ von einfachen Spiegelungen mit zugehörigen minimalen Parabolischen $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}_s, \mathcal{P}_t, \ldots, \mathcal{P}_r \subset \mathcal{G}$.

Theorem 1.3. *Sei $p > h$. So gilt:*

1. *Für jedes $y \in W$ gibt es (bis auf Isomorphismus) genau ein unzerlegbares Objekt $\mathcal{L}_y \in \mathcal{K}$ derart, daß $\mathcal{L}_y[-l(y)]|_{\mathcal{B}y\mathcal{B}/\mathcal{B}}$ die konstante Garbe k auf der Bruhat-Zelle $\mathcal{B}y\mathcal{B}/\mathcal{B}$ ist und $\mathrm{supp}\mathcal{L}_y \subset \overline{\mathcal{B}y\mathcal{B}/\mathcal{B}}$.*
2. *Die Dimensionen der Halme der Kohomologiegarben der $\mathcal{L}_y$ liefern Multiplizitäten, genauer gilt für alle $x, y \in W$ die Formel*
$$[H^0(\mathrm{st} + x\rho) : L(\mathrm{st} + y\rho)] = \sum_i \dim_k(\mathcal{H}^i\mathcal{L}_y)_x.$$

Bemerkungen 1.4. 1. Aus dem Theorem folgt, daß $\mathcal{L}_y$ selbstdual ist unter Verdier-Dualität. Für fast alle p (ich hoffe, für alle $p > h$) ist $\mathcal{L}_y$ gerade der Schnittkohomologie-Komplex $\mathcal{IC}(\overline{\mathcal{B}y\mathcal{B}/\mathcal{B}}; k)$ mit Koeffizienten in k der Schubert-Varietät $\overline{\mathcal{B}y\mathcal{B}/\mathcal{B}}$, ausgedehnt durch Null auf ganz $\mathcal{G}/\mathcal{B}$.

2. Wir werden zeigen, daß jedes unzerlegbare Objekt von $\mathcal{K}$ bis auf $[\ ]$-Verschiebung zu genau einem der $\mathcal{L}_y$ isomorph ist.

Korollar 1.5. *Für $p > h$ sind die folgenden Aussagen gleichbedeutend:*

1. *Für alle $x, y \in W$ sind die Vielfachheiten $[H^0(\mathrm{st}+x\rho) : L(\mathrm{st}+y\rho)]$ wie von Lusztig vermutet.*
2. *Für jede einfache Spiegelung $s \in S$ und jedes $x \in W$ mit $xs > x$ ist das derivierte direkte Bild $R\pi_{s*}\mathcal{IC}(\overline{\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}}; k)$ des Schnittkohomologie-Komplexes der Schubert-Varietät unter der Projektion $\pi_s : \mathcal{G}/\mathcal{B} \to \mathcal{G}/\mathcal{P}_s$ eine halbeinfache perverse Garbe auf $\mathcal{G}/\mathcal{P}_s$.*

Die vorliegende Arbeit entstand aus dem Versuch, die Argumente von [Soe90] in endliche Charakteristik zu übertragen. Das gelingt weitgehend, aber beim Zerlegungssatz hapert es. Genau das spiegelt sich in den obigen Theoremen wieder.

2. Argumente aus der Darstellungstheorie

In diesem Abschnitt 2 wollen wir stets annehmen, daß die Charakteristik p von k größer ist als die Coxeterzahl h.

2.1. **Beschreibung einiger Endomorphismenringe.** Wir beschreiben die Endomorphismen der G-Moduln, die man erhält wenn man den Steinberg-Modul $\mathrm{St} = H^0(\mathrm{st})$ aus einigen Wänden rückt.

Bezeichne $\lambda \mapsto w\lambda$ die Operation der Weylgruppe W auf $X(T)$. Bezeichne $\lambda \mapsto w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ die zum Fixpunkt $-\rho$ verschobene Operation. Bezeichne $W_p \subset \mathrm{Aff}\, X(T)$ die von allen $(w\cdot)$ mit $w \in W$ und den Verschiebungen $(+\mu)$ mit $\mu \in p\mathbb{Z}R$ erzeugte Untergruppe affiner Transformationen von $X(T)$. Wir nennen W_p die affine Weylgruppe und notieren ihre Operation auf $X(T)$ auch $\lambda \mapsto w \cdot \lambda$, da sie die dot-Operation von W erweitert. Nach [Jan87] zerfällt die Kategorie G-Mod aller rationalen G-Moduln in

$$G\text{-Mod} = \prod_{\Omega} G\text{-Mod}_\Omega$$

wo Ω alle W_p-Orbiten in $X(T)$ durchläuft und G-Mod$_\Omega$ aus allen G-Moduln besteht, deren sämtliche einfache Subquotienten unter den $L(\lambda)$ mit $\lambda \in \Omega$ sind. Für je zwei W_p-Orbiten $\Omega, \Gamma \subset X(T)$ definiert man wie in [Jan87] den Verschiebungsfunktor $T_\Omega^\Gamma : G\text{-Mod}_\Omega \to G\text{-Mod}_\Gamma$.

Jetzt nehmen wir die ganzen Gewichte im (geeignet verschobenen) unteren Abschluss des fundamentalen dominanten Alkovens, genauer die Menge

$$I = \{\lambda \in X(T) \mid 0 \leq \langle \lambda, \check{\alpha} \rangle < p \ \ \forall \alpha \in R^+\}$$

als bequeme Parametermenge für einen Teil der W_p-Orbiten, und bezeichnen für $\lambda, \mu \in I$ mit T_λ^μ den Verschiebungsfunktor vom W_p-Orbit von st $+ \lambda$ zum W_p-Orbit von st $+ \mu$.

Sei $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$, $U = U(\mathfrak{h})$ die symmetrische Algebra über $\mathfrak{h}$, $U^+ \subset U$ das von $\mathfrak{h}$ erzeugte Ideal und $C = C(W, \mathfrak{h}) = U/(U^+)^W U$ die Algebra der Koinvarianten. Für $\lambda \in X(T)$ bezeichne W_λ seinen Stabilisator in der Weylgruppe. Es ist also $W_0 = W$. In [AJS94], 19.8 zeigen wir:

Theorem 2.1.1. [AJS94] *Für jedes $\lambda \in I$ gibt es einen Isomorphismus $\mathrm{can}_\lambda : \mathrm{End}_G T_0^\lambda \mathrm{St} \to C^{W_\lambda}$ unseres Endomorphismenrings mit dem Ring der W_λ-Invarianten in der Koinvariantenalgebra C.*

Genauer seien $\lambda, \mu \in I$ gegeben mit $W_\lambda \supset W_\mu$. So gibt es nach [Jan87] einen Isomorphismus iso : $T_\lambda^\mu T_0^\lambda \mathrm{St} \to T_0^\mu \mathrm{St}$, und da die Endomorphismenringe unserer Moduln kommutativ sind, hängt die Abbildung $\mathrm{End}_G T_0^\lambda \mathrm{St} \to \mathrm{End}_G T_0^\mu \mathrm{St}$, $f \mapsto \mathrm{iso} \circ (T_\lambda^\mu f) \circ \mathrm{iso}^{-1}$ nicht von der Wahl von iso ab. Wir kürzen die Notation etwas ab und schreiben diese Abbildung

$$T_\lambda^\mu : \mathrm{End}_G T_0^\lambda \mathrm{St} \to \mathrm{End}_G T_0^\mu \mathrm{St}.$$

Genauer als im Theorem angegeben konstruieren wir in [AJS94], 19.8 sogar explizit Isomorphismen $\mathrm{can}_\lambda : \mathrm{End}_G T_0^\lambda \mathrm{St} \to C^{W_\lambda}$ und unsere Konstruktion zeigt:

Theorem 2.1.2. [AJS94] *Für $\lambda, \mu \in I$ mit $W_\lambda \supset W_\mu$ kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_G T_0^\lambda \mathrm{St} & \xrightarrow{\mathrm{can}_\lambda} & C^{W_\lambda} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{End}_G T_0^\mu \mathrm{St} & \xrightarrow{\mathrm{can}_\mu} & C^{W_\mu} \end{array}$$

wo die linke Vertikale unsere Abbildung T_λ^μ ist und die rechte Vertikale die offensichtliche Inklusion.

2.2. **Quotientenkategorien.** In diesem Abschnitt erinnern wir an einige Definitionen und Resultate über Quotientenkategorien, für eine ausführlichere Diskussion siehe [Gab62].

Definition 2.2.1. Eine volle Unterkategorie $\mathcal{N}$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ heißt "Serresche Unterkategorie" genau dann, wenn für jede kurze exakte Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ in $\mathcal{A}$ gilt $M \in \mathcal{N} \Leftrightarrow M', M'' \in \mathcal{N}$. In anderen Worten ausgedrückt ist $\mathcal{N}$ eine volle Unterkategorie und ist stabil unter Subquotienten und Erweiterungen.

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ eine Serresche Unterkategorie. So definiert man die Quotientenkategorie $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ wie folgt: Die

Objekte von $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ sind schlicht die Objekte von $\mathcal{A}$, die Morphismen jedoch sind erklärt durch

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(M,N) = \lim_{U,I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U,I),$$

wo sich der direkte Limes über alle Unterobjekte $i : U \hookrightarrow M$ und alle Quotienten $p : N \to I$ erstreckt, für die $\mathrm{coker}(i)$ bzw. $\ker(p)$ in $\mathcal{N}$ liegen.

Man zeigt, daß $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ eine abelsche Kategorie ist, daß der offensichtliche Funktor $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{N}$ exakt ist, und daß $QM \cong 0$ für alle $M \in \mathcal{N}$. Ist andererseits $\mathcal{B}$ eine abelsche Kategorie und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein exakter Funktor derart daß $FM \cong 0$ für alle $M \in \mathcal{N}$, so faktorisiert F eindeutig über einen exakten Funktor $F' : \mathcal{A}/\mathcal{N} \to \mathcal{B}$ in $F = F' \circ Q$.

Definition 2.2.2. Eine Artinsche Kategorie ist eine abelsche Kategorie, deren Objekte sämtlich endliche Länge haben.

Um eine Serresche Unterkategorie einer Artinschen Kategorie anzugeben, muss man nur sagen, was ihre einfachen Objekte sein sollen.

Sei nun $\mathcal{A}$ eine Artinsche Kategorie mit einem projektiven Erzeuger. Insbesondere hat $\mathcal{A}$ dann nur endlich viele einfache Isomorphieklassen. Sei $\{L_x\}_{x\in W}$ ein Repräsentantensystem für diese einfachen Isomorphieklassen. Jedes L_x hat eine projektive Decke P_x. Für jede Teilmenge $T \subset W$ sei $\mathcal{A}_T \subset \mathcal{A}$ die Serresche Unterkategorie aller Objekte "mit Träger in T", d.h. mit einfachen Objekten $\{L_x\}_{x\in T}$. Bezeichne $M \mapsto \overline{M}$ den Quotientenfunktor $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{A}_T$. Für alle $x \in W \setminus T$ und $M \in \mathcal{A}$ ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_x, M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A}_T}(\overline{P_x}, \overline{M})$. Insbesondere sind für $x \in W \setminus T$ die $\overline{P_x}$ projektive Decken der $\overline{L_x}$.

Für einen Ring R bezeichne $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}\text{-}R$ die Kategorie aller Rechtsmoduln endlicher Länge. Ist $\mathcal{A}$ eine Artinsche Kategorie und $P \in \mathcal{A}$ ein projektiver Erzeuger, so ist bekanntlich [Bas68] $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P) : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}\text{-}\mathrm{End}_{\mathcal{A}}P$ eine Äquivalenz von Kategorien. Für $T \subset W$ setzen wir $P_T = \bigoplus_{x\in T} P_x$. Im durch die universelle Eigenschaft von $\mathcal{A}/\mathcal{A}_T$ erklärten kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccl}
\mathcal{A} & = & \mathcal{A} \\
\downarrow & & \downarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_{W\setminus T},\ ) \\
\mathcal{A}/\mathcal{A}_T & \to & \mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}\text{-}\mathrm{End}_{\mathcal{A}}P_{W\setminus T}
\end{array}$$

ist nach unseren Vorüberlegungen dann insbesondere die untere Horizontale eine Äquivalenz von Kategorien.

Wir werden später folgende Terminologie benutzen:

Definition 2.2.3. Ein exakter Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt ein "Quotientenfunktor" genau dann, wenn er eine Äquivalenz $\mathcal{A}/\ker F \to \mathcal{B}$ induziert.

Bemerkung 2.2.4. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein exakter Funktor zwischen Abelschen Kategorien. Seien $\mathcal{N}_\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{N}_\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ Serresche Unterkategorien und es gelte $F(\mathcal{N}_\mathcal{A}) \subset \mathcal{N}_\mathcal{B}$. So induziert F einen Funktor $\overline{F} : \mathcal{A}/\mathcal{N}_\mathcal{A} \to \mathcal{B}/\mathcal{N}_\mathcal{B}$.

Nehmen wir weiter an, daß F einen linksadjungierten Funktor G besitzt, daß G exakt ist, und daß $G(\mathcal{N}_\mathcal{B}) \subset \mathcal{N}_\mathcal{A}$, so ist auch $\overline{G}$ linksadjungiert zu $\overline{F}$.

2.3. **Die reguläre Subquotientenkategorie.** Wir setzen G-Mof $= \{M \in G\text{-Mod} \mid \dim_k M < \infty\}$. Es gibt eine kontravariante Involution $d : G\text{-Mof} \to G\text{-Mof}$ derart, daß gilt $dL \cong L$ für jedes einfache Objekt L. Genauer nimmt man als dM die kontravariante Darstellung M^* vertwistet mit einer Chevalley-Involution von G. Wir setzen $V(\lambda) = dH^0(\lambda)$. Wir benützen die Ordnungsrelation $\uparrow$ auf X erklärt in [Jan87], II.6.4 und setzen

$$\mathcal{A} = \{M \in G\text{-Mof} \mid [M : L(\lambda)] \neq 0 \Rightarrow \lambda \uparrow \mathrm{st} + \rho\}.$$

Darin betrachten wir die Unterkategorie

$$\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{A} \mid [M : L(\lambda)] = 0 \ \ \forall \lambda \in \mathrm{st} + W\rho\}$$

und definieren schließlich den "regulären Subquotienten um den Steinbergpunkt" $\mathcal{O} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$. Bezeichne $M \mapsto \overline{M}$ den Quotientenfunktor $\mathcal{A} \to \mathcal{O}$. Wir setzen

$$M_x = \overline{V(\mathrm{st} + x\rho)} \in \mathcal{O}.$$

Jetzt listen wir einige Eigenschaften von $\mathcal{O}$ und den M_x auf.

1. Jedes Objekt von $\mathcal{O}$ hat endliche Länge. Alle Morphismenräume sind endlichdimensional.
2. Jedes M_x hat genau einen einfachen Quotienten L_x. Die $\{L_x\}_{x \in W}$ bilden ein Repräsentantensystem für die einfachen Isomorphieklassen von $\mathcal{O}$.
3. Es gibt eine kontravariante Involution $d : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ derart, daß $dL_x \cong L_x$ für alle $x \in W$.
4. Es gibt eine Teilordnung $\leq$ auf W derart, daß $[M_x : L_y] \neq 0 \Leftrightarrow y \leq x$. Ferner ist $[M_x : L_x] = 1$ für alle $x \in W$. (Natürlich ist diese Ordnung gerade die Bruhat-Ordnung, aber wir werden dieses Faktum nicht benutzen.)
5. M_e ist die projektive Decke von L_e in $\mathcal{O}$. Das folgt daraus, daß $V(\mathrm{st} + \rho)$ die projektive Decke von $L(\mathrm{st} + \rho)$ in $\mathcal{A}$ ist.
6. $\overline{T_0^\rho \mathrm{St}} = P_{w_\circ}$ ist die projektive Decke von $L_{w_\circ}$ in $\mathcal{O}$. Dies $P_{w_\circ}$ hat eine Filtrierung, in der jedes M_x mit $x \in W$ genau einmal als Subquotient auftaucht. Weiter liefert can_ρ einen kanonischen Isomorphismus $\mathrm{can} : \mathrm{End}_\mathcal{O} P_{w_\circ} \to C$.

2.4. **Die semiregulären Subquotientenkategorien.** Für jede einfache Spiegelung $s \in S$ sei $\alpha \in R^+$ die zugehörige einfache Wurzel und ϖ_α das Fundamentalgewicht. Wir betrachten $\mu = \mu(s) = \rho - \varpi_\alpha \in I$. Dies Gewicht liegt auf der s-Wand, $W_\mu = \langle s \rangle$. Ähnlich wie zuvor nehmen wir

$$\mathcal{A}^s = \{M \in G\text{-Mof} \mid [M : L(\lambda)] \neq 0 \Rightarrow \lambda \uparrow \mathrm{st} + \mu\}$$

betrachten darin die Unterkategorie

$$\mathcal{N}^s = \{M \in \mathcal{A}^s \mid [M : L(\lambda)] = 0 \ \ \forall \lambda \in \mathrm{st} + W\mu\}$$

und bilden den Quotienten $\mathcal{O}^s = \mathcal{A}^s / \mathcal{N}^s$. Darin liegen die Standardobjekte

$$M_x^s = \overline{V(\mathrm{st} + x\mu)}.$$

Es ist $M_x^s = M_{xs}^s$ für $x \in W$. Jedes M_x^s hat genau einen einfachen Quotienten L_x^s.

Wir werden insbesondere brauchen, daß $\overline{T_0^\mu \mathrm{St}} = P_{w_\circ}^s$ die projektive Decke von $L_{w_\circ}^s$ in $\mathcal{O}^s$ ist. Es hat $P_{w_\circ}^s$ eine Filtrierung, in der jedes M_x^s mit $x \in W/\langle s \rangle$ genau einmal als Subquotient auftaucht. Weiter liefert can_μ einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{can}^s : \mathrm{End}_{\mathcal{O}^s} P_{w_\circ}^s \to C^s.$$

2.5. **Verschiebung.** Seien $s \in S$, $\mu = \mu(s)$ wie vorhin. Die Verschiebungsfunktoren auf die Wand und aus der Wand T_ρ^μ und T_μ^ρ induzieren Funktoren zwischen unseren Subquotientenkategorien, die wir mit $T^s : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^s$ und $T_s : \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}$ bezeichnen. Aus bekannten Eigenschaften der T_ρ^μ, T_μ^ρ folgen viele Eigenschaften der T^s, T_s.

1. Die Funktoren T^s, T_s sind exakt und sowohl rechts- als auch linksadjungiert zueinander.
2. Es ist $T^s M_x \cong M_x^s$ und falls $y < ys$ in der Bruhat-Ordnung gibt es eine kurze exakte Sequenz
$$M_y \hookrightarrow T_s M_y^s \twoheadrightarrow M_{ys}.$$
3. Es ist $T_s P_{w_\circ}^s \cong P_{w_\circ}$, wir erhalten eine von der Wahl dieses Isomorphismus unabhängige Abbildung $T_s : \mathrm{End}_{\mathcal{O}^s} P_{w_\circ}^s \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}} P_{w_\circ}$ und das Diagramm
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_{\mathcal{O}^s} P_{w_\circ}^s & \xrightarrow{\mathrm{can}^s} & C^s \\ T_s \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{End}_{\mathcal{O}} P_{w_\circ} & \xrightarrow{\mathrm{can}} & C \end{array}$$
kommutiert mit der Inklusion als der rechten Vertikalen.

4. Die Verschiebung durch die Wand
$$\theta_s = T_s T^s : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$$
ist ein exakter selbstadjungierter Funktor. Ist $y \in W$ mit $y < ys$, so gibt es eine kurze exakte Sequenz
$$M_y \hookrightarrow \theta_s M_y \twoheadrightarrow M_{ys}.$$
5. Es gibt genug projektive Objekte in $\mathcal{O}$, und jedes ist direkter Summand eines Objekts der Form $\theta_s \ldots \theta_t M_e$. In der Tat ist M_e projektiv nach 2.3.5 und die θ_s sind exakt und selbstadjungiert, somit sind alle $\theta_s \ldots \theta_t M_e$ projektiv. Ist nun $x = t \ldots s$ eine reduzierte Zerlegung, so gibt es nach dem vorhergehenden Punkt eine Surjektion $\theta_s \ldots \theta_t M_e \twoheadrightarrow M_x \twoheadrightarrow L_x$. Das zeigt, was wir brauchen.
6. Bezeichne $P_x \twoheadrightarrow L_x$ die projektive Decke in $\mathcal{O}$. Jedes P_x hat eine Filtrierung mit Subquotienten der Form M_y. Bezeichnet $(P_x : M_y)$ die Multiplizität, mit der M_y als Subquotient auftritt, so gilt die Reziprozitätsformel $(P_x : M_y) = [M_y : L_x]$.
7. Für alle $s \in S$, $M \in \mathcal{O}$ gilt $[\theta_s M : L_{w_\circ}] = 2[M : L_{w_\circ}]$. In der Tat wissen wir nach 2.3.6 daß $(P_{w_\circ} : M_x) = 1 \;\; \forall x \in W$. Mit 2.5.4 folgt aus dem Vergleich der Charaktere $\theta_s P_{w_\circ} \cong P_{w_\circ} \oplus P_{w_\circ}$. Jetzt ist
$$\begin{array}{rcl} [\theta_s M : L_{w_\circ}] & = & \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P_{w_\circ}, \theta_s M) \\ & = & \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\theta_s P_{w_\circ}, M) \\ & = & 2 \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P_{w_\circ}, M) \\ & = & 2[M : L_{w_\circ}]. \end{array}$$
8. Es ist $[M_x : L_{w_\circ}] = (P_{w_\circ} : M_x) = 1$ für alle $x \in W$. Genauer gilt sogar $\mathrm{soc} M_x = L_{w_\circ}$ für alle $x \in W$. In der Tat reicht es zu zeigen: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L_y, M_x) \neq 0 \Rightarrow y = w_\circ$. Das folgt mit Induktion von oben über die Länge von x. Für $x = w_\circ$ ist die Aussage klar. Sei $xs < x$. So haben wir eine kurze exakte Sequenz $M_{xs} \hookrightarrow \theta_s M_x \twoheadrightarrow M_x$ und es folgt:
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L_y, M_{xs}) \neq 0 & \Rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L_y, \theta_s M_x) \neq 0 \\ & \Rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\theta_s L_y, M_x) \neq 0 \\ & \Rightarrow & [\theta_s L_y : L_{w_\circ}] \neq 0 \\ & \Rightarrow & y = w_\circ. \end{array}$$

2.6. **Homomorphismen zwischen Projektiven.** Unser kanonischer Isomorphismus can : $\mathrm{End}_{\mathcal{O}} P_{w_\circ} \to C$ liefert uns einen exakten Funktor
$$\mathbb{V} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P_{w_\circ}, \;\;) : \mathcal{O} \to C\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}.$$
Wir wollen zeigen

Theorem 2.6.1. *Sind $M, Q \in \mathcal{O}$ und ist Q projektiv, so induziert $\mathbb{V}$ einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, Q) \to \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}M, \mathbb{V}Q).$$

Beweis. Wir gehen in Schritten vor.

$Q = P_{w_\circ}$**:** In diesem Fall ist $Q = \overline{T_0^\rho \mathrm{St}}$ auch die injektive Hülle von $M_{w_\circ} = L_{w_\circ}$. Für $M \in C\text{-Mod}^{\mathrm{fl}}$ ist auch der Dualraum $M^* = \mathrm{Hom}_k(M, k)$ ein C-Modul. Dank unseren Einschränkungen an die Charakteristik ist C der Kohomologiering der glatten Mannigfaltigkeit $C = H^\bullet(\mathcal{G}/\mathcal{B}; k)$, siehe [Dem73], und Poincaré-Dualität liefert uns einen Isomorphismus $C \cong C^*$ in $C\text{-Mod}^{\mathrm{fl}}$. Folglich ist C nicht nur projektive Decke, sondern auch injektive Hülle von $k \in C\text{-Mod}^{\mathrm{fl}}$.

Da $\mathbb{V}Q = C$ sind in unserem Fall beide Seiten des behaupteten Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, Q) \to \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}M, \mathbb{V}Q)$ exakt in M. Nach dem Fünferlemma reicht es dann, diesen Isomorphismus für einfaches M zu zeigen. Das überlassen wir dem Leser.

$Q = M_e$**:** Betrachten wir nochmal unseren Isomorphismus von eben und nehmen auf beiden Seiten den Teil, der vom maximalen Ideal $C^+ \subset C$ annulliert wird. Wir erhalten einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}M, k)$ wo $N \subset P_{w_\circ}$ das größte von C^+ annullierte Unterobjekt ist und wir rechts $k = \mathrm{soc} C$ benutzen. Wir müssen nur noch zeigen, daß $N = M_e$. Offensichtlich haben wir eine kurze exakte Sequenz $M_e \hookrightarrow P_{w_\circ} \twoheadrightarrow \mathrm{coker}$ und coker hat eine Filtrierung mit Subquotienten M_x.

Da $\mathrm{soc} M_x = L_{w_\circ}$ für alle x folgt für jedes Unterobjekt $U \subset \mathrm{coker}$, das nicht Null ist, schon $[U : L_{w_\circ}] \neq 0$. Nun gilt sicher $M_e \subset N$. Wäre $M_e \neq N$, so wäre das Bild von N in coker nicht Null, folglich $[N : L_{w_\circ}] \geq 2$. Aber $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P_{w_\circ}, N) \subset \mathrm{End}_{\mathcal{O}} P_{w_\circ}$ ist ein Ideal, das von C^+ annulliert wird, somit $1 \geq \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P_{w_\circ}, N) = [N : L_{w_\circ}]$. Dieser Widerspruch zeigt, daß in der Tat $M_e = N$.

Q **beliebig:** Jedes projektive $Q \in \mathcal{O}$ ist direkter Summand eines Objekts der Form $\theta_s \ldots \theta_t M_e$, somit dürfen wir $Q = \theta_s \ldots \theta_t M_e$ annehmen. Jetzt folgt mit dem letzten Abschnitt von 2.2 für jedes $M \in \mathcal{O}$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \theta_s \ldots \theta_t M_e) & = & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\theta_t \ldots \theta_s M, M_e) \\
& = & \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}\theta_t \ldots \theta_s M, \mathbb{V}M_e) \\
& = & \mathrm{Hom}_C(\overline{\theta_t} \ldots \overline{\theta_s} \mathbb{V}M, \mathbb{V}M_e) \\
& = & \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}M, \overline{\theta_s} \ldots \overline{\theta_t} \mathbb{V}M_e) \\
& = & \mathrm{Hom}_C(\mathbb{V}M, \mathbb{V}\theta_s \ldots \theta_t M_e)
\end{array}$$

□

Weiter zeigen wir:

Theorem 2.6.2. *i.) Für alle $x \in W$ gilt $\mathbb{V} M_x = k$.*
ii.) Für alle $M \in \mathcal{O}$, $s \in S$ gilt $\mathbb{V}\theta_s M \cong C \otimes_{C^s} \mathbb{V} M$.

Beweis. i.) ist klar nach 2.5.8. Für ii.) betrachten wir das adjungierte Paar (T_s, T^s) von Funktoren zwischen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}^s$. Betrachten wir ebenso den Quotientenfunktor

$$\mathbb{V}^s = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}^s}(P^s_{w_\circ}, \ \ ) : \mathcal{O}^s \to C^s\text{-Mod}^{\mathrm{fl}}.$$

Da $T_s P^s_{w_\circ} \cong P_{w_\circ}$ gilt $[T^s M : L^s_{w_\circ}] = [M : L_{w_\circ}]$ für $M \in \mathcal{O}$. Weiter ist $[T_s M : L_{w_\circ}] = 2[M : L^s_{w_\circ}]$ für $M \in \mathcal{O}^s$, zum Beispiel weil das für alle Standardobjekte $M = M^s_x$ gilt.

Mithin liefert das adjungierte Paar (T_s, T^s) ein adjungiertes Paar $(\overline{T_s}, \overline{T^s})$ von Funktoren zwischen den Quotientenkategorien C-Mod$^{\mathrm{fl}}$ und C^s-Mod$^{\mathrm{fl}}$. Mit 2.5.3 folgt, daß $\overline{T^s} = \mathrm{res} : C\text{-Mod}^{\mathrm{fl}} \to C^s\text{-Mod}^{\mathrm{fl}}$ schlicht der Restriktionsfunktor ist. Somit ist notwendig $\overline{T_s} = C \otimes_{C^s}$ und es folgt $\mathbb{V}\theta_s M \cong \mathbb{V} T_s T^s M \cong \mathbb{V}\overline{T_s}\,\overline{T^s} M \cong C \otimes_{C^s} \mathbb{V} M$. □

2.7. **Zerlegung mit und ohne Graduierung.** Sei C eine endlichdimensionale graduierte k-Algebra – wir erlauben sogar Teile von negativem Grad. Sei C-mod$^{\mathrm{fl}}$ die Kategorie aller graduierten endlichdimensionalen C-Moduln, bezeichne $\hom_C$ die Morphismen in dieser Kategorie und sei $v : C\text{-mod}^{\mathrm{fl}} \to C\text{-Mod}^{\mathrm{fl}}$ das Vergessen der Graduierung. Für $M = \bigoplus M^n \in C\text{-mod}^{\mathrm{fl}}$ erkläre man das in der Graduierung verschobene $M\langle\nu\rangle \in C\text{-mod}^{\mathrm{fl}}$ durch $(M\langle\nu\rangle)^n = M^{n-\nu}$. Es ist also $v(M\langle\nu\rangle) = vM$ und $\mathrm{Hom}_C(vM, vN) = \bigoplus_\nu \hom_C(M, N\langle\nu\rangle)$.

Definition 2.7.1. Sei $M \in C$-Mod$^{\mathrm{fl}}$. Wir sagen “M liftet” genau dann, wenn es $\tilde{M} \in C$-mod$^{\mathrm{fl}}$ gibt so daß $v\tilde{M} \cong M$.

Proposition 2.7.2. *Seien $M, N \in C$-Mod$^{\mathrm{fl}}$ gegeben derart daß (1) N, $M \oplus N$ liften und (2) N direkt unzerlegbar ist. So liftet auch M, genauer finden wir zu jedem Lift $\widetilde{M \oplus N}$ von $M \oplus N$ einen Lift $\tilde{M}$ von M, der ein direkter Summand von $\widetilde{M \oplus N}$ ist.*

Beweis. Die Inklusion $i : N \hookrightarrow M \oplus N$ und die Projektion $p : M \oplus N \twoheadrightarrow N$ zerfallen auf Lifts dieser Objekte in homogene Komponenten $i = \sum i_\nu$, $p = \sum p_\nu$. Da wir N unzerlegbar angenommen hatten, ist $\mathrm{End}_C N$ lokal. Da $\mathrm{id} = p \circ i = \sum p_\nu \circ i_{-\nu}$ ein Isomorphismus ist, muß schon für ein ν die Abbildung $p_\nu \circ i_{-\nu}$ ein Isomorphismus sein. Sei $u \in \mathrm{end}_C \tilde{N}$ ihr Inverses. So ist $i_{-\nu}$ eine Spaltung der Projektion $u \circ p_\nu : \widetilde{M \oplus N} \to \tilde{N}\langle\nu\rangle$ und $\ker(u \circ p_\nu)$ ist ein Lift von M. □

Andererseits beachte man:

Lemma 2.7.3. *Je zwei Lifts eines unzerlegbaren C-Moduls endlicher Dimension M sind isomorph bis auf Verschiebung der Graduierung.*

Beweis. Seien $\tilde{M}$, $\tilde{M}'$ zwei Lifts von M. Die Identität auf M zerfällt in homogene Komponenten in $\mathrm{Hom}_C(\tilde{M}, \tilde{M}')$. Da M unzerlegbar ist, muß eine dieser homogenen Komponenten ein Isomorphismus sein. □

2.8. **Definition der Moduln D_x.** Sei nun C wieder die Koinvariantenalgebra mit der geraden Graduierung $C = \bigoplus C^{2\nu}$. Betrachten wir die additive Unterkategorie $\mathcal{C} \subset C\text{-mod}^{\mathrm{fl}}$ gebildet von allen $C \otimes_{C^s} C \ldots \otimes_{C^t} k\langle\nu\rangle$ mit $s, \ldots, t \in S, \nu \in \mathbb{Z}$ und ihren direkten Summen und Summanden.

Theorem 2.8.1.
1. *Es gibt eine Familie $\{D_x\}_{x\in W}$ von unzerlegbaren Objekten in $C\text{-mod}^{\mathrm{fl}}$ derart, daß für jede reduzierte Zerlegung $x = t \ldots s$ $(s, \ldots, t \in S)$ gilt*
$$C \otimes_{C^s} C \ldots \otimes_{C^t} k\langle -l(x)\rangle \cong D_x \oplus \mathrm{Rest},$$
wo Rest *eine direkte Summe von $D_y\langle\nu\rangle$ ist mit $y < x$, $\nu \in \mathbb{Z}$.*
2. *Ist $\{D'_x\}_{x\in W}$ eine andere solche Familie, so ist $D'_x \cong D_x \;\; \forall x \in W$.*
3. *Die D_x bleiben unzerlegbar, wenn man ihre Graduierung vergißt.*
4. *$\{D_x\langle\nu\rangle\}_{x\in W,\nu\in\mathbb{Z}}$ ist ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte von $\mathcal{C}$.*

Wir beweisen dies Theorem zusammen mit dem folgenden Theorem, das ihm eigentlich erst seinen Sinn gibt:

Theorem 2.8.2. *Es ist $\mathbb{V}P_x \cong vD_x$ für alle $x \in W$.*

Beweis der beiden Theoreme. Zunächst zeigen wir den ersten Teil des ersten Theorems zusammen mit dem zweiten Theorem durch Induktion über die Länge von x. Für $x = e$ ist alles trivial. Für $x = t \ldots s$ (reduzierte Zerlegung) gilt nach 2.5, 4, 6 und 2.3, 4
$$\theta_s \ldots \theta_t P_e \cong P_x \oplus \mathrm{Rest}$$
wo Rest eine Summe von P_y mit $y < x$ ist. Es folgt
$$\begin{aligned} C \otimes_{C^s} C \ldots \otimes_{C^t} k &= \mathbb{V}\theta_s \ldots \theta_t P_e \\ &\cong \mathbb{V}(P_x) \oplus \mathbb{V}(\mathrm{Rest}). \end{aligned}$$
Nach Induktion ist $\mathbb{V}(\mathrm{Rest})$ eine Summe von vD_y mit $y < x$. Jedes von diesen vD_y liftet nach Induktionsannahme. Nach Proposition 2.7.2 liftet damit auch $\mathbb{V}P_x$, und sogar zu einem direkten Summanden von $C \otimes_{C^s} C \ldots \otimes_{C^t} k\langle -l(x)\rangle$. Das zeigt den ersten Teil des ersten Theorems sowie das zweite Theorem.

Wir müssen noch dem Rest des ersten Theorems zeigen. 2 folgt leicht mit dem Satz von Krull-Schmid. 3 folgt daraus, daß $\mathrm{End}_C D_x = \mathrm{End}_{\mathcal{O}} P_x$

lokal ist. Teil 4 folgt mit Krull-Schmidt und Lemma 2.7.3, sobald wir wissen, daß in C-Mod die Unterkategorie bestehend aus endlichen Summen von D_x stabil ist unter $C \otimes_{C^s}$ für alle $s \in S$. Das folgt aber, da $C \otimes_{C^s} D_x = \mathbb{V}\theta_s P_x$ und da $\theta_s P_x$ projektiv ist, also eine Summe von unzerlegbaren Projektiven. $\square$

2.9. **Eigenschaften der Moduln D_x.** Nach [Dem73] ist ja unsere Koinvariantenalgebra $C = H^\bullet(\mathcal{G}/\mathcal{B}; k)$ genau der Kohomologiering der Fahnenmannigfaltigkeit $\mathcal{G}/\mathcal{B}$. Für die Homologie liefern die Bruhat-Zellen $\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}$ eine kanonische Basis, und die dazu duale Basis der Kohomologie bezeichnen wir mit $\{p_x\}_{x\in W}$. Jedes $s \in S$ mit zugehöriger einfacher Wurzel α liefert uns einen Demazure-Operator $\partial_s : S \to S$, $f \mapsto (f - sf)/\check{\alpha}$. Er induziert eine Abbildung $\partial_s : C \to C$ auf den Koinvarianten, und es ist bekannt zum Beispiel nach [BGG73], 3.14(i), daß

$$\partial_s p_x = \begin{cases} p_{xs} & xs < x; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Einschränkung $H^\bullet(\mathcal{G}/\mathcal{B}; k) \to H^\bullet(\overline{\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}}; k)$ hat den Kern $I_x = \sum_{y \not\leq x} kp_y \subset C$. Wir wollen zeigen:

Proposition 2.9.1. *Für alle $x \in W$ gilt* $\dim D_x^{-l(x)} = \dim D_x^{l(x)} = 1$ *und* $\mathrm{Ann}_C D_x = I_x$.

Beweis. Zunächst zeigen wir:

$$f \in \mathrm{Ann}_C(C \otimes_{C^s} M) \Leftrightarrow f, \partial_s f \in \mathrm{Ann}_C M.$$

In der Tat kann man jedes Element von $C \otimes_{C^s} M$ eindeutig in der Form $1 \otimes m_1 + \check{\alpha} \otimes m_2$ schreiben, weiter ist $2f = (f + sf) + (\check{\alpha}(\partial_s f))$ die Zerlegung von $2f \in C$ nach $C = C^s \oplus \check{\alpha}C^s$, und damit gilt

$$\begin{aligned} 2f(1 \otimes m_1 + \check{\alpha} \otimes m_2) = \; & 1 \otimes ((f + sf)m_1 + (\check{\alpha})^2(\partial_s f)m_2) \\ & + \check{\alpha} \otimes ((\partial_s f)m_1 + (f + sf)m_2). \end{aligned}$$

Man erhält die Behauptung sofort. Dieselbe Rechnung zeigt auch $f \in \mathrm{Ann}_C(1 \otimes m) \Leftrightarrow f, \partial_s f \in \mathrm{Ann}_C(m)$.

Sei nun $x = t \ldots s$ eine reduzierte Zerlegung. Mit Induktion folgt $\mathrm{Ann}_C(C \otimes_{C^s} C \ldots \otimes_{C^t} k) = I_x$ und sogar $\mathrm{Ann}_C(1 \otimes 1 \ldots \otimes 1) = I_x$. Nun sind die beiden extremen Komponenten der Grade $l(x)$ und $-l(x)$ von $C \otimes_{C^s} C \ldots \otimes_{C^t} k\langle -l(x)\rangle$ eindimensional, und da $(C/I_x)^{2l(x)} \neq 0$ liegt die oberste homogene Komponente im Erzeugnis der untersten. Die Proposition folgt nun mit Induktion über die Länge von x. $\square$

Als nächstes zeigen wir:

Lemma 2.9.2. *Sei $M \in C$-mod$^{\mathrm{fl}}$, $s \in S$. So ist* $(C \otimes_{C^s} M)^* \cong C \otimes_{C^s} (M^*)\langle -2\rangle$.

Beweis. Wieder kann man jedes Element von $C \otimes_{C^s} M$ eindeutig in der Form $1 \otimes m_1 + \check{\alpha} \otimes m_2$ schreiben. Jetzt definieren wir eine Paarung

$$(C \otimes_{C^s} M) \times (C \otimes_{C^s} (M^*)) \to k, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

durch $\langle (1 \otimes m + \check{\alpha} \otimes n), (1 \otimes f + \check{\alpha} \otimes g) \rangle = f(n) + g(m)$ für alle $m, n \in M$, $f, g \in M^*$. Sie ist nicht ausgeartet und man prüft $\langle cv, w \rangle = \langle v, cw \rangle$ für $c \in C^s$ und $c = \check{\alpha}$, mithin für alle $c \in C$. □

Proposition 2.9.3. *Die Moduln D_x sind selbstdual, $D_x \cong D_x^*$.*

Beweis. Wir wissen ja inzwischen: Ist $x = t \dots s$ eine reduzierte Zerlegung und $M \subset C \otimes_{C^s} C \dots \otimes_{C^t} k\langle -l(x) \rangle$ ein direkter Summand mit $M^{l(x)} = k$ oder $M^{-l(x)} = k$, so ist $M \cong D_x$. Nun ist aber nach dem vorhergehenden Lemma $C \otimes_{C^s} C \dots \otimes_{C^t} k\langle -l(x) \rangle$ selbstdual. □

Theorem 2.9.4. *Für $x \in W$ sind äquivalent:*

1. $D_x \cong (C/I_x)\langle -l(x) \rangle$.
2. *Der Kohomologiering $H^\bullet(\overline{\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}}; k) = C/I_x$ mit Koeffizienten in k der Schubert-Varietät $\overline{\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}}$ erfüllt Poincaré-Dualität.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Sicher hat C/I_x genau einen einfachen Quotienten, und im Lichte der vorhergehenden Proposition impliziert 1, daß C/I_x auch genau einen einfachen Untermodul hat, $\mathrm{soc}(C/I_x) = k$. Daraus folgt 2 sofort.

$2 \Rightarrow 1$. Wir betrachten die Inklusion

$$(C/I_x)\langle -l(x) \rangle \hookrightarrow C \otimes_{C^s} C \dots \otimes_{C^t} k\langle -l(x) \rangle$$

mit $1 \mapsto 1 \otimes 1 \dots \otimes 1$. Nach Annahme bzw. Lemma 2.9.2 sind beide Seiten selbstdual, somit ergibt sich eine Surjektion

$$C \otimes_{C^s} C \dots \otimes_{C^t} k\langle -l(x) \rangle \twoheadrightarrow (C/I_x)\langle -l(x) \rangle.$$

Da I_x schon der Annullator der linken Seite ist, muß diese Surjektion spalten. Dann folgt aber sofort $D_x \cong (C/I_x)\langle -l(x) \rangle$. □

Um das erste Theorem aus der Einleitung zeigen zu können, brauchen wir noch etwas Vorbereitungen.

2.10. **Grothendieck-Gruppen.** Jeder Abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ordnen wir ihre Grothendieck-Gruppe $[\mathcal{A}]$ zu, und jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ liefert ein Element $[A] \in [\mathcal{A}]$. Andererseits definieren wir zu jeder additiven Kategorie $\mathcal{A}$ ihre spaltende Grothendieck-Gruppe $\langle \mathcal{A} \rangle$ wie folgt: $\langle \mathcal{A} \rangle$ ist die freie Abelsche Gruppe erzeugt von den Objekten von $\mathcal{A}$ mit Relationen $A' + A'' = A$ wann immer es eine spaltende kurze exakte Sequenz $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ gibt. Jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ liefert ein Element

$\langle A\rangle \in \langle\mathcal{A}\rangle$. Jeder (ko- oder kontravariante) exakte bzw. additive Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ liefert einen Gruppenhomomorphismus $F : [\mathcal{A}] \to [\mathcal{B}]$ bzw. $F\langle\mathcal{A}\rangle \to \langle\mathcal{B}\rangle$.

Betrachten wir nun unsere Kategorie $\mathcal{O}$. Sicher ist $\{[L_x]\}_{x\in W}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $[\mathcal{O}]$. Für $M \in \mathcal{O}$ sind die Koeffizienten von $[M]$ in dieser Basis schlicht die Jordan-Hölder-Multiplizitäten, d.h. $[M] = \sum_x [M : L_x][L_x]$. Nun hat die Übergangsmatrix $[M_y : L_x]$ obere Dreiecksform mit Einsen auf der Diagonalen, folglich ist auch $\{[M_x]\}_{x\in W}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $[\mathcal{O}]$. Die Koeffizienten von $[M]$ in dieser Basis schreiben wir $(M : M_x)$, d.h. $[M] = \sum_x (M : M_x)[M_x]$. Hat M eine Vermafahne (d.h. eine Filtrierung derart, daß sämtliche Subquotienten gewisse M_x sind), so ist $(M : M_x)$ genau die Multiplizität, mit der M_x als Subquotient vorkommt.

Elemente des Gruppenrings $\mathbb{Z}[W]$ schreiben wir in der Form $\sum_x n_x x$ mit $n_x \in \mathbb{Z}$. Wir erklären einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} A : [\mathcal{O}] & \to & \mathbb{Z}[W] \\ [M] & \mapsto & \sum (M : M_x)x. \end{array}$$

Das ist ein Isomorphismus Abelscher Gruppen, und aus 2.5 folgt sogar $A[\theta_s M] = A[M](1+s)$ für alle $M \in \mathcal{O}$, $s \in S$. Schließlich betrachten wir die additive Kategorie $p\mathcal{O}$ aller projektiven Objekte von $\mathcal{O}$. Aus 2.5 folgt, daß die offensichtliche Abbildung $\langle p\mathcal{O}\rangle \to [\mathcal{O}]$, $\langle P\rangle \mapsto [P]$ ein Isomorphismus ist. Die Komposition dieses Isomorphismus mit A nennen wir auch $A : \langle p\mathcal{O}\rangle \to \mathbb{Z}[W]$. Die θ_s bilden projektive Objekte auf projektive Objekte ab. Es folgt, daß auch $A\langle\theta_s P\rangle = A\langle P\rangle(1+s)$ für alle $P \in p\mathcal{O}$, $s \in S$.

2.11. **Beweis des ersten Theorems aus der Einleitung.** Zur Argumentation brauchen wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \langle p\mathcal{O}\rangle & \xrightarrow{\mathbb{V}} & \langle v\mathcal{C}\rangle & \xrightarrow{\dim} & \mathbb{Z} \\ A\downarrow & & B\downarrow & & || \\ \mathbb{Z}[W] & = & \mathbb{Z}[W] & \xrightarrow{\mathrm{tr}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Die Abbildung B wird schlicht durch die Bedingung definiert, daß das erste Quadrat kommutiert. Die Abbildung dim ist erlärt durch $\dim\langle M\rangle = \dim_k M$ für alle $M \in v\mathcal{C}$. Die Abbildung tr ist definiert durch $\mathrm{tr}(\sum n_x x) = \sum n_x$. Der Leser mag selber prüfen, daß auch das zweite Quadrat kommutiert. Ferner folgt aus 2.6.2 die Formel $B\langle C \otimes_{C^s} M\rangle = B\langle M\rangle(1+s)$ für $s \in \mathcal{S}$, $M \in v\mathcal{C}$. Theorem 1.1 folgt mit 2.9.4 und 2.5.6 aus

Theorem 2.11.1. *Sei $y \in W$. So sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $(P_y : M_x) = 1$ *für alle $x \in W$ mit $x \leq y$ in der Bruhat-Ordnung.*
2. $D_y \cong (C/I_y)\langle -l(y)\rangle$.

Beweis. Aus 1 folgt $\sum_{x\leq y} x = A\langle P_y\rangle = B\langle vD_y\rangle$, somit $\sharp\{x \in W \mid x \leq y\} = \dim_k D_y$, und dann muß mit einem Dimensionsvergleich die Inklusion $(C/I_y)\langle -l(y)\rangle \hookrightarrow D_y$ mit $1 \mapsto 1 \otimes 1 \dots 1$ ein Isomorphismus sein.

Gilt andererseits $(P_y : M_x) > 1$ für ein x, so folgt $\dim_k(C/I_y) < \dim_k D_y$ mit demselben Argument. □

Für spätere Anwendungen geben wir noch eine Formel für die Dimension der Hom-Räume zwischen Objekten von $\mathcal{C}$. Bezeichne

$$\langle \quad , \quad \rangle : \mathbb{Z}[W] \times \mathbb{Z}[W] \to \mathbb{Z}$$

die Bilinearform, für die die Gruppenelemente einer Orthonormalbasis bilden, $\langle x, y\rangle = \delta_{x,y}$ für $x, y \in W$.

Lemma 2.11.2. *Für alle $D, D' \in \mathcal{S}$ gilt die Formel*

$$\dim_k \mathrm{Hom}_C(D, D') = \langle B(D), B(D')\rangle.$$

Beweis. Natürlich reicht es, für $P, P' \in p\mathcal{O}$ die entsprechende Formel $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P, P') = \langle A(P), A(P')\rangle$ zu zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hier $P = P_x$, $P' = P_y$ annehmen, und dann gilt in der Tat

$$\begin{array}{rcl}\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(P_x, P_y) & = & [P_y : L_x] \\ & = & \sum_z (P_y : M_z)[M_z : L_x] \\ & = & \sum_z (P_y : M_z)(P_x : M_z).\end{array}$$

□

3. Argumente aus der Topologie

In diesem Teil 3 sei k ein beliebiger Körper.

3.1. **Notationen.** Als Quellen für die folgenden Allgemeinheiten siehe [Bor84, KS90]. Für jeden toplogischen Raum X bezeichne $\mathrm{Sh}X = \mathrm{Sh}_k X$ die Kategorie aller Garben von k-Vektorräumen auf X. Wir betrachten weiter die nach unten beschränkte derivierte Kategorie $D^+\mathrm{Sh}X$ und die Kohomologiegarbenfunktoren $\mathcal{H} : D^+\mathrm{Sh}X \to \mathrm{Sh}X$. Morphismen in $D^+\mathrm{Sh}X$ schreiben wir kurz Hom_D. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert Funktoren $f_*, f_! : \mathrm{Sh}X \to \mathrm{Sh}Y$ sowie $f^{-1} : \mathrm{Sh}Y \to \mathrm{Sh}X$. Diese haben alle derivierte Funktoren. Wir ändern die Notationen und setzen $f_* = R^+f_*$, $f_! = R^+f_!$ sowie $f^* = R^+f^{-1}$. So haben wir also triangulierte Funktoren $f_*, f_! : D^+\mathrm{Sh}X \to D^+\mathrm{Sh}Y$ sowie $f^* : D^+\mathrm{Sh}Y \to D^+\mathrm{Sh}X$ und eine Adjunktion (f^*, f_*). Wir werden weiter Verdier-Dualität brauchen. Die gibt es nicht in voller Allgemeinheit, deshalb ziehen wir uns nun in einen bequemen Rahmen zurück.

Sei X eine komplexe algebraische Varietät und $X(\mathbb{C})$ der zugehörige analytische Raum (mit der "metrischen" Topologie). Man betrachte die Kategorie der "algebraisch konstruierbaren Garben" $\mathrm{Sh}_{\mathrm{ac}}X(\mathbb{C}) = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}X(\mathbb{C}) \mid$ Es gibt eine Zerlegung $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ in (endlich viele) lokal abgeschlossene Untervarietäten derart, daß $j_\alpha^*\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}X_\alpha(\mathbb{C})$ lokal konstant ist von endlichem Rang, für alle Inklusionen $j_\alpha : X_\alpha(\mathbb{C}) \hookrightarrow X(\mathbb{C})\}$. Hier hätten wir auch $j_\alpha^{-1}\mathcal{F}$ schreiben können, aber da wir nun schon einmal j_α^{-1} in j_α^* umbenannt haben, wollen wir auch dabei bleiben. Schließlich ordnen wir jeder komplexen Varietät X zu die triangulierte k-Kategorie

$$\mathcal{D}(X) = \left\{\mathcal{F} \in D^+\mathrm{Sh}X(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{H}^\nu\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathrm{ac}}X(\mathbb{C}) \text{ für alle } \nu, \\ \mathcal{H}^\nu\mathcal{F} = 0 \text{ für } |\nu| \gg 0. \end{array}\right\}$$

Morphismen in $\mathcal{D}(X)$ schreiben wir kurz $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}$. Für $\mathcal{F}, \mathcal{E} \in \mathcal{D}(X)$ können wir $\mathcal{RH}om(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \in \mathcal{D}(X)$ bilden. Ist weiter $f : X \to Y$ ein Morphismus von komplexen Varietäten, so führen $f_*, f_!, f^*$ unsere $\mathcal{D}(X)$, $\mathcal{D}(Y)$ ineinander über. Weiter hat $f_! : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y)$ einen Rechtsadjungierten $f^! : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}(X)$. Ich will schließlich folgende Notation benutzen: Es sei $\underline{\mathrm{pt}} \in \mathrm{Sh}_{\mathrm{ac}}(\mathrm{pt}) \subset \mathcal{D}(\mathrm{pt})$ die konstante Garbe k auf einem Punkt, und $\underline{X} \in \mathcal{D}(X)$ die konstante Garbe $\underline{X} = c^*\underline{\mathrm{pt}}$, wo $c : X \to \mathrm{pt}$ die konstante Abbildung bezeichnet. Weiter sei $\mathbb{D}\mathcal{F} = \mathcal{RH}om(\mathcal{F}, c^!\underline{\mathrm{pt}})$ das Verdier-Duale zu $\mathcal{F}$. Es gilt $\mathbb{D}^2 = \mathrm{id}$ und $\mathbb{D}f^! = f^*\mathbb{D}$, $\mathbb{D}f_! = f_*\mathbb{D}$.

3.2. **Die Kategorie $\mathcal{K}$.** In der Einleitung hatten wir $\mathcal{K}$ eingeführt als die volle Unterkategorie $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ bestehend aus allen Objekten $\pi_*\underline{\mathrm{BS}}$ mitsamt deren [ ]-Verschobenen und direkten Summanden, für alle Projektionen

$$\pi : \mathrm{BS} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{B}$$

von einer Bott-Samelson-Varietät auf die Fahnenmannigfaltigkeit. Für unsere Zwecke ist die folgende eher technische Beschreibung von $\mathcal{K}$ besser. Wir hätten das folgende Lemma auch als Definition von $\mathcal{K}$ nehmen können und bräuchten es dann nicht zu beweisen. Mit dem Beweis bezahlen wir für grössere Eleganz in der Einleitung.

Lemma 3.2.1. *$\mathcal{K} \subset \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ ist die kleinste volle Unterkategorie derart daß*

1. *$\mathcal{K}$ enthält mit einem Objekt auch alle isomorphen Objekte.*
2. *$\mathcal{K}$ enthält die Wolkenkratzergarbe auf der punktförmigen Bruhat-Zelle, $j_{e*}\underline{\mathcal{B}/\mathcal{B}} \in \mathcal{K}$ für $j_e : \mathcal{B}/\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{B}$.*
3. *$\mathcal{F} \in \mathcal{K} \Rightarrow \pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F} \in \mathcal{K} \;\; \forall s \in S$, für $\pi_s : \mathcal{G}/\mathcal{B} \to \mathcal{G}/\mathcal{P}_s$.*
4. *$\mathcal{F} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{F}[n] \in \mathcal{K} \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$.*

5. *$\mathcal{K}$ ist stabil unter direkten Summen und direkten Summanden, d.h. sind $\mathcal{F}, \mathcal{E} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ gegeben, so gilt: $\mathcal{F} \oplus \mathcal{E} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{F}, \mathcal{E} \in \mathcal{K}$.*

Beweis. Das Lemma folgt leicht, sobald wir wissen, daß gilt $\pi_* \underline{\mathrm{BS}} \cong \pi_t^* \pi_{t*} \ldots \pi_s^* \pi_{s*} j_* \underline{\mathcal{B}/\mathcal{B}}$ für $t, \ldots, s \in S$ und $\pi : \mathrm{BS} = \mathcal{P}_s \times^{\mathcal{B}} \ldots \mathcal{P}_t \times^{\mathcal{B}} \mathcal{B}/\mathcal{B} \to \mathcal{G}/\mathcal{B}$ das Aufmultiplizieren. Um das zu zeigen benennen wir $t, \ldots, s$ um in $s_r, \ldots, s_1$ und schreiben kurz $\mathcal{P}_{s_i} = \mathcal{P}_i$. In diesen Notationen liefern die Abbildungen

$$\begin{array}{l} f_i : Y = \mathcal{G} \times^{\mathcal{B}} \mathcal{P}_1 \times^{\mathcal{B}} \mathcal{P}_2 \ldots \times^{\mathcal{B}} \mathcal{P}_r/\mathcal{B} \to \mathcal{G}/\mathcal{B} \\ f_i : [(g, p_1, \ldots, p_r)] \mapsto g p_1 \ldots p_i B \ \ (i = 0, \ldots, r) \end{array}$$

einen Isomorphismus

$$Y \xrightarrow{\sim} \left\{ (x_0, \ldots, x_r) \in (\mathcal{G}/\mathcal{B})^{r+1} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_{i-1} \text{ und } x_i \text{ haben} \\ \text{dasselbe Bild in } \mathcal{G}/\mathcal{P}_i \\ \text{für } i = 1, \ldots, r \end{array} \right\}$$

Schreiben wir $Y = Y(1, 2, \ldots, r)$ so haben wir in hoffentlich selbsterklärender Notation ein Diagramm von kartesischen Quadraten, das für $r = 3$ die folgende Form hat:

$$\begin{array}{ccccccc} Y(1,2,3) & \to & Y(2,3) & \to & Y(3) & \to & \mathcal{G}/\mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_t \\ Y(1,2) & \to & Y(2) & \to & \mathcal{G}/\mathcal{B} & \underset{\pi}{\to} & \mathcal{G}/\mathcal{P}_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Y(1) & \to & \mathcal{G}/\mathcal{B} & \to & \mathcal{G}/\mathcal{P}_2 & & \\ \downarrow & & \downarrow \pi_s & & & & \\ \mathcal{G}/\mathcal{B} & \underset{\pi_s}{\to} & \mathcal{G}/\mathcal{P}_1 & & & & \end{array}$$

Eigentlicher Basiswechsel impliziert nun

$$f_{r*} f_0^* = \pi_t^* \pi_{t*} \ldots \pi_s^* \pi_{s*}.$$

Beachten wir schließlich noch, daß die linke Vertikale unseres Diagramms auch Teil eines kartesischen Quadrats

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BS} & \hookrightarrow & Y(1, \ldots, r) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}/\mathcal{B} & \hookrightarrow & \mathcal{G}/\mathcal{B} \end{array}$$

ist, so ergibt sich mühelos die Behauptung. □

Bemerkung: $\mathcal{F} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathbb{D}\mathcal{F} \in \mathcal{K}$. In der Tat ist $\mathbb{D}\pi_{s*} = \mathbb{D}\pi_{s!} = \pi_{s*}\mathbb{D}$ da π_s eigentlich ist, und $\mathbb{D}\pi_s^* = \pi_s^! \mathbb{D} = \pi_s^*[2]\mathbb{D}$ da π_s glatt ist mit Faser der reellen Dimension 2. Um $\mathcal{K}$ zu studieren brauchen wir einige Hilfskategorien. Wir setzen $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{B}) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{B}) \mid \mathcal{H}^\nu j_x^* \mathcal{F}$ ist eine konstante Garbe auf $\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}$, für alle $x \in W, \nu \in \mathbb{Z}\}$ und

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{B})^{\mathrm{ev}} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{B}) \mid \mathcal{H}^\nu \mathcal{F} \neq 0 \Rightarrow \nu \text{ ist gerade}\}$$

und betrachten

$$\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{B})^{\mathrm{ev}} = \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{B}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{B})^{\mathrm{ev}}.$$

Sei weiter $\mathbf{H} = \mathbf{H}(W,S) = \bigoplus_{x\in W} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]\mathbf{T}_x$ die Hecke-Algebra wie in [KL79] oder [Soe97], mit $t = q^{1/2} = v^{-1}$. Man definiere $h : \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{B}) \to \mathbf{H}$ durch

$$h(\mathcal{F}) = \sum_{\nu,x} \mathrm{rk}\mathcal{H}^\nu(j_x^*\mathcal{F})t^\nu \mathbf{T}_x.$$

Offensichtlich ist $h(\mathcal{F}[1]) = t^{-1}h(\mathcal{F})$. Weniger offensichtlich ist das folgende

Lemma 3.2.2. *Sei $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{B})^{\mathrm{ev}}$ und $s \in S$. So ist auch $\pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F} \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{B})^{\mathrm{ev}}$ und es gilt $h(\pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F}) = h(\mathcal{F})(\mathbf{T}_s + 1)$.*

Beweis. Wir wiederholen einen Beweis aus [Spr82]. Springer schreibt ihn MacPherson zu. Man betrachte das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}x\mathcal{P}_s/\mathcal{B} & \xrightarrow{j} & \mathcal{G}/\mathcal{B} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_s \\ \mathcal{B}x\mathcal{P}_s/\mathcal{P}_s & \xrightarrow{j} & \mathcal{G}/\mathcal{P}_s \end{array}$$

und nehme an, daß gilt $xs > x$. So haben wir eine Zerlegung der oberen linken Ecke

$$\mathcal{B}xs\mathcal{B}/\mathcal{B} \overset{u}{\hookrightarrow} \mathcal{B}x\mathcal{P}_s/\mathcal{B} \overset{i}{\hookleftarrow} \mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}$$

in eine offene und eine abgeschlossene Teilmenge, mit Inklusionen u und i. Für jedes $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ liefert eigentlicher Basiswechsel $j_x^*(\pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F}) = i^*\pi^*\pi_*j^*\mathcal{F}$ und $j_{xs}^*(\pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F}) = u^*\pi^*\pi_*j^*\mathcal{F}$. Nun führt das ausgezeichnete Dreieck $\pi^*\pi_*(u_!u^!, \mathrm{id}, i_*i^*)j^*\mathcal{F}$ durch Anwenden von i^*, u^* zu zwei ausgezeichneten Dreiecken, die wir nach einigen Umformungen schreiben können als

$$(\pi\circ i)^*(\pi\circ u)_! j_{xs}^*\mathcal{F} \to j_x^*(\pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F}) \to (\pi\circ i)^*(\pi\circ i)_* j_x^*\mathcal{F} \xrightarrow{[1]}$$

$$(\pi\circ u)^*(\pi\circ u)_! j_{xs}^*\mathcal{F} \to j_{xs}^*(\pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F}) \to (\pi\circ u)^*(\pi\circ i)_* j_x^*\mathcal{F} \xrightarrow{[1]} .$$

Jetzt ist $(\pi\circ i)$ ein Isomorphismus und $(\pi\circ u)$ ist die Projektion von einem affinen Raum $\mathcal{B}xs\mathcal{B}/\mathcal{B}$ auf einen anderen $\mathcal{B}x\mathcal{P}_s/\mathcal{P}_s$ mit Faser $\mathbb{C}$, folglich ist $(\pi\circ u)_!\underline{\mathcal{B}xs\mathcal{B}/\mathcal{B}} \cong \underline{\mathcal{B}x\mathcal{P}_s/\mathcal{P}_s}[-2]$. Wenn wir nun $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{B})^{\mathrm{ev}}$ annehmen, so gilt mit unseren beiden ausgezeichneten Dreiecken $\pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F} \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{B})^{\mathrm{ev}}$ und

$$\mathrm{rk}\mathcal{H}^{\nu-2}j_{xs}^*\mathcal{F} + \mathrm{rk}\mathcal{H}^\nu j_x^*\mathcal{F} = \mathrm{rk}\mathcal{H}^\nu j_x^*(\pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F}) = \mathrm{rk}\mathcal{H}^\nu j_{xs}^*(\pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F}).$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber mit einer einfachen Rechnung in der Hecke-Algebra $h(\pi_s^*\pi_{s*}\mathcal{F}) = h(\mathcal{F})(\mathbf{T}_s + 1)$. $\square$

Korollar 3.2.3. 1. *Jedes $\mathcal{F} \in \mathcal{K}$ läßt sich schreiben als $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''[1]$ mit $\mathcal{F}', \mathcal{F}'' \in \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{B})^{\mathrm{ev}}$.*
2. *Für $\mathcal{F} \in \mathcal{K}$, $s \in S$ gilt $h(\pi_s^* \pi_{s*} \mathcal{F}) = h(\mathcal{F})(\mathbf{T}_s + 1)$.*

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen. □

Ich betrachte nun wie in [KL79] auf der Hecke-Algebra $\mathbf{H}$ die Involution $i : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ mit $i(t) = t^{-1}$, $i(\mathbf{T}_x) = (\mathbf{T}_{x^{-1}})^{-1}$.

Lemma 3.2.4. $\mathcal{F} \in \mathcal{K} \Rightarrow h(\mathbb{D}\mathcal{F}) = ih(\mathcal{F})$.

Beweis. Es reicht, folgende drei Aussagen zu zeigen: (1) Die Formel gilt für $j_{e*}\underline{\mathcal{B}/\mathcal{B}}$ und (2) stimmt die Formel für $\mathcal{F}$, so auch (a) für $\mathcal{F}[1]$ und (b) für $\pi_s^* \pi_{s*} \mathcal{F}$. Hier sind (1) und (2)(a) trivial, und wir müssen nur (2)(b) prüfen. In der Tat ist aber

$$h(\mathbb{D}\pi_s^* \pi_{s*} \mathcal{F}) = h(\pi_s^! \pi_{s!} \mathbb{D}\mathcal{F}) = h(\pi_s^* \pi_{s*} \mathbb{D}\mathcal{F}[2]) = (ih(\mathcal{F}))(\mathbf{T}_s + 1)t^{-2}$$

und

$$ih(\pi_s^* \pi_{s*} \mathcal{F}) = i(h(\mathcal{F})(\mathbf{T}_s + 1)) = h(\mathbb{D}\mathcal{F})(\mathbf{T}_s + 1)t^{-2}$$

was zu zeigen war. □

Für beliebiges X betrachte man den Hyperkohomologie-Funktor

$$c_* = \mathbb{H}^\bullet = \bigoplus_\nu \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\underline{X}[\nu], \quad) : \mathcal{D}(X) \to k\text{-mod}^{\mathrm{fl}}.$$

Proposition 3.2.5. *Für alle $\mathcal{F}, \mathcal{E} \in \mathcal{K}$ induziert Hyperkohomologie eine Injektion*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_k(\mathbb{H}^\bullet \mathcal{F}, \mathbb{H}^\bullet \mathcal{E}).$$

Beweis. Sei ganz allgemein X ein topologischer Raum. Ist $\mathcal{F} \in D^+\mathrm{Sh}X$, so berechnet sich die Hyperkohomologie $\mathbb{H}^\bullet \mathcal{F}$ wie folgt: Man nehme eine injektive Auflösung $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ und dann ist $\mathbb{H}^\bullet \mathcal{F}$ die Kohomologie des Komplexes $\Gamma(\mathcal{I}^\bullet)$ der globalen Schnitte. Ist nun $X = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_r = \emptyset$ eine Filtrierung durch abgeschlossene Teilmengen, so ist $\Gamma(\mathcal{I}^\bullet)$ filtriert durch Schnitte mit Träger in den X_i,

$$0 = \Gamma_{X_r}(\mathcal{I}^\bullet) \subset \ldots \subset \Gamma_{X_0}(\mathcal{I}^\bullet) = \Gamma(\mathcal{I}^\bullet).$$

Demnach ist $\mathbb{H}^\bullet \mathcal{F}$ der Grenzwert einer Spektralsequenz mit E_1-Term

$$E_1^{p,q} = \mathbb{H}^{p+q}_{X_p - X_{p+1}}(\mathcal{F})$$

der lokalen Hyperkohomologie von $\mathcal{F}$ längs $X_p - X_{p+1}$. Ist $v : Y \to X$ eine lokal abgeschlossene Einbettung algebraischer Varietäten und $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(X)$, so wird $\mathbb{H}^\bullet_Y \mathcal{F} = \mathbb{H}^\bullet v^! \mathcal{F}$ in unserem Formalismus.

Betrachten wir nun auf $X = \mathcal{G}/\mathcal{B}$ die Filtrierung durch die

$$X_p = \bigcup_{l(x)+p \leq \dim X} \mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}.$$

Sei $j_p : (X_p - X_{p+1}) \hookrightarrow X$ die Inklusion. Für $\mathcal{F} \in \mathcal{K}$ degeneriert unsere Spektralsequenz

$$\mathbb{H}^{p+q} j_p^! \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{H}^\bullet \mathcal{F}$$

schon an diesem E_1-Term: Das liegt daran, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathbb{D}\mathcal{F} \in \mathcal{D}_\mathcal{B}(\mathcal{G}/\mathcal{B})^{\mathrm{ev}}$ annehmen dürfen, und dann verschwinden alle E_1-Terme mit $p+q$ ungerade und deshalb auch alle Differentiale.

Seien nun $\mathcal{F}, \mathcal{E} \in \mathcal{K}$ und $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$. Verschwindet $\mathbb{H}^\bullet f$, so ist notwendig $0 = j_p^! f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(j_p^! \mathcal{F}, j_p^! \mathcal{E})$ für alle p, denn unsere Spektralsequenz degeneriert. Bezeichne $i_p : X_p \hookrightarrow X$ die Inklusion. Wir haben eine Zerlegung

$$X_p - X_{p+1} \overset{u}{\hookrightarrow} X_p \overset{i}{\hookleftarrow} X_{p+1}$$

in eine offene und eine abgeschlossene Teilmenge und ein ausgezeichnetes Dreieck

$$(i_! i^!, \mathrm{id}, u_* u^a st) i_p^!$$

aus dem wir folgern, daß $i_{p+1}^! f = 0 = j_{p+1}^! f \Rightarrow i_p^! f = 0$. Mit Induktion folgt also aus $j_p^! = 0 \ \ \forall p$ daß $f = i_0^! f = 0$. □

Als nächstes berechnen wir die Dimension von Morphismenräumen zwischen Objekten aus $\mathcal{K}$. Wir können auf der Hecke-Algebra einen involutiven Antiautomorphismus $j : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ erklären durch die Vorschrift $j(t) = t^{-1}$, $j(\mathbf{T}_x) = (\mathbf{T}_x)^{-1}$. Zu zwei Elementen $A, B \in \mathbf{H}$ erkläre man $\langle A, B\rangle(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ als den Koeffizienten von $\mathbf{T}_e$ im Produkt $Aj(B)$.

Theorem 3.2.6. *Für $\mathcal{F}, \mathcal{E} \in \mathcal{K}$ gilt*

$$\sum_\nu \dim_k \mathrm{Hom}_\mathcal{D}^\nu (\mathcal{F}, \mathcal{E}) t^{-\nu} = \langle h(\mathcal{F}), h(\mathcal{E})\rangle(t).$$

Beweis. Für $\mathcal{E} = j_{e*}\mathcal{B}/\mathcal{B}$ folgt das aus den Definitionen und der Adjunktion (j_e^*, j_{e*}). Um daraus den allgemeinen Fall zu erhalten müssen wir nur zeigen, daß unsere Formel gilt für ein Paar $\mathcal{F}, \pi_s^* \pi_{s*} \mathcal{E}[2]$ genau dann, wenn sie für das Paar $\pi_s^* \pi_{s*} \mathcal{F}, \mathcal{E}$ richtig ist.

Nun ist aber (π_s^*, π_{s*}) ein adjungiertes Paar und ebenso $(\pi_{s!}, \pi_s^!) = (\pi_{s*}, \pi_s^*[2])$, mithin auch $(\pi_s^* \pi_{s*}, \pi_s^* \pi_{s*}[2])$. Folglich ist die linke Seite unserer Formel im Theorem dieselbe für beide Paare. Wir müssen also nur zeigen, daß gilt

$$\langle a, bt^{-2}(T_s + 1)\rangle = \langle a(T_s + 1), b\rangle$$

für alle $a, b \in H$. In der Tat ist aber $j(t^{-2}(T_s + 1)) = T_s + 1$. $\square$

3.3. **Perverse Garben auf $\mathcal{G}/\mathcal{B}$ und $\mathcal{G}/\mathcal{P}_s$.** Sei $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{D}(X)$ die Kategorie der perversen Garben. Bezeichne $H^i : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{P}(X)$ die perversen Kohomologie-Funktoren. Bezeichne $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)$ die perversen Garben auf $\mathcal{G}/\mathcal{P}_s$, die glatt sind längs der $\mathcal{B}$-Orbiten. Bezeichne weiter $\mathcal{P}_{\mathcal{P}_s^{-1}}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ die perversen Garben auf $\mathcal{G}/\mathcal{B}$, die glatt sind längs aller Strata $\mathcal{B}x\mathcal{P}_s/\mathcal{B}$ für $x \in W$. Wir wollen zeigen:

Theorem 3.3.1. *Sei* $\operatorname{char} k \neq 2$. *So erklären die Funktoren* $\pi_s^![-1]$ *und* $H^1\pi_{s!}$ *eine Äquivalenz von Kategorien* $\mathcal{P}_{\mathcal{P}_s^{-1}}(\mathcal{G}/\mathcal{B}) \cong \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)$.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß $H^1\pi_{s!} : \mathcal{P}(\mathcal{G}/\mathcal{B}) \to \mathcal{P}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)$ rechtsadjungiert ist zu $\pi_s^![-1] : \mathcal{P}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s) \to \mathcal{P}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$. In der Tat gilt für $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)$ eine Gleichung

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}, \pi_s^![-1]\mathcal{E}) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\pi_{s!}[1]\mathcal{F}, \mathcal{E}) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(H^1\pi_{s!}[1]\mathcal{F}, \mathcal{E}),$$

die zweite Gleichheit da $H^i\pi_{s!}[1]\mathcal{F} = 0$ für $i > 0$. Jetzt brauchen wir

Lemma 3.3.2. *Sei* $\operatorname{char} k \neq 2$. *So gibt es eine Zerlegung* $\pi_{s*}\underline{\mathcal{G}/\mathcal{B}} \cong \underline{\mathcal{G}/\mathcal{P}_s} \oplus \underline{\mathcal{G}/\mathcal{P}_s}[-2]$.

Beweis. Wir haben vollständig kanonische Morphismen

$$\underline{\mathcal{G}/\mathcal{P}_s} \xrightarrow{a} \pi_{s*}\pi_s^*\underline{\mathcal{G}/\mathcal{P}_s} = \pi_{s*}\underline{\mathcal{G}/\mathcal{B}} = \pi_{s!}\pi_s^!\underline{\mathcal{G}/\mathcal{P}_s}[-2] \xrightarrow{b} \underline{\mathcal{G}/\mathcal{P}_s}[-2].$$

Nun wählen wir ganz unkanonisch eine kompakte reelle Form $K \subset \mathcal{G}$ mit maximalem Torus $T = K \cap \mathcal{B}$. So wird $\mathcal{G}/\mathcal{B} = K/T$ und $s \in S$ operiert auf K/T und läßt die Fasern von π_s stabil. Somit liefert s eine Involution auf $\pi_{s*}\underline{\mathcal{G}/\mathcal{B}}$ und sogar eine Involution in der Kategorie der Komplexe von Garben auf $\pi_{s*}\mathcal{I}^\bullet$, wo ich mit $\mathcal{I}^\bullet$ die kanonische welke Auflösung von $\underline{\mathcal{G}/\mathcal{B}}$ im Sinne von Godement bezeichne. Nun zerfällt $\pi_{s*}\mathcal{I}^\bullet$ und damit auch $\pi_{s*}\underline{\mathcal{G}/\mathcal{B}}$ in Eigenräume unter dieser Involution, d.h. $\pi_{s*}\underline{\mathcal{G}/\mathcal{B}} = E^+ \oplus E^-$. Bezeichne i_+, i_-, p_+, p_- die Projektionen und Einbettungen dieser Zerlegung. Man überzeugt sich, daß $0 = p_- \circ a = b \circ i_+$ und daß $p_+ \circ a$ sowie $b \circ i_-$ Isomorphismen sind. Das Lemma folgt. $\square$

Lemma 3.3.3. *Sei* $\operatorname{char} k \neq 2$. *So gibt es natürliche Isomorphismen* $\pi_{s!}\pi_s^!\mathcal{F} \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}[2]$ *für* $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)$.

Beweis. Wir finden

$$\begin{aligned}
\pi_{s!}\pi_s^!\mathcal{F} &= \mathcal{RH}om(\underline{\mathcal{G}/\mathcal{P}_s}, \pi_{s!}\pi_s^!\mathcal{F}) \\
&= \pi_{s*}\mathcal{RH}om(\underline{\mathcal{G}/\mathcal{B}}, \pi_s^!\mathcal{F}) \\
&= \mathcal{RH}om(\pi_{s*}\underline{\mathcal{G}/\mathcal{B}}, \mathcal{F}) \\
&= \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}[2]
\end{aligned}$$

wo der dritte Schritt Verdier-Dualität ist und der letzte das vorhergehende Lemma. □

Bemerkung 3.3.4. Genauer haben wir also gezeigt: Jede Wahl einer Zerlegung

$$\pi_{s*}\underline{\mathcal{G}/\mathcal{B}} \cong \underline{\mathcal{G}/\mathcal{P}_s} \oplus \underline{\mathcal{G}/\mathcal{P}_s}[-2]$$

liefert eine natürliche Äquivalenz zwischen den Funktoren $\mathcal{F} \mapsto \pi_{s!}\pi_s^!\mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}[2]$.

Es folgt, daß für jedes $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)$ die Adjunktions-Abbildung $(H^1\pi_{s!})(\pi_s^![-1])\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ein Isomorphismus ist.

Weiter brauchen wir:

Lemma 3.3.5. *Der Funktor $H^1\pi_{s!} : \mathcal{P}_{\mathcal{P}_s^{-1}}(\mathcal{G}/\mathcal{B}) \to \mathcal{P}_\mathcal{B}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)$ ist exakt.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß für $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_{\mathcal{P}_s^{-1}}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ gilt $H^{2i}(\pi_{s!}\mathcal{F}) = 0 \;\; \forall i$. Es reicht das für alle einfachen Objekte von $\mathcal{P}_{\mathcal{P}_s^{-1}}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ zu zeigen, d.h. für alle $\mathcal{IC}(\overline{\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}}) = \pi_s^![-1]\mathcal{IC}(\overline{\mathcal{B}x\mathcal{P}_s/\mathcal{P}_s})$ mit $x \in W$, $xs < x$. Für diese Objekte folgt es aber aus dem vorhergehenden Lemma. □

Schließlich zeigen wir, daß für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_{\mathcal{P}_s^{-1}}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ die Adjunktions-Abbildung $\mathcal{F} \to (\pi_s^![-1])(H^1\pi_{s!})\mathcal{F}$ ein Isomorphismus ist. Das ist offensichtlich für alle $\mathcal{F}$ von der Form $\pi_s^![-1]\mathcal{E}$ mit $\mathcal{E} \in \mathcal{P}_\mathcal{B}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)$, also für alle einfachen $\mathcal{F}$. Es folgt für alle $\mathcal{F}$ mit dem Fünferlemma. □

Korollar 3.3.6. *Sei $\mathcal{E} \in \mathcal{P}_\mathcal{B}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)$. So ist $\pi_s^![-1]\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$, und $\mathcal{E}$ ist halbeinfach genau dann, wenn $\pi_s^![-1]\mathcal{E}$ halbeinfach ist.*

4. Topologie und Darstellungstheorie.

Sei ab jetzt wieder die Charakteristik von k größer als die Coxeter-Zahl. (Im folgenden Unterabschnitt 4.1 ist diese Bedingung noch nicht nötig.)

4.1. **Vorbemerkung.** Ist X ein topologischer Raum, so können wir seinen Kohomologiering auffassen als die Endomorphismenalgebra der konstanten Garbe in der derivierten Kategorie,

$$H^\bullet X = \mathrm{End}_D^\bullet \underline{X} = \bigoplus_\nu \mathrm{Hom}_D(\underline{X}, \underline{X}[\nu]).$$

Ebenso können wir die Hyperkohomologie von einem Komplex von Garben $\mathcal{F} \in D^+\mathrm{Sh}X$ auffassen als

$$\mathbb{H}^\bullet \mathcal{F} = \mathrm{Hom}_D^\bullet(\underline{X}, \mathcal{F}) = \bigoplus_\nu \mathrm{Hom}_D(\underline{X}, \mathcal{F}[\nu]).$$

Die Verknüpfung von Morphismen in der derivierten Kategorie macht also $\mathbb{H}^\bullet\mathcal{F}$ in natürlicher Weise zu einem $H^\bullet X$-Rechtsmodul. Ist $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F} \in D^+\mathrm{Sh}X$, so haben wir natürlich

$$\mathbb{H}^\bullet f_*\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_D^\bullet(\underline{Y}, f_*\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_D(\underline{X}, \mathcal{F}) = \mathbb{H}^\bullet\mathcal{F}$$

vermittels $\underline{X} = f^*\underline{Y}$, und man erkennt daß die $H^\bullet Y$-Operation auf $\mathbb{H}^\bullet f_*\mathcal{F}$ durch Restriktion vermittels $H^\bullet Y \to H^\bullet X$ aus der $H^\bullet X$-Operation auf $\mathbb{H}^\bullet\mathcal{F}$ hervorgeht.

Ist andererseits $\mathcal{F} \in D^+\mathrm{Sh}Y$ gegeben, so haben wir einen offensichtlichen Morphismus

$$\mathbb{H}^\bullet\mathcal{F} \otimes_{H^\bullet Y} H^\bullet X \to \mathbb{H}^\bullet f^*\mathcal{F}$$

oder, etwas anders geschrieben,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_D^\bullet(\underline{Y}, \mathcal{F}) \otimes_{\mathrm{End}_D^\bullet\underline{Y}} \mathrm{End}_D^\bullet\underline{X} & \to & \mathrm{Hom}_D^\bullet(\underline{X}, f^*\mathcal{F}) \\ \gamma \otimes a & \mapsto & f^*(\gamma) \circ a. \end{array}$$

Wir zeigen, daß diese Abbildung in einem ganz speziellen Fall ein Isomorphismus ist.

Proposition 4.1.1. *Sei* char$k \neq 2$. *Sei* $\pi_s : \mathcal{G}/\mathcal{B} \to \mathcal{G}/\mathcal{P}_s$ *unsere Projektionsabbildung. So ist für alle* $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)$ *die gerade erklärte Abbildung*

$$\mathbb{H}^\bullet\mathcal{F} \otimes_{H^\bullet(\mathcal{G}/\mathcal{P}_s)} H^\bullet(\mathcal{G}/\mathcal{B}) \to \mathbb{H}^\bullet(\pi_s^*\mathcal{F})$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$*-graduierten* $\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{G}/\mathcal{B})$*-Rechtsmoduln .*

Beweis. Für diesen Beweis kürzen wir $\pi_s : \mathcal{G}/\mathcal{B} \to \mathcal{G}/\mathcal{P}_s$ mit $\pi : X \to Y$ ab. Da π glatt ist mit komplex eindimensionaler Faser gilt $\pi^* \cong \pi^![-2]$. Es reicht also zu zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_D^\bullet(\underline{Y}, \mathcal{F}) \otimes_{\mathrm{End}_D^\bullet\underline{Y}} \mathrm{End}_D^\bullet(\pi^!\underline{Y}) & \to & \mathrm{Hom}_D^\bullet(\pi^!\underline{Y}, \pi^!\mathcal{F}), \\ \gamma \otimes a & \mapsto & \pi^!(\gamma) \circ a \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Unter Verwendung der Adjunktion $(\pi_!, \pi^!)$ reicht es sogar zu zeigen, daß

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_D^\bullet(\underline{Y}, \mathcal{F}) \otimes_{\mathrm{End}_D^\bullet\underline{Y}} \mathrm{Hom}_D^\bullet(\pi_!, \pi^!\underline{Y}, \underline{Y}) & \to & \mathrm{Hom}_D^\bullet(\pi_!\pi^!\underline{Y}, \mathcal{F}) \\ \gamma \otimes b & \mapsto & \gamma \circ b \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Hier können wir nun aber das Ergebnis $\pi_!\pi^!\underline{Y} \cong \underline{Y} \oplus \underline{Y}[2]$ aus 3.3.2 verwenden. $\square$

4.2. **Äquivalenz von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{C}$.** Sei wieder $C = H^\bullet(\mathcal{G}/\mathcal{B}; k)$ die Koinvariantenalgebra alias der Kohomologiering der Fahnenmannigfaltigkeit. Sicher ist Hyperkohomologie ein Funktor $\mathbb{H}^\bullet : \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{B}) \to C\text{-mod}^{\mathrm{fl}}$. Wir wollen zeigen:

Theorem 4.2.1. *Hyperkohomologie induziert eine Äquivalenz von Kategorien* $\mathbb{H}^\bullet : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$.

Beweis. Wir gehen in Schritten vor.

1. Nach 4.1.1 haben wir für alle $s \in S$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ einen Isomorphismus graduierter C-Moduln $\mathbb{H}^\bullet \pi_s^* \pi_{s*} \mathcal{F} \cong C \otimes_{C^s} \mathbb{H}^\bullet \mathcal{F}$ her. Nun ist sicher $\mathbb{H}^\bullet(j_{e*}\underline{\mathcal{B}/\mathcal{B}}) = k$ und aus den Definitionen folgt mühelos, daß $\mathbb{H}^\bullet$ einen Funktor von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{C}$ induziert.
2. Wir zeigen als nächstes, daß $\mathbb{H}^\bullet : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ volltreu ist. Da unser Funktor nach Proposition 3.2.5 jedenfalls treu ist, müssen wir nur für alle $\mathcal{F}, \mathcal{E} \in \mathcal{K}$ zeigen, daß
$$\dim_k \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = \dim_k \mathrm{Hom}_C(\mathbb{H}^\bullet \mathcal{F}, \mathbb{H}^\bullet \mathcal{E}).$$
Wir behaupten dazu ein kommutatives Diagramm
$$\begin{array}{rcl} \langle \mathcal{K} \rangle & \xrightarrow{h} & \mathbf{H} \\ \mathbb{H}^\bullet \downarrow & & \downarrow t = 1 \\ \langle v\mathcal{C} \rangle & \xrightarrow{B} & \mathbb{Z}[W], \end{array}$$
in der Tat landet die Klasse von $\pi_t^* \pi_{t*} \ldots \pi_s^* \pi_{s*} j_{e*} \underline{\mathcal{B}/\mathcal{B}}$ auf dem oberen wie auf dem unteren Weg bei demselben Element $(t+1)\ldots(s+1)$, für alle $t, \ldots, s \in S$. Die Gleichheit der Dimensionen ist nun eine Konsequenz von 2.11.2, 3.2.6.
3. Schließlich gilt es zu zeigen, daß jedes Objekt aus $\mathcal{C}$ isomorph ist zur Hyperkohomologie eines Objekts aus $\mathcal{K}$. Es reicht, für alle $x \in W$ ein $\mathcal{L}_x \in \mathcal{K}$ zu finden derart, daß $\mathbb{H}^\bullet \mathcal{L}_x \cong D_x$. Wir machen eine Induktion über die Länge von x. Sicher können wir $\mathcal{L}_e = j_{e*}\underline{\mathcal{B}/\mathcal{B}}$ nehmen. Um $\mathcal{L}_x$ zu konstruieren wählen wir eine reduzierte Zerlegung $x = t \ldots s$ $(s, \ldots, t \in S)$ und betrachten $\pi_s^* \pi_{s*} \ldots \pi_t^* \pi_{t*} \mathcal{L}_e[l(x)]$. Wir wissen, daß
$$\begin{array}{rl} \mathbb{H}^\bullet(\pi_s^* \pi_{s*} \ldots \pi_t^* \pi_{t*} \mathcal{L}_e[l(x)]) = & C \otimes_{C^s} C \ldots \otimes_{C^t} k\langle -l(x) \rangle \\ & = D_x \oplus \text{Rest}, \end{array}$$
wo Rest eine Summe von $D_y\langle \nu \rangle$ ist mit $y < x$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Nach Induktionsannahme ist Rest $= \mathbb{H}^\bullet \mathcal{L}_{\text{Rest}}$ für geeignetes $\mathcal{L}_{\text{Rest}} \in \mathcal{K}$. Da wir schon wissen, daß $\mathbb{H}^\bullet : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ volltreu ist, erhalten wir eine Zerlegung der Identität auf $\mathcal{L}_{\text{Rest}}$ in $\mathrm{id} = p \circ i$,
$$\mathcal{L}_{\text{Rest}} \xrightarrow{i} \pi_s^* \pi_{s*} \ldots \pi_t^* \pi_{t*} \mathcal{L}_e[l(x)] \xrightarrow{p} \mathcal{L}_{\text{Rest}}.$$

Vervollständigen wir i zu einem ausgezeichneten Dreieck

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Rest}} \xrightarrow{i} \pi_s^*\pi_{s*}\dots\pi_t^*\pi_{t*}\mathcal{L}_e[l(x)] \to \mathcal{L}_x \xrightarrow{d}$$

so verschwindet die Randabbildung $d = (p \circ i) \circ d = p \circ (i \circ d)$. Also ist die Mitte isomorph zu $\mathcal{L}_{\mathrm{Rest}} \oplus \mathcal{L}_x$ und $\mathbb{H}^\bullet \mathcal{L}_x \cong D_x$.

□

Korollar 4.2.2. *$\{\mathcal{L}_x[\nu]\}_{x \in W, \nu \in \mathbb{Z}}$ ist ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte von $\mathcal{K}$.*

Wir können die $\mathcal{L}_x$ auch so charakterisieren:

Proposition 4.2.3. *Die folgenden Bedingungen an $\mathcal{L} \in \mathcal{K}$ sind gleichbedeutend:*

1. *$\mathcal{L}$ ist unzerlegbar,* $\mathrm{supp}\mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}}$ *und* $j_x^*\mathcal{L} \cong \underline{\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}}[l(x)]$.
2. $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}_x$.

Beweis. Für jede reduzierte Zerlegung $x = t\dots s$ erfüllt das Objekt $\mathcal{F} = \pi_s^*\pi_{s*}\dots\pi_t^*\pi_{t*}\mathcal{L}_e[l(x)]$ schon die Bedingungen $j_x^*\mathcal{F} \cong \underline{\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}}[l(x)]$ und $\mathrm{supp}\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{B}x\mathcal{B}/\mathcal{B}}$. Die Proposition ist nun klar. □

Korollar 4.2.4. $\mathbb{D}\mathcal{L}_x \cong \mathcal{L}_x \;\; \forall x \in W$.

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen. □

Wir zeigen nun Teil 2 im Theorem 1.3 aus der Einleitung.

Theorem 4.2.5. *Für alle $x, y \in W$ gilt*

$$[M_x : L_y] = \sum_i \dim(\mathcal{H}^i\mathcal{L}_y)_x.$$

Beweis. Wir erinnern zunächst einmal an die Reziprozitätsformel $[M_x : L_y] = (P_y : M_x)$. Dann betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \langle\mathcal{K}\rangle & \xrightarrow{\mathbb{H}^\bullet} & \langle v\mathcal{C}\rangle & \xrightarrow{\mathbb{V}} & \langle p\mathcal{O}\rangle \\ \downarrow h & & \downarrow B & & \downarrow A \\ \mathbf{H} & \xrightarrow{t=1} & \mathbb{Z}[W] & = & \mathbb{Z}[W] \end{array}$$

nach dem Beweis von 4.2.1 und Abschnitt 2.11. Wir wissen schon, daß $\mathbb{H}^\bullet\mathcal{L}_x \cong D_x \cong \mathbb{V}P_x$. Es folgt, daß $h(\mathcal{L}_x)$ an der Stelle $t = 1$ genau zu $A(P_x)$ spezialisiert. □

Schließlich gilt es noch, Korollar 1.5 aus der Einleitung zu zeigen.

Beweis. $2 \Rightarrow 1$. Aus 2 folgt induktiv, daß alle $\mathcal{L}_x$ einfach perverse Garben sind, aufgrund der Charakterisierung der Schnittkohomologie in [BBD82] gilt also $h(\mathcal{L}_x) \in H_x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]H_y$ in den Notationen von [Soe97]. Wir wissen aber schon nach 4.2.4, 3.2.4 daß $h(\mathcal{L}_x) = h(\mathbb{D}\mathcal{L}_x) =$

$ih(\mathcal{L}_x)$ und damit folgt $h(\mathcal{L}_x) = C'_x$ mit C'_x wie in [KL79]. Die Vermutung von Lusztig besagen aber in unserem Fall (nach ihrer Übersetzung vermittels der Reziprozitätsformel) gerade $A(P_x) = C'_x(1)$.

$1 \Rightarrow 2$. Bleibt dem Leser überlassen. $\square$

Literatur

[AJS94] Henning Haahr Andersen, Jens Carsten Jantzen, and Wolfgang Soergel. Representations of quantum groups at a p-th root of unity and of semisimple groups in characteristic p: Independence of p. *Astérisque*, 220:1–320, 1994.

[Bas68] Hyman Bass. *Algebraic K-theory.* Benjamin, 1968.

[BBD82] Alexander A. Beilinson, Joseph N. Bernstein, and Pierre Deligne. Faisceaux pervers. *Astérisque*, 100:1–172, 1982.

[BGG73] Joseph N. Bernstein, Israel M. Gelfand, and Sergei I. Gelfand. Schubert cells and cohomology of the spaces G/P. *Russian Math. Surveys*, 28(3):1–26, 1973.

[Bor84] Armand Borel, editor. *Intersection cohomology*, volume 50 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser, 1984.

[Car94] James B. Carrell. The Bruhat graph of a Coxeter group, a conjecture of Deodhar, and rational smoothness of Schubert varieties. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 56, Part 1*, pages 53–61. AMS, 1994.

[Dem73] M. Demazure. Invariants symétriques des groupes de Weyl et torsion. *Invent. math.*, 21:287–301, 1973.

[Gab62] Peter Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90:323–448, 1962.

[Jan87] Jens Carsten Jantzen. *Representations of Algebraic Groups*, volume 131 of *Pure and applied mathematics.* Academic Press, 1987.

[KL79] David Kazhdan and George Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Inventiones*, 53:191–213, 1979.

[KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on Manifolds*, volume 292 of *Grundlehren.* Springer, 1990.

[Lus80] George Lusztig. Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 37*, pages 313–317. AMS, 1980.

[Soe90] Wolfgang Soergel. Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe. *Journal of the AMS*, 3:421–445, 1990.

[Soe97] Wolfgang Soergel. Kazhdan-Lusztig-Polynome und eine Kombinatorik für Kipp-Moduln. *Representation Theory (An electronic Journal of the AMS)*, 1:37–68, english 83–114, 1997.

[Spr82] Tonny A. Springer. Quelques applications de la cohomologie d'intersection, exp. 589 in: Séminaire Bourbaki 1981/82. *Astérisque*, 92-93:249–273, 1982.