APPENDIX ZU “KAZHDAN-LUSZTIG-POLYNOME UND EINE KOMBINATORIK FÜR KIPP-MODULN”

WOLFGANG SOERGEL

ZUSAMMENFASSUNG. This is a brief exposition of part of Lusztig's new work [Lus97] in the spirit of the paper, to which this is an appendix.

9. Existenz und Eindeutigkeit für selbstduale Basen

In diesem Abschnitt möchte ich erklären, inwieweit die Existenz und Eindeutigkeit unserer selbstdualen Basen in Wirklichkeit eine sehr allgemeine Tatsache ist. Sei $(W, \leq)$ eine partiell geordnete Menge derart, daß unterhalb von jedem Element höchstens endlich viele andere Elemente liegen. Sei $\mathcal{L}W$ der freie $\mathcal{L}$-Modul über W und d eine schieflineare Involution auf $\mathcal{L}W$, also ein $\mathbb{Z}$-linearer Endomorphismus mit $d^2 = \mathrm{id}$ und $d(vf) = v^{-1}d(f)$. Ein Element $f \in \mathcal{L}W$ mit $d(f) = f$ nennen wir selbstdual.

Wir nehmen nun zusätzlich an, daß gilt

$$d(x) \in x + \sum_{y<x} \mathcal{L}y$$

für alle $x \in W$. So haben wir folgende allgemeine

Proposition 9.1. [Lus93] *Es gibt für jedes $x \in W$ genau ein selbstduales Element $\underline{x} \in \mathcal{L}W$ von der Form $\underline{x} \in x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]y$. Für dies selbstduale Element $\underline{x}$ gilt sogar $\underline{x} \in x + \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v]y$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz. Für eine Teilmenge $T \subset W$ definieren wir ihren “unteren Abschluß” $T^\wedge \subset W$ durch

$$T^\wedge = \{x \in W \mid \exists t \in T \text{ mit } t \geq x\}.$$

Für $f = \sum f_x x \in \mathcal{L}W$ definieren wir den Träger $\operatorname{supp} f \subset W$ durch $\operatorname{supp} f = \{x \mid f_x \neq 0\}$. Jetzt zeigen wir durch Induktion von oben

Behauptung 9.2. Für alle n gibt es $\underline{x}_n \in x + \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v]y$ derart, daß im unteren Abschluß des Trägers von $x_n - dx_n$ höchstens n Elemente liegen.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 5E99, 17B37.

Natürlich können wir unsere Induktion bei $m = \mathrm{card}\{y \mid y < x\}$ mit $\underline{x}_m = x$ starten und am Schluß ist $\underline{x}_0$ unser gesuchtes $\underline{x}$. Sei nun ein mögliches $\underline{x}_n$ bereits gefunden. Ist $\underline{x}_n - d\underline{x}_n = 0$, so können wir $\underline{x}_0 = \underline{x}_n$ nehmen und sind fertig. Sonst wählen wir $z \in \mathrm{supp}(\underline{x}_n - d\underline{x}_n)$ maximal. Schreiben wir dann $\underline{x}_n - d\underline{x}_n = \sum_y f_y y$, so wechseln beide Seiten unter d ihr Vorzeichen und es folgt $\overline{f_z} = -f_z$. Wir können also f_z schreiben als $f_z = g_z - \overline{g_z}$ mit $g_z \in v\mathbb{Z}[v]$, und man überzeugt sich leicht, daß ein mögliches $\underline{x}_{n-1}$ gegeben wird durch $\underline{x}_{n-1} = \underline{x}_n - g_z z$. Das zeigt die Behauptung und die Existenz unserer $\underline{x}$.

Die Eindeutigkeit folgt sofort aus

Behauptung 9.3. Für $f \in \sum_y v\mathbb{Z}[v]y$ folgt aus $f = df$ schon $f = 0$.

Schreiben wir $f = \sum f_y y$ und wählen z maximal mit $f_z \neq 0$, so folgt aus $f = df$ schon $f_z = \overline{f}_z$ im Widerspruch zu $f_z \in v\mathbb{Z}[v]$. Das zeigt die Behauptung, und die Proposition ist bewiesen. $\square$

Fordern wir von der partiell geordneten Menge W nur, daß alle ihre Intervalle endlich sind, so betrachten wir allgemeiner den $\mathcal{L}$-Modul $\widehat{\mathcal{L}W} = \{f : W \to \mathcal{L} \mid$ Es gibt eine endliche Teilmenge $T \subset W$ mit $\mathrm{supp}\, f \subset T^\wedge\}$. Elemente von $\widehat{\mathcal{L}W}$ schreiben wir als formale unendliche Linearkombination $f = \sum^\infty f(x)x$.

Sei nun d eine schieflineare Involution auf $\widehat{\mathcal{L}W}$ mit der Stetigkeitseigenschaft $\mathrm{supp}(df) \subset (\mathrm{supp}\, f)^\wedge \quad \forall f \in \widehat{\mathcal{L}W}$. Gilt zusätzlich $d(x) \in x + \sum_{y<x}^\infty \mathcal{L}y \quad \forall x \in W$, so haben wir in Verallgemeinerung der obigen Proposition 9.1 folgende

Proposition 9.4. [Lus93] *Es gibt für jedes $x \in W$ genau ein selbstduales $\underline{x} \in \widehat{\mathcal{L}W}$ von der Form $\underline{x} \in x + \sum^\infty v\mathbb{Z}[v]y$, und dies $\underline{x}$ ist sogar von der Form $\underline{x} \in x + \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v]y$.*

Beweis. Der Beweis ist mutatis mutandis derselbe wie eben, um den Koeffizienten von $\underline{x}$ an der Stelle $z \in W$ zu bestimmen müssen wir nur induktiv das Intervall $\{y \mid x \geq y \geq z\}$ abarbeiten. $\square$

10. Die parabolischen periodischen Hecke-Moluln

In diesem Abschnitt stelle ich Resultate aus [Lus97] vor. Sei $\Delta_\iota \subset \Delta$ eine Teilmenge der einfachen Wurzeln. Wir bezeichnen mit $W_\iota \subset W$ die von Spiegelungen zu Wurzeln aus Δ_ι erzeugte Untergruppe und mit $\mathcal{W}_{(\iota)} \subset \mathcal{W}$ die Untergruppe, die von allen Spiegelungen an Spiegelebenen erzeugt wird, auf denen eine Wurzel aus Δ_ι senkrecht steht. Es ist also $W_\iota \subset \mathcal{W}_{(\iota)}$, genauer gilt $W_\iota = \mathcal{W}_{(\iota)} \cap W$. Die Alkoven zu $\mathcal{W}_{(\iota)}$ nennen wir "Δ_ι-Streifen" oder kurz "ι-Streifen" in Verallgemeinerung der α-Streifen aus Abschnitt 4. Der ι-Streifen, der den fundamentalen dominanten Alkoven A^+ enthält, heißt auch der "fundamentale dominante ι-Streifen." Wir setzen $\mathcal{A}^\iota = \{A \in \mathcal{A} \mid A$ liegt im fundamentalen dominanten ι-Streifen$\}$ und können die parabolischen periodischen Hecke-Moduln einführen.

Lemma 10.1. [Lus97] *Auf dem freien $\mathcal{L}$-Modul $\mathcal{P}^\iota = \bigoplus_{A\in\mathcal{A}^\iota} \mathcal{L}A$ über $\mathcal{A}^\iota$ gibt es genau eine Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ derart, daß für alle $s \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{A}^\iota$ gilt*

$$A \cdot \underline{H}_s = \begin{cases} As + vA & \text{falls } As \succ A, As \in \mathcal{A}^\iota; \\ As + v^{-1}A & \text{falls } As \prec A, As \in \mathcal{A}^\iota; \\ (v+v^{-1})A & \text{falls } As \notin \mathcal{A}^\iota. \end{cases} \tag{1}$$

Bemerkung 10.2. Wir benutzen die Notation $A \cdot \underline{H}_s$, um die Operation von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}^\iota$ zu unterscheiden von der Operation auf $\mathcal{P}$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den $\mathcal{L}$-Modul $\mathcal{P}^*$ aller Abbildungen $f : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$. Seine Elemente fassen wir auf als unendliche formale Linearkombination $f = \sum_{A\in\mathcal{A}}^{\infty} f(A)A$ und haben so eine offensichtliche Einbettung $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{P}^*$. Unsere $\mathcal{H}$-Rechtsoperation auf $\mathcal{P}$ läßt sich in offensichtlicher Weise auf $\mathcal{P}^*$ ausdehnen. Formal ist $\mathcal{P}^* = \operatorname{Hom}_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, aufgefaßt als $\mathcal{H}$-Rechtsmodul mithilfe unseres Antiautomorphismus $i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Bezeichne $\mathcal{F}_\iota \subset \mathcal{F}$ die Menge der Spiegelebenen zu Spiegelungen von $\mathcal{W}_{(\iota)}$. Wir definieren für je zwei Alkoven $A, B \in \mathcal{A}$ ihre "relative ι-Höhe" $d_\iota(A, B) \in \mathbb{Z}$ durch

$$\begin{aligned} d_\iota(A,B) &= \operatorname{card}\{H \in \mathcal{F}_\iota \mid A \subset H^-, B \subset H^+\} \\ &\quad - \operatorname{card}\{H \in \mathcal{F}_\iota \mid A \subset H^+, B \subset H^-\}. \end{aligned}$$

Natürlich hängt diese Zahl nur von den ι-Streifen von A und B ab. Anschließend definieren wir die $\mathcal{L}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{sum} = \operatorname{sum}_\iota : \ & \mathcal{P}^\iota \hookrightarrow \mathcal{P}^* \\ & A \mapsto \textstyle\sum_{x\in\mathcal{W}_{(\iota)}}^{\infty} v^{d_\iota(xA,A)} xA \end{aligned}$$

für alle $A \in \mathcal{A}^\iota$ und das Lemma folgt sofort aus

Behauptung 10.3. Ist für $A \in \mathcal{A}^\iota$, $s \in \mathcal{S}$ das Element $A \cdot \underline{H}_s \in \mathcal{P}^\iota$ definiert durch die Fallunterscheidung in unserem Lemma, so gilt

$$\operatorname{sum}(A \cdot \underline{H}_s) = (\operatorname{sum} A)\underline{H}_s.$$

Zeigen wir also diese Behauptung. Nun, ist $R_\iota \subset R$ das von $\Delta_\iota \subset \Delta$ erzeugte Unterwurzelsystem, so gilt $w(R^+ - R_\iota) = R^+ - R_\iota \quad \forall w \in W_\iota$.

Sind also $A, As \in \mathcal{A}^\iota$, so gilt $As \succ A \Rightarrow xAs \succ xA \quad \forall x \in \mathcal{W}_{(\iota)}$. Das erledigt die beiden ersten Fälle in unserer Fallunterscheidung. Im letzten Fall ist $As = zA$ für geeignetes $z \in \mathcal{W}_{(\iota)}$ und wir können schreiben

$$\operatorname{sum} A \;=\; \textstyle\sum_{xA \succ xAs}^{\infty} v^{d_\iota(xA,A)}(xA + v(xAs)).$$

Nun gilt aber für $B \in \mathcal{A}$ mit $B \succ Bs$ in der Tat $(B + vBs)\underline{H}_s = (v + v^{-1})(B + vBs)$ und wir folgern

$$(\operatorname{sum} A)\underline{H}_s = (v + v^{-1}) \operatorname{sum} A = \operatorname{sum}(A \cdot \underline{H}_s).$$

□

Zur späteren Verwendung notieren wir noch

Lemma 10.4. *Die Abbildung* $\operatorname{sum} = \operatorname{sum}_\iota : \mathcal{P}^\iota \hookrightarrow \mathcal{P}^*$ *ist ein Homomorphismus von* $\mathcal{H}$*-Rechtsmoduln.*

Beweis. Das ist nur eine Umformulierung der Behauptung 10.3. □

Für jedes ganze Gewicht λ im Abschluß des fundamentalen dominanten ι-Streifens definieren wir $E_\lambda^\iota \in \mathcal{P}^\iota$ durch die Formel

$$E_\lambda^\iota = \sum_{A \in \mathcal{A}^\iota, \lambda \in \bar{A}} v^{f(A)} A,$$

wo $\bar{A}$ ausnahmsweise den Abschluss von A bezeichnet, $f : \{A \in \mathcal{A}^\iota \mid \lambda \in \bar{A}\} \to \mathbb{N}$ gegeben ist durch $f(\lambda + xA^+) = l(x) - m$, und m gerade so gewählt wird, daß die Funktion f den Wert Null annimmt, also $m = \min\{l(x) \mid x \in W, \lambda + xA^+ \in \mathcal{A}^\iota\}$.

Sei $\mathcal{P}_\circ^\iota \subset \mathcal{P}^\iota$ der von allen E_λ^ι erzeugten $\mathcal{H}$-Untermodul.

Proposition 10.5. *Es gibt auf* $\mathcal{P}_\circ^\iota$ *genau eine* $\mathcal{H}$*-schieflineare Involution* $\mathcal{P}_\circ^\iota \to \mathcal{P}_\circ^\iota$, $P \mapsto \overline{P}$ *derart, daß gilt* $\overline{E_\lambda^\iota} = E_\lambda^\iota$ *für alle ganzen Gewichte* λ *im Abschluß des dominanten* ι*-Streifens.*

Beweis. Verschoben. □

Um die Existenz von kanonischen selbstdualen Basen zu garantieren, arbeiten wir im "nach unten vervollständigten" Hecke-Modul

$$\widehat{\mathcal{P}}^\iota = \{f : \mathcal{A}^\iota \to \mathcal{L} \mid \text{Es gibt } C \in \mathcal{A}^\iota \text{ so daß } f(A) \neq 0 \Rightarrow A \preceq C\}.$$

Für je zwei $C_1, C_2 \in \mathcal{A}^\iota$ gibt es $C \in \mathcal{A}^\iota$ mit $C_1 \preceq C$, $C_2 \preceq C$. Also ist $\widehat{\mathcal{P}}^\iota$ ein $\mathcal{L}$-Untermodul im Raum aller Funktionen von $\mathcal{A}^\iota$ nach $\mathcal{L}$. Wir schreiben Elemente $f \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota$ als formale Linearkombinationen $f = \sum^\infty f_A A$ mit $f_A = f(A)$. Unsere Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}^\iota$ setzen wir in der offensichtlichen Weise auf $\widehat{\mathcal{P}}^\iota$ fort. Für $f \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota$ definieren wir den Träger $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{A}^\iota$ durch $\operatorname{supp} f = \{A \in \mathcal{A}^\iota \mid f(A) \neq 0\}$ und für jede Teilmenge $T \subset \mathcal{A}^\iota$ bezeichnet $T^\wedge = \{A \in \mathcal{A}^\iota \mid \exists C \in T \text{ mit } A \preceq C\}$ ihren unteren Abschluß.

Theorem 10.6. 1. *Es gibt auf* $\widehat{\mathcal{P}}^\iota$ *genau eine* $\mathcal{H}$*-schieflineare Involution* $\widehat{\mathcal{P}}^\iota \to \widehat{\mathcal{P}}^\iota$, $P \mapsto \overline{P}$ *derart, daß gilt* $\operatorname{supp} \overline{P} \subset (\operatorname{supp} P)^\wedge$ *für alle* $P \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota$ *und* $\overline{E^\iota_\lambda} = E^\iota_\lambda$ *für alle ganzen Gewichte* λ *im Abschluß des fundamentalen dominanten* ι*-Streifens.*

2. *Für alle* $A \in \mathcal{A}^\iota$ *gibt es genau ein (unter dieser Involution) selbstduales* $\underline{P}^\iota_A \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota$ *von der Form* $\underline{P}^\iota_A \in A + \sum_B^\infty v\mathbb{Z}[v]B$.

Bemerkungen 10.7. 1. Unsere Proposition 10.5 folgt sofort aus Teil 1 des Theorems, ist aber ein wichtiger Teilschritt im Beweis desselben.

2. Eine zentrale offene Frage der hier vorgestellten Theorie ist, ob die selbstdualen $\underline{P}^\iota_A$ schon endliche Summen sind, ob also gilt $\underline{P}^\iota_A \in \mathcal{P}^\iota \quad \forall A \in \mathcal{A}^\iota$.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis der Eindeutigkeit in Teil 1. Wir finden ja für alle $A \in \mathcal{A}^\iota$ eine Folge $s, t, \ldots, r \in \mathcal{S}$ so, daß $A \succ As \succ Ast \succ \ldots \succ Ast\ldots r$ wobei alle diese Alkoven im fundamentalen dominanten ι-Streifen liegen und $Ast \ldots r = \lambda + A^+$ für ein geeignetes ganzes Gewicht λ. Dann ist natürlich $D_A = E_\lambda \cdot (\underline{H}_r \ldots \underline{H}_s) \in \mathcal{P}^\iota_0$ selbstdual und von der Form $D_A \in A + \sum_{B \prec A} \mathcal{L}B$. Indem wir uns von oben nach unten hangeln können wir nun jedes $P \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota$ schreiben als unendliche formale Linearkombination $P = \sum^\infty p_A D_A$ mit $p_A \in \mathcal{L}$ und haben notwendig $\overline{P} = \sum^\infty \overline{p_A} D_A$. Mithin ist die Dualität durch unsere Bedingungen eindeutig festgelegt. Wir erhalten zusätzlich $\overline{A} \in A + \sum^\infty_{B \prec A} \mathcal{L}B$ für alle $A \in \mathcal{A}^\iota$ und können somit Proposition 9.4 anwenden, um Teil 2 des Theorems aus Teil 1 zu folgern.

Das eigentliche Problem ist also der Nachweis der Existenz unserer Involution in Teil 1. Wir werden nach einigen Vorarbeiten darauf zurückkommen. □

Sei $\mathcal{T}_{(\iota)} \subset \mathcal{W}_{(\iota)}$ die Menge der Translationen aus $\mathcal{W}_{(\iota)}$. Es gibt einen Homomorphismus $d = d_\iota : \mathcal{T}_{(\iota)} \to \mathbb{Z}$ mit $d(\lambda) = d_\iota(\lambda) = d_\iota(A, \lambda + A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Nebenbei bemerkt landet d sogar in den geraden ganzen Zahlen.

Wir definieren nun einen Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln $\operatorname{Sum} : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}^*$ durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Sum} & : & \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}^* \\ & & P \mapsto \sum^\infty_{\lambda \in \mathcal{T}_{(\iota)}} v^{-d(\lambda)} \langle \lambda \rangle P. \end{array}$$

Offensichtlich gilt $\operatorname{Sum} E_\mu \in \operatorname{sum} \mathcal{P}^\iota$ für alle $\mu \in X$ und folglich $\operatorname{Sum} \mathcal{P}_\circ \subset \operatorname{sum} \mathcal{P}^\iota$. Mithin können wir einen Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln

$$\operatorname{re}\operatorname{Sum} : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}^\iota$$

definieren durch die Vorschrift $\mathrm{sum} \circ \mathrm{re}\,\mathrm{Sum} = \mathrm{Sum}$.

Sei $w_\iota \in W_\iota$ das längste Element. Der Schlüssel zur Definition der Dualität auf $\mathcal{P}^\iota_\circ$ ist folgendes

Lemma 10.8. *Der Kern von* $\mathrm{re}\,\mathrm{Sum} : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}^\iota$ *ist stabil unter* $P \mapsto \langle w_\iota \rangle \overline{P}$.

Beweis. Verschoben. □

Beweis von Proposition 10.5. Aus dem Lemma folgt, daß die schieflineare Dualität $P \mapsto \langle w_\iota \rangle \overline{P}$ eine schieflineare Dualität auf dem Bild von $\mathrm{re}\,\mathrm{Sum}$ in $\mathcal{P}^\iota$ induziert. Nun ist aber das Bild von $\mathrm{re}\,\mathrm{Sum}$ gerade $\mathcal{P}^\iota_\circ$. Bezeichnen wir genauer für ein ganzes Gewicht $\lambda \in X$ mit λ^ι das dazu unter $\mathcal{W}_{(\iota)}$ konjugierte Gewicht im Abschluß des fundamentalen dominanten ι-Streifens, so gilt

$$\mathrm{re}\,\mathrm{Sum}\, E_\lambda = v^{-d_\iota(\lambda + A^+, A^+)} E^\iota_{\lambda^\iota}$$

und wir sehen, daß unter der induzierten Dualität E^ι_μ selbstdual ist für alle μ im Abschluß des fundamentalen dominanten ι-Streifens. □

Beweis von Lemma 10.8. Das Lemma würde natürlich sofort folgen aus einer Formel der Gestalt $\langle w_\iota \rangle \overline{\mathrm{Sum}\, P} = \mathrm{Sum} \langle w_\iota \rangle \overline{P}$. Leider ist die linke Seite hier nicht definiert, denn wir kennen weder eine Dualität noch eine Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{P}^*$. Wir werden der linken Seite dennoch einen Sinn geben und so das Lemma zeigen.

Zunächst erinnern wir an die Definition der Dualität auf $\mathcal{P}_\circ$. Diese setzt sich ja zusammen als $\overline{P} = v^r \langle w_\circ \rangle c P$, wo die $\mathcal{H}$-schieflineare Involution c sich offensichtlich auf $\mathcal{P}^*$ ausdehnen läßt zu

$$c : \sum^\infty g_A A \mapsto \sum^\infty \overline{g_A} (w_\circ A).$$

Natürlich reicht es für unsere Zwecke auch, wenn wir einer Formel der Gestalt $v^r \langle w_\iota w_\circ \rangle c(\mathrm{Sum}\, P) = \mathrm{Sum} \langle w_\iota \rangle \overline{P}$ Sinn geben können.

Nun lassen sich zwar die Operatoren $\langle s_\beta \rangle : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}_\circ$ nicht mehr sinnvoll auf $\mathcal{P}^*$ ausdehnen, sie lassen sich aber immer noch ausdehnen zu Endomorphismen der $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln

$$\mathcal{P}^*_\beta = \left\{ \sum^\infty f_A A \mid \text{ Für jede } \beta\text{-Kette } \mathcal{K} \subset \mathcal{A} \text{ gilt} \sum_{A \in \mathcal{K}} f_A A \in \mathcal{P}_\beta \right\}$$

(Vergleiche hierzu den Beweis von Proposition 6.6.) Wir schreiben dann $w_\iota w_\circ = s_{\beta(l)} \ldots s_{\beta(1)}$ als unverkürzbares Produkt von einfachen Spiegelungen an den einfachen Wurzeln $\beta(i) \in \Delta$ und zeigen folgende

Behauptung 10.9. Sei $P \in \mathcal{P}_\circ$. So gilt $\langle s_{\beta(i)}\rangle \circ \ldots \circ \langle s_{\beta(1)}\rangle c(\operatorname{Sum} P) \in \mathcal{P}^*_{\beta(i+1)}$ für $i = 0, 1, \ldots, l-1$ und

$$v^r \langle s_{\beta(l)}\rangle \circ \ldots \circ \langle s_{\beta(1)}\rangle c(\operatorname{Sum} P) = \operatorname{Sum}\langle w_\iota\rangle \overline{P}.$$

Diese Behauptung ist nun eine präzise Aussage, aus der offensichtlich unser Lemma folgt. Es reicht natürlich, die Behauptung für $P = E_\mu$ mit $\mu \in X$ zu prüfen. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Sum} E_\mu &=& \sum_{\lambda \in \mathcal{T}_{(\iota)}} v^{-d(\lambda)} E_{\lambda+\mu} \\ v^r c(\operatorname{Sum} E_\mu) &=& \sum_{\lambda \in \mathcal{T}_{(\iota)}} v^{d(\lambda)} E_{w_\circ(\lambda+\mu)} \end{array}$$

und für $i = 0, 1, \ldots, l-1$ folgt induktiv die Formel

$$\langle s_{\beta(i)}\rangle \circ \ldots \circ \langle s_{\beta(1)}\rangle v^r c(\operatorname{Sum} E_\mu) = \sum_{\lambda \in \mathcal{T}_\iota} v^{d(\lambda)} E_{s_{\beta(i)} \ldots s_{\beta(1)} w_\circ(\lambda+\mu)}$$

sowie, da $\beta(i+1) \notin s_{\beta(i)} \ldots s_{\beta(1)} w_\circ R_\iota$, der erste Teil der Behauptung. Schließlich erhalten wir so

$$\begin{array}{rcl} \langle s_{\beta(l)}\rangle \circ \ldots \circ \langle s_{\beta(1)}\rangle v^r c(\operatorname{Sum} E_\mu) &=& \sum_{\lambda \in \mathcal{T}_{(\iota)}} v^{d(\lambda)} E_{w_\iota(\lambda+\mu)} \\ &=& \sum_{\lambda \in \mathcal{T}_{(\iota)}} v^{-d(\lambda)} \langle\lambda\rangle\langle w_\iota\rangle E_\mu \\ &=& \operatorname{Sum}\langle w_\iota\rangle \overline{E}_\mu, \end{array}$$

und da $d(w_\iota\lambda) = -d(\lambda)$ ist das genau der zweite Teil der Behauptung. □

Damit ist die Proposition 10.5 bewiesen. Um auch das Theorem 10.6 zu zeigen, müssen wir allerdings nochmal auf diesen Beweis zurückkommen und ihm eine etwas feinere Aussage abgewinnen.

Für einen Alkoven $A \in \mathcal{A}$ bezeichne $b(A) \in V$ seinen Schwerpunkt. Für $P \in \mathcal{P}^*$ schreiben wir kurz $\operatorname{bsupp}(P)$ für die Menge $b(\operatorname{supp} P)$ aller Schwerpunkte von Alkoven im Träger von P.

Lemma 10.10. *Sei $K \subset V$ eine konvexe Teilmenge, die stabil ist unter Verschiebung mit Wurzeln aus R_ι. So ist die Menge aller $P \in \mathcal{P}_0^\iota$ mit $\operatorname{bsupp}(P) \subset K$ stabil unter unserer Involution auf $\mathcal{P}_0^\iota$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \Delta$, $R \in \mathcal{P}^*_\alpha$ und $T \subset V$ eine konvexe Teilmenge mit $\operatorname{bsupp}(R) \subset T$. So folgt aus den Definitionen sofort $\operatorname{bsupp}(\langle s_\alpha\rangle R) \subset s_\alpha T$, wir brauchen sogar nur anzunehmen, daß T jede Gerade mit Richtungsvektor α in einem Intervall trifft. Um das Lemma zu folgern, schreiben wir $P = \operatorname{re}\operatorname{Sum} Q$ für $Q \in \mathcal{P}_0$. Natürlich gilt dann $\operatorname{bsupp}(\operatorname{Sum} Q) \subset K$ und mit der Behauptung 10.9 folgt

$$\operatorname{bsupp}(\operatorname{Sum}\langle w_\iota\rangle \overline{Q}) \subset K.$$

Das Lemma ergibt sich sofort. □

Mit diesem Lemma ist nun der Weg frei zum noch ausstehenden Beweis der Existenz der Involution in Theorem 10.6.

Beweis von Theorem 10.6, Schluss. Sei $\kappa \in V^*$ eine Linearform mit $\kappa(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_\iota$ und $\kappa(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta - \Delta_\iota$. Betrachten wir nun die Halbräume $K_t = \{v \mid \kappa(v) \le t\}$ und erklären auf $\widehat{P}^\iota$ die Struktur einer (additiven) topologischen Gruppe durch die Vorschrift, daß die Untergruppen $\{P \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota \mid \mathrm{bsupp}(P) \subset K_t\}$ ein fundamentales System von Umgebungen der Null bilden soll. Diese Topologie hängt von der Wahl von κ ab und ist nur ein Hilfsvehikel für diesen Beweis.

Leider ist $\widehat{P}^\iota$ nicht vollständig für unsere Topologie. Bezeichne $\tilde{P}^\iota$ seine Vervollständigung. Wir können und werden $\tilde{\mathcal{P}}^\iota$ identifizieren mit der Menge aller Abbildungen $f : \mathcal{A}^\iota \to \mathcal{L}$ derart, daß für beliebig kleine t immer nur endlich viele Alkoven von $\mathrm{supp}\, f$ ihren Schwerpunkt außerhalb von K_t haben. Die Multiplikation von rechts mit Elementen der Hecke-Algebra ist offensichtlich stetig und läßt sich daher stetig auf $\tilde{P}^\iota$ ausdehnen. Weiter liegt $\mathcal{P}_0^\iota$ dicht in $\tilde{P}^\iota$, für jedes $P \in \tilde{P}^\iota$ gibt es ja höchstens endlich viele $A \in \mathrm{supp}\, P$ mit $b(A) \notin K_t$, und indem wir uns über diese endliche Menge $\mathcal{E}$ nach unten hangeln können wir schreiben $P = \sum_{A \in \mathcal{E}} c_A D_A + \text{Rest}$ für geeignetes $c_A \in \mathcal{L}$, $D_A \in \mathcal{P}_0^\iota$ der Form $D_A = A + \sum_{B \prec B} \mathcal{L}B$ und $\text{Rest} \in \tilde{P}^\iota$ mit $\mathrm{bsupp}(\text{Rest}) \subset K_t$.

Das Lemma 10.10 sagt uns nun, daß unsere Involution auf $\mathcal{P}_0^\iota$ stetig ist. Sie läßt sich also in eindeutiger Weise stetig auf die Komplettierung $\widetilde{\mathcal{P}}^\iota$ fortsetzen, und ist dort $\mathcal{H}$-schieflinear. Wir bezeichnen diese Involution auf $\widetilde{\mathcal{P}}^\iota$ auch mit $P \mapsto \overline{P}$ und müssen nur noch zeigen, daß $\mathrm{supp}\, \overline{P} \subset (\mathrm{supp}\, P)^\wedge$ für alle $P \in \widetilde{\mathcal{P}}^\iota$. (Dann folgt automatisch auch, daß $\widehat{\mathcal{P}}^\iota \subset \tilde{P}^\iota$ stabil ist unter $P \mapsto \overline{P}$.)

Wir haben ja schon beim Beweis der Eindeutigkeit gesehen, daß es für jedes $A \in \mathcal{A}^\iota$ ein selbstduales $D_A \in \mathcal{P}_0^\iota$ von der Form $D_A \in A + \sum_{B \prec A} \mathcal{L}B$ gibt. Wählen wir solche D_A, so können wir jedes $P \in \widetilde{\mathcal{P}}^\iota$ entwickeln als eine konvergierende Summe $P = \sum^\infty c_A D_A$, für beliebig kleines t gibt es also stets nur endlich viele A mit $c_A \neq 0$ und $b(A) \notin K_t$. Dann ist natürlich notwendig $\overline{P} = \sum^\infty \overline{c_A} D_A$, und das zeigt $\mathrm{supp}\, \overline{P} \subset (\mathrm{supp}\, P)^\wedge$. Das Theorem ist bewiesen. □

Literatur

[Lus93] George Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, vol. 110, Birkhäuser, 1993.

[Lus97] George Lusztig, *Periodic W-graphs*, Representation Theory **1** (1997), 207–279.

Universität Freiburg, Mathematisches Institut, Eckerstrasse 1, D-79104 Freiburg, Germany
E-mail address: soergel@mathematik.uni-freiburg.de