KAZHDAN-LUSZTIG-POLYNOME UND EINE KOMBINATORIK FÜR KIPP-MODULN

WOLFGANG SOERGEL

ZUSAMMENFASSUNG. This article gives a selfcontained treatment of the theory of Kazhdan-Lusztig polynomials with special emphasis on affine reflection groups. There are only few new results but quite some new proofs. We close with a conjectural character formula for tilting modules, which formed the starting point of these investigations. As a later addition, we include a brief treatment of Lusztig's new periodic W-graphs and Bernstein's generators and relations for the affine Hecke algebra. (Version vom 12.3.2001.)

INHALTSVERZEICHNIS

1991 *Mathematics Subject Classification.* 5E99, 17B37.

1. Einleitung

Bei dem Versuch, Kazhdan-Lusztig-Vermutungen für Kipp-Moduln aufzustellen, habe ich mich in die Literatur über Kazhdan-Lusztig-Polynome vertieft, insbesondere in die Arbeiten von Kazhdan-Lusztig [KL79], Lusztig [Lus80a], Andersen [And86], Kato [Kat85], Kaneda [Kan87] und Deodhar [Deo87, Deo91]. Es erschien mir sinnvoll, diese Quellen neu zu fassen, um sie leichter zugänglich zu machen. Damit beschäftigen sich die ersten Abschnitte dieser Arbeit. Das einzig neue Resultat hier ist Theorem 5.1, neu sind jedoch manche Beweise und auch die Darstellung als Ganzes (die im Ansatz allerdings auch schon in [Mil] und [Lus91] zu finden ist). Insbesondere kommen die sogenannten R-Polynome in meiner Darstellung nicht mehr explizit vor. Im letzten Abschnitt erreiche ich dann mein ursprüngliches Ziel und gebe eine Vermutung für den Charakter eines Kipp-Moduls an. Es folgt ein graphisch dargestelltes Beispiel und ein Verzeichnis der wichtigsten Notationen. Eine Darstellung der Grundlagen dieses Artikels, die die Resultate des folgenden Abschnitts einschließt, findet man in [Hum90]. Für den dritten Abschnitt vergleiche man auch [Deo94].

Ich danke Henning Haahr Andersen, der mir seine Notizen mit verwandten Überlegungen zur Verfügung stellte, und Corinne Blondel, Michèle Couillens, Caroline Gruson, Jens Carsten Jantzen, Friedrich Knop und George Lusztig für ihre hilfreichen Kommentare zu vorläufigen Fassungen.

2. Die gewöhnlichen Kazhdan-Lusztig-Polynome

Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein Coxeter-System, $l : \mathcal{W} \to \mathbb{N}$ die zugehörige Längenfunktion und $\leq$ die Bruhat-Ordnung auf $\mathcal{W}$. Insbesondere bedeutet $x < y$ also $x \leq y$, $x \neq y$. Bezeichne $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ den Ring der Laurentpolynome über $\mathbb{Z}$ in einer Variablen v. Auf dem freien $\mathcal{L}$-Modul

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{W}, \mathcal{S}) = \bigoplus_{x \in \mathcal{W}} \mathcal{L} T_x$$

über $\mathcal{W}$ gibt es genau eine Struktur einer assoziativen $\mathcal{L}$-Algebra derart, daß $T_x T_y = T_{xy}$ falls $l(x) + l(y) = l(xy)$ und $T_s^2 = v^{-2} T_e + (v^{-2} - 1) T_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$, siehe [Bou81], IV, §2, Exercice 23. Diese assoziative Algebra $\mathcal{H}$ heißt die Hecke-Algebra von $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$. Sie ist unitär mit Eins-Element T_e, wir kürzen deshalb auch oft $T_e = 1$ ab.

Die Hecke-Algebra kann auch beschrieben werden als die assoziative $\mathcal{L}$-Algebra mit den Erzeugern $\{H_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ (für $H_s = v T_s$), den quadratischen Relationen

$$(H_s + v)(H_s - v^{-1}) = 0 \quad \text{alias} \quad H_s^2 = 1 + (v^{-1} - v) H_s$$

sowie den sogenannten Zopf-Relationen $H_sH_t\ldots H_s = H_tH_s\ldots H_t$ bzw. $H_sH_tH_s\ldots H_t = H_tH_sH_t\ldots H_s$ wenn gilt $st\ldots s = ts\ldots t$ beziehungsweise $sts\ldots t = tst\ldots s$ für $s,t \in \mathcal{S}$. Alle H_s sind invertierbar, genauer prüft man leicht die Formel $H_s^{-1} = H_s + (v - v^{-1})$.

Wir arbeiten von nun an mit $H_x = v^{l(x)}T_x$. Sicher gilt auch $H_xH_y = H_{xy}$ falls $l(x)+l(y) = l(xy)$. Mit den H_s sind also auch alle H_x Einheiten in $\mathcal{H}$. Wir können involutive Automorphismen $a, b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definieren durch die Vorschrift

$$\begin{array}{ll} a(v) = -v, & a(H_y) = (-1)^{l(y)}H_y, \\ b(v) = -v^{-1}, & b(H_x) = H_x, \end{array}$$

und involutive Antiautomorphismen $\delta, i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch die Vorschrift

$$\begin{array}{ll} \delta(v) = v^{-1}, & \delta(H_x) = H_x^{-1}, \\ i(v) = v, & i(H_x) = H_{x^{-1}}. \end{array}$$

Diese vier Involutionen kommutieren paarweise und definieren mithin eine Operation von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ auf $\mathcal{H}$, die für nichtkommutatives $\mathcal{W}$ sogar treu ist. Insbesondere ist $d = i\delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein involutiver Automorphismus von $\mathcal{H}$, die sogenannte Dualität, und man prüft leicht

$$d(H_x) \in H_x + \sum_{y<x} \mathcal{L}H_y,$$

indem man H_x als ein Produkt von H_s mit $s \in \mathcal{S}$ schreibt. Der Automorphismus d spielt in der Theorie der Kazhdan-Lusztig-Polynome eine fundamentale Rolle. Wir schreiben oft $d(H) = \overline{H}$, es gilt also $\overline{v} = v^{-1}$ und $\overline{H}_x = (H_{x^{-1}})^{-1}$. Wir nennen $H \in \mathcal{H}$ selbstdual genau dann, wenn gilt $\overline{H} = H$.

Theorem 2.1 ([KL79]). *Für alle $x \in \mathcal{W}$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ mit $\underline{H}_x \in H_x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]H_y$.*

Bemerkung 2.2. In [KL79] wird unser $\underline{H}_x$ mit C'_x bezeichnet. Weiter arbeiten Kazhdan und Lusztig mit der Variablen $q = v^{-2}$ und mit der $\mathcal{L}$-Basis der T_x.

Wir geben für dies Theorem zwei Beweise, um verschiedene Aspekte dieser zentralen Aussage zu beleuchten.

Erster Beweis. Wir wissen ja schon, daß gilt $\overline{H_s} = H_s^{-1} = H_s+(v-v^{-1})$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Insbesondere ist $H_s + v$ selbstdual, und sobald wir die Eindeutigkeit der $\underline{H}_x$ gezeigt haben, können und werden wir $H_s + v$ mit $\underline{H}_s$ abkürzen.

Die Rechtsmultiplikation von (H_s+v) auf $\mathcal{H}$ wird beschrieben durch die Formeln

$$H_x(H_s+v) = \begin{cases} H_{xs} + vH_x & \text{falls } xs > x; \\ H_{xs} + v^{-1}H_x & \text{falls } xs < x. \end{cases}$$

Wir beginnen nun mit dem Beweis der Existenz und zeigen dazu durch Induktion über die Bruhat-Ordnung die stärkere

Behauptung 2.3. Es gibt für alle $x \in \mathcal{W}$ ein selbstduales $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ mit $\underline{H}_x \in H_x + \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v]H_y$.

Sicher können wir die Induktion mit $\underline{H}_e = H_e = 1$ beginnen. Sei nun $x \in \mathcal{W}$ gegeben und sei die Existenz von $\underline{H}_y$ bekannt für alle $y < x$. Falls $x \neq e$ finden wir $s \in \mathcal{S}$ mit $xs < x$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\underline{H}_{xs}(H_s+v) = H_x + \sum_{y<x} h_y H_y$$

für geeignete $h_y \in \mathbb{Z}[v]$. Wir bilden

$$\underline{H}_x = \underline{H}_{xs}(H_s+v) - \sum_{y<x} h_y(0)\underline{H}_y,$$

und unsere Induktion läuft. Damit wissen wir, daß es die in der Behauptung beschriebenen $\underline{H}_x$ gibt. Die Eindeutigkeit der $\underline{H}_x$ folgt leicht aus

Behauptung 2.4. Für $H \in \sum_y v\mathbb{Z}[v]H_y$ folgt aus $H = \overline{H}$ schon $H = 0$.

Sicher gilt $H_x \in \underline{H}_x + \sum_{y<x} \mathcal{L}\underline{H}_y$ für $\underline{H}_x$ wie in der schon gezeigten Behauptung 2.3 und folglich $\overline{H_x} \in H_x + \sum_{y<x} \mathcal{L}H_y$ für alle $x \in \mathcal{W}$. Schreiben wir nun $H = \sum h_y H_y$ und wählen z maximal mit $h_z \neq 0$, so folgt aus $H = \overline{H}$ schon $h_z = \overline{h}_z$ im Widerspruch zu $h_z \in v\mathbb{Z}[v]$. Das zeigt die Behauptung, und das Theorem ist bewiesen. □

Zweiter Beweis. Das Theorem folgt sofort aus der sehr allgemeinen Proposition 9.1. □

In einer abelschen Gruppe E mit Involution d bezeichne $E^+ \subset E$ die Untergruppe der selbstdualen Elemente $E^+ = \{e \in E \mid de = e\}$.

Proposition 2.5.
1. *$\mathcal{H}^+$ ist ein freier Modul über $\mathcal{L}^+ = \mathbb{Z}[(v+v^{-1})]$ mit Basis $\underline{H}_x$, $x \in \mathcal{W}$.*
2. *Als $\mathcal{L}^+$-Unteralgebra von $\mathcal{H}$ wird $\mathcal{H}^+$ erzeugt von den $\underline{H}_s$, $s \in \mathcal{S}$.*

Beweis. Offensichtlich bilden die $\underline{H}_x$ eine $\mathcal{L}$-Basis von $\mathcal{H}$, und $\sum h_x \underline{H}_x$ ist selbstdual genau dann, wenn alle h_x es sind. Die induktive Konstruktion der $\underline{H}_x$ zeigt sogar, daß alle $\underline{H}_x$ in der $\mathbb{Z}$-Unteralgebra von $\mathcal{H}$ liegen, die von den $\underline{H}_s$ mit $s \in S$ erzeugt wird. □

Definition 2.6. Wir definieren für $x, y \in \mathcal{W}$ die $h_{y,x} \in \mathcal{L}$ durch die Gleichung

$$\underline{H}_x = \sum_y h_{y,x} H_y.$$

Die folgende Proposition erklärt den Zusammenhang zwischen diesen $h_{y,x}$ und den üblichen Kazhdan-Lusztig-Polynomen $P_{y,x}$.

Proposition 2.7. *Für alle $x, y \in \mathcal{W}$ mit $y \leq x$ gibt es ein Polynom $P_{y,x} \in \mathbb{Z}[q]$ derart, daß gilt*

$$v^{l(y)-l(x)} h_{y,x} = P_{y,x}(v^{-2})$$

Wir haben $P_{y,x}(0) = 1$ für alle $y \leq x$, es gilt $P_{x,x} = 1$, und für $x \neq y$ ist der Grad von $P_{y,x}$ stets echt kleiner als $(l(x) - l(y))/2$.

Beweis. Wir erinnern uns an den involutiven Automorphismus $a : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $a(v) = -v$, $a(H_y) = (-1)^{l(y)} H_y$. Da a mit d kommutiert, folgt $a(\underline{H}_x) = (-1)^{l(x)} \underline{H}_x$ und damit $v^{l(y)-l(x)} h_{y,x} \in \mathbb{Z}[v^2, v^{-2}]$.

Als nächstes weisen wir $v^{l(y)-l(x)} h_{y,x} \in 1 + v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]$ nach. Dazu ist es übersichtlicher, in der Basis der $T_y = v^{-l(y)} H_y$ und mit $C_x = v^{-l(x)} \underline{H}_x$ zu arbeiten. In dieser Notation müssen wir dann also zeigen

$$C_x \in \sum_{y \leq x} T_y + \sum_z v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] T_z$$

Das geht durch Induktion über die Länge von x. Für $x = e$ ist die Behauptung klar. Falls $x \neq e$ finden wir $s \in \mathcal{S}$ mit $xs < x$ und können schreiben $C_x = C_{xs} C_s - \sum_{y<x} h_y(0) v^{l(y)-l(x)} C_y$ wie im ersten Beweis von 2.1. Nun prüft man leicht

$$T_z C_s \quad = \quad \begin{cases} T_{zs} + T_z & zs > z; \\ v^{-2} T_{zs} + v^{-2} T_z & zs < z. \end{cases}$$

Aus unserer Induktionsannahme folgt also

$$C_x \in \left(\sum_{y \leq xs} T_y \right) C_s + \sum_z v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] T_z,$$

und da weiter gilt $\{z \mid z \leq x\} = \{z, zs \mid z \leq xs \text{ und } z < zs\}$ folgt unsere Behauptung. Die Abschätzung für den Grad der $P_{y,x}$ schließlich ist die Übersetzung der Bedingung, daß die $h_{y,x}$ für $y \neq x$ Polynome in v ohne konstanten Term sein sollen. □

Bezeichne ab jetzt $\mu(y,x) \in \mathbb{Z}$ den Koeffizienten von v in $h_{y,x}$. Die Berechnung der $\underline{H}_x$ wird vereinfacht durch

Proposition 2.8 ([KL79]). *Für $x \in \mathcal{W}$ und $s \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\underline{H}_x \underline{H}_s = \begin{cases} \underline{H}_{xs} - \sum_{y<x, ys<y} \mu(y,x)\underline{H}_y & \textit{falls } xs > x; \\ (v+v^{-1})\underline{H}_x & \textit{falls } xs < x. \end{cases}$$

Insbesondere haben wir $h_{ys,x} = vh_{y,x}$ falls $xs < x$ und $ys < y$.

Beweis. Der Fall $xs > x$ folgt aus der im ersten Existenzbeweis gegebenen induktiven Konstruktion der $\underline{H}_x$. Der Fall $xs < x$ folgt mit vollständiger Induktion aus dem Fall $xs > x$. □

Die ursprüngliche Definition der Kazhdan-Lusztig-Polynome in [KL79] war näher an der Charakterisierung, die wir im Folgenden geben. Betrachten wir nochmal unser Theorem 2.1. Bis auf Vorzeichen gibt es ja keinen Grund, dort v über v^{-1} zu bevorzugen.

Theorem 2.9 ([KL79]). *Für alle $x \in \mathcal{W}$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{\tilde{H}}_x \in \mathcal{H}$ mit $\underline{\tilde{H}}_x \in H_x + \sum_y v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]H_y$.*

Beweis. Man kann diese Aussage ähnlich beweisen wie die analoge Aussage 2.1. Wir ziehen jedoch einen anderen Beweis vor, der gleichzeitig die enge Beziehung zwischen $\underline{\tilde{H}}_x$ und $\underline{H}_x$ zeigt. Dazu betrachten wir den Automorphismus $ab : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $v \mapsto v^{-1}$, $H_x \mapsto (-1)^{l(x)}H_x$ besonders bequem, wir können und müssen also $\underline{\tilde{H}}_x = (-1)^{l(x)}ab(\underline{H}_x)$ nehmen und erhalten zusätzlich zur Existenz von $\underline{\tilde{H}}_x$ noch die Formel

$$\underline{\tilde{H}}_x = \sum_y (-1)^{l(x)+l(y)}\overline{h}_{y,x}H_y. \qquad \square$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer expliziten Formel für endliches $\mathcal{W}$.

Proposition 2.10 ([KL79]). *Sei $\mathcal{W}$ endlich, $w \in \mathcal{W}$ das längste Element, und $r = l(w)$ seine Länge. So gilt $\underline{H}_w = \sum_{y\in\mathcal{W}} v^{r-l(y)}H_y$.*

Beweis. Bezeichne R die rechte Seite. Aus unseren Formeln für die Operation von $\underline{H}_s$ folgt

$$\{H \in \mathcal{H} \mid H\underline{H}_s = (v+v^{-1})H \quad \forall s \in \mathcal{S}\} = \mathcal{L}R.$$

Damit gilt $\overline{R} \in \mathcal{L}R$ und dann sofort $\overline{R} = R$, mithin $R = \underline{H}_w$. □

Jeder mit der Materie vertraute Leser wird hier die Inversionsformeln aus [KL79] für endliche Coxeter-Gruppen vermissen. Wir behandeln sie im folgenden Abschnitt in einem allgemeineren Kontext, siehe 3.15. Zum Abschluß führen wir noch die sogenannten Zellen ein.

Definition 2.11 ([KL79]). 1. Ein Rechtsideal von $\mathcal{H}$ heißt ein **rechtes Zellideal** genau dann, wenn es als $\mathcal{L}$-Modul aufgespannt wird von gewissen $\underline{H}_y$.
2. Das kleinste rechte Zellideal, das ein gegebenes $H \in \mathcal{H}$ enthält, heißt auch das **von H erzeugte rechte Zellideal**.
3. Gegeben $x, y \in \mathcal{W}$ schreiben wir kurz $y \prec_R x$ für die Aussage, daß $\underline{H}_y$ zum von $\underline{H}_x$ erzeugten rechten Zellideal gehört.
4. Gegeben $x, y \in \mathcal{W}$ kürzen wir $x \prec_R y \prec_R x$ mit $x \sim_R y$ ab. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelationen auf $\mathcal{W}$ heißen **Rechtszellen**.
5. Gegeben eine Rechtszelle $C \subset \mathcal{W}$ ist $\bigoplus_{y \in C} \mathcal{L}\underline{H}_y$ in natürlicher Weise ein $\mathcal{H}$-Rechtsmodul, nämlich als Quotient von $\bigoplus_{y \prec_R C} \mathcal{L}\underline{H}_y$ nach $\bigoplus_{y \prec_R C, y \notin C} \mathcal{L}\underline{H}_y$, mit der hoffentlich selbsterklärenden Notation $y \prec_R C$. Dieser $\mathcal{H}$-Modul heißt auch der **Zellmodul** der Rechtszelle C.

Analog definiert man linke und beidseitige Zellideale, Relationen $\succ_L$, $\succ_{LR}$, $\sim_L$, $\sim_{LR}$, Linkszellen und beidseitige Zellen. Mithilfe von 2.8 folgt, daß $\prec_R$ auch beschrieben werden kann als die kleinste reflexive transitive Relation auf $\mathcal{W}$ derart, daß gilt

1. $xs \prec_R x$ für $s \in \mathcal{S}$ mit $xs > x$;
2. $y \prec_R x$ falls $\mu(y, x) \neq 0$ und $\exists s \in \mathcal{S}$ mit $xs > x$, $ys < y$.

Proposition 2.12 ([KL79]). *Gegeben $x \succ_R y$ und $t \in \mathcal{S}$ folgt aus $tx < x$ schon $ty < y$.*

Beweis. Aus $tx < x$ folgt ja $\underline{H}_t\underline{H}_x = (v + v^{-1})\underline{H}_x$ und damit $\underline{H}_t H = (v + v^{-1})H$ für alle H im von $\underline{H}_x$ erzeugten Rechtsideal von $\mathcal{H}$. Schreiben wir nun $H = \sum h_z \underline{H}_z$, so folgt aus $h_z \neq 0$ schon $tz < z$ durch Induktion von oben über die Bruhatordnung. Zusammen folgt $tz < z$ für alle $z \prec_R x$. □

Alternativer Beweis. Erlauben wir uns einen Vorgriff auf den folgenden Abschnitt, so können wir auch kürzer argumentieren: Verschwindet $\underline{H}_x$ unter der Projektion $\xi : \mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ aus dem Beweis von 3.8, so auch das ganze von $\underline{H}_x$ erzeugte rechte Zellideal. □

3. Die parabolischen Polynome

Sei $\mathcal{S}_f \subset \mathcal{S}$ eine Teilmenge, $\mathcal{W}_f = \langle \mathcal{S}_f \rangle \subset \mathcal{W}$ ihr Erzeugnis, $\mathcal{W}^f \subset \mathcal{W}$ die Menge der Repräsentanten minimaler Länge für die Rechtsnebenklassen $\mathcal{W}_f \backslash \mathcal{W}$. Insbesondere definiert also die Multiplikation eine Bijektion $\mathcal{W}_f \times \mathcal{W}^f \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}$. Bezeichne $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}(\mathcal{W}_f, \mathcal{S}_f) \subset \mathcal{H}$ die Hecke-Algebra von $(\mathcal{W}_f, \mathcal{S}_f)$. Wir erinnern an die quadratische Relation

$(H_s+v)(H_s-v^{-1}) = 0$ in der Hecke-Algebra. Halten wir $u \in \{-v, v^{-1}\}$ fest, so definiert die Vorschrift $H_s \mapsto u \; \forall s \in \mathcal{S}_f$ eine Surjektion von $\mathcal{L}$-Algebren

$$\varphi_u : \mathcal{H}_f \twoheadrightarrow \mathcal{L}$$

Auf diese Weise wird $\mathcal{L}$ ein $\mathcal{H}_f$-Bimodul, den wir mit $\mathcal{L}(u)$ bezeichnen. Wir induzieren und definieren die beiden $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{M} & = & \mathcal{M}^f & = & \mathcal{L}(v^{-1}) \otimes_{\mathcal{H}_f} \mathcal{H}, \\ \mathcal{N} & = & \mathcal{N}^f & = & \mathcal{L}(-v) \otimes_{\mathcal{H}_f} \mathcal{H}. \end{array}$$

In beiden Moduln bilden die $M_x = 1 \otimes H_x$ bzw. $N_x = 1 \otimes H_x$ mit $x \in \mathcal{W}^f$ eine $\mathcal{L}$-Basis. Die Operation von $\underline{H}_s$ für $s \in \mathcal{S}$ nimmt in diesen Basen folgende Form an:

$$M_x \underline{H}_s \;=\; \begin{cases} M_{xs} + vM_x & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs > x; \\ M_{xs} + v^{-1}M_x & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs < x; \\ (v+v^{-1})M_x & \text{falls } xs \notin \mathcal{W}^f, \end{cases}$$

$$N_x \underline{H}_s \;=\; \begin{cases} N_{xs} + vN_x & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs > x; \\ N_{xs} + v^{-1}N_x & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs < x; \\ 0 & \text{falls } xs \notin \mathcal{W}^f. \end{cases}$$

Um das einzusehen verwendet man, daß aus $x \in \mathcal{W}^f$, $xs \notin \mathcal{W}^f$ schon folgt $xs = rx$ mit $r \in \mathcal{S}_f$. (Insbesondere impliziert $xs < x$ schon $xs \in \mathcal{W}^f$.) In der Tat folgt ja sogar für beliebige $x \in \mathcal{W}$ und $r, s \in \mathcal{S}$ aus $rx > x$ und $rxs < xs$ schon $rxs = x$.

Man prüft leicht für alle $s \in \mathcal{S}_f$ die Formel

$$\varphi_u(\underline{H}_s) \;=\; \begin{cases} (v+v^{-1}) & \text{falls } u = v^{-1}; \\ 0 & \text{falls } u = -v. \end{cases}$$

Da die $\underline{H}_s$ mit $s \in \mathcal{S}_f$ ganz $\mathcal{H}_f$ als $\mathcal{L}$-Algebra erzeugen, folgt $\varphi_u(\overline{H}) = \overline{\varphi_u(H)}\; \forall H \in \mathcal{H}_f$. Mithin definiert die Vorschrift $h \otimes H \mapsto \overline{h} \otimes \overline{H}$ einen Homomorphismus von additiven Gruppen, die sogenannte Dualität

$$d : \mathcal{M} \to \mathcal{M},\ M \mapsto \overline{M}$$

mit $\overline{M_e} = M_e$ und $\overline{MH} = \overline{M}\;\overline{H}$ für alle $M \in \mathcal{M}$, $H \in \mathcal{H}$. Analoges gilt für $\mathcal{N}$.

Wir führen nun eine für unsere Zwecke bequeme Sprechweise ein. Sei $\varphi : A \to A'$ ein Ringhomomorphismus, $\mathcal{M}$ ein A-Modul und $\mathcal{M}'$ ein A'-Modul. Ein Homomorphismus additiver Gruppen $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ heißt "φ-linear" genau dann, wenn $\psi(rm) = \varphi(r)\psi(m) \quad \forall r \in A,\ m \in \mathcal{M}$.

Eine d-lineare Abbildung von Moduln über $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{L}$ nennen wir auch $\mathcal{H}$-schieflinear bzw. $\mathcal{L}$-schieflinear. Besitzt ein Modul eine feste schieflineare Involution d, so nennen wir die unter dieser Involution stabilen Elemente “selbstdual”. Es heißt also zum Beispiel $N \in \mathcal{N}$ selbstdual genau dann, wenn gilt $\overline{N} = N$.

Theorem 3.1 ([Deo87]). 1. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{M}_x \in \mathcal{M}$ mit $\underline{M}_x \in M_x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]M_y$.*
2. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{N}_x \in \mathcal{N}$ mit $\underline{N}_x \in N_x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]N_y$.*

Beweis. Wir zeigen 1, der Beweis von 2 ist identisch. Um die *Existenz* der $\underline{M}_x$ nachzuweisen, machen wir eine Induktion über die Länge von x und zeigen stärker, daß wir sogar mögliche $\underline{M}_x$ von der Form

$$\underline{M}_x = M_x + \sum_{y<x} m_{y,x} M_y$$

finden können. Sicher dürfen wir unsere Induktion mit $\underline{M}_e = M_e$ beginnen. Sei nun $\underline{M}_y$ konstruiert für alle $y \in \mathcal{W}^f$ mit $y < x$, und sei $s \in \mathcal{S}$ gegeben mit $xs < x$, $xs \in \mathcal{W}^f$. Dann gilt

$$\underline{M}_{xs}\underline{H}_s = M_x + \sum_{z<x} m_z M_z$$

für geeignete $m_z \in \mathbb{Z}[v]$. Nach Induktion sind mögliche $\underline{M}_z$ für $z < x$ bereits bekannt. Wir bilden

$$\underline{M}_x = \underline{M}_{xs}\underline{H}_s - \sum_z m_z(0)\underline{M}_z$$

und haben auch ein mögliches $\underline{M}_x$ gefunden. Aus der Existenz dieser $\underline{M}_x$ folgert man wie im Beweis von Theorem 2.1 zunächst $\overline{\underline{M}_x} \in M_x + \sum_{y<x} \mathcal{L}M_y$ und dann die *Eindeutigkeit* der $\underline{M}_x$. □

Wir erinnern an die Notation $E^+ \subset E$ für die Untergruppe der unter d selbstdualen Elemente $E^+ = \{e \in E \mid de = e\}$.

Proposition 3.2. 1. *Es gilt $\mathcal{M}^+ = M_e\mathcal{H}^+$ und die $\underline{M}_x$ bilden eine $\mathcal{L}^+$-Basis von $\mathcal{M}^+$.*
2. *Es gilt $\mathcal{N}^+ = N_e\mathcal{H}^+$ und die $\underline{N}_x$ bilden eine $\mathcal{L}^+$-Basis von $\mathcal{N}^+$.*

Beweis. Wir zeigen 1, der Beweis von 2 ist identisch. Zunächst liegen ja nach der induktiven Beschreibung der $\underline{M}_x$ alle $\underline{M}_x$ in $M_e\mathcal{H}^+$. Andererseits bilden die $\underline{M}_x$ eine $\mathcal{L}$-Basis von $\mathcal{M}$, und ein $M = \sum m_x\underline{M}_x$ ist selbstdual genau dann, wenn alle m_x es sind. □

Definition 3.3. Wir definieren für $x, y \in \mathcal{W}^f$ die $m_{y,x}, n_{y,x} \in \mathbb{Z}[v]$ durch $\underline{M}_x = \sum_y m_{y,x}M_y$ und $\underline{N}_x = \sum_y n_{y,x}N_y$.

Insbesondere haben wir also $m_{x,x} = n_{x,x} = 1$, und wenn y nicht kleinergleich x ist, verschwinden $m_{y,x}$ und $n_{y,x}$.

Proposition 3.4. *Seien $x, y \in \mathcal{W}^f$ mit $y \leq x$.*

1. *Es gilt* $n_{y,x} \in v^{l(x)-l(y)}\mathbb{Z}[v^{-2}]$.
2. *Es gilt* $m_{y,x} \in v^{l(x)-l(y)}(1 + v^{-2}\mathbb{Z}[v^{-2}])$.

Beweis. Wir erinnern an unseren involutiven Automorphismus $a : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Offensichtlich gilt $a \circ \varphi_u = \varphi_u \circ a$ für $u \in \{-v, v^{-1}\}$, mithin induziert a involutive a-lineare Automorphismen $a : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ bzw. $a : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ mit $a(c \otimes H) = a(c) \otimes a(H)$, und es gilt

$$a(N_x) = (-1)^{l(x)} N_x, \quad a(M_x) = (-1)^{l(x)} M_x$$

Offensichtlich vertauscht $a : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ mit unserer schieflinearen Involution $d : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, wir folgern $a(\underline{N}_x) = (-1)^{l(x)}\underline{N}_x$ und damit $n_{y,x} \in v^{l(x)-l(y)}\mathbb{Z}[v^2, v^{-2}]$. Ebenso folgt $m_{y,x} \in v^{l(x)-l(y)}\mathbb{Z}[v^2, v^{-2}]$.

Die Grad-Abschätzung $\deg n_{y,x} \leq l(x) - l(y)$ folgt aus der induktiven Konstruktion der $\underline{N}_x$. Die Tatsache, daß $m_{y,x}$ genau den Leitterm $v^{l(x)-l(y)}$ hat, wird auch induktiv aus der Konstruktion der $\underline{M}_x$ hergeleitet, ähnlich wie wir das im Fall $\mathcal{S}_f = \emptyset$ für die $\underline{H}_x$ bereits durchgeführt hatten. □

Bemerkungen 3.5.

1. Wir betrachten wieder die Variable $q = v^{-2} \in \mathcal{L}$. Die Proposition zeigt, daß $v^{l(y)-l(x)}n_{y,x}$ und $v^{l(y)-l(x)}m_{y,x}$ in $\mathbb{Z}[q]$ liegen, und daß $v^{l(y)-l(x)}m_{y,x}$ als Polynom in q konstanten Term 1 hat. Die $v^{l(y)-l(x)}m_{y,x}$ bzw. $v^{l(y)-l(x)}n_{y,x}$ sind Deodhars [Deo87] parabolische Polynome $P^J_{\tau,\sigma}$ für Deodhars Fälle $u = -1$ bzw. $u = q$, falls $\tau = y^{-1}\mathcal{W}_f$, $\sigma = x^{-1}\mathcal{W}_f$, und $W_J = \mathcal{W}_f$. Der Vergleich mit Deodhars Definition wird dem Leser aber (wenn überhaupt) erst mit Hilfe von Theorem 3.9 gelingen.
2. Mögliche Interpretationen der parabolischen Polynome im Rahmen der Darstellungstheorie faßt Theorem 3.11.4 in [BGS96] zusammen. Bis auf die Transformation $v = t$ und für $W_Q = \mathcal{W}_f$ sind die dortigen Polynome $(P^Q(t))_{x,y}$ genau unsere $m_{x,y}$, und die $(P_Q(t))_{x,y}$ stimmen bis auf einen Parameterwechsel mit unseren $n_{x,y}$ überein, vergleiche 3.15.
3. (22.3.1999 [Cou99].) Allgemeiner liefert jeder Homomorphismus von $\mathcal{L}$-Algebren $\mathcal{H}_f \to \mathcal{L}$ eine induzierte Darstellung von $\mathcal{H}$, die in ähnlicher Weise behandelt werden kann wie unsere parabolischen Hecke-Moduln. In dieser Situation sind dann jedoch nicht mehr alle Koeffizienten von Kazhdan-Lusztig-Polynomen positiv.

Proposition 3.6. *Für $x \in \mathcal{W}^f$ und $s \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\underline{M}_x \underline{H}_s \begin{cases} \in \underline{M}_{xs} + \sum_{y<x,\, ys<y} \mathbb{Z}\underline{M}_y & \textit{falls } xs > x; \\ = (v + v^{-1})\underline{M}_x & \textit{falls } xs < x. \end{cases}$$

Insbesondere haben wir $m_{ys,x} = vm_{y,x}$ *falls* $xs < x$, $ys < y$ *und* $ys \in \mathcal{W}^f$.

Beweis. Der Fall $xs > x$ folgt aus der im ersten Existenzbeweis gegebenen induktiven Konstruktion der $\underline{M}_x$. Der Fall $xs < x$ folgt mit vollständiger Induktion aus dem Fall $xs > x$. □

Proposition 3.7. *Für* $x \in \mathcal{W}^f$ *und* $s \in \mathcal{S}$ *gilt*

$$\underline{N}_x \underline{H}_s \begin{cases} \in \underline{N}_{xs} + \sum_{y<x,\, ys<y,\, ys \in \mathcal{W}^f} \mathbb{Z}\underline{N}_y & \text{falls } xs > x; \\ = (v+v^{-1})\underline{N}_x & \text{falls } xs < x,\ xs \in \mathcal{W}^f; \\ \in \sum_{y<x,\, ys<y,\, ys \in \mathcal{W}^f} \mathbb{Z}\underline{N}_y & \text{falls } xs < x,\ xs \notin \mathcal{W}^f. \end{cases}$$

Beweis. Der Fall $xs > x$ folgt aus der im ersten Existenzbeweis gegebenen induktiven Konstruktion der $\underline{N}_x$. Der Fall $xs < x$, $x \in \mathcal{W}^f$ folgt mit vollständiger Induktion aus dem Fall $xs > x$. Der Fall $xs < x$, $xs \notin \mathcal{W}^f$ folgt aus den Definitionen. □

Die $m_{y,x}$, $n_{y,x}$ hängen wie folgt mit den gewöhnlichen Kazhdan-Lusztig-Polynomen zusammen.

Proposition 3.8 ([Deo87])**.** *Seien* $x, y \in \mathcal{W}^f$.

1. *Ist* $\mathcal{W}_f$ *endlich und* $w_f \in \mathcal{W}_f$ *das längste Element, so gilt die Beziehung* $m_{y,x} = h_{w_f y, w_f x}$.
2. *Für beliebiges* $\mathcal{S}_f$ *gilt* $n_{y,x} = \sum_{z \in \mathcal{W}_f} (-v)^{l(z)} h_{zy,x}$.

Beweis. 1. Wir betrachten die Einbettung von $\mathcal{L}$-Moduln

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}(v^{-1}) & \to & \mathcal{H}_f \\ 1 & \mapsto & \underline{H}_{w_f}. \end{array}$$

Sie kommutiert natürlich mit der Dualität, und nach 2.8 ist sie auch mit der Rechtsoperation von $\mathcal{H}_f$ verträglich. Folglich definiert sie eine Einbettung von $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln

$$\zeta : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{H},$$

die ebenfalls mit der Dualität verträglich ist. Wir setzen $r = l(w_f)$. Nach Proposition 2.10 gilt

$$\zeta(M_x) = \sum_{z \in \mathcal{W}_f} v^{r-l(z)} H_{zx}$$

und damit erhalten wir $\zeta(\underline{M}_x) = \underline{H}_{w_f x}$, woraus wir sogar stärker folgern $m_{y,x} = v^{r-l(z)} h_{zy, w_f x}$ für alle $y, x \in \mathcal{W}^f$, $z \in \mathcal{W}_f$.

2. Wir betrachten die offensichtliche Surjektion

$$\xi : \mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{N} = \mathcal{L}(-v) \otimes_{\mathcal{H}_f} \mathcal{H}$$

mit $\xi(H) = 1 \otimes H$. Sie vertauscht mit der Dualität, und man prüft mühelos, daß $\xi(H_{zx}) = (-v)^{l(z)} N_x$ für alle $z \in \mathcal{W}_f$, $x \in \mathcal{W}^f$. Es folgt

$$\xi(\underline{H}_x) = \begin{cases} \underline{N}_x & \text{falls } x \in \mathcal{W}^f; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die behauptete Formel ergibt sich sofort. □

Auch bei der Definition von $\underline{N}_x$, $\underline{M}_x$ kann man sich fragen, ob man nicht v durch v^{-1} ersetzen kann. Die Antwort gibt folgendes

Theorem 3.9 ([Deo91]).

1. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibts genau ein selbstduales $\underline{\tilde{N}}_x \in \mathcal{N}$ mit $\underline{\tilde{N}}_x \in N_x + \sum_y v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] N_y$. Dies $\underline{\tilde{N}}_x$ kann beschrieben werden durch die Formel $\underline{\tilde{N}}_x = \sum_y (-1)^{l(x)+l(y)} \overline{m}_{y,x} N_y$.*
2. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{\tilde{M}}_x \in \mathcal{M}$ mit $\underline{\tilde{M}}_x \in M_x + \sum_y v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] M_y$. Dies $\underline{\tilde{M}}_x$ kann beschrieben werden durch die Formel $\underline{\tilde{M}}_x = \sum_y (-1)^{l(x)+l(y)} \overline{n}_{y,x} M_y$.*

Beweis. Wir beginnen mit der Beziehung $b \circ \varphi_{-v} = \varphi_{v^{-1}} \circ b$ und leiten daraus eine b-lineare Bijektion

$$\begin{array}{rccc} b: & \mathcal{N} & \to & \mathcal{M} \\ & c \otimes H & \mapsto & b(c) \otimes b(H) \end{array}$$

ab, die N_x auf M_x abbildet. Der Bequemlichkeit halber verknüpfen wir $b : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ noch mit $a : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ und erhalten so einen ab-linearen Isomorphismus $ab : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ mit $ab(N_x) = (-1)^{l(x)} M_x$. Sicher vertauscht dies ab auch mit den Dualitäten auf unseren Moduln, $d \circ ab = ab \circ d$. Da $ab(v) = v^{-1}$ können und müssen wir also $\underline{\tilde{M}}_x = (-1)^{l(x)} ab(\underline{N}_x)$ sowie $\underline{\tilde{N}}_x = (-1)^{l(x)} (ab)^{-1} \underline{M}_x$ nehmen. □

Als nächstes diskutieren wir Umkehrformeln. Dazu betrachten wir die $\mathcal{L}$-Moduln

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}^* & = & \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \\ \mathcal{N}^* & = & \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(\mathcal{N}, \mathcal{L}) \end{array}$$

und erklären auf diesen Räumen eine $\mathcal{L}$-schieflineare Involution $F \mapsto \overline{F}$ durch die Vorschrift $\overline{F}(M) = \overline{F(\overline{M})}$. Weiter definieren wir $M_x^* \in \mathcal{M}^*$ durch $M_x^*(M_y) = \delta_{x,y}$ und setzen $M^x = (-1)^{l(x)} M_x^*$. Ganz genauso definieren wir $N_x^* \in \mathcal{N}^*$ durch $N_x^*(N_y) = \delta_{x,y}$ und setzen $N^x = (-1)^{l(x)} N_x^*$. Warum ich es vorziehe, mit den M^x bzw. N^x zu arbeiten, wird erst später klar werden. Vorerst hat das bedauerlicherweise nur den Effekt, alle Formeln komplizierter zu machen.

Wir schreiben die Elemente von $\mathcal{M}^*$ als formale Linearkombinationen $F = \sum^{\infty} m^z M^z$ mit $m^z = (-1)^{l(z)} F(M_z) \in \mathcal{L}$. Das Zeichen ∞

über der Summe soll daran erinnern, daß formale unendliche Summen erlaubt sind. Analog notieren wir die Elemente von $\mathcal{N}^*$. Nun ist $\overline{M^x} \in M^x + \sum_{z>x}^{\infty} \mathcal{L} M^z$ und für $\overline{N^x}$ gilt Entsprechendes, denn die Matrizen der Dualität auf $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^*$ (bzw. $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}^*$) sind bis auf Vorzeichen transponiert zueinander.

Theorem 3.10. 1. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{M}^x \in \mathcal{M}^*$ mit $\underline{M}^x \in M^x + \sum^{\infty} v\mathbb{Z}[v] M^z$.*

2. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{N}^x \in \mathcal{N}^*$ mit $\underline{N}^x \in N^x + \sum^{\infty} v\mathbb{Z}[v] N^z$.*

Beweis. Wir zeigen nur 1, der Beweis von 2 ist identisch. Für die Eindeutigkeit müssen wir wieder zeigen, daß $F = 0$ das einzige selbstduale Element von $\sum^{\infty} v\mathbb{Z}[v] M^z$ ist. Aber sei $F = \sum^{\infty} m^z M^z$. Ist $F \neq 0$, so finden wir y minimal mit $m^y \neq 0$. Dann gilt $\overline{m^y} = m^y$ und mit $m^y \in v\mathbb{Z}[v]$ ergibt sich ein Widerspruch.

Um die Existenz zu zeigen definieren wir schlicht $\underline{M}^x \in \mathcal{M}^*$ durch die Vorschrift

$$\underline{M}^x(\underline{M}_y) = (-1)^{l(x)} \delta_{x,y}$$

und müssen nur die Eigenschaften prüfen. Selbstdualität ist evident. Schreiben wir $\underline{M}^x = \sum_z^{\infty} m^{z,x} M^z$, so gilt offensichtlich

$$\sum_z (-1)^{l(z)+l(x)} m^{z,x} m_{z,y} = \delta_{x,y}$$

Die Übergangsmatrix $m_{z,y}$ ist aber eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen und Einträgen aus $v\mathbb{Z}[v]$ unterhalb der Diagonalen, mithin gilt dasselbe für ihre Inverse, und es folgt $m^{z,x} \in v\mathbb{Z}[v]$ falls $z \neq x$ sowie $m^{x,x} = 1$ (und sogar zusätzlich $m^{z,x} \neq 0 \Rightarrow z \geq x$). □

Wir führen genauso auch die $n^{z,x} \in \mathbb{Z}[v]$ ein durch die Gleichung $\underline{N}^x = \sum^{\infty} n^{z,x} N^z$ und erhalten auch die Umkehrformeln

$$\sum_z (-1)^{l(z)+l(x)} n^{z,x} n_{z,y} = \delta_{x,y}.$$

Im Fall $\mathcal{S}_f = \emptyset$ schreiben wir $\mathcal{H}^*$, H_x^*, H^x, $\underline{H}^x$, $h^{z,x}$ statt $\mathcal{M}^*$, M_x^*, M^x, $\underline{M}^x$, $m^{z,x}$. Die $h^{z,x}$ mit $\underline{H}^x = \sum^{\infty} h^{z,x} H^z$ sind also die renormierten inversen Kazhdan-Lusztig-Polynome,

$$\sum_z (-1)^{l(z)+l(x)} h^{z,x} h_{z,y} = \delta_{x,y}.$$

Ganz ähnlich wie in Proposition 3.8 lassen sich auch die parabolischen inversen Polynome $m^{x,y}$, $n^{x,y}$ in den gewöhnlichen inversen Polynomen $h^{x,y}$ ausdrücken. Genauer haben wir

Proposition 3.11. 1. *Es gilt $n^{y,x} = h^{y,x}$ $\forall x, y \in \mathcal{W}^f$.*

2. *Ist $\mathcal{W}_f$ endlich, $w_f \in \mathcal{W}_f$ das längste Element und $r = l(w_f)$ seine Länge, so gilt für alle $x, y \in \mathcal{W}^f$ die Beziehung*
$$m^{y,x} = \sum_{z \in \mathcal{W}_f} (-v)^{r-l(z)} h^{zy,w_f x}.$$

Beweis. 1. Wir transponieren die im Beweis von 3.8.2 betrachtete Abbildung ξ und erhalten
$$\xi^* : \mathcal{N}^* \to \mathcal{H}^*.$$
Aus der Formel für $\xi(H_{zx})$ folgern wir
$$\xi^*(N^x) = \sum_{z \in \mathcal{W}_f} v^{l(z)} H^{zx}$$
und die Formel für $\xi(\underline{H}_{zx})$ liefert $\xi^*(\underline{N}^x) = \underline{H}^x$. Wenden wir also ξ^* auf die Gleichung $\underline{N}^x = \sum_y^\infty n^{y,x} N^y$ an, so ergibt sich
$$\underline{H}^x = \sum_y^\infty \sum_{z \in \mathcal{W}_f} v^{l(z)} n^{y,x} H^{zy}$$
und es folgt sogar feiner $v^{l(z)} n^{y,x} = h^{zy,x}$ für alle $x, y \in \mathcal{W}^f$ und $z \in \mathcal{W}_f$.

2. Wir transponieren die im Beweis von 3.8 1 betrachtete Abbildung ζ und erhalten
$$\zeta^* : \mathcal{H}^* \to \mathcal{M}^*.$$
Aus der Formel für $\zeta(M_x)$ folgt sofort $\zeta^*(H^{zx}) = (-v)^{r-l(z)}(-1)^r M^x$ für alle $x \in \mathcal{W}^f$, $z \in \mathcal{W}_f$. Aus der Formel $\zeta(\underline{M}_x) = \underline{H}_{w_f x}$ folgt sofort
$$\zeta^*(\underline{H}^{tx}) \quad = \quad \begin{cases} (-1)^r \underline{M}^x & \text{falls } t = w_f; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
wieder für alle $x \in \mathcal{W}^f$, $t \in \mathcal{W}_f$. Wenden wir also ζ^* an auf die Gleichung $\underline{H}^{w_f x} = \sum^\infty h^{zy,w_f x} H^{zy}$ summiert über $z \in \mathcal{W}_f$, $y \in \mathcal{W}^f$, so ergibt sich
$$\underline{M}^x = \sum_y^\infty \sum_{z \in \mathcal{W}_f} (-v)^{r-l(z)} h^{zy,w_f x} M^y$$
und unsere Formel ist bewiesen. Etwas feiner können wir auch ζ^* auf $\underline{H}^{tx}$ mit $t \neq w_f$ anwenden und erhalten $\sum_{z \in \mathcal{W}_f} (-v)^{-l(z)} h^{zy,tx} = 0$ für alle $x, y \in \mathcal{W}^f$. $\square$

Offensichtlich wird unser $\mathcal{M}^*$ ein $\mathcal{H}$-Linksmodul durch die Vorschrift $(HF)(M) = F(MH)\ \forall H \in \mathcal{H}, F \in \mathcal{M}^*, M \in \mathcal{M}$. Wir erinnern an den involutiven Antiautomorphismus i auf $\mathcal{H}$ mit $i(v) = v$, $i(H_x) = H_{x^{-1}}$.

Proposition 3.12. *Es gibt i-lineare Abbildungen $i : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^*$ und $i : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^*$ mit $N_x \mapsto N_x^*$ bzw. $M_x \mapsto M_x^*$.*

Beweis. Ich behaupte zunächst die Formeln

$$\underline{H}_s M_x^* = \begin{cases} M_{xs}^* + vM_x^* & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs > x; \\ M_{xs}^* + v^{-1}M_x^* & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs < x; \\ (v+v^{-1})M_x^* & \text{falls } xs \notin \mathcal{W}^f. \end{cases}$$

In der Tat, die Matrix der Operation von $\underline{H}_s$ auf $\mathcal{M}$ in der Basis der M_x zerfällt in Einer-Blöcke sowie Zweier-Blöcke der Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} v & 1 \\ 1 & v^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. Sie ist also ihre eigene Transponierte, und das liefert die behaupteten Formeln. Wir folgern die Existenz einer i-linearen Abbildung $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^*$ mit $M_x \mapsto M_x^*$. Der Beweis im $\mathcal{N}$-Fall läuft analog. □

Bemerkung 3.13. Wir werden im weiteren Verlauf besonders oft die iab-lineare Abbildung $\psi = iab : \mathcal{N} \to \mathcal{M}^*$ benützen, mit $ab : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ wie im Beweis von 3.9. Sie ist insbesondere $\mathcal{L}$-schieflinear und es gilt $\psi(N_x) = (-1)^{l(x)} M_x^* = M^x$.

Natürlich bleiben alle unsere Überlegungen und Formeln gültig, wenn wir $\mathcal{N}$, N mit $\mathcal{M}$, M vertauschen. Der Vollständigkeit halber schließe ich hier noch die Umkehrformeln von Douglass für endliches $\mathcal{W}$ an.

Proposition 3.14 ([Dou90]). *Sei $\mathcal{W}$ endlich und seien $w \in \mathcal{W}$ bzw. $w_f \in \mathcal{W}_f$ die längsten Elemente. So gilt*

$$\sum_z (-1)^{l(x)+l(z)} m_{z,x} n_{w_f zw, w_f yw} = \delta_{x,y}.$$

Bemerkung 3.15. Als Spezialfall erhält man so die Umkehrformeln von Kazhdan-Lusztig [KL79]

$$\sum_z (-1)^{l(x)+l(z)} h_{z,x} h_{zw,yw} = \delta_{x,y}.$$

Beweis. Setzen wir $\mathcal{S}_g = w\mathcal{S}_f w$, so definiert die Abbildung $x \mapsto w_f wx$ eine ordnungsumkehrende Bijektion $\mathcal{W}^g \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}^f$. Folglich haben wir eine $\mathcal{H}$-schieflineare Abbildung

$$\mathcal{N}^g \to \mathcal{N}, \quad N_x^g \mapsto N_{w_f wx},$$

wo wir weiter mit $\mathcal{N} = \mathcal{N}^f$ arbeiten. Verknüpfen wir diese Abbildung mit $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}^*$ aus 3.13, so ergibt sich eine $ba\delta$-lineare Abbildung

$$\mathcal{N}^g \to \mathcal{M}^*, \quad N_x^g \mapsto M^{w_f wx}.$$

Diese Abbildung vertauscht sogar mit den Dualitäten auf unseren Moduln, denn N_e^g ist selbstdual und ebenso $M^{w_f w}$, da ja $w_f w$ das maximale Element von $\mathcal{W}^f$ ist. Da $ba\delta(v) = v$ geht unter unserer Abbildung notwendig $\underline{N}_x^g$ in $\underline{M}^{w_f wx}$ über, und wir folgern

$$m^{w_f wy, w_f wx} = n_{y,x}^g = n_{wyw,wxw}.$$

Jetzt müssen wir nur noch die Variablen transformieren und erhalten

$$m^{y,x} = n_{w_f y w, w_f x w}.$$

□

4. Die periodischen Polynome

Für die im Folgenden zitierten Begriffe verweise ich auf die Standard-Referenz [Bou81]. Seien $V \supset R \supset R^+ \supset \Delta$ ein reeller Vektorraum, ein Wurzelsystem, ein System positiver Wurzeln und die zugehörige Menge von einfachen Wurzeln. Sei $W \subset GL(V)$ die Weylgruppe und $\mathcal{W} = W \ltimes \mathbb{Z}R$ die affine Weylgruppe. Für $\mu \in V$ bezeichne $\mathcal{W}_\mu$ bzw. W_μ seinen Stabilisator in $\mathcal{W}$ bzw. W. Es ist also $W = \mathcal{W}_0$. Die Gruppe $\mathcal{W}$ wird von ihren (affinen) Spiegelungen erzeugt und wir bezeichnen mit $\mathcal{F}$ die Menge aller Spiegelebenen zu Spiegelungen aus $\mathcal{W}$. Für $F \in \mathcal{F}$ bezeichne $s_F \in \mathcal{W}$ die Spiegelung an F.

Die Zusammenhangskomponenten des Komplements aller Spiegelebenen $V - \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ heißen "Alkoven". Wir bezeichnen die Menge aller Alkoven mit $\mathcal{A}$. Die offensichtliche Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{A}$ ist frei und transitiv. Sei weiter

$$\mathcal{C} = \{\tau \in V \mid \langle \tau, \alpha^\vee \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in R^+\}$$

die dominante Weylkammer. Wir bezeichnen mit $A^+ \in \mathcal{A}$ den fundamentalen dominanten Alkoven, d.h. denjenigen Alkoven, der in $\mathcal{C}$ liegt und dessen Abschluß den Nullvektor enthält.

Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ die Menge aller Spiegelungen, die eine Wand von A^+ punktweise festhalten. So ist $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein Coxeter-System. Wir betrachten weiter die Bijektion $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}, w \mapsto wA^+$. Die offensichtliche Rechtsoperation von $\mathcal{W}$ auf sich selbst entspricht dann einer Rechtsoperation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{A}$, notiert $A \mapsto Aw$. Für $A \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{S}$ kann man sich As wie folgt veranschaulichen: Man betrachte die Wand von A^+, die von s festgehalten wird. Genau eine Wand von A ist zu dieser konjugiert unter der Operation von $\mathcal{W}$ auf V. Und As berührt A genau in dieser Wand.

Jede Spiegelebene $F \in \mathcal{F}$ teilt V in zwei Halbebenen

$$V - F = F^+ \cup F^-,$$

wo wir mit F^+ diejenige Halbebene bezeichnen, die jedes Translat der dominanten Weylkammer trifft, also $F^+ \cap (\tau + \mathcal{C}) \neq \emptyset \quad \forall \tau \in V$. Für $A \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{S}$ schreiben wir $As \succ A$ (bzw. $As \prec A$) genau dann, wenn $As \subset F^+$ (bzw. $As \subset F^-$) für die Spiegelebene $F \in \mathcal{F}$, die As von A trennt.

Wir können nun den "periodischen" Hecke-Modul $\mathcal{P}$ definieren. Als $\mathcal{L}$ -Modul ist $\mathcal{P}$ schlicht der freie Modul mit Basis $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{L}A.$$

Lemma 4.1 ([Lus80a]). *Es gibt auf $\mathcal{P}$ eine Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ derart, daß für alle $s \in \mathcal{S}$ gilt:*

$$A\underline{H}_s = \begin{cases} As + vA & \textit{falls } As \succ A; \\ As + v^{-1}A & \textit{falls } As \prec A. \end{cases}$$

Bemerkung 4.2. Um den Modul $\mathcal{M}$ aus [Lus80a] mit diesem $\mathcal{P}$ zu identifizieren, benötigt man eine Längenfunktion $\delta : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ im Sinne von Lusztig. Unser A hier hieße in Lusztig's Notationen $q^{-\delta(A)/2}A$. Außerdem operiert bei mir $\mathcal{H}$ von rechts.

Beweis. Zunächst betrachten wir für $s \in \mathcal{S}$ die $\mathcal{L}$-lineare Abbildung $\rho_s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ mit

$$\rho_s(A) = \begin{cases} As + vA & \text{falls } As \succ A; \\ As + v^{-1}A & \text{falls } As \prec A. \end{cases}$$

Für $\mu \in \mathbb{Z}R$ betrachten wir auch $\langle\mu\rangle : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $A \mapsto \mu + A$. Offensichtlich gilt $\langle\mu\rangle \circ \rho_s = \rho_s \circ \langle\mu\rangle$ für alle $\mu \in \mathbb{Z}R$, $s \in \mathcal{S}$.

Nun erhalten wir ja offensichtlich eine Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}$ durch Strukturtransport über die $\mathcal{L}$-lineare Bijektion $\mathcal{H} \to \mathcal{P}$ mit $H_x \mapsto xA^+ \quad \forall x \in \mathcal{W}$. Diese Rechtsoperation schreiben wir $P * H$ für $P \in \mathcal{P}, H \in \mathcal{H}$. Die Abbildung $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $P \mapsto P * H$ schreiben wir auch $\rho^*(H)$.

Bezeichne $\mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}$ die Menge aller Alkoven, die in der dominanten Weylkammer liegen, also $\mathcal{A}^+ = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset \mathcal{C}\}$. Für $x \in \mathcal{W}$, $s \in \mathcal{S}$ mit $xA^+, xsA^+ \in \mathcal{A}^+$ ist $x > xs$ gleichbedeutend zu $xA^+ \succ xA^+s$. Für alle $A \in \mathcal{A}$, $s \in \mathcal{S}$ mit $A, As \in \mathcal{A}^+$ gilt mithin

$$\rho_s(A) = A * \underline{H}_s.$$

Sei $\mu \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}R$. Für jeden Alkoven A liegt $n\mu + A$ in $\mathcal{C}$, falls $n \gg 0$. Wir folgern

$$\begin{aligned} \rho_s(A) &= \langle -n\mu\rangle \circ \rho_s \circ \langle n\mu\rangle(A) \\ &= \langle -n\mu\rangle \circ \rho^*(\underline{H}_s) \circ \langle n\mu\rangle(A), \end{aligned}$$

falls $n \gg 0$. Für alle $H \in \mathcal{H}$, $P \in \mathcal{P}$ ist also $\langle -n\mu\rangle \circ \rho^*(H) \circ \langle n\mu\rangle(P)$ unabhängig von n für $n \gg 0$. Diesen Ausdruck nennen wir PH und haben damit die gewünschte Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}$ definiert. □

Bezeichne $X \subset V$ das Gitter der ganzen Gewichte. Für $\lambda \in X$ definieren wir $E_\lambda \in \mathcal{P}$ durch die Formel

$$E_\lambda = \sum_{z \in W} v^{l(z)}(\lambda + zA^+).$$

Sei $\mathcal{P}_\circ \subset \mathcal{P}$ der von allen E_λ erzeugte $\mathcal{H}$-Untermodul.

Theorem 4.3 ([Lus80a]). 1. *Es gibt auf $\mathcal{P}_\circ$ genau eine $\mathcal{H}$-schieflineare Involution $\mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}_\circ$, $P \mapsto \overline{P}$ derart, daß $\overline{E_\lambda} = E_\lambda$ für alle $\lambda \in X$.*

2. *Für alle $A \in \mathcal{A}$ gibt es genau ein (unter dieser Involution) selbstduales $\underline{P}_A \in \mathcal{P}_\circ$ mit $\underline{P}_A \in A + \sum_B v\mathbb{Z}[v]B$. Die $\underline{P}_A$ bilden eine $\mathcal{L}$-Basis von $\mathcal{P}_\circ$.*

Bemerkung 4.4. 1. Für $A, B \in \mathcal{A}$ definieren wir $p_{B,A} \in \mathbb{Z}[v]$ durch die Gleichung $\underline{P}_A = \sum p_{B,A}B$. Bezeichne $d(B, A) \in \mathbb{Z}$ die gewichtete Zahl der Spiegelebenen $H \in \mathcal{F}$, die B und A trennen, wo wir H mit Gewicht 1 bzw. Gewicht (-1) zählen falls $B \subset H^-$ bzw. $B \subset H^+$. Lusztig's Polynome $Q_{B,A}$ (siehe [Lus80a]) stehen mit unseren $p_{B,A}$ in der Beziehung $p_{B,A} = v^{-d(B,A)}Q_{B,A}$. Ich nenne die $p_{B,A}$ die "periodischen" Polynome.

2. Parametrisieren wir die einfachen Moduln, Baby-Vermas und projektiven Objekte in einem regulären Block von G_1T-Moduln in der üblichen Weise durch Alkoven, so liefert Lusztig's Vermutung für die Multiplizitäten in der Radikal-Filtrierung bzw. für die Multiplizitäten einer graduierten $\tilde{\Delta}$-Fahne der projektiven Decke $\tilde{Q}_A$ von $\tilde{\Delta}_A$ in der Koszul-graduierten Darstellungskategorie die Formeln

$$\sum [\overline{\mathrm{ra}}\mathrm{d}^i \Delta_{w_0 B} : L_{w_0 A}] v^i B = \sum (\tilde{Q}_{w_0 A} : \tilde{\Delta}_{w_0 B}\langle i \rangle) v^i B = \underline{P}_A$$

Nebenbei bemerkt ist $\tilde{Q}_A\langle -|R^+|\rangle$ in unserer Kategorie der Kippmodul $\tilde{T}_{\hat{A}}$ mit Untermodul $\tilde{\Delta}_{\hat{A}}$ und Quotient $\tilde{\nabla}_{\hat{A}}$, und mit späteren Resultaten ergibt sich so für Kippmoduln

$$\sum (\tilde{T}_A : \tilde{\Delta}_B\langle i \rangle) v^{-i} B = \sum (\tilde{T}_A : \tilde{\nabla}_B\langle i \rangle) v^i B = \underline{P}_A,$$

immer unter Annahme der Lusztig-Vermutung.

Der Beweis des Theorems benötigt einige Vorbereitungen und wird erst gegen Ende dieses Abschnitts gegeben. Wir wiederholen zunächst Lusztig's Konstruktion einer Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{P}_\circ$.

Proposition 4.5 ([Lus80a]). *Für alle $w \in \mathcal{W}$ gibt es einen Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln $\langle w \rangle : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}_\circ$ derart, daß $\langle w \rangle E_\lambda = E_{w\lambda}$ für alle $\lambda \in X$.*

Bemerkung 4.6. Natürlich ist $\langle w\rangle$ durch diese Bedingung eindeutig bestimmt und wir erhalten so eine Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{P}_\circ$. Weiter ist für $w = \mu \in \mathbb{Z}R$ dies $\langle\mu\rangle$ offensichtlich die Einschränkung auf $\mathcal{P}_\circ$ unserer Verschiebung $\langle\mu\rangle$ von eben.

Beweis. Für $\alpha \in R^+$ bezeichne $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$ die Menge der Spiegelebenen, die auf α senkrecht stehen. Es ist also $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha\in R^+} \mathcal{F}_\alpha$ eine Partition von $\mathcal{F}$. Die Zusammenhangskomponenten von $V - \bigcup_{F\in\mathcal{F}_\alpha} F$ heißen die "α-Streifen". Jeder α-Streifen U ist von der Form $U = F^+ \cap G^-$ für wohlbestimmte $F, G \in \mathcal{F}_\alpha$. Wir setzen $F = \partial^- U$ und $G = \partial^+ U$. Schließlich definieren wir für $A \in \mathcal{A}$, $\alpha \in R^+$ die Alkoven $\alpha\!\uparrow\! A = s_G A$, $\alpha\!\downarrow\! A = s_F A$, falls A im α-Streifen U liegt und $F = \partial^- U$, $G = \partial^+ U$ wie eben. Für $\alpha \in \Delta$ eine einfache Wurzel betrachten wir nun den $\mathcal{L}$-Untermodul $\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{P}$, der von allen $A + v(\alpha\!\downarrow\! A)$ mit $A \in \mathcal{A}$ erzeugt wird. Sicher bilden diese Ausdrücke sogar eine $\mathcal{L}$-Basis von $\mathcal{P}_\alpha$. Wir können also für alle $F \in \mathcal{F}_\alpha$ eine $\mathcal{L}$-lineare Abbildung

$$\langle s_F\rangle : \mathcal{P}_\alpha \to \mathcal{P}_\alpha$$

definieren durch $\langle s_F\rangle(A + v(\alpha\!\downarrow\! A)) = v(s_F A) + \alpha\!\uparrow\!(s_F A)$.

Lemma 4.7 ([Lus80a])**.** *$\mathcal{P}_\alpha$ ist ein $\mathcal{H}$-Untermodul von $\mathcal{P}$ und $\langle s_F\rangle$: $\mathcal{P}_\alpha \to \mathcal{P}_\alpha$ ist $\mathcal{H}$-linear.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für alle $A \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{S}$ gilt:

(i) $(A + v(\alpha\!\downarrow\! A))\underline{H}_s \in \mathcal{P}_\alpha$.
(ii) $\langle s_F\rangle\{(A + v(\alpha\!\downarrow\! A))\underline{H}_s\} = \{\langle s_F\rangle(A + v(\alpha\!\downarrow\! A))\}\underline{H}_s$.

Sei U der α-Streifen von A. Sei $G \in \mathcal{F}$ die Spiegelebene, die As von A trennt. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. G ist keine Wand von U. So ist $G \in \mathcal{F}_\beta$ mit $\beta \in R^+ - \{\alpha\}$. Insbesondere gilt $s_F(G^+) = (s_F G)^+$. Man folgert leicht (i) und (ii).
2. $G = \partial^+ U$, bleibt ganz dem Leser überlassen.
3. $G = \partial^- U$, desgleichen.

Das Lemma ist bewiesen. □

Lemma 4.8 ([Lus80a])**.** *Es gilt $E_\lambda \in \mathcal{P}_\alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$ und $\langle s_F\rangle E_\lambda = E_{s_F\lambda}$ für alle $F \in \mathcal{F}_\alpha$.*

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen. □

Insbesondere gilt also $\mathcal{P}_\circ \subset \mathcal{P}_\alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$ und $\langle s_F\rangle\mathcal{P}_\circ \subset \mathcal{P}_\circ$. Für $w \in \mathcal{W}$ finden wir dann $\langle w\rangle : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}_\circ$ wie folgt: Wir schreiben $w = s_F \cdots s_G$ mit $F, \ldots, G \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathcal{F}_\alpha$ und setzen $\langle w\rangle = \langle s_F\rangle\circ\cdots\circ\langle s_G\rangle$. □

Für das Folgende ist es wichtig zu wissen, daß wir die $\mathcal{H}$-lineare Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{P}_\circ$ zu einer $\mathcal{L}$-linearen Operation der "erweiterten affinen Weylgruppe" $\tilde{\mathcal{W}} = W \ltimes X$ ausdehnen können.

Für beliebiges $\mu \in X$ betrachten wir dazu die $\mathcal{L}$-lineare Abbildung $\langle \mu \rangle : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ mit $A \mapsto \mu + A \quad \forall A \in \mathcal{A}$. Sie vertauscht im Allgemeinen nicht mit der Rechtsoperation von $\mathcal{H}$. Bezeichnet $\underline{H}_s$ für einen Moment die Abbildung $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $P \mapsto P\underline{H}_s$, so haben wir vielmehr

$$\langle \mu \rangle \circ \underline{H}_s = \underline{H}_{[\mu]s} \circ \langle \mu \rangle$$

für eine geeignete Permutation $[\mu] : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ der einfachen Spiegelungen, und es gilt $[\mu + \nu] = [\mu] \circ [\nu]$ für alle $\mu, \nu \in X$ sowie $[\mu] = \mathrm{id}$ für $\mu \in \mathbb{Z}R$, insbesondere also $[w\mu] = [\mu] = [-\mu]^{-1}$ für beliebiges $w \in \mathcal{W}$, $\mu \in X$.

Lemma 4.9. *Es gibt eine $\mathcal{L}$-lineare Operation $\varphi : \tilde{\mathcal{W}} \to \mathrm{Aut}\, \mathcal{P}_\circ$ von $\tilde{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{P}_\circ$ derart, daß $\varphi(w) = \langle w \rangle$ für alle $w \in \mathcal{W}$ und $\varphi(\mu) = \langle \mu \rangle$ für alle $\mu \in X$.*

Bemerkung 4.10. Sobald das Lemma bewiesen ist, werden wir für beliebiges $w \in \tilde{\mathcal{W}}$ stets $\varphi(w)$ mit $\langle w \rangle$ abkürzen.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß die Abbildung $\langle w \rangle \langle \mu \rangle \langle w^{-1} \rangle \langle -w\mu \rangle$ auf $\mathcal{P}_\circ$ die Identität ist, für alle $\mu \in X$, $w \in \mathcal{W}$. Diese Abbildung vertauscht aber mit der Rechtsoperation der $\underline{H}_s$ und bildet die E_λ auf sich selber ab. □

Wir können nun Teil 1 von Theorem 4.3 zeigen.

Proposition 4.11 ([Lus80a]). *Es gibt genau eine $\mathcal{H}$-schieflineare Abbildung $\mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}_\circ$, $P \mapsto \overline{P}$ derart, daß $\overline{E_\lambda} = E_\lambda \quad \forall \lambda \in X$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar, wir müssen also nur eine solche Abbildung konstruieren. Sei $w_0 \in W$ das längste Element und $r = l(w_0)$ seine Länge. Bezeichne $c : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ die $\mathcal{L}$-schieflineare Abbildung mit $c(A) = w_0 A$. Für alle $s \in \mathcal{S}$ gilt $A \succ As \Leftrightarrow w_0 A \prec w_0 As$. Folglich gilt $c(A\underline{H}_s) = c(A)\underline{H}_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$ und c ist sogar $\mathcal{H}$-schieflinear. Offensichtlich gilt auch $c(E_\lambda) = v^{-r} E_{w_0 \lambda}$. Insbesondere folgt $c(\mathcal{P}_\circ) \subset \mathcal{P}_\circ$, wir definieren $\overline{P} = v^r c \langle w_0 \rangle P$ und sind fertig. □

Diese Dualität kommutiert auch mit der Operation von $\tilde{\mathcal{W}}$.

Proposition 4.12. *Es gilt $\overline{\langle w \rangle P} = \langle w \rangle \overline{P}$ für alle $w \in \tilde{\mathcal{W}}$, $P \in \mathcal{P}_\circ$.*

Beweis. Bezeichne $d : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}_\circ$ unsere Dualtität $P \mapsto \overline{P}$. Es gilt zu zeigen, daß $\langle w \rangle d = d \langle w \rangle$ für alle $w \in \tilde{\mathcal{W}}$. Es reicht zu zeigen, daß $\langle \mu \rangle d \langle -\mu \rangle d$ bzw. $\langle w \rangle d \langle w^{-1} \rangle d$ die Identität sind, für alle $\mu \in X$ bzw. $w \in \mathcal{W}$. Diese Abbildungen vertauschen aber mit der Rechtsoperation der $\underline{H}_s$ und bilden die E_λ auf sich selber ab. □

Wir zeigen nun die Existenz der $\underline{P}_A$. Dazu betrachten wir die partielle Ordnung $\preceq$ auf $\mathcal{A}$, die von den Relationen

$$A \preceq s_F A \qquad \text{falls } A \in \mathcal{A},\ F \in \mathcal{F},\ A \subset F^-$$

erzeugt wird. Die Aussage $A \preceq B$ soll also bedeuten: Es gibt eine Folge von Alkoven $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ und eine Folge von Spiegelebenen $F_i \in \mathcal{F}$ derart, daß $A_i \subset F_i^-$ und $A_{i+1} = s_{F_i} A_i$ für $i = 0, \ldots, n-1$. Daß $\preceq$ in der Tat eine Ordnungsrelation ist, erkennt man zum Beispiel so: Man bezeichne für einen Alkoven $A \in \mathcal{A}$ mit $b(A) \in V$ seinen Schwerpunkt. So folgt aus $A \preceq B$ schon $b(A) \in b(B) + \mathbb{R}_{\leq 0} R^+$. Also folgt aus $B \preceq A \preceq B$ schon $b(A) = b(B)$ und damit $A = B$.

Offensichtlich ist unsere neue Notation mit der alten Notation $A \prec As$ für $s \in \mathcal{S}$ verträglich. Offensichtlich ist diese partielle Ordnung auf $\mathcal{A}$ auch invariant unter Verschiebung mit $\mu \in X$. Sie hat weiter folgende Eigenschaft:

Lemma 4.13 ([Lus80a]). *Seien $A, B \in \mathcal{A}$ und $s \in \mathcal{S}$. So folgt aus $B \preceq A \prec As$ schon $Bs \preceq As$.*

Beweis. Die Bruhat-Ordnung auf $\mathcal{W}$ definiert natürlich über unsere Bijektion $\mathcal{W} \to \mathcal{A}$, $w \mapsto wA^+$ auch eine partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{A}$. Weit im Innern von $\mathcal{C}$ stimmen nun $\preceq$ und $\leq$ überein. Das kann man genauer so formulieren:

Behauptung 4.14. Sei $\mu \in X \cap \mathcal{C}$ gegeben. Für $A, B \in \mathcal{A}$ sind gleichbedeutend:

1. $A \preceq B$.
2. $n\mu + A \leq n\mu + B$ für $n \gg 0$, d. h. für alle n ab einer geeigneten unteren Schranke, die von A, B und μ abhängt.

Diese Behauptung folgt aus der Definition der Bruhat-Ordnung. In der Tat bedeutet ja $A \leq B$ genau, daß es eine Folge von Alkoven $A = A_0, A_1, \ldots A_n = B$ und eine Folge von Spiegelebenen $F_i \in \mathcal{F}$ gibt derart, daß $A_{i+1} = s_{F_i} A_i$ und daß A_i und A^+ nicht von F_i getrennt werden. Sind also $A, B \in \mathcal{A}^+$ und ist $F \in \mathcal{F}$ eine Hyperebene mit $B = s_F A$, so gilt

$$\begin{aligned} A \preceq B \quad &\Leftrightarrow \quad A \subset F^- \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ und } A^+ \text{ werden nicht von F getrennt} \\ &\Leftrightarrow \quad A \leq B. \end{aligned}$$

Die Äquivalenz von 1 und 2 im allgemeinen folgt leicht aus diesem speziellen Fall. Mit der Behauptung folgt aber das Lemma leicht aus der analogen Eigenschaft der Bruhat-Ordnung. □

Sei $\Pi \subset V$ die fundamentale Box

$$\Pi = \{\tau \in V \mid 0 < \langle \tau, \alpha^\vee \rangle < 1 \quad \forall \alpha \in \Delta\}.$$

Für $\lambda \in X$ schreiben wir kurz $\lambda + \Pi = \Pi_\lambda$. Für jeden Alkoven $A \in \mathcal{A}$ gibt es genau ein $\lambda = \lambda(A) \in X$ mit $A \subset \Pi_\lambda$.

Lemma 4.15. *Sei λ ein dominantes Gewicht, also $\lambda \in X \cap \overline{\mathcal{C}}$. So gilt $B \preceq \lambda + B$ für jeden Alkoven B.*

Beweis. Wir wählen $\tau \in B$ und betrachten das Geradenstück von τ nach $\lambda + \tau$. Es treffe der Reihe nach die Alkoven $B = A_0$, A_1, $A_2, \ldots, A_n = \lambda + B$. Durch geeignete Wahl von τ können wir sicher erreichen, daß je zwei aufeinanderfolgende Alkoven unserer Folge nur von einer Wand getrennt werden, $A_{i+1} = A_i s_i$ mit $s_i \in \mathcal{S}$. Aus $\lambda \in \overline{\mathcal{C}}$ folgt nun $A_i \prec A_{i+1}$, mithin $B \preceq \lambda + B$. □

Wir können nun in Teil 2 von Theorem 4.3 die Existenz zeigen. Wir zeigen sogar etwas genauer die folgende

Proposition 4.16 ([Lus80a])**.** *Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gibt es ein selbstduales $\underline{P}_A \in \mathcal{P}_\circ$ derart, daß $\underline{P}_A \in A + \sum_{B \prec A} v\mathbb{Z}[v]B$ und $\langle w \rangle \underline{P}_A = \underline{P}_A$ für alle $w \in \mathcal{W}_{\lambda(A)}$.*

Beweis. Natürlich reicht es aus, solche $\underline{P}_A$ für $A \subset \Pi$ zu konstruieren. Wir machen eine Induktion über die geordnete Menge aller Alkoven aus Π und können schon mal mit

$$\underline{P}_{A^+} = E_0 = \sum_{z \in W} v^{l(z)}(zA^+)$$

anfangen. Sei nun $A \subset \Pi$ ein Alkoven und seien mögliche $\underline{P}_B$ für $B \prec A$, $B \subset \Pi$ schon konstruiert. Falls $A \neq A^+$ finden wir $s \in \mathcal{S}$ mit $As \prec A$ und $As \subset \Pi$. Offensichtlich ist $\underline{P}_{As}\underline{H}_s$ selbstdual und wir haben nach Lemma 4.13 und der Definition von $A\underline{H}_s$

$$\underline{P}_{As}\underline{H}_s = \sum_{B \preceq A} p_B B$$

mit $p_A = 1$ und $p_B \in \mathbb{Z}[v]$ für alle B. Es könnten aber gewisse p_B mit $B \neq A$ auch noch konstante Terme haben. Um diese störenden Terme unter Kontrolle zu kriegen, müssen wir etwas weiter ausholen.

Zunächst definieren wir nach [Lus80a] eine neue Operation von $\tilde{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{A}$, notiert $B \mapsto w * B$, durch die Vorschrift

$$w * (\lambda + A) = (w\lambda) + A$$

für alle $\lambda \in X, A \subset \Pi$.

Lemma 4.17. *Sei* $P \in \mathcal{P}_\circ$ *von der Form* $P = \sum p_B B$ *mit* $p_B \in \mathbb{Z}[v]$ *für alle* B. *Sei* $w \in \tilde{\mathcal{W}}$. *So ist* $\langle w \rangle P = \sum q_B B$ *mit* $q_B \in \mathbb{Z}[v]$ *und* $p_B(0) = q_{w*B}(0)$ *für alle* B.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w = s_F$ mit $F \in \mathcal{F}_\alpha$ für $\alpha \in \Delta$. Ich behaupte, daß die Aussage dann sogar für alle $P \in \mathcal{P}_\alpha$ gilt. Das hinwiederum folgt sofort aus den Definitionen. □

In unserer Situation folgern wir nun, daß $p_B(0) = p_{z*B}(0)$ für alle $z \in W$. Für jeden Alkoven B finden wir aber $z \in W$ mit $B' = z * B \in \mathcal{A}^+$. Aus $p_B \neq 0$ und $B \neq A$ folgt $p_{B'} \neq 0$ und $B' \neq A$, mithin $B' \prec A$. Aus $B' \in \mathcal{A}^+$ folgt andererseits, daß $B' = \lambda + B''$ für geeignetes $\lambda \in X \cap \overline{\mathcal{C}}$ und $B'' \subset \Pi$. Mit Lemma 4.15 folgt $B'' \prec A$, nach Induktionsannahme kennen wir also ein mögliches $\underline{P}_{B''}$, und indem wir dies $\underline{P}_{B''}$ um λ verschieben, auch ein mögliches $\underline{P}_{B'}$. Wir betrachten nun

$$\underline{P}_A = \underline{P}_{As}\underline{H}_s - \sum_{B \in \mathcal{A}^+, B \neq A} p_B(0) \sum_z \langle z \rangle \underline{P}_B,$$

wo in der zweiten Summe z über (ein Repräsentantensystem für) die Nebenklassen $W/W_{\lambda(B)}$ läuft. Damit ist der Induktionsschritt geleistet und die Existenz der $\underline{P}_A$ gezeigt. □

Wir müssen nur noch die Eindeutigkeit der $\underline{P}_A$ nachweisen. Nach Proposition 4.16 wissen wir ja sogar, daß es eine Familie selbstdualer Elemente $\{\underline{P}_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ in $\mathcal{P}_\circ$ gibt mit

1. $\langle w \rangle \underline{P}_A = \underline{P}_{w*A} \quad \forall A \in \mathcal{A}, w \in \tilde{\mathcal{W}}$.
2. $\underline{P}_A \in A + \sum_{B \prec A} v\mathbb{Z}[v]B$.

In der Tat kann man eine solche Familie gewinnen, indem man gewisse $\underline{P}_A$ wie in der Proposition für $A \subset \Pi$ wählt und durch Verschiebung dieser $\underline{P}_A$ die $\underline{P}_A$ für $A \not\subset \Pi$ definiert. Wir zeigen nun

Proposition 4.18 ([Lus80a]).
1. *Eine solche Familie* $\{\underline{P}_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ *ist schon eine* $\mathcal{L}$*-Basis von* $\mathcal{P}_\circ$.
2. *Für* $P \in \mathcal{P}_\circ \cap \sum v\mathbb{Z}[v]B$ *folgt aus* $P = \overline{P}$ *schon* $P = 0$.

Bemerkung 4.19. Aus 2 folgt natürlich die in Theorem 4.3 behauptete Eindeutigkeit der $\underline{P}_A$. Aus den vorhergehenden Überlegungen oder auch aus Lemma 4.17 folgt dann die Formel $\langle w \rangle \underline{P}_A = \underline{P}_{w*A}$.

Beweis. Wir beginnen mit 1. Die $\underline{P}_A$ sind offensichtlich linear unabhängig. Wir müssen zeigen, daß sie $\mathcal{P}_\circ$ als $\mathcal{L}$-Modul erzeugen. Es gilt also zu zeigen, daß für alle $\lambda \in X$, $H \in \mathcal{H}$ das Element $E_\lambda H$ im Erzeugnis der $\underline{P}_A$ liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hier $\lambda = 0$ annehmen. Sicher reicht es also, wenn wir zeigen, daß jedes W-invariante $Q \in \mathcal{P}_\circ$ (also Q mit $\langle z\rangle Q = Q \quad \forall z \in W$) im Erzeugnis der $\underline{P}_A$ liegt. Wir schreiben dazu

$$Q = \sum_{B\in\mathcal{A}} q_B B.$$

Ist $Q \neq 0$, so gibt es $B \in \mathcal{A}^+$ mit $q_B \neq 0$. (Um das zu sehen, kann man zum Beispiel das kleinste $n \in \mathbb{Z}$ mit $v^n Q \in \sum_B \mathbb{Z}[v]B$ wählen und Lemma 4.17 auf $v^n Q$ anwenden.) Wir machen nun eine Induktion über $\#\{A \in \mathcal{A}^+ \mid \exists B \in \mathcal{A}^+ \text{ mit } q_B \neq 0 \text{ und } B \succeq A\}$. Sei $C \in \mathcal{A}^+$ maximal mit $q_C \neq 0$. Wir betrachten

$$Q' = Q - \sum_z \langle z\rangle q_C \underline{P}_C,$$

wo z über (ein Repräsentantensystem für) die Nebenklassen $W/W_{\lambda(C)}$ läuft. So ist Q' wieder W-invariant, und wir wissen per Induktion, daß Q' im Erzeugnis der $\underline{P}_A$ liegt. Damit ist 1 gezeigt.

Wir zeigen nun 2. Sicher ist jedes selbstduale P von der Form $P = \sum_{A\in\mathcal{A}} c_A \underline{P}_A$ mit $\overline{c}_A = c_A$. Andererseits ist nach Annahme $P = \sum p_A A$ mit $p_A \in v\mathbb{Z}[v]$. Wäre $P \neq 0$, so gäbe es ein maximales A mit $p_A \neq 0$. Dann wäre aber $p_A = c_A$, also $\overline{p}_A = p_A$ und aus $p_A \in v\mathbb{Z}[v]$ folgte $p_A = 0$. Mit diesem Widerspruch ist die Proposition und damit auch Theorem 4.3 vollständig bewiesen. □

Die Berechnung der $p_{B,A}$ wird vereinfacht durch

Proposition 4.20 ([Lus80a]). *Für $A \in \mathcal{A}$ und $s \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\underline{P}_A \underline{H}_s \begin{cases} \in \underline{P}_{As} + \sum_{B\prec As,\, Bs\prec B} \mathbb{Z}\underline{P}_B & \textit{falls } As \succ A; \\ = (v+v^{-1})\underline{P}_A & \textit{falls } As \prec A. \end{cases}$$

Insbesondere haben wir $p_{Bs,A} = v p_{B,A}$ falls $As \prec A$ und $Bs \prec B$.

Beweis. Im ersten Fall $As \succ A$ folgt die Behauptung aus der im Beweis von 4.16 gegebenen induktiven Konstruktion von $\underline{P}_A$. Um den zweiten Fall $As \prec A$ zu behandeln, setzen wir $P = \underline{P}_A \underline{H}_s - (v+v^{-1})\underline{P}_A$. Aus der Gleichung $\underline{H}_s{}^2 = (v+v^{-1})\underline{H}_s$ folgt $P\underline{H}_s = 0$. Nach Konstruktion ist P von der Form $P = \sum p_B B$ mit $p_B \in \mathbb{Z}[v]$, und da P außerdem selbstdual ist, folgt $P = \sum p_B(0)\underline{P}_B$. Wäre $P \neq 0$ so gäbe es ein maximales D mit $p_D \neq 0$, und für dieses D wäre sogar $p_D = p_D(0)$ konstant. Wir schreiben nun

$$P\underline{H}_s = \sum q_B B$$

und folgern $q_{Ds} = p_D \neq 0$ falls $Ds \succ D$, $q_D = p_{Ds} + v^{-1}p_D \neq 0$ falls $Ds \prec D$, im Widerspruch zu $P\underline{H}_s = 0$. Also gilt $P = 0$ und die Proposition ist bewiesen. □

Ich will noch eine Symmetrie der $\underline{P}_A$ diskutieren, die wir später brauchen werden. Wie im Beweis von Proposition 4.11 sei $w_0 \in W$ das längste Element und r seine Länge. Wir definieren eine Bijektion $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $A \mapsto \check{A}$ wie folgt: Wir schreiben $A = \lambda + B$ mit $\lambda \in X$, $B \subset \Pi$ und setzen $\check{A} = \lambda + w_0 B$. Die inverse Bijektion notieren wir $A \mapsto \hat{A}$.

Lemma 4.21 ([Lus80a])**.** $\underline{P}_A \in v^r \left(\check{A} + \sum_{B \succ \check{A}} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]B \right)$.

Beweis. Wir dürfen $A \subset \Pi$ annehmen. Dann ist aber $\underline{P}_A = \overline{\underline{P}_A} = v^r c \langle w_0 \rangle \underline{P}_A = v^r c \underline{P}_A$, und das Lemma folgt aus der Definition von c. □

Wir werden auch die folgende Aussage über den Träger von $\underline{P}_A$ brauchen.

Proposition 4.22 ([Lus80a])**.** *Seien A, $B \in \mathcal{A}$ mit $p_{B,A} \neq 0$. So gilt $xB \preceq A \quad \forall x \in \mathcal{W}_{\lambda(A)}$.*

Beweis. Das folgt mit Induktion aus der im Beweis von Proposition 4.16 gegebenen induktiven Konstruktion der $\underline{P}_A$. □

5. Einige Formeln für affine Spiegelungsgruppen

Wir übernehmen die Notationen des vorhergehenden Abschnitts und setzen $\mathcal{S}_0 = \{s \in \mathcal{S} \mid s \text{ fixiert den Nullvektor}\}$. Damit haben wir auch die Notationen $\mathcal{M} = \mathcal{M}^0$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^0$, $\mathcal{M}^*$, $\mathcal{N}^*$ etc. von Abschnitt 3 zur Verfügung. Insbesondere wird $\mathcal{W}_0 = W$ die (endliche) Weylgruppe und die Bijektion $\mathcal{W} \to \mathcal{A}$, $w \mapsto wA^+$ induziert eine Bijektion $\mathcal{W}^0 \to \mathcal{A}^+$. Wir benutzen diese Bijektion um unsere ausgezeichneten Elemente von $\mathcal{N}, \mathcal{M}^*$, etc. umzubenennen, und setzen $N_x = N_A$, $\underline{N}_x = \underline{N}_A$, $n_{x,y} = n_{A,B}$, $M^x = M^A$, etc. für $x, y \in \mathcal{W}^0$ und $A, B \in \mathcal{A}^+$ mit $xA^+ = A$ und $yA^+ = B$.

Bezeichnet $\mathcal{A}^{++}$ die Menge aller Alkoven, die in $\rho + \mathcal{C}$ liegen (mit ρ der Halbsumme aller positiven Wurzeln), so definiert $A \mapsto \hat{A}$ eine Bijektion $\mathcal{A}^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{++}$. Ich erinnere an die $\mathcal{L}$-schieflineare Abbildung $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}^*$ aus Bemerkung 3.13 mit $\psi(N_A) = M^A$. Die einzige wesentliche Aussage dieser Arbeit, die ich nicht in der Literatur finden konnte, ist folgendes

Theorem 5.1. *Für alle $A \in \mathcal{A}^+$ gilt $\underline{M}^A = v^r \psi \underline{N}_{\hat{A}}$, in anderen Worten $m^{B,A} = v^r \overline{n}_{B,\hat{A}}$.*

Diese Aussage wurde von der Theorie der Kippmoduln suggeriert, wie am Schluß dieser Arbeit näher ausgeführt wird. Ihr Beweis braucht einige Vorbereitungen. Wir betrachten die $\mathcal{L}$-lineare “Restriktionsabbildung” $\operatorname{res} : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ gegeben durch

$$\operatorname{res} A = \begin{cases} N_A & \text{falls } A \in \mathcal{A}^+; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten weiter in $\mathcal{P}$ den $\mathcal{H}$-Untermodul

$$\mathcal{P}_\circ^{\mathrm{sgn}} = \left\{ P \in \mathcal{P}_\circ \mid \langle z \rangle P = (-1)^{l(z)} P \quad \forall z \in W \right\}.$$

Proposition 5.2. *Die Restriktion* $\operatorname{res} : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ *induziert einen Homomorphismus von* $\mathcal{H}$*-Rechtsmoduln* $\operatorname{res} : \mathcal{P}_\circ^{\mathrm{sgn}} \to \mathcal{N}$.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß res mit allen $\underline{H}_s$ $(s \in \mathcal{S})$ vertauscht. Aus der Formel für die Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{P}_\circ$ sehen wir, daß für $P = \sum p_A A$ in $\mathcal{P}_\circ^{\mathrm{sgn}}$ gilt $p_A = -v p_{As}$ falls $A \in \mathcal{A}^+$, $s \in \mathcal{S}$ mit $As \notin \mathcal{A}^+$. Die Proposition folgt. □

Wir definieren weiter die $\mathcal{H}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{alt} : & \mathcal{P}_\circ & \to & \mathcal{P}_\circ^{\mathrm{sgn}} \\ & P & \mapsto & \displaystyle\sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} \langle x \rangle P. \end{array}$$

Unser Theorem folgt nun sofort aus der folgenden feineren Aussage:

Theorem 5.3. 1. *Für alle* $A \in \mathcal{A}^{++}$ *gilt* $\underline{N}_A = \operatorname{res} \operatorname{alt} \underline{P}_A$.
2. *Für alle* $A \in \mathcal{A}^+$ *gilt* $\underline{M}^A = v^r \psi \operatorname{res} \operatorname{alt} \underline{P}_{\hat{A}}$.

Bemerkung 5.4. Die zweite Aussage ist eine Umformulierung des Hauptresultats von [Kan87] und damit eine Präzisierung der Resultate in [And86]. In der Tat, da $\langle x \rangle \underline{P}_A = \underline{P}_{x*A}$ haben wir

$$\operatorname{alt} \underline{P}_A = \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} \underline{P}_{x*A}$$

Beweis. Wir beginnen mit 2 und kürzen zur Vereinfachung die $\mathcal{L}$-schieflineare Abbildung $(v^r \psi \operatorname{res} \operatorname{alt})$ mit $\varphi : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{M}^*$ ab. Bezüglich $\mathcal{H}$ ist φ wie ψ eine *iab*-lineare Abbildung. Nun wird $\underline{M}^A$ charakterisiert durch eine Grad-Bedingung und die Selbstdualität. Nach Lemma 4.21 erfüllt $\varphi(\underline{P}_{\hat{A}})$ die Grad-Bedingung. Wir müssen also nur noch zeigen, daß die $\varphi(\underline{P}_{\hat{A}}) \in \mathcal{M}^*$ selbstdual sind.

Nach unseren Definitionen ist $F \in \mathcal{M}^*$ selbstdual genau dann, wenn $(\overline{H} F)(M_{A^+}) = \overline{(HF)(M_{A^+})}$ für alle $H \in \mathcal{H}$. Dieses Kriterium werden wir prüfen für alle $F = \varphi(\underline{P}_A)$ mit $A \in \mathcal{A}$. Sicher können wir schreiben $\underline{P}_A H = \sum c_B \underline{P}_B$ und folgern $\underline{P}_A \overline{H} = \sum \overline{c}_B \underline{P}_B$. Dann ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} (iab(H) \varphi(\underline{P}_A))(M_{A^+}) & = & \sum \overline{c}_B \varphi(\underline{P}_B)(M_{A^+}), \\ (diab(H) \varphi(\underline{P}_A))(M_{A^+}) & = & \sum c_B \varphi(\underline{P}_B)(M_{A^+}), \end{array}$$

und wir müssen folglich nur zeigen, daß alle $\varphi(\underline{P}_B)(M_{A^+})$ unter der Substitution $v \mapsto v^{-1}$ invariant sind. Ich behaupte viel stärker die Formel

$$\varphi(\underline{P}_B)(M_{A^+}) = \begin{cases} (-1)^{l(z)} & \text{falls } B = z * \widehat{A^+} \text{ mit } z \in W; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um das einzusehen betrachten wir nochmal die $\underline{P}_B = \sum p_{C,B} C$ und zeigen

Lemma 5.5. *Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $p_{A^+,B} \neq 0$. So ist entweder $B = \widehat{A^+}$ oder $\lambda(B)$ liegt auf einer Spiegelebene von W.*

Beweis. Um neue Notationen zu vermeiden zeigen wir die äquivalente Aussage, daß für $B \subset \Pi$ und $\lambda \in X$ aus $p_{\lambda+A^+,B} \neq 0$ und $\lambda \neq -\rho$ schon folgt $W_\lambda \neq 1$. (Hier ist $\rho \in X$ wie üblich die Halbsumme der positiven Wurzeln.) In der Tat betrachten wir das $x \in W$ mit $x(\lambda + A^+) \subset \mathcal{C}$ und erhalten mit Proposition 4.22 und der Definition von Π die Beziehungen

$$x(\lambda + A^+) \preceq B \preceq \rho + w_0 A^+.$$

Für einen Alkoven $C \subset \mathcal{C}$ mit $C \preceq \rho + w_0 A^+$ ist aber klar, daß entweder alle seine Ecken aus X auf Wänden der dominanten Weylkammer liegen oder $C = \rho + w_0 A^+$. Das heißt für uns, entweder gilt $W_{x\lambda} \neq 1$ und mithin $W_\lambda \neq 1$ oder $\lambda = -\rho$, $x = w_0$. □

Unsere Formel für $\varphi(\underline{P}_B)(M_{A^+})$ ergibt sich nun aus der Beobachtung, daß $\mathrm{alt}(\underline{P}_B) = 0$ und erst recht $\varphi(\underline{P}_B) = 0$ falls $\lambda(B)$ auf einer Spiegelebene von W liegt. Damit ist 2 gezeigt.

Wir nehmen nun 1 in Angriff. Sei $\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}$ der von $v + v^{-1}$ und allen $\underline{H}_s$ mit $s \in \mathcal{S}$ erzeugte Teilring alias der Ring der selbstdualen Elemente von $\mathcal{H}$. Der Beweis von 1 benutzt folgendes

Lemma 5.6. *Alle $\underline{M}^A$ liegen in dem von $\underline{M}^{\rho + w_0 A^+}$ erzeugten $\mathcal{H}^+$-Untermodul von $\mathcal{M}^*$.*

Beweis. Zunächst mal folgt aus 2, daß $m^{\hat{A},A} = v^r$ und $\deg_v m^{B,A} < r$, falls $B \neq \hat{A}$. Wir betrachten weiter $A \in \mathcal{A}^+$, $s \in \mathcal{S}$ mit $As \prec A$ (aber nicht notwendig $As \in \mathcal{A}^+$) und schreiben

$$\delta ab(\underline{H}_s)\underline{M}^A = \sum q_B M^B.$$

Nach Theorem 3.13 wissen wir, daß

$$\delta ab(\underline{H}_s) M^B = \begin{cases} M^{Bs} + v^{-1} M^B, & \text{falls } Bs \in \mathcal{A}^+, \quad Bs \succ B; \\ M^{Bs} + v M^B, & \text{falls } Bs \in \mathcal{A}^+, \quad Bs \prec B; \\ 0 & \text{falls } Bs \notin \mathcal{A}^+. \end{cases}$$

Es ist also $q_B \in \mathbb{Z}[v]$ für alle $B \in \mathcal{A}^+$ und wir folgern

$$\delta ab(\underline{H}_s)\underline{M}^A = \sum q_B(0)\underline{M}^B.$$

In der Tat läßt sich jedes Element von $\mathcal{M}^*$ eindeutig als formale $\mathcal{L}$-Linearkombination der $\underline{M}^B$ schreiben, bei einem selbstdualen Element sind dann alle Koeffizienten selbstdual, und bei einem Element aus $\sum^\infty \mathbb{Z}[v]M^B$ liegen alle Koeffizienten in $\mathbb{Z}[v]$. Ist also $\sum^\infty q_B M^B$ selbstdual und liegen alle q_B in $\mathbb{Z}[v]$, so gilt ganz allgemein

$$\sum^\infty q_B M^B = \sum^\infty q_B(0)\underline{M}^B.$$

Ich bezeichne nun für $q \in \mathcal{L}$ mit $\hat{q}(\nu)$ den Koeffizient von v^ν, also $q = \sum_\nu \hat{q}(\nu)v^\nu$ und $\hat{q}(0) = q(0)$. Wir folgern weiter $\hat{q}_{\check{B}}(r) = q_B(0)$ für alle $B \in \mathcal{A}^+$ und $\hat{q}_B(r) = 0$ falls $B \notin \mathcal{A}^{++}$. Es ergibt sich also

$$\delta ab(\underline{H}_s)\underline{M}^A = \sum \hat{q}_B(r)\underline{M}^{\check{B}}.$$

Ausgedrückt in anderen Variablen haben wir damit folgendes bewiesen: Sind $D \in \mathcal{A}^{++}$ und $s \in \mathcal{S}$ gegeben mit $Ds \succ D$, und schreiben wir

$$\delta ab(\underline{H}_s)\underline{M}^{\check{D}} = \sum_{B \in \mathcal{A}^+} q_B M^B,$$

so gilt

$$\delta ab(\underline{H}_s)\underline{M}^{\check{D}} = \sum_{B \in \mathcal{A}^{++}} \hat{q}_B(r)\underline{M}^{\check{B}}.$$

Andererseits wissen wir aber nach 2 auch, daß $m^{B,\check{D}} \neq 0 \Rightarrow B \preceq D$ und $m^{D,\check{D}} = v^r$ für alle $D \in \mathcal{A}^{++}$. Wir erhalten also genauer

$$\delta ab(\underline{H}_s)\underline{M}^{\check{D}} = \underline{M}^{(Ds)^\vee} + \sum_{\substack{B \in \mathcal{A}^{++} \\ B \prec Ds}} \hat{q}_B(r)\underline{M}^{\check{B}}.$$

Ausgehend von dieser Formel zeigt man dann leicht durch Induktion über $\mathcal{A}^{++}$, daß alle $\underline{M}^{\check{A}}$ mit $A \in \mathcal{A}^{++}$ in dem von $\underline{M}^{(\rho + A^+)^\vee}$ erzeugten $\mathcal{H}^+$-Untermodul von $\mathcal{M}^*$ liegen. □

Um 1 zu zeigen brauchen wir noch

Lemma 5.7. $\underline{N}_{\rho + A^+} = \sum_{z \in W} v^{l(z)} N_{\rho + zA^+}$.

Beweis. Man betrachte allgemeiner für alle $\lambda \in (\rho + \mathbb{Z}R) \cap \mathcal{C}$ den Ausdruck $F_\lambda = \sum_{z \in W} v^{l(z)} N_{\lambda + zA^+}$. Es gilt zu zeigen, daß $\underline{N}_{\rho + A^+} = F_\rho$. Sicher reicht es, wenn wir $F_\rho = \overline{F_\rho}$ nachweisen. Dazu betrachten wir die Menge

$$\mathcal{S}_\rho = \{s \in \mathcal{S} \mid \rho \in \overline{A} \Rightarrow \rho \in \overline{As} \quad \forall A \in \mathcal{A}\},$$

wo ausnahmsweise mit $\overline{A}$ bzw. $\overline{As}$ der Abschluß von A bzw. As gemeint ist. Wir zeigen nun, daß $F_\rho \in \mathcal{N}$ das einzige Element $F = \sum f_A N_A$ von $\mathcal{N}$ ist derart, daß

1. $F\underline{H}_s = (v + v^{-1})F \quad \forall s \in \mathcal{S}_\rho$
2. $f_A \neq 0 \Rightarrow A \leqslant \rho + A^+$
3. $f_A = 1$ für $A = \rho + A^+$

Hier bezeichnet $\leqslant$ die Ordnung auf $\mathcal{A}^+$, die sich durch Übertragung der Bruhat-Ordnung von $\mathcal{W}^0$ ergibt.

Zunächst erkennt man sehr schnell, daß Bedingung 1 genau von allen $\mathcal{L}$-Linearkombinationen der F_λ mit $\lambda \in (\rho + \mathbb{Z}R) \cap \mathcal{C}$ erfüllt wird. Damit ist dann klar, daß nur F_ρ den Bedingungen 1–3 genügt. Nun sind diese Bedingungen aber selbstdual, d. h. sie werden auch von $\overline{F_\rho}$ erfüllt, und wir folgern $\overline{F_\rho} = F_\rho$. □

Nun liegen nach Lemma 5.6 alle $(\operatorname{res}\operatorname{alt}\underline{P}_A)$ in dem von $(\operatorname{res}\operatorname{alt}\underline{P}_{\rho+A^+})$ erzeugten $\mathcal{H}^+$-Untermodul von $\mathcal{N}$, und $(\operatorname{res}\operatorname{alt}\underline{P}_{\rho+A^+})$ ist nach Lemma 5.7 selbstdual in $\mathcal{N}$. Dann sind aber alle $(\operatorname{res}\operatorname{alt}\underline{P}_A)$ selbstdual in $\mathcal{N}$, und da sie offensichtlich auch dieselben Grad-Bedingungen erfüllen wie $\underline{N}_A$, so folgt schließlich $\underline{N}_A = \operatorname{res}\operatorname{alt}\underline{P}_A \quad \forall A \in \mathcal{A}^{++}$. □

6. Die generischen Polynome

Wenn wir weit genug im Inneren der dominanten Weylkammer sind, so hängen die $m_{B,A}$ nur von der relativen Position der Alkoven A und B ab. Genauer zeigen wir

Theorem 6.1 ([Lus80a]). 1. *Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gibt es $q_{B,A} \in \mathbb{Z}[v]$ derart, daß gilt $q_{B,A} = m_{\lambda+B,\lambda+A}$ falls λ hinreichend weit im Inneren der dominanten Weylkammer liegt, das heißt falls $\lambda \in X \cap (n\rho + \mathcal{C})$ für geeignetes $n = n(A, B) \in \mathbb{Z}$.*

2. *Für die periodischen Polynome $p_{B,C}$ gelten die Inversionsformeln*

$$\sum_B (-1)^{d(A,B)} q_{w_0 B, w_0 A}\, p_{B,C} = \delta_{A,C},$$

wo $(-1)^{d(A,B)}$ genau die Parität der Zahl von affinen Spiegelebenen ist, die A und B trennen.

Bemerkung 6.2. Die "generischen Kazhdan-Lusztig-Polynome" $\hat{P}_{A,B}$ in [Kat85] stehen mit den $q_{A,B}$ in der Beziehung $\hat{P}_{A,B} = v^{-d(A,B)} q_{A,B}$.

Um das Theorem zu beweisen arbeiten wir im "nach unten vervollständigten" Hecke-Modul

$$\hat{\mathcal{P}} = \{f : \mathcal{A} \to \mathcal{L} \mid \text{Es gibt } C \in \mathcal{A} \text{ so daß } f(A) \neq 0 \Rightarrow A \preceq C\}.$$

Für je zwei C_1, $C_2 \in \mathcal{A}$ gibt es $C \in \mathcal{A}$ mit $C_1 \preceq C$, $C_2 \preceq C$. Also ist $\hat{\mathcal{P}}$ ein $\mathcal{L}$-Untermodul im Raum aller Funktionen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{L}$. Wir schreiben Elemente von $f \in \hat{\mathcal{P}}$ als formale Linearkombinationen $f = \sum^{\infty} f_A A$ mit $f_A = f(A)$, wo wieder der obere Index ∞ uns daran erinnern soll, daß wir auch gewisse unendliche formale Linearkombinationen zulassen. Unsere Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}$ setzen wir in der offensichtlichen Weise nach $\hat{\mathcal{P}}$ fort. Für $\lambda \in \mathbb{Z}R$ können wir auch $\langle\lambda\rangle : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ in offensichtlicher Weise zu $\langle\lambda\rangle : \hat{\mathcal{P}} \to \hat{\mathcal{P}}$ fortsetzen. Für $\alpha \in R^+$ definieren wir einen Operator

$$\vartheta_\alpha : \hat{\mathcal{P}} \to \hat{\mathcal{P}}$$

als die formale Summe

$$\vartheta_\alpha = (1 + v^2\langle-\alpha\rangle + v^4\langle-2\alpha\rangle + v^6\langle-3\alpha\rangle + \cdots).$$

Offensichtlich vertauscht ϑ_α mit der Rechtsoperation von $\mathcal{H}$. Ebenso offensichtlich vertauschen die ϑ_α untereinander. Wir definieren

$$\eta = \prod_{\alpha \in R^+} \vartheta_\alpha : \hat{\mathcal{P}} \to \hat{\mathcal{P}}.$$

Dies η ist ein enger Verwandter von Kostants Partitionsfunktion. Es liefert uns eine weitere Beziehung zwischen den periodischen und den generischen Polynomen, nämlich das folgende

Theorem 6.3 ([Kat85]). $\eta \underline{P}_A = \sum_B q_{B,A} B$.

Beweis. Wird nachgeholt. □

Schließlich können wir uns noch fragen, ob man nicht auch alternative periodische Polynome definieren könnte, indem man in der Definition von $\underline{P}_A$ die Rollen von v und v^{-1} vertauscht. Man stellt fest, daß es die so definierten $\underline{\tilde{P}}_A$ erst in $\hat{\mathcal{P}}$ gibt. Genauer setzen wir unsere $\mathcal{H}$-schieflineare Dualität $P \mapsto \overline{P}$ wie folgt auf $\hat{\mathcal{P}}$ fort: Wir schreiben $P \in \hat{\mathcal{P}}$ in eindeutiger Weise als formale Summe $P = \sum_A^\infty p_A \underline{P}_A$ mit $p_A \in \mathcal{L}$, wo wir mit den höchsten Alkoven beginnen, in denen P lebt, und uns von dort nach unten hangeln. Dann definieren wir schlicht $\overline{P} = \sum_A^\infty \overline{p}_A \underline{P}_A$. Man erkennt mühelos, daß $\overline{A} \in A + \sum_{B \prec A}^\infty \mathcal{L}B$ für $A \in \mathcal{A}$.

Theorem 6.4.
1. *$\underline{P}_A$ ist das einzige selbstduale Element von $\hat{\mathcal{P}}$, das in $A + \sum_B^\infty v\mathbb{Z}[v]B$ liegt.*
2. *$\underline{\tilde{P}}_A = \sum (-1)^{d(A,B)} \overline{q}_{B,A} B$ ist das einzige selbstduale Element von $\hat{\mathcal{P}}$, das in $A + \sum_B^\infty v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]B$ liegt.*

Bemerkung 6.5. Hier kommt 1 aus [Lus80a] und 2 aus [Kat85].

Wir machen uns nun daran, die drei vorangegangenen Theoreme zu beweisen. Bezeichne $\mathrm{Alt} = \langle -\rho\rangle \circ \mathrm{alt} \circ \langle \rho \rangle : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}_\circ$ die Antisymmetrisierung um $-\rho$, also

$$\mathrm{Alt}(P) = \sum_{x\in\mathcal{W}_{-\rho}} (-1)^{l(x)} \langle x\rangle P.$$

Weiter definieren wir die $\mathcal{L}$-lineare Restriktion

$$\begin{array}{rlcl} \mathrm{Res}: & \hat{\mathcal{P}} & \to & \mathcal{M} \\ & \sum_A^\infty f_A A & \mapsto & \sum_{A\in\mathcal{A}^+} f_A M_A. \end{array}$$

Sie ist nicht mit der Operation von $\mathcal{H}$ verträglich. Es gilt aber

Proposition 6.6. *Die Verknüpfung* $\mathrm{Res} \circ \eta \circ \mathrm{Alt} : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{M}$ *ist ein Homomorphismus von* $\mathcal{H}$*-Rechtsmoduln.*

Beweis. Es reicht sicher zu zeigen, daß diese Abbildung mit allen $\underline{H}_s$ kommutiert. Das folgt mit unseren Definitionen mühelos aus folgender

Behauptung 6.7. Seien $A, B \in \mathcal{A}$ benachbarte Alkoven mit $A \in \mathcal{A}^+$, $B \notin \mathcal{A}^+$. So gilt für $f = \sum^\infty f_C C \in \eta \circ \mathrm{Alt}(\mathcal{P}_\circ)$ schon $f_B = v f_A$.

Wir zeigen also diese Behauptung. Unsere Annahme besagt ja, daß A und B sich längs einer Wand der dominanten Weylkammer berühren. Sei $\beta \in \Delta$ die zu dieser Wand gehörige einfache Wurzel. Unter einer β-Kette in $\mathcal{A}$ verstehen wir eine minimale nichtleere Teilmenge, die mit einem Alkoven A auch $\beta{\uparrow}A$ und $\beta{\downarrow}A$ enthält. Nun betrachten wir in $\hat{\mathcal{P}}$ den $\mathcal{H}$-Untermodul

$$\hat{\mathcal{P}}_\beta = \{\sum_{A\in\mathcal{A}}^\infty f_A A \in \hat{\mathcal{P}} \mid \text{Für jede } \beta\text{-Kette } \mathcal{K} \subset \mathcal{A} \text{ gilt } \sum_{A\in\mathcal{K}}^\infty f_A A \in \mathcal{P}_\beta\}.$$

Sicher gilt $\vartheta_\alpha \hat{\mathcal{P}}_\beta \subset \hat{\mathcal{P}}_\beta$ für $\alpha \in R^+$, $\alpha \neq \beta$. Bezeichne $\tilde{s_\beta} \in \mathcal{W}_{-\rho}$ die Spiegelung an der β-Wand durch $(-\rho)$. So läßt sich $\langle \tilde{s_\beta}\rangle : \mathcal{P}_\beta \to \mathcal{P}_\beta$ in offensichtlicher Weise zu $\langle \tilde{s_\beta}\rangle : \hat{\mathcal{P}}_\beta \to \hat{\mathcal{P}}_\beta$ fortsetzen, und wir haben $\langle \tilde{s_\beta}\rangle \circ \vartheta_\alpha = \vartheta_{s_\beta(\alpha)} \circ \langle \tilde{s_\beta}\rangle$ für alle $\alpha \in R^+$, $\alpha \neq \beta$. Nun wählen wir ein Repräsentantensystem $\mathrm{Rep} \subset \mathcal{W}_{-\rho}$ für die Nebenklassen $\{e, \tilde{s_\beta}\}\backslash\mathcal{W}_{-\rho}$ und können schreiben

$$\begin{aligned} \eta \circ \mathrm{Alt} &= \prod_{\alpha\in R^+} \vartheta_\alpha \circ (1 - \langle \tilde{s_\beta}\rangle) \prod_{x\in\mathrm{Rep}} (-1)^{l(x)} \langle x \rangle \\ &= \vartheta_\beta \circ (1 - \langle \tilde{s_\beta}\rangle) \prod_{\substack{\alpha\in R^+\\ \alpha\neq\beta}} \vartheta_\alpha \prod_{x\in\mathrm{Rep}} (-1)^{l(x)} \langle x\rangle. \end{aligned}$$

So ist unsere Behauptung von oben zurückgeführt auf die viel einfachere

Behauptung 6.8. Seien A, $B \in \mathcal{A}$ benachbarte Alkoven, die nur von der β-Wand der dominanten Weylkammer getrennt werden. Liegt A oberhalb dieser Wand, so gilt für alle $f = \sum^\infty f_C C \in \vartheta_\beta(1 - \langle \tilde{s_\beta} \rangle)\hat{\mathcal{P}}_\beta$ schon $f_B = v f_A$.

Diese Behauptung kann man auf jeder β-Kette separat prüfen, und damit müssen wir die Behauptung nur für

$$f = \vartheta_\beta(1 - \langle \tilde{s_\beta} \rangle)(C + v(\beta{\downarrow}C))$$

mit $C \in \mathcal{A}$ zeigen. In diesem Fall folgt sie aber explizit aus unseren Definitionen. □

Korollar 6.9. $\underline{M}_A = \operatorname{Res} \circ \eta \circ \operatorname{Alt} \underline{P}_A$ *für alle* $A \in \mathcal{A}^+$.

Bemerkung 6.10. Diese Formel ist Theorem 4.2 von Kato [Kat85]. Man beachte, daß $\operatorname{Alt} \underline{P}_A = \sum_{x \in \mathcal{W}_{-\rho}} (-1)^{l(x)} \langle x\lambda(A) \rangle \underline{P}_A$ und folglich

$$\eta \operatorname{Alt} \underline{P}_A = \sum_{x \in \mathcal{W}_{-\rho}} (-1)^{l(x)} \langle x\lambda(A) \rangle \eta \underline{P}_A$$

Aus dem Korollar folgt also insbesondere Teil 1 von Theorem 6.1 (in dem die generischen Polynome $q_{B,A}$ definiert werden) sowie Theorem 6.3.

Beweis. Für $A = A^+$ sind beide Seiten $M_{A^+} = \underline{M}_{A^+}$ und die Formel ist klar. Nun wissen wir aber schon nach Theorem 5.3 und Lemma 5.6, daß $\operatorname{Alt} \underline{P}_A \in (\operatorname{Alt} \underline{P}_{A^+})\mathcal{H}^+$ für alle $A \in \mathcal{A}$. In der Tat, mit Verschiebung um ρ reicht es zu zeigen, daß $\operatorname{alt} \underline{P}_{\hat{A}} \in (\operatorname{alt} \underline{P}_{\rho + A^+})\mathcal{H}^+$ für alle $A \in \mathcal{A}^+$. Nach Theorem 5.3.2 und seinem Beweis definiert $v^r\psi \operatorname{res}$ eine *iab*-lineare Injektion $\operatorname{alt} \mathcal{P}_\circ \hookrightarrow \mathcal{M}^*$ mit $\operatorname{alt} \underline{P}_{\hat{A}} \mapsto \underline{M}^A$ für alle $A \in \mathcal{A}^+$, und so reicht es zu zeigen, daß $\underline{M}^A \in (\underline{M}^{\rho + w_\circ A})\mathcal{H}^+$ für alle $A \in \mathcal{A}^+$. Das ist aber genau Lemma 5.6.

Mit $\operatorname{Alt} \underline{P}_A \in (\operatorname{Alt} \underline{P}_{A^+})\mathcal{H}^+$ folgt nun, daß

$$\operatorname{Res} \circ \eta \circ \operatorname{Alt} \underline{P}_A \in \underline{M}_{A^+}\mathcal{H}^+$$

selbstdual ist für alle $A \in \mathcal{A}$. Andererseits gilt offensichtlich

$$\operatorname{Res} \circ \eta \circ \operatorname{Alt} \underline{P}_A \in M_A + \sum_B v\mathbb{Z}[v] M_B$$

für alle $A \in \mathcal{A}^+$ und das Korollar ist bewiesen. □

Wir zeigen nun Theorem 6.4.

Beweis. Wir überlassen hier alles dem Leser bis auf den Nachweis, daß die für $\underline{\tilde{P}}_A$ behauptete Formel in der Tat ein selbstduales Element von $\hat{\mathcal{P}}$ definiert. Bezeichne $\xi : \hat{\mathcal{P}} \to \hat{\mathcal{P}}$ die $\mathcal{L}$-schieflineare Abbildung mit $\xi(\sum_A^\infty p_A A) = \sum_A^\infty (-1)^{d(A^+,A)} \overline{p}_A A$. Es gilt zu zeigen, daß $\xi \eta \underline{P}_A \in \hat{\mathcal{P}}$

selbstdual ist. Wir führen diesen Beweis durch Widerspruch. Wir schreiben also

$$\xi\eta\underline{P}_A - \overline{\xi\eta\underline{P}_A} = \sum^{\infty} f_C C$$

und wählen $B \in \mathcal{A}$ mit $f_B \neq 0$. Indem wir das Paar (A, B) hinreichend weit in die positive Weylkammer verschieben, dürfen wir annehmen, daß $\eta \operatorname{Alt} \underline{P}_A$ und $\eta\underline{P}_A$ auf allen Alkoven C mit $C \succeq B$ übereinstimmen. Nach Korollar 6.9 stimmt auf diesen Alkoven also auch $\operatorname{Res} \eta\underline{P}_A$ überein mit $\underline{M}_A$ und $\operatorname{res} \xi\eta\underline{P}_A$ mit $\phi^{-1}\underline{M}_A$, wo ϕ wie in Abschnitt 3 die $\mathcal{L}$-schieflineare Abbildung $\phi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ mit $\phi(N_x) = (-1)^{l(x)} M_x$ bezeichnet und wir unser altes $\operatorname{res} : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ in der offensichtlichen Weise nach $\hat{\mathcal{P}}$ erweitert haben.

Nun kennen wir aber nach Theorem 5.3 die Formel $\underline{N}_D = \operatorname{res} \operatorname{alt} \underline{P}_D$ für $D \in \mathcal{A}^{++}$, insbesondere gilt $\underline{N}_D = \operatorname{res} \underline{P}_D$ für alle $D \subset \mathcal{C}$, die hinreichend fern von allen Wänden der dominanten Weylkammer liegen. Indem wir das Paar (A, B) unter Umständen noch weiter in die dominante Weylkammer hineinschieben, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß alle Alkoven C mit $A \succeq C \succeq B$ schon so fern von allen Wänden liegen, daß $\underline{N}_C = \operatorname{res} \underline{P}_C$. Schreiben wir nun

$$\begin{aligned} \xi\eta\underline{P}_A &= \sum_C^{\infty} p_C \underline{P}_C, \\ \phi^{-1}\underline{M}_A &= \sum n_C \underline{N}_C, \end{aligned}$$

so folgt $p_C = n_C$ für $A \succeq C \succeq B$. Da aber $\phi^{-1}\underline{M}_A = \pm\underline{\tilde{N}}_A$ selbstdual ist (nach dem Schluß vom Beweis des Theorems 3.9), müssen alle n_C selbstdual sein, damit auch alle p_C für $A \succeq C \succeq B$, und daraus folgt schließlich der gewünschte Widerspruch $f_B = 0$. □

Zum Abschluß zeigen wir noch Teil 2 von Theorem 6.1.

Beweis. Wir beginnen mit der nahezu tautologischen Formel

$$\sum_B (-1)^{d(A,B)} m_{B,A} m^{B,C} = \delta_{A,C}$$

Liegt das Paar (C, A) hinreichend weit im Inneren der dominanten Weylkammer, so gilt $m_{B,A} = q_{B,A}$ für alle $B \succeq C$, also alle B mit $m^{B,C} \neq 0$. Andererseits gilt dann auch $m^{B,C} = v^r \overline{p}_{B,\hat{C}} = p_{w_0 B, w_0 C}$, die erste Gleichung nach Theorem 5.3, die letzte Gleichung da $\underline{P}_{\hat{C}}$ selbstdual ist, da also nach Konstruktion der Dualität auf $\mathcal{P}_\circ$ gilt $\underline{P}_{\hat{C}} = v^r c\langle w_0\rangle \underline{P}_{\hat{C}} = v^r c \underline{P}_{w_0 C}$, wo wir $w_0 * \hat{C} = w_0 C$ verwandt haben. □

Damit sind alle drei Theoreme dieses Abschnitts vollständig bewiesen.

7. Beziehung zu Kippmoduln

Sei h die Coxeter-Zahl unseres Wurzelsystems R und $l \geqslant h$ ungerade. Für eine primitive l-te Einheitswurzel ζ bildet man nach Lusztig die Quantengruppe mit dividierten Potenzen U_ζ. Sei U_ζ-mof die Kategorie aller endlichdimensionalen Darstellungen von U_ζ, und sei $\mathcal{B} \subset U_\zeta$-mof der "Hauptblock", d. h. der kleinste Summand, der die triviale Darstellung enthält. $\mathcal{B}$ ist eine k-Kategorie für $k = \mathbb{Q}(\zeta)$.

Die einfachen Objekte von $\mathcal{B}$ sind in natürlicher Weise parametrisiert durch die Menge $\mathcal{A}^+$ aller Alkoven in der dominanten Weylkammer. Zu $A \in \mathcal{A}^+$ bezeichne $L_A \in \mathcal{B}$ das zugehörige einfache Objekt. L_A ist der Sockel bzw. der eindeutig bestimmte einfache Quotient der Standard-Moduln ∇_A bzw. Δ_A. Zum Beispiel ist $L_{A^+} = \nabla_{A^+} = \Delta_{A^+} = k$ die triviale Darstellung. In $\mathcal{B}$ gibt es genügend projektive Objekte. Die projektive Decke von L_A bezeichne ich mit P_A. Unter einer ∇-Fahne (bzw. Δ-Fahne) eines Objekts von $\mathcal{B}$ versteht man eine Filtrierung, bei der alle Subquotienten die Form ∇_A bzw. Δ_A haben, für geeignete $A \in \mathcal{A}^+$.

Definition 7.1. Ein Objekt $T \in \mathcal{B}$ heißt "Kippmodul" genau dann, wenn T sowohl eine ∇-Filtrierung als auch eine Δ-Filtrierung besitzt.

Ich wiederhole nun ohne Beweis einige Tatsachen aus der Theorie der Kippmoduln. Als Standard-Referenz für den völlig analogen Fall der Darstellungen algebraischer Gruppen in positiver Charakteristik vergleiche man [Don93]. Zunächst ist jeder Summand eines Kippmoduls selbst ein Kippmodul. Des weiteren gibt es für jedes $A \in \mathcal{A}^+$ genau einen unzerlegbaren Kippmodul T_A, der eine Δ-Fahne besitzt, die mit $\Delta_A \subset T_A$ beginnt. Die Eindeutigkeit folgt hier recht schnell aus folgender Eigenschaft der Standardobjekte:

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{B}}(\Delta_A, \nabla_B) = \begin{cases} k & \text{falls } A = B \text{ und } n = 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann auf $\mathcal{B}$ eine Dualität einführen, d.h. einen involutiven exakten kontravarianten k-Funktor $d : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, der die einfachen Isomorphieklassen erhält und die Standardobjekte vertauscht, $d\Delta_A \cong \nabla_A$. Es ist bekannt, daß die Kippmoduln unter einer solchen Dualität selbstdual sind, also $dT_A \cong T_A$. Insbesondere ist T_A auch der einzige unzerlegbare Kippmodul, der eine ∇-Fahne besitzt, die mit $T_A \twoheadrightarrow \nabla_A$ endet.

Die vorliegende Arbeit ist motiviert durch das Problem, die Multiplizität $(T_A : \nabla_B)$ zu bestimmen, mit der der Standardmodul ∇_B als Subquotient in einer ∇-Fahne von T_A auftritt. Dazu habe ich folgende

Vermutung 7.2. $(T_A : \nabla_B) = n_{B,A}(1)$.

Bemerkungen 7.3. 1. Ich habe mittlerweile einen Beweis für diese Vermutung gefunden [Soe97]. Er ist allerdings sehr weit entfernt vom unten geschilderten Grund für die Vermutung. Eine Interpretation für die Koeffizienten der $n_{B,A}$ hat auch Andersen in [And96] vorgeschlagen.

2. Aus der Vermutung folgen auch Charakterformeln für die unzerlegbaren Kipp-Moduln "auf den Wänden". Genauer zeigen wir, daß für einen unzerlegbaren Kipp-Modul T auf Wänden und Ψ die Verschiebung aus allen Wänden auch ΨT unzerlegbar ist.

   Bezeichne dazu Φ die Verschiebung auf die Wände, d.h. den zu Ψ adjungierten Funktor. Seien $A(1), \ldots, A(r)$ die Alkoven, in deren Abschluß das höchste Gewicht von T liegt. So ist $\Phi\Psi T \cong T \oplus \ldots \oplus T$ (r Kopien), da beide Seiten Kipp-Moduln sind und die Charaktere übereinstimmen. Daraus folgt schon mal, daß nur die $T_{A(i)}$ als unzerlegbare Summanden von ΨT in Frage kommen.

   Sei nun $A(1)$ die größte Alkove unter den $A(i)$. Da wir das höchste Gewicht von ΨT kennen, wissen wir auch, daß $T_{A(1)}$ als Summand in ΨT vorkommen muß. Schließlich folgt mit Fall 2 in 3.7 aus obiger Vermutung, daß $(T_{A(1)} : \nabla_{A(i)}) = 1$ für $i = 1, \ldots, r$. Andererseits gilt auch $(\Psi T : \nabla_{A(i)}) = 1$ für $i = 1, \ldots, r$. Deshalb ist in ΨT für andere Summanden $T_{A(i)}$ kein Platz mehr, und wir erhalten $\Psi T \cong T_{A(1)}$.

Die meisten unzerlegbaren Kippmoduln sind ja bereits projektiv, genauer gilt $P_A \cong T_{\hat{A}}$ nach [And92], 5.8. Für die projektiven Objekte werden die fraglichen Multiplizitäten schon durch die Reziprozitätsformel $(P_A : \Delta_B) = [\nabla_B : L_A]$ gegeben. Die Lusztig-Vermutung besagt aber, daß in der Grothendieck-Gruppe von $\mathcal{B}$ die Gleichung

$$L_A = \sum_B (-1)^{d(B,A)} m_{B,A}(1) \nabla_B$$

gilt. (Man verwendet Proposition 3.8, um zu sehen, daß diese Vermutung in der Tat mit der von Lusztig in [Lus80b] formulierten Vermutung übereinstimmt.) Wir können diese Gleichung invertieren und erhalten

$$\sum_A m^{C,A}(1) L_A = \nabla_C$$

Aus der Lusztig-Vermutung folgt damit $(P_A : \Delta_B) = m^{B,A}(1)$. Als ersten Test unserer Vermutung gilt es also, die Formel $m^{B,A}(1) = n_{B,\hat{A}}(1)$ zu zeigen. Das ist eine leichte Konsequenz aus Theorem 5.1.

Die eigentliche Motivation für obige Vermutung kommt aber aus der Philosophie der "$\mathbb{Z}$-graduierten Darstellungskategorie", wie ich im Folgenden kurz darlegen will. Man kann hoffen, daß die Kategorie $\mathcal{B}$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte Version $\tilde{\mathcal{B}}$ im Sinne von [BGS96], 4.3 besitzt. Die ∇_A, Δ_A, L_A sollten dann $\mathbb{Z}$-graduierte Versionen $\tilde{\nabla}_A, \tilde{\Delta}_A, \tilde{L}_A \in \tilde{\mathcal{B}}$ besitzen, es sollte auf $\tilde{\mathcal{B}}$ eine "Verschiebung der $\mathbb{Z}$-Graduierung" $M \mapsto M\langle i\rangle$ geben (für $i \in \mathbb{Z}$), die Dualität sollte zu einer Dualität $\tilde{d} : \tilde{\mathcal{B}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ liften mit $\tilde{d}(M\langle i\rangle) = (\tilde{d}M)\langle -i\rangle$, $\tilde{d}(\tilde{\nabla}_A) = \tilde{\Delta}_A$, und wir hätten feiner als zuvor

$$\operatorname{Ext}^n_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{\Delta}_A, \tilde{\nabla}_B\langle i\rangle) = \begin{cases} k & \text{falls } A = B \text{ und } i = n = 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter liefert jedes $s \in \mathcal{S}$ einen exakten Funktor $\Theta_s : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, die sogenannte "Verschiebung durch die Wand". Er vertauscht mit der Dualität $\Theta_s d = d\Theta_s$ und ist einfach zu berechnen auf den Standardmoduln: Für $A \in \mathcal{A}^+$ gibt es kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccl} \nabla_A & \hookrightarrow & \Theta_s\nabla_A \twoheadrightarrow & \nabla_{As} & \text{falls } As \succ A,\ As \in \mathcal{A}^+; \\ \nabla_{As} & \hookrightarrow & \Theta_s\nabla_A \twoheadrightarrow & \nabla_A & \text{falls } As \prec A,\ As \in \mathcal{A}^+, \end{array}$$

und es gilt $\Theta_s\nabla_A = 0$ falls $As \notin \mathcal{A}^+$.

Man kann nun hoffen, daß auch Θ_s eine graduierte Version $\tilde{\Theta}_s : \tilde{\mathcal{B}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ besitzt, die mit $\tilde{d}$ kommutiert und so beschaffen ist, daß wir wieder für $A \in \mathcal{A}^+$ kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccl} \tilde{\nabla}_A\langle 1\rangle & \hookrightarrow & \tilde{\Theta}_s\tilde{\nabla}_A \twoheadrightarrow & \tilde{\nabla}_{As} & \text{falls } As \succ A,\ As \in \mathcal{A}^+; \\ \tilde{\nabla}_{As} & \hookrightarrow & \tilde{\Theta}_s\tilde{\nabla}_A \twoheadrightarrow & \tilde{\nabla}_A\langle -1\rangle & \text{falls } As \prec A,\ As \in \mathcal{A}^+ \end{array}$$

haben, bzw. daß $\tilde{\Theta}_s\tilde{\nabla}_A = 0$ falls $As \notin \mathcal{A}^+$. Diese Hoffnungen werden wesentlich gestützt durch die Tatsache, daß sie sich in der analogen Situation der G_1T-Moduln bis auf die Existenz von $\tilde{d}$ beweisen lassen, siehe [AJS94].

Wir versuchen nun induktiv graduierte Versionen $\tilde{T}_A$ der Kippmoduln zu bilden. Die $\tilde{\nabla}$-Fahne der $\tilde{T}_A$ soll also mit $\tilde{T}_A \twoheadrightarrow \tilde{\nabla}_A$ enden. Wir beginnen mit $\tilde{T}_{A^+} = \tilde{\nabla}_{A^+} = \tilde{L}_{A^+}$. Ist $\tilde{T}_A$ schon konstruiert, so wählen wir $s \in \mathcal{S}$ mit $As \succ A$ und bilden $\tilde{\Theta}_s\tilde{T}_A$. Dies Objekt ist sicher ein Kippmodul und besitzt sogar eine $\tilde{\nabla}$-Fahne, die mit $\tilde{\nabla}_{As}$ endet. Es sollte aber im allgemeinen nicht unzerlegbar sein, sondern vielmehr zerfallen als

$$\tilde{\Theta}_s\tilde{T}_A = \tilde{T}_{As} \oplus \bigoplus_B \tilde{T}_B,$$

wo die Summe über eine gewisse Multimenge von Alkoven $B \prec As$ geht. Man kann nun erwarten, daß alle Homomorphismen in $\tilde{\mathcal{B}}$ (also alle $\mathcal{B}$-Homomorphismen "vom Grad Null") von $\tilde{T}_B$ nach $\tilde{\Theta}_s\tilde{T}_A$ spalten, und diese Annahme führt genau auf obige Vermutung. Denn betrachten wir mal die Grothendieckgruppe $[\tilde{\mathcal{B}}]$ von $\tilde{\mathcal{B}}$ und definieren den Homomorphismus $h : [\tilde{\mathcal{B}}] \longrightarrow \mathcal{N}$ durch $h(\tilde{\nabla}_A\langle i\rangle) = v^i N_A$. Nach unseren Formeln ist $h(\tilde{\Theta}_s\tilde{M}) = h(\tilde{M})\underline{H}_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Nehmen wir nun an, wir wüßten schon per Induktion, daß $h(\tilde{T}_A) = \underline{N}_A$. Sicher haben wir

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{T}_B, \tilde{\Theta}_s\tilde{T}_A) &= \textstyle\sum_{i,C}(\tilde{T}_B : \tilde{\Delta}_C\langle i\rangle)(\tilde{\Theta}_s\tilde{T}_A : \tilde{\nabla}_C\langle i\rangle) \\ &= (\tilde{\Theta}_s\tilde{T}_A : \tilde{\nabla}_B), \end{aligned}$$

da per Induktion $\tilde{T}_B = \tilde{d}\tilde{T}_B$, also $(\tilde{T}_B : \tilde{\Delta}_C\langle i\rangle) = (\tilde{T}_B : \tilde{\nabla}_C\langle -i\rangle) = 0$ falls $i > 0$ oder $i = 0$, $B \neq C$. Nun ist $h(\tilde{\Theta}_s\tilde{T}_A) = \underline{N}_A\underline{H}_s = \sum_B m_B N_B$ und per Definitionem $(\tilde{\Theta}_s\tilde{T}_A : \tilde{\nabla}_B) = m_B(0)$, mithin

$$\begin{aligned} h(\tilde{T}_{As}) &= h(\tilde{\Theta}_s\tilde{T}_A) - \sum_{B\prec As} \dim \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{T}_B, \tilde{\Theta}_s\tilde{T}_A) h(\tilde{T}_B) \\ &= \underline{N}_A\underline{H}_s - \sum_{B\prec As} m_B(0)\underline{N}_B \\ &= \underline{N}_{As}, \end{aligned}$$

was zu erklären war.

Ich möchte noch anfügen, daß aus der Formel $h(\tilde{T}_A) = \underline{N}_A$ auch die Unzerlegbarkeit von T_A folgt. Denn ähnlich wie oben rechnet man nach, daß dann $E = \operatorname{End}_{\mathcal{B}} T_A$ eine $\mathbb{Z}$-Graduierung

$$E = \bigoplus_i \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{T}_A\langle i\rangle, \tilde{T}_A)$$

besitzt, die im Grad Null mit der homogenen Komponente $E_0 = k$ beginnt und keine negativen Komponenten hat. Eine endlichdimensionale k-Algebra, die eine solche Graduierung zuläßt, ist aber stets lokal. Mithin ist unter unseren Annahmen T_A unzerlegbar.

8. Das Beispiel B_2

In den folgenden Tafeln zeige ich am Beispiel des Wurzelsystems B_2 den Algorithmus, der die $\underline{N}_A$ berechnet. Ein Element $\sum n_A N_A \in \mathcal{N}$ wird dargestellt durch ein Bild, bei dem im Alkoven A das Laurentpolynom n_A steht. Wir setzten $\mathcal{S} = \{k, l, a\}$ mit a wie affin, l wie lang, und k wie kurz, also im Bild

BILD FEHLT

Wir beginnen unsere Rechnung mit einem Bild von $\underline{N}_{A^+}$. Jedes Bild, in dem nur ein Alkoven A mit einer 1 gefüllt ist, gibt das entsprechende $\underline{N}_A$ an. Rechtsmultiplikation mit $\underline{H}_s$ wird bildlich durch $\xrightarrow{\underline{H}_s}$ dargestellt. In dem so entstehenden $\underline{N}_A\underline{H}_s$ können noch zusätzliche Einsen stehen, die dann durch Subtraktion der entsprechenden $\underline{N}_B$

mit $B \prec As$ beseitigt werden müssen. Diesen Vorgang symbolisiert ein gestrichelter Pfeil $- - - \rightarrow$.

BILD FEHLT

Das letzte Muster ist genau res alt E_ρ und bestätigt so Theorem 5.3.1.

9. Existenz und Eindeutigkeit für selbstduale Basen

In diesem Abschnitt möchte ich erklären, inwieweit die Existenz und Eindeutigkeit unserer selbstdualen Basen in Wirklichkeit eine sehr allgemeine Tatsache ist. Sei $(W, \leq)$ eine partiell geordnete Menge derart, daß unterhalb von jedem Element höchstens endlich viele andere Elemente liegen. Sei $\mathcal{L}W$ der freie $\mathcal{L}$-Modul über W und d eine schieflineare Involution auf $\mathcal{L}W$, also ein $\mathbb{Z}$-linearer Endomorphismus mit $d^2 = \mathrm{id}$ und $d(vf) = v^{-1}d(f)$. Ein Element $f \in \mathcal{L}W$ mit $d(f) = f$ nennen wir selbstdual.

Wir nehmen nun zusätzlich an, daß gilt

$$d(x) \in x + \sum_{y<x} \mathcal{L}y$$

für alle $x \in W$. So haben wir folgende allgemeine

Proposition 9.1. [Lus93] *Es gibt für jedes $x \in W$ genau ein selbstduales Element $\underline{x} \in \mathcal{L}W$ von der Form $\underline{x} \in x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]y$. Für dies selbstduale Element $\underline{x}$ gilt sogar $\underline{x} \in x + \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v]y$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz. Für eine Teilmenge $T \subset W$ definieren wir ihren "unteren Abschluß" $T^\wedge \subset W$ durch

$$T^\wedge = \{x \in W \mid \exists t \in T \text{ mit } t \geq x\}$$

Für $f = \sum f_x x \in \mathcal{L}W$ definieren wir den Träger $\operatorname{supp} f \subset W$ durch $\operatorname{supp} f = \{x \mid f_x \neq 0\}$. Jetzt zeigen wir durch Induktion von oben

Behauptung 9.2. Für alle n gibt es $\underline{x}_n \in x + \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v]y$ derart, daß im unteren Abschluß des Trägers von $x_n - dx_n$ höchstens n Elemente liegen.

Natürlich können wir unsere Induktion bei $m = \operatorname{card}\{y \mid y < x\}$ mit $\underline{x}_m = x$ starten, und am Schluß ist $\underline{x}_0$ unser gesuchtes $\underline{x}$. Sei nun für den Induktionsschritt ein mögliches $\underline{x}_n$ bereits gefunden. Ist $\underline{x}_n - d\underline{x}_n = 0$, so können wir $\underline{x}_0 = \underline{x}_n$ nehmen und sind fertig. Sonst wählen wir $z \in \operatorname{supp}(\underline{x}_n - d\underline{x}_n)$ maximal. Schreiben wir dann $\underline{x}_n - d\underline{x}_n = \sum_y f_y y$, so wechseln beide Seiten unter d ihr Vorzeichen und es folgt $\overline{f_z} = -f_z$. Wir können also f_z schreiben als $f_z = g - \overline{g}$ mit $g \in v\mathbb{Z}[v]$, und man überzeugt sich leicht, daß ein mögliches $\underline{x}_{n-1}$ gegeben wird durch $\underline{x}_{n-1} = \underline{x}_n - gz$. Das zeigt die Behauptung und die Existenz unserer $\underline{x}$. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus

Behauptung 9.3. Für $f \in \sum_y v\mathbb{Z}[v]y$ folgt aus $f = df$ schon $f = 0$.

Schreiben wir $f = \sum f_y y$ und wählen z maximal mit $f_z \neq 0$, so folgt aus $f = df$ schon $f_z = \overline{f}_z$ im Widerspruch zu $f_z \in v\mathbb{Z}[v]$. Das zeigt die Behauptung, und die Proposition ist bewiesen. □

Fordern wir von der partiell geordneten Menge W nur, daß alle ihre Intervalle endlich sind, so betrachten wir allgemeiner den $\mathcal{L}$-Modul $\widehat{\mathcal{L}W} = \{f : W \to \mathcal{L} \mid$ Es gibt eine endliche Teilmenge $T \subset W$ mit $\operatorname{supp} f \subset T^\wedge\}$. Ein Element $f \in \widehat{\mathcal{L}W}$ schreiben wir als die formale unendliche Linearkombination $f = \sum^\infty f(x)x$.

Sei nun d eine schieflineare Involution auf $\widehat{\mathcal{L}W}$ mit der Stetigkeitseigenschaft $\operatorname{supp}(df) \subset (\operatorname{supp} f)^\wedge \quad \forall f \in \widehat{\mathcal{L}W}$. Gilt zusätzlich $d(x) \in x + \sum_{y<x}^\infty \mathcal{L}y \quad \forall x \in W$, so haben wir in Verallgemeinerung der obigen Proposition 9.1 folgende

Proposition 9.4. [Lus93] *Es gibt für jedes $x \in W$ genau ein selbstduales $\underline{x} \in \widehat{\mathcal{L}W}$ von der Form $\underline{x} \in x + \sum^\infty v\mathbb{Z}[v]y$, und dies $\underline{x}$ ist sogar von der Form $\underline{x} \in x + \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v]y$.*

Beweis. Der Beweis ist mutatis mutandis derselbe wie eben, um den Koeffizienten von $\underline{x}$ an der Stelle $z \in W$ zu bestimmen müssen wir nur induktiv das Intervall $\{y \mid x \geq y \geq z\}$ abarbeiten. □

10. Die parabolischen periodischen Hecke-Moluln

In diesem Abschnitt stelle ich Resultate aus [Lus97] vor. Sei $\Delta_\iota \subset \Delta$ eine Teilmenge der einfachen Wurzeln. Wir bezeichnen mit $W_\iota \subset W$ die von Spiegelungen zu Wurzeln aus Δ_ι erzeugte Untergruppe und mit $\mathcal{W}_{(\iota)} \subset \mathcal{W}$ die Untergruppe, die von allen Spiegelungen an Spiegelebenen erzeugt wird, auf denen eine Wurzel aus Δ_ι senkrecht steht. Es ist also $W_\iota \subset \mathcal{W}_{(\iota)}$, genauer gilt $W_\iota = \mathcal{W}_{(\iota)} \cap W$. Die Alkoven zu $\mathcal{W}_{(\iota)}$ nennen wir "Δ_ι-Streifen" oder kurz "ι-Streifen" in Verallgemeinerung der α-Streifen aus Abschnitt 4. Der ι-Streifen, der den fundamentalen dominanten Alkoven A^+ enthält, heißt auch der "fundamentale dominante ι-Streifen." Wir setzen $\mathcal{A}^\iota = \{A \in \mathcal{A} \mid A$ liegt im fundamentalen dominanten ι-Streifen$\}$ und können die parabolischen periodischen Hecke-Moduln einführen.

Lemma 10.1. [Lus97] *Auf dem freien $\mathcal{L}$-Modul $\mathcal{P}^\iota = \bigoplus_{A \in \mathcal{A}^\iota} \mathcal{L}A$ über $\mathcal{A}^\iota$ gibt es genau eine Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ derart, daß für alle $s \in \mathcal{S}$,*

$A \in \mathcal{A}^\iota$ *gilt*

$$A \cdot \underline{H}_s = \begin{cases} As + vA & \textit{falls } As \succ A, As \in \mathcal{A}^\iota; \\ As + v^{-1}A & \textit{falls } As \prec A, As \in \mathcal{A}^\iota; \\ (v + v^{-1})A & \textit{falls } As \notin \mathcal{A}^\iota. \end{cases} \qquad (1)$$

Bemerkung 10.2. Wir benutzen die Notation $A \cdot \underline{H}_s$, um die Operation von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}^\iota$ zu unterscheiden von der Operation auf $\mathcal{P}$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den $\mathcal{L}$-Modul $\mathcal{P}^*$ aller Abbildungen $f : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$. Seine Elemente fassen wir auf als unendliche formale Linearkombination $f = \sum_{A \in \mathcal{A}}^{\infty} f(A)A$ und haben so eine offensichtliche Einbettung $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{P}^*$. Unsere $\mathcal{H}$-Rechtsoperation auf $\mathcal{P}$ läßt sich in offensichtlicher Weise auf $\mathcal{P}^*$ ausdehnen. Formal ist $\mathcal{P}^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, aufgefaßt als $\mathcal{H}$-Rechtsmodul mithilfe unseres Antiautomorphismus $i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Bezeichne $\mathcal{F}_\iota \subset \mathcal{F}$ die Menge der Spiegelebenen zu Spiegelungen von $\mathcal{W}_{(\iota)}$. Wir definieren für je zwei Alkoven $A, B \in \mathcal{A}$ ihre "relative ι-Höhe" $d_\iota(A, B) \in \mathbb{Z}$ durch

$$\begin{aligned} d_\iota(A, B) \;=\; & \operatorname{card}\{H \in \mathcal{F}_\iota \mid A \subset H^-, B \subset H^+\} \\ & - \operatorname{card}\{H \in \mathcal{F}_\iota \mid A \subset H^+, B \subset H^-\}. \end{aligned}$$

Natürlich hängt diese Zahl nur von den ι-Streifen von A und B ab. Anschließend definieren wir die $\mathcal{L}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{sum} = \mathrm{sum}_\iota : \; & \mathcal{P}^\iota \hookrightarrow \mathcal{P}^* \\ & A \mapsto \textstyle\sum_{x \in \mathcal{W}_{(\iota)}}^{\infty} v^{d_\iota(xA, A)} xA \end{aligned}$$

für alle $A \in \mathcal{A}^\iota$ und das Lemma folgt sofort aus

Behauptung 10.3. Ist für $A \in \mathcal{A}^\iota$, $s \in \mathcal{S}$ das Element $A \cdot \underline{H}_s \in \mathcal{P}^\iota$ definiert durch die Fallunterscheidung in unserem Lemma, so gilt

$$\mathrm{sum}(A \cdot \underline{H}_s) = (\mathrm{sum}\, A)\underline{H}_s$$

Zeigen wir also diese Behauptung. Nun, ist $R_\iota \subset R$ das von $\Delta_\iota \subset \Delta$ erzeugte Unterwurzelsystem, so gilt $w(R^+ - R_\iota) = R^+ - R_\iota \quad \forall w \in W_\iota$. Sind also $A, As \in \mathcal{A}^\iota$, so gilt $As \succ A \Rightarrow xAs \succ xA \quad \forall x \in \mathcal{W}_{(\iota)}$. Das erledigt die beiden ersten Fälle in unserer Fallunterscheidung. Im letzten Fall ist $As = zA$ für geeignetes $z \in \mathcal{W}_{(\iota)}$ und wir können schreiben

$$\mathrm{sum}\, A \;=\; \textstyle\sum_{xA \succ xAs}^{\infty} v^{d_\iota(xA, A)}(xA + v(xAs)).$$

Nun gilt aber für $B \in \mathcal{A}$ mit $B \succ Bs$ in der Tat $(B + vBs)\underline{H}_s = (v + v^{-1})(B + vBs)$ und wir folgern

$$(\mathrm{sum}\, A)\underline{H}_s = (v + v^{-1})\,\mathrm{sum}\, A = \mathrm{sum}(A \cdot \underline{H}_s)$$

□

Zur späteren Verwendung notieren wir noch

Lemma 10.4. *Die Abbildung* $\mathrm{sum} = \mathrm{sum}_\iota : \mathcal{P}^\iota \hookrightarrow \mathcal{P}^*$ *ist ein Homomorphismus von* $\mathcal{H}$*-Rechtsmoduln.*

Beweis. Das ist nur eine Umformulierung der Behauptung 10.3. □

Für jedes ganze Gewicht λ im Abschluß des fundamentalen dominanten ι-Streifens definieren wir $E^\iota_\lambda \in \mathcal{P}^\iota$ durch die Formel

$$E^\iota_\lambda = \sum_{A \in \mathcal{A}^\iota, \lambda \in \bar{A}} v^{f(A)} A,$$

wo $\bar{A}$ ausnahmsweise den Abschluss von A bezeichnet, $f : \{A \in \mathcal{A}^\iota \mid \lambda \in \bar{A}\} \to \mathbb{N}$ gegeben ist durch $f(\lambda + xA^+) = l(x) - m$, und m gerade so gewählt wird, daß die Funktion f den Wert Null annimmt, also $m = \min\{l(x) \mid x \in W, \lambda + xA^+ \in \mathcal{A}^\iota\}$.

Sei $\mathcal{P}^\iota_\circ \subset \mathcal{P}^\iota$ der von allen E^ι_λ erzeugten $\mathcal{H}$-Untermodul.

Proposition 10.5. *Es gibt auf* $\mathcal{P}^\iota_\circ$ *genau eine* $\mathcal{H}$*-schieflineare Involution* $\mathcal{P}^\iota_\circ \to \mathcal{P}^\iota_\circ$, $P \mapsto \overline{P}$ *derart, daß gilt* $\overline{E^\iota_\lambda} = E^\iota_\lambda$ *für alle ganzen Gewichte* λ *im Abschluß des fundamentalen dominanten* ι*-Streifens.*

Beweis. Verschoben. □

Um die Existenz von kanonischen selbstdualen Basen zu garantieren, arbeiten wir im "nach unten vervollständigten" Hecke-Modul

$$\widehat{\mathcal{P}}^\iota = \{f : \mathcal{A}^\iota \to \mathcal{L} \mid \text{Es gibt } C \in \mathcal{A}^\iota \text{ so daß } f(A) \neq 0 \Rightarrow A \preceq C\}$$

Für je zwei $C_1, C_2 \in \mathcal{A}^\iota$ gibt es $C \in \mathcal{A}^\iota$ mit $C_1 \preceq C$, $C_2 \preceq C$. Also ist $\widehat{\mathcal{P}}^\iota$ ein $\mathcal{L}$-Untermodul im Raum aller Funktionen von $\mathcal{A}^\iota$ nach $\mathcal{L}$. Wir schreiben Elemente $f \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota$ als formale Linearkombinationen $f = \sum^\infty f_A A$ mit $f_A = f(A)$. Unsere Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}^\iota$ setzen wir in der offensichtlichen Weise auf $\widehat{\mathcal{P}}^\iota$ fort. Für $f \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota$ definieren wir den Träger $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{A}^\iota$ durch $\operatorname{supp} f = \{A \in \mathcal{A}^\iota \mid f(A) \neq 0\}$ und für jede Teilmenge $T \subset \mathcal{A}^\iota$ bezeichnet $T^\wedge = \{A \in \mathcal{A}^\iota \mid \exists C \in T \text{ mit } A \preceq C\}$ ihren unteren Abschluß.

Theorem 10.6.
1. *Es gibt auf* $\widehat{\mathcal{P}}^\iota$ *genau eine* $\mathcal{H}$*-schieflineare Involution* $\widehat{\mathcal{P}}^\iota \to \widehat{\mathcal{P}}^\iota$, $P \mapsto \overline{P}$ *derart, daß gilt* $\operatorname{supp} \overline{P} \subset (\operatorname{supp} P)^\wedge$ *für alle* $P \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota$ *und* $\overline{E^\iota_\lambda} = E^\iota_\lambda$ *für alle ganzen Gewichte* λ *im Abschluß des fundamentalen dominanten* ι*-Streifens.*
2. *Für alle* $A \in \mathcal{A}^\iota$ *gibt es genau ein (unter dieser Involution) selbstduales* $\underline{P}^\iota_A \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota$ *von der Form* $\underline{P}^\iota_A \in A + \sum^\infty_B v\mathbb{Z}[v]B$.

Bemerkungen 10.7.
1. Unsere Proposition 10.5 folgt sofort aus Teil 1 des Theorems, ist aber ein wichtiger Teilschritt im Beweis desselben.
2. Eine zentrale offene Frage der hier vorgestellten Theorie ist, ob die selbstdualen $\underline{P}^\iota_A$ schon endliche Summen sind, ob also gilt $\underline{P}^\iota_A \in \mathcal{P}^\iota \quad \forall A \in \mathcal{A}^\iota$.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis der Eindeutigkeit in Teil 1. Wir finden ja für alle $A \in \mathcal{A}^\iota$ eine Folge $s, t, \ldots, r \in \mathcal{S}$ so, daß $A \succ As \succ Ast \succ \ldots \succ Ast \ldots r$ wobei alle diese Alkoven im fundamentalen dominanten ι-Streifen liegen und $Ast \ldots r = \lambda + A^+$ für ein geeignetes ganzes Gewicht λ. Dann ist natürlich $D_A = E_\lambda \cdot (\underline{H}_r \ldots \underline{H}_s) \in \mathcal{P}^\iota_0$ selbstdual und von der Form $D_A \in A + \sum_{B \prec A} \mathcal{L}B$. Indem wir uns von oben nach unten hangeln können wir nun jedes $P \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota$ schreiben als unendliche formale Linearkombination $P = \sum^\infty p_A D_A$ mit $p_A \in \mathcal{L}$ und haben notwendig $\overline{P} = \sum^\infty \overline{p_A} D_A$. Mithin ist die Dualität durch unsere Bedingungen eindeutig festgelegt. Wir erhalten zusätzlich $\overline{A} \in A + \sum^\infty_{B \prec A} \mathcal{L}B$ für alle $A \in \mathcal{A}^\iota$ und können somit Proposition 9.4 anwenden, um Teil 2 des Theorems aus Teil 1 zu folgern.

Das eigentliche Problem ist also der Nachweis der Existenz unserer Involution in Teil 1. Wir werden nach einigen Vorarbeiten darauf zurückkommen. □

Sei $\mathcal{T}_{(\iota)} \subset \mathcal{W}_{(\iota)}$ die Menge der Translationen aus $\mathcal{W}_{(\iota)}$. Es gibt einen Homomorphismus $d = d_\iota : \mathcal{T}_{(\iota)} \to \mathbb{Z}$ mit $d(\lambda) = d_\iota(\lambda) = d_\iota(A, \lambda + A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Nebenbei bemerkt landet d sogar in den geraden ganzen Zahlen.

Wir definieren nun einen Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln $\mathrm{Sum} : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}^*$ durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \mathrm{Sum} \ : \ & \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}^* \\ & P \mapsto \sum\nolimits^\infty_{\lambda \in \mathcal{T}_{(\iota)}} v^{-d(\lambda)} \langle \lambda \rangle P. \end{aligned}$$

Sicher gilt $\mathrm{Sum}\, E_\mu \in \mathrm{sum}\, \mathcal{P}^\iota$ für alle $\mu \in X$ und folglich $\mathrm{Sum}\, \mathcal{P}_\circ \subset \mathrm{sum}\, \mathcal{P}^\iota$. Mithin können wir einen Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln

$$\mathrm{re\,Sum} : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}^\iota$$

definieren durch die Vorschrift $\mathrm{sum} \circ \mathrm{re\,Sum} = \mathrm{Sum}$.

Sei $w_\iota \in W_\iota$ das längste Element. Der Schlüssel zur Definition der Dualität auf $\mathcal{P}^\iota_\circ$ ist folgendes

Lemma 10.8. *Der Kern von* $\mathrm{re\,Sum} : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}^\iota$ *ist stabil unter* $P \mapsto \langle w_\iota \rangle \overline{P}$.

Beweis. Verschoben. □

Beweis von Proposition 10.5. Aus dem Lemma folgt, daß die schieflineare Dualität $P \mapsto \langle w_\iota \rangle \overline{P}$ eine schieflineare Dualität auf dem Bild von re Sum in $\mathcal{P}^\iota$ induziert. Nun ist aber das Bild von re Sum gerade $\mathcal{P}^\iota_\circ$. Bezeichnen wir genauer für ein ganzes Gewicht $\lambda \in X$ mit λ^ι das dazu unter $\mathcal{W}_{(\iota)}$ konjugierte Gewicht im Abschluß des fundamentalen dominanten ι-Streifens, so gilt

$$\operatorname{re}\operatorname{Sum} E_\lambda = v^{-d_\iota(\lambda + A^+, A^+)} E^\iota_{\lambda^\iota}$$

und wir sehen, daß unter der induzierten Dualität E^ι_μ selbstdual ist für alle μ im Abschluß des fundamentalen dominanten ι-Streifens. □

Beweis von Lemma 10.8. Das Lemma würde natürlich sofort folgen aus einer Formel der Gestalt $\langle w_\iota \rangle \overline{\operatorname{Sum} P} = \operatorname{Sum}\langle w_\iota \rangle \overline{P}$. Leider ist die linke Seite hier nicht definiert, denn wir kennen weder eine Dualität noch eine Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{P}^*$. Wir werden der linken Seite dennoch einen Sinn geben und so das Lemma zeigen.

Zunächst erinnern wir an die Definition der Dualität auf $\mathcal{P}_\circ$. Diese setzt sich ja zusammen als $\overline{P} = v^r \langle w_\circ \rangle cP$, wo die $\mathcal{H}$-schieflineare Involution c sich offensichtlich auf $\mathcal{P}^*$ ausdehnen läßt zu

$$c : \sum^\infty g_A A \mapsto \sum^\infty \overline{g_A} (w_\circ A)$$

Natürlich reicht es für unsere Zwecke auch, wenn wir einer Formel der Gestalt $v^r \langle w_\iota w_\circ \rangle c(\operatorname{Sum} P) = \operatorname{Sum}\langle w_\iota \rangle \overline{P}$ Sinn geben können.

Nun lassen sich zwar die Operatoren $\langle s_\beta \rangle : \mathcal{P}_\circ \to \mathcal{P}_\circ$ nicht mehr sinnvoll auf $\mathcal{P}^*$ ausdehnen, sie lassen sich aber immer noch ausdehnen zu Endomorphismen der $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln

$$\mathcal{P}^*_\beta = \left\{ \sum^\infty f_A A \;\middle|\; \text{Für jede } \beta\text{-Kette } \mathcal{K} \subset \mathcal{A} \text{ gilt} \sum_{A \in \mathcal{K}} f_A A \in \mathcal{P}_\beta \right\}$$

(Vergleiche hierzu den Beweis von Proposition 6.6.) Wir schreiben dann $w_\iota w_\circ = s_{\beta(l)} \ldots s_{\beta(1)}$ als unverkürzbares Produkt von Spiegelungen an den einfachen Wurzeln $\beta(i) \in \Delta$ und zeigen folgende

Behauptung 10.9. Sei $P \in \mathcal{P}_\circ$. So gilt $\langle s_{\beta(i)} \rangle \circ \ldots \circ \langle s_{\beta(1)} \rangle c(\operatorname{Sum} P) \in \mathcal{P}^*_{\beta(i+1)}$ für $i = 0, 1, \ldots, l-1$ und

$$v^r \langle s_{\beta(l)} \rangle \circ \ldots \circ \langle s_{\beta(1)} \rangle c(\operatorname{Sum} P) = \operatorname{Sum}\langle w_\iota \rangle \overline{P}$$

Diese Behauptung ist nun eine präzise Aussage, aus der offensichtlich unser Lemma folgt. Es reicht natürlich, die Behauptung für $P = E_\mu$ mit $\mu \in X$ zu prüfen. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Sum} E_\mu & = & \sum_{\lambda \in \mathcal{T}_{(\iota)}} v^{-d(\lambda)} E_{\lambda+\mu} \\ v^r c(\operatorname{Sum} E_\mu) & = & \sum_{\lambda \in \mathcal{T}_{(\iota)}} v^{d(\lambda)} E_{w_\circ(\lambda+\mu)} \end{array}$$

und für $i = 0, 1, \ldots, l-1$ folgt induktiv die Formel

$$\langle s_{\beta(i)}\rangle \circ \ldots \circ \langle s_{\beta(1)}\rangle v^r c(\mathrm{Sum}\, E_\mu) = \sum_{\lambda\in\mathcal{T}_\iota} v^{d(\lambda)} E_{s_{\beta(i)}\ldots s_{\beta(1)}w_\circ(\lambda+\mu)}$$

sowie da $\beta(i+1) \notin s_{\beta(i)} \ldots s_{\beta(1)} w_\circ R_\iota$ der erste Teil der Behauptung. Schließlich erhalten wir so

$$\begin{array}{rcl} \langle s_{\beta(l)}\rangle \circ \ldots \circ \langle s_{\beta(1)}\rangle v^r c(\mathrm{Sum}\, E_\mu) & = & \sum_{\lambda\in\mathcal{T}_{(\iota)}} v^{d(\lambda)} E_{w_\iota(\lambda+\mu)} \\ & = & \sum_{\lambda\in\mathcal{T}_{(\iota)}} v^{-d(\lambda)} \langle\lambda\rangle\langle w_\iota\rangle E_\mu \\ & = & \mathrm{Sum}\langle w_\iota\rangle \overline{E}_\mu, \end{array}$$

und da $d(w_\iota\lambda) = -d(\lambda)$ ist das genau der zweite Teil der Behauptung. □

Damit ist die Proposition 10.5 bewiesen. Um auch das Theorem 10.6 zu zeigen, müssen wir allerdings nochmal auf diesen Beweis zurückkommen und ihm eine etwas feinere Aussage abgewinnen.

Für einen Alkoven $A \in \mathcal{A}$ bezeichne $b(A) \in V$ seinen Schwerpunkt. Für $P \in \mathcal{P}^*$ schreiben wir kurz $\mathrm{bsupp}(P)$ für die Menge $b(\mathrm{supp}\, P)$ aller Schwerpunkte von Alkoven im Träger von P.

Lemma 10.10. *Sei $K \subset V$ eine konvexe Teilmenge, die stabil ist unter Verschiebung mit Wurzeln aus R_ι. So ist die Menge aller $P \in \mathcal{P}^\iota_\circ$ mit* $\mathrm{bsupp}(P) \subset K$ *stabil unter unserer Involution auf $\mathcal{P}^\iota_\circ$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \Delta$, $R \in \mathcal{P}^*_\alpha$ und $T \subset V$ eine konvexe Teilmenge mit $\mathrm{bsupp}(R) \subset T$. So folgt aus den Definitionen sofort $\mathrm{bsupp}(\langle s_\alpha\rangle R) \subset s_\alpha T$, wir brauchen dazu sogar nur anzunehmen, daß T jede Gerade mit Richtungsvektor α in einem Intervall trifft. Um das Lemma zu folgern, schreiben wir $P = \mathrm{re}\,\mathrm{Sum}\, Q$ für $Q \in \mathcal{P}_\circ$. Natürlich gilt dann $\mathrm{bsupp}(\mathrm{Sum}\, Q) \subset K$ und mit der Behauptung 10.9 folgt

$$\mathrm{bsupp}(\mathrm{Sum}\langle w_\iota\rangle \overline{Q}) \subset K$$

Das Lemma ergibt sich sofort. □

Mit diesem Lemma ist nun der Weg frei zum noch ausstehenden Beweis der Existenz der Involution in Theorem 10.6.

Beweis von Theorem 10.6, Schluss. Sei $\kappa \in V^*$ eine Linearform mit $\kappa(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_\iota$ und $\kappa(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta - \Delta_\iota$. Wir betrachten die Halbräume $K_t = \{\nu \mid \kappa(\nu) \leq t\}$ und erklären auf $\widehat{P}^\iota$ die Struktur einer (additiven) topologischen Gruppe durch die Vorschrift, daß die Untergruppen $\{P \in \widehat{\mathcal{P}}^\iota \mid \mathrm{bsupp}(P) \subset K_t\}$ ein fundamentales System von Umgebungen der Null bilden sollen. Unsere Topologie hängt von der Wahl von κ ab und ist nur ein Hilfsvehikel für diesen Beweis.

Leider ist $\widehat{P}^\iota$ nicht vollständig für unsere Topologie. Bezeichne $\tilde{P}^\iota$ seine Vervollständigung. Wir können und werden $\tilde{\mathcal{P}}^\iota$ identifizieren mit der Menge aller Abbildungen $f : \mathcal{A}^\iota \to \mathcal{L}$ derart, daß für beliebig kleine t immer nur endlich viele Alkoven im Träger von f ihren Schwerpunkt außerhalb von K_t haben. Die Multiplikation von rechts mit Elementen der Hecke-Algebra ist offensichtlich stetig und läßt sich daher stetig auf $\tilde{P}^\iota$ ausdehnen. Weiter liegt $\mathcal{P}^\iota_\circ$ dicht in $\tilde{P}^\iota$, für jedes $P \in \tilde{P}^\iota$ gibt es ja höchstens endlich viele $A \in \operatorname{supp} P$ mit $b(A) \notin K_t$, und indem wir uns über diese endliche Menge $\mathcal{E}$ nach unten hangeln können wir schreiben $P = \sum_{A\in\mathcal{E}} c_A D_A + \text{Rest}$ für geeignetes $c_A \in \mathcal{L}$, $D_A \in \mathcal{P}^\iota_\circ$ der Form $D_A = A + \sum_{B\prec B} \mathcal{L}B$ und Rest $\in \tilde{P}^\iota$ mit $\operatorname{bsupp}(\text{Rest}) \subset K_t$.

Das Lemma 10.10 sagt uns nun, daß unsere Involution auf $\mathcal{P}^\iota_\circ$ stetig ist. Sie läßt sich also in eindeutiger Weise stetig auf die Komplettierung $\widetilde{\mathcal{P}}^\iota$ fortsetzen, und ist dort $\mathcal{H}$-schieflinear. Wir bezeichnen diese Involution auf $\widetilde{\mathcal{P}}^\iota$ auch mit $P \mapsto \overline{P}$ und müssen nur noch zeigen, daß $\operatorname{supp}\overline{P} \subset (\operatorname{supp} P)^\wedge$ für alle $P \in \widetilde{\mathcal{P}}^\iota$. (Dann folgt automatisch auch, daß $\widehat{\mathcal{P}}^\iota \subset \tilde{P}^\iota$ stabil ist unter $P \mapsto \overline{P}$.)

Wir haben ja schon beim Beweis der Eindeutigkeit gesehen, daß es für jedes $A \in \mathcal{A}^\iota$ ein selbstduales $D_A \in \mathcal{P}^\iota_\circ$ von der Form $D_A \in A + \sum_{B\prec A} \mathcal{L}B$ gibt. Wählen wir solche D_A, so können wir jedes $P \in \widetilde{\mathcal{P}}^\iota$ entwickeln als eine konvergierende Summe $P = \sum^\infty c_A D_A$ mit $c_A \neq 0 \Rightarrow A \in (\operatorname{supp} P)^\wedge$, für beliebig kleines t gibt es also stets nur endlich viele A mit $c_A \neq 0$ und $b(A) \notin K_t$. Dann ist natürlich notwendig $\overline{P} = \sum^\infty \overline{c_A} D_A$, und das zeigt $\operatorname{supp}\overline{P} \subset (\operatorname{supp} P)^\wedge$. Das Theorem ist bewiesen. □

11. Bernstein's Darstellung der affinen Hecke-Algebra

Man betrachtet den periodischen Modul $\mathcal{P}$ für die affine Hecke-Algebra $\mathcal{H}$. Er ist ein freier Rechtsmodul vom Rang 1. Genauer gilt

Lemma 11.1. *Für jeden Alkoven $A \in \mathcal{A}$ definiert die Multiplikation $\mathcal{H} \to \mathcal{P}, H \mapsto AH$ einen Isomorphismus von $\mathcal{L}$-Moduln.*

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen. □

Dieses Lemma sagt uns insbesondere, daß jede Wahl eines Alkoven $A \in \mathcal{A}$ einen Isomorphismus

$$i_A : \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_{-\mathcal{H}} \mathcal{P}$$

definiert, der charakterisiert ist durch $(i_A H)(A) = AH$. Wir verwenden im folgenden meist i_{A^+}. Nun betrachten wir den Gruppenring $\mathcal{L}[\mathbb{Z}R]$ über dem Wurzelgitter mit Koeffizienten in den Laurentpolynomen. Zu $\lambda \in \mathbb{Z}R$ bezeichnen wir mit $\mathrm{e}^\lambda \in \mathcal{L}[\mathbb{Z}R]$ das zugehörige Element des Gruppenrings. Die Operation von $\mathbb{Z}R$ auf $\mathcal{P}$ durch Verschiebung $\lambda \mapsto \langle\lambda\rangle$ definiert eine Einbettung $\mathcal{L}[\mathbb{Z}R] \hookrightarrow \mathrm{End}_{-\mathcal{H}}\mathcal{P}$. Verknüpfen wir sie mit $(i_{A^+})^{-1}$, so erhalten wir eine Einbettung

$$\mathcal{L}[\mathbb{Z}R] \hookrightarrow \mathcal{H}$$

Wir fassen oft $\mathcal{L}[\mathbb{Z}R]$ vermittels dieser Einbettung als Teilring von $\mathcal{H}$ auf. In Formeln ist also $\mathrm{e}^\lambda \in \mathcal{H}$ charakterisiert durch $\lambda + A^+ = A^+\mathrm{e}^\lambda$. Gegeben ein dominantes λ, in Formeln $\lambda \in \mathbb{Z}R \cap \mathcal{C}$, ist es nicht schwer, eine explizite Formel für $\mathrm{e}^\lambda \in \mathcal{H}$ anzugeben: Ist $x \in \mathcal{W}$ das Element der affinen Weylgruppe mit $A^+x = \lambda + A^+$ und schreiben wir $x = sr\ldots t$ als reduzierten Ausdruch in einfachen Spiegelungen, so gilt offensichtlich $A^+ \prec A^+s \prec A^+sr \prec \ldots A^+x$ und mithin $A^+H_x = A^+x = \lambda + A^+$, in anderen Worten $\mathrm{e}^\lambda = H_x$. Für $\lambda \in \mathbb{Z}R$ beliebig schreibt man eben $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}$, erhält $x_1, x_2 \in \mathcal{W}$ mit $A^+x_i = \lambda_i + A^+$ für $i = 1, 2$, und es ergibt sich

$$\mathrm{e}^\lambda = H_{x_1}H_{x_2}^{-1} = H_{x_2}^{-1}H_{x_1}$$

Insbesondere gilt für unseren Antiautomorphismus $\delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ notwendig $\delta(\mathrm{e}^\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}$, wohingegen für unsere Automorphismen a, b gilt $a(\mathrm{e}^\lambda) = \mathrm{e}^\lambda$, $b(\mathrm{e}^\lambda) = \mathrm{e}^\lambda$, da ja Verschiebungen die Orientierung erhalten.

Theorem 11.2 (Bernstein)**.** *1. Die affine Hecke-Algebra $\mathcal{H}$ kann beschrieben werden als die assoziative $\mathcal{L}$-Algebra mit Erzeugenden e^λ, $\lambda \in \mathbb{Z}R$ und $H_s, s \in \mathcal{S}_f$ sowie den folgenden Relationen:*

Gitterrelationen: $\mathrm{e}^\lambda\mathrm{e}^\mu = \mathrm{e}^{\lambda+\mu}$, $\mathrm{e}^0 = 1\ \forall\lambda, \mu \in \mathbb{Z}R$;
Quadratische Relationen: $H_s^2 = 1 + (v^{-1} - v)H_s\ \forall s \in \mathcal{S}_f$;
Zopfrelationen: $H_sH_t\ldots H_s = H_tH_s\ldots H_t$ *bzw.* $H_sH_t\ldots H_t = H_tH_s\ldots H_s$ *falls gilt* $st\ldots s = ts\ldots t$ *bzw.* $st\ldots t = ts\ldots s$*;*
Verträglichkeitsrelationen: *Für $\alpha \in \Delta$ eine einfache Wurzel und $s = s_\alpha$ gilt*

$$\mathrm{e}^\lambda H_s - H_s\mathrm{e}^{s\lambda} = (v^{-1} - v)\frac{\mathrm{e}^\lambda - \mathrm{e}^{s\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}$$

2. Die Multiplikation induziert Isomorphismen $\mathcal{L}[\mathbb{Z}R] \otimes_{\mathcal{L}} \mathcal{H}_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$, $a \otimes H \mapsto j(a)H$ und $\mathcal{H}_f \otimes_{\mathcal{L}} \mathcal{L}[\mathbb{Z}R] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$, $H \otimes a \mapsto Hj(a)$.

Bemerkung 11.3. Der Quotient in der Verträglichkeitsrelation ist im Gruppenring des Wurzelgitters $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}R] = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}R}\mathbb{Z}\mathrm{e}^\lambda$ zu verstehen, der im Übrigen ein Polynomring ist über $\mathbb{Z}$ in den Variablen e^α für $\alpha \in \Delta$. Um zu sehen, daß der fragliche Quotient im Polynomring existiert, dürfen wir oBdA $\langle\lambda, \alpha^\vee\rangle = n > 0$ annehmen, und dann folgt die Existenz des Quotienten aus der Formel

$$\mathrm{e}^\lambda - \mathrm{e}^{s\lambda} = \mathrm{e}^\lambda(1 - \mathrm{e}^{-n\alpha}) = \mathrm{e}^\lambda(1 + \mathrm{e}^{-\alpha} + \ldots + \mathrm{e}^{-(n-1)\alpha})(1 - \mathrm{e}^{-\alpha})$$

Beweis. Wir müssen zunächst zeigen, daß die e^λ und H_s die angegebenen Relationen erfüllen. Hier ist nur die Verträglichkeitsrelation nicht auf Anhieb klar. Um auch sie nachzuweisen, müssen wir mehr Endomorphismen von $\mathcal{P}$ explizit angeben.

Sei α eine einfache Wurzel. Für einen Alkoven A bezeichne $\langle A, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ die größte ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq \langle \tau, \alpha^\vee \rangle \quad \forall \tau \in A$. Wir erinnern an die Linksoperation von $\mathcal{L}[\mathbb{Z}R] = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}R} \mathcal{L}e^\lambda$ durch Verschiebung auf $\mathcal{P}$ und behaupten

Lemma 11.4. *Für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Delta$ definiert die Vorschrift*

$$V_\alpha : A \mapsto s_\alpha A + (v^{-1} - v) \frac{1 - e^{-\langle A, \alpha^\vee \rangle \alpha - \alpha}}{1 - e^{-\alpha}} A$$

einen Endomorphismus des $\mathcal{H}$-Rechtsmoduls $\mathcal{P}$.

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß unsere Abbildung vertauscht mit den Rechtsmultiplikationenn $\cdot \underline{H}_t$, für alle $t \in \mathcal{S}$. Das ist evident, falls A und At im selben α-Streifen liegen. Nehmen wir also an, A und At liegen nicht im selben α-Streifen. Wir kürzen $\langle A, \alpha^\vee \rangle = m$ ab und betrachten die Fälle $A \succ At$ und $A \prec At$ separat. Im ersten Fall gilt $\langle At, \alpha^\vee \rangle = m - 1$ und $A \underline{H}_t) = v^{-1} A + At$ und wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} V_\alpha(A\underline{H}_t) & = & v^{-1} s_\alpha A + v^{-1}(v^{-1} - v) \frac{1 - e^{-m\alpha - \alpha}}{1 - e^{-\alpha}} A \\ & & + s_\alpha At + (v^{-1} - v) \frac{1 - e^{-m\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} At \\ (V_\alpha A)\underline{H}_t & = & s_\alpha At + v s_\alpha A + v^{-1}(v^{-1} - v) \frac{1 - e^{-m\alpha - \alpha}}{1 - e^{-\alpha}} A \\ & & + (v^{-1} - v) \frac{1 - e^{-m\alpha - \alpha}}{1 - e^{-\alpha}} At \end{array}$$

Jetzt beachten wir, daß sich die letzten Terme fast wegheben, es bleibt nur ein $(v^{-1} - v)e^{-m\alpha} At$ ganz unten stehen. Da aber $e^{-m\alpha} At = s_\alpha A$ kommt dieser Term gerade recht und wir erkennen $V_\alpha(A\underline{H}_t) = (V_\alpha A)\underline{H}_t$. Im zweiten Fall rechnet man ähnlich. □

Mit der Notation $s = s_\alpha$ gilt aber $V_\alpha(A^+) = sA^+ + (v^{-1} - v)A^+ = A^+ \underline{H}_s$ und wir folgern sofort $V_\alpha = i_{A^+}(\underline{H}_s)$. Um die Verträglichkeitsrelation in der Hecke-Algebra nachzuweisen, müssen wir also nur prüfen

$$e^\lambda V_\alpha - V_\alpha e^{s\lambda} = (v^{-1} - v) \frac{e^\lambda - e^{s\lambda}}{1 - e^{-\alpha}}$$

und es reicht sogar zu zeigen, daß beide Seiten auf A^+ denselben Wert annehmen. Nun gilt aber

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^\lambda V_\alpha A^+ &= \mathrm{e}^\lambda A^+ \underline{H}_s = \mathrm{e}^\lambda(A^+ s + (v^{-1} - v)A^+) \\
V_\alpha \mathrm{e}^{s\lambda} A^+ &= s(\mathrm{e}^{s\lambda}A^+) + (v^{-1} - v)\tfrac{1-\mathrm{e}^{-\langle s\lambda,\alpha^\vee\rangle\alpha-\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}\mathrm{e}^{s\lambda}A^+ \\
&= \mathrm{e}^\lambda A^+ s + (v^{-1} - v)\tfrac{\mathrm{e}^{s\lambda}-\mathrm{e}^{\lambda-\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}A^+ \\
&= \mathrm{e}^\lambda A^+ s + (v^{-1} - v)\tfrac{\mathrm{e}^{s\lambda}-\mathrm{e}^{\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}A^+ + (v^{-1} - v)\mathrm{e}^\lambda A^+
\end{aligned}$$

und die Differenz liefert das gewünschte Resultat.

Damit ist gezeigt, daß unsere Elemente e^λ und H_s der Hecke-Algebra die behaupteten Relationen in der Tat erfüllen. Man sieht sofort, daß das Anwenden auf A^+ eine Bijektion $\mathcal{L}[\mathbb{Z}R] \otimes_{\mathcal{L}} \mathcal{H}_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$ definiert, folglich ist Multiplikation eine Bijektion $\mathcal{L}[\mathbb{Z}R] \otimes_{\mathcal{L}} \mathcal{H}_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$, und durch Anwenden von δ sieht man, daß das für die umgekehrte Reihenfolge der Faktoren ebenso richtig ist. Damit ist 2 gezeigt, und 1 folgt, da unsere Relationen offensichtlich ausreichen, um jeden Ausdruck in den Erzeugern in die Form $\sum \mathrm{e}^\lambda H_\lambda$ zu bringen, mit H_λ einer $\mathcal{L}$-Linearkombination von Monomen in den H_s für $s \in \mathcal{S}_f$. □

12. Notationen

$(\mathcal{W}, \mathcal{S})$	eine Coxeter-Gruppe, ab Abschnitt 3 die affine Weyl-Gruppe
$\tilde{\mathcal{W}}$	die erweiterte affine Weyl-Gruppe $W \ltimes X$
$(\mathcal{W}_f, \mathcal{S}_f)$	eine parabolische Untergruppe von $\mathcal{W}$
$\mathcal{W}^f$	die kürzesten Repräsentanten der Rechtsnebenklassen $\mathcal{W}_f \backslash \mathcal{W}$
$\mathcal{W}_\lambda$	die Isotropiegruppe von λ in $\mathcal{W}$
$W = \mathcal{W}_0$	die endliche Weylgruppe
W_λ	die Isotropiegruppe von λ in W
ρ	die Halbsumme der positiven Wurzeln
$\mathcal{C}$	die dominante Weylkammer
$\mathcal{A}$	die Menge aller Alkoven
$\mathcal{A}^+$	die Menge aller Alkoven in der dominanten Weylkammer $\mathcal{C}$
$\mathcal{A}^{++}$	die Menge aller Alkoven in $\rho + \mathcal{C}$
A^+	der fundamentale dominante Alkoven
$\mathcal{A}^\iota$	die Menge aller Alkoven im fundamentalen dominanten ι-Streifen
$\mathcal{F}$	die Menge aller affinen Spiegelebenen
F^+, F^-	offener positiver und negativer Halbraum zu einer Spiegelebene $F \in \mathcal{F}$

$\preceq$	Lusztig's Ordnung auf den Alkoven
$d(A,B)$	gewichtete Zahl der Spiegelebenen, die A und B trennen, siehe 4.4
$\beta \uparrow A$, $\beta \downarrow A$	definiert im Beweis von Proposition 4.5
X	das Gewichtegitter
$l(x)$	die Länge des Elements x einer Coxeter-Gruppe
w_0	das längste Element von W
r	die Länge von w_0
Π	die fundamentale Box
Π_λ	die verschobene Box $\lambda + \Pi$
$\lambda(A)$	die untere Ecke der Box, die A enthält
$\check{A}$	entsteht, wenn man A mit w_0 um $\lambda(A)$ dreht
$\hat{A}$	$A \mapsto \hat{A}$ ist invers zu $A \mapsto \check{A}$
$\mathcal{H}$	die Hecke-Algebra
d	ihre Standard-Involution $d : H \mapsto \overline{H}$
i, δ	zwei involutive Antiautomorphismen von $\mathcal{H}$ definiert ganz zu Anfang
a, b	zwei involutive Automorphismen von $\mathcal{H}$ definiert ganz zu Anfang
φ-linear	definiert vor Theorem 3.1
$\mathcal{L}$	der Ring der Laurent-Polynome $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$
$\underline{H}_s$	selbstduale Erzeuger $\underline{H}_s = v(T_s + 1)$ von $\mathcal{H}$

Einige Hecke-Moduln mit Dualität, Standard-Basis, selbstdualer Basis und Übergangskonstanten

$(\mathcal{H}, H_x, \underline{H}_x, h_{x,y})$	die Hecke-Algebra selbst, $H_x = v^{l(x)} T_x$
$(\mathcal{M}, M_x, \underline{M}_x, m_{x,y})$	Deodhars parabolische Versionen,
$(\mathcal{N}, N_x, \underline{N}_x, n_{x,y})$	für $x, y \in \mathcal{W}^f$
$(\mathcal{M}^*, M^x, \underline{M}^x, m^{x,y})$	Die dazu dualen Hecke-Moduln,
$(\mathcal{N}^*, N^x, \underline{N}^x, n^{x,y})$	für $x, y \in \mathcal{W}^f$

Ab Abschnitt 4 identifizieren wir $\mathcal{W}^0 \cong \mathcal{A}^+$ und schreiben M_A, $\underline{M}_A$, $m_{A,B} \ldots$ für M_x, $\underline{M}_x$, $m_{x,y} \ldots$

$(\mathcal{P}, A, \underline{P}_A, p_{A,B})$	Lusztig's periodischer Hecke-Modul, A läuft über $\mathcal{A}$
$\mathcal{P}_\circ$	Untermodul von $\mathcal{P}$, der eine Dualität besitzt
$(\mathcal{P}^\iota, A, \underline{P}^\iota_A, \ )$	Lusztig's parabolischer periodischer Hecke-Modul, A läuft über $\mathcal{A}^\iota$
$\mathcal{P}^\iota_\circ$	Untermodul von $\mathcal{P}^\iota$, der eine Dualität besitzt
$q_{A,B}$	die (renormierten) generischen Polynome
$w * A$	eine neue Operation von $\tilde{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{A}$, $w * (\lambda + B) = (w\lambda) + B$ für $\lambda \in X$, $B \subset \Pi$

$\langle w \rangle$ Operation von $w \in \tilde{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{P}_\circ$, siehe 4.10

Literatur

[AJS94] Henning Haahr Andersen, Jens Carsten Jantzen, and Wolfgang Soergel, *Representations of quantum groups at a p-th root of unity and of semisimple groups in characteristic p: Independence of p*, Astérisque **220** (1994), 1–320.

[And86] Henning Haahr Andersen, *An inversion formula for the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups*, Advances in Mathematics **60** (1986), 125–153.

[And92] Henning Haahr Andersen, *Tensor products of quantized tilting modules*, Comm. Math. Physics **149** (1992), 149–159.

[And96] Henning Haahr Andersen, *Filtrations and tilting modules*, Aarhus Preprint No 7, 1996.

[BGS96] Alexander A. Beilinson, Victor Ginzburg, and Wolfgang Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, JAMS **9** (1996), no. 2, 473–527.

[Bou81] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, vol. 4-6, Masson, 1981.

[Cou99] Michèle Couillens, *Bases de Kazhdan-Lusztig*, Journal of Algebra **213** (1999), no. 2, 687–720.

[Deo87] Vinay V. Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat orderings ii. the parabolic analogue of Kazhdan-Lusztig polynomials*, Journal of Algebra **111** (1987), 483–506.

[Deo91] Vinay V. Deodhar, *Duality in parabolic set up for questions in Kazhdan-Lusztig theory*, Journal of Algebra **142** (1991), 201–209.

[Deo94] Vinay V. Deodhar, *A brief survey of Kazhdan-Lusztig theory and related topics*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 56, Part 1, AMS, 1994, pp. 105–124.

[Don93] Stephen Donkin, *On tilting modules for algebraic groups*, Mathematische Zeitschrift **212** (1993), 39–60.

[Dou90] J.M. Douglass, *An inversion formula for relative Kazhdan-Lusztig polynomials*, Comm. Algebra **18** (1990), 371–387.

[Hum90] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, 1990.

[Kan87] M. Kaneda, *On the inverse Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups*, J. Reine Angew. Math. **381** (1987), 116–135.

[Kat85] S.I. Kato, *On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups*, Adv. in Math. **55** (1985), 103–130.

[KL79] David Kazhdan and George Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inventiones **53** (1979), 191–213.

[Lus80a] George Lusztig, *Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns*, Advances in Mathematics **37** (1980), 121–164.

[Lus80b] George Lusztig, *Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 37, AMS, 1980, pp. 313–317.

[Lus91] George Lusztig, *Intersection cohomology methods in representation theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1990 (Ichiro Satake, ed.), Springer, 1991, pp. 155–174.

[Lus93] George Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, vol. 110, Birkhäuser, 1993.

[Lus97] George Lusztig, *Periodic W-graphs*, Representation Theory **1** (1997), 207–279.

[Mil] Dragan Miličić, *Localization and representation theory of reductive Lie groups*, Book in preparation.

[Soe97] Wolfgang Soergel, *Charakterformeln für Kipp-Moduln über Kac-Moody-Algebren*, Representation Theory (An electronic Journal of the AMS) **1** (1997), 115–132.

[Ta99] Hiroyuki Tagawa, *A construction of weighted parabolic Kazhdan-Lusztig polynomials*, Journal of Algebra **216** (1999), no. 2, 566–599.

Universität Freiburg, Mathematisches Institut, Eckerstrasse 1, D-79104 Freiburg, Germany

E-mail address: soergel@mathematik.uni-freiburg.de