Die Lusztig-Vermutung

Wolfgang Soergel

Mathematisches Insitut
Universität Freiburg

28. März 2013

Die Lusztig-Vermutung über irreduzible Charaktere algebraischer Gruppen

- Dimensionen der einfachen Darstellungen einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe?
- Dimensionen ihrer Gewichtsräume unter einem maximalen Torus?

- Dimensionen der einfachen Darstellungen einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe?
- Dimensionen ihrer Gewichtsräume unter einem maximalen Torus?
- Charakteristik Null: Weyl'sche Charakterformel

- Dimensionen der einfachen Darstellungen einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe?
- Dimensionen ihrer Gewichtsräume unter einem maximalen Torus?
- Charakteristik Null: Weyl'sche Charakterformel
- Charakteristik positiv: Steinberg's Tensorproduktsatz und Lusztig-Vermutung

- Dimensionen der einfachen Darstellungen einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe?
- Dimensionen ihrer Gewichtsräume unter einem maximalen Torus?
- Charakteristik Null: Weyl'sche Charakterformel
- Charakteristik positiv: Steinberg's Tensorproduktsatz und Lusztig-Vermutung

$\mathrm{char} k = 0$:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Einfache Darstellungen} \\ \text{von } \mathrm{SL}(2;k) \end{array} \right\} & \tilde{\leftrightarrow} & \mathbb{N} \\ L & \mapsto & (\dim L) - 1 \\ k[X,Y]^{(n)} & \leftarrow\!\shortmid & n \end{array}$$

Falls $\mathrm{char}\, k = p > 0$ sind die $k[X, Y]^{(n)}$ selten einfach, zum Beispiel ist $kX^p + kY^p \subsetneq k[X, Y]^{(p)}$ Unterdarstellung.

$\mathrm{char} k = 0$:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Einfache Darstellungen} \\ \text{von } \mathrm{SL}(2;k) \end{matrix} \right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{ccc} L & \mapsto & (\dim L) - 1 \\ k[X,Y]^{(n)} & \leftarrow\!\shortmid & n \end{array}$$

Falls $\mathrm{char}\, k = p > 0$ sind die $k[X,Y]^{(n)}$ selten einfach, zum Beispiel ist $kX^p + kY^p \subsetneq k[X,Y]^{(p)}$ Unterdarstellung.

Beliebige Charakteristik:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Einfache Darstellungen}\\ \text{von }\mathrm{SL}(2;k)\end{array}\right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \mathbb{N}$$

$$\mathrm{soc}\; k[X,Y]^{(n)} \hookleftarrow n$$

Aber was sind die Dimensionen dieser Sockel? Und wie sieht es bei allgemeinen Gruppen aus?

Beliebige Charakteristik:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Einfache Darstellungen} \\ \text{von } \mathrm{SL}(2;k) \end{array} \right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \quad \mathbb{N}$$

$$\mathrm{soc}\; k[X,Y]^{(n)} \quad \leftarrow\!\!\dashv \quad n$$

Aber was sind die Dimensionen dieser Sockel? Und wie sieht es bei allgemeinen Gruppen aus?

Für affine algebraische Gruppen $G \supset B$ hat das Restringieren einen Rechtsadjungierten, das Induzieren

$$G\text{-Mod} \underset{\text{ind}}{\overset{\text{res}}{\rightleftarrows}} B\text{-Mod}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_B^G V &= \{f : G \to V \mid f \text{ algebraisch } B\text{-äquivariant}\} \\ &= \{ \text{ algebraische Schnitte in } G \times_B V \twoheadrightarrow G/B\}\end{aligned}$$

Ab jetzt:

- $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossener Körper

Ab jetzt:

- $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossener Körper
- $G \supset B$ zusammenhängende affine algebraische Gruppe über k mit Borel'scher, zum Beispiel: $G = \mathrm{GL}(r; k) \supset B$ obere Dreiecksmatrizen

Ab jetzt:

- $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossener Körper
- $G \supset B$ zusammenhängende affine algebraische Gruppe über k mit Borel'scher, zum Beispiel: $G = \mathrm{GL}(r; k) \supset B$ obere Dreiecksmatrizen
- $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(B) := \{\lambda : B \to k^\times \mid \lambda \text{ Homomorphismus}\}$ das Gewichtegitter

Ab jetzt:

- $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossener Körper
- $G \supset B$ zusammenhängende affine algebraische Gruppe über k mit Borel'scher, zum Beispiel: $G = \mathrm{GL}(r; k) \supset B$ obere Dreiecksmatrizen
- $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(B) := \{\lambda : B \to k^\times \mid \lambda \text{ Homomorphismus}\}$ das Gewichtegitter
- $\nabla(\lambda) := \mathrm{ind}_B^G k_\lambda$ induzierte Darstellung zu $\lambda \in \mathfrak{X}$

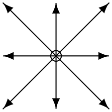
Ab jetzt:

- $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossener Körper
- $G \supset B$ zusammenhängende affine algebraische Gruppe über k mit Borel'scher, zum Beispiel: $G = \mathrm{GL}(r; k) \supset B$ obere Dreiecksmatrizen
- $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(B) := \{\lambda : B \to k^\times \mid \lambda \text{ Homomorphismus}\}$ das Gewichtegitter
- $\nabla(\lambda) := \mathrm{ind}_B^G k_\lambda$ induzierte Darstellung zu $\lambda \in \mathfrak{X}$
- $\mathfrak{X}^+ := \{\lambda \in \mathfrak{X} \mid \nabla(\lambda) \neq 0\}$ dominante Gewichte

Ab jetzt:

- $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossener Körper
- $G \supset B$ zusammenhängende affine algebraische Gruppe über k mit Borel'scher, zum Beispiel: $G = \mathrm{GL}(r; k) \supset B$ obere Dreiecksmatrizen
- $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(B) := \{\lambda : B \to k^\times \mid \lambda \text{ Homomorphismus}\}$ das Gewichtegitter
- $\nabla(\lambda) := \mathrm{ind}_B^G k_\lambda$ induzierte Darstellung zu $\lambda \in \mathfrak{X}$
- $\mathfrak{X}^+ := \{\lambda \in \mathfrak{X} \mid \nabla(\lambda) \neq 0\}$ dominante Gewichte

Beispiel $G = \mathrm{Sp}(4; k)$



$\mathfrak{X}$ Gewichtegitter

$\mathfrak{X}^+$ dominante Gewichte

$\mathfrak{X}^+$ dominante Gewichte

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^+ & \stackrel{\sim}{\to} & \{\text{Einfache Darstellungen von } G\} \\ \lambda & \mapsto & L(\lambda) := \operatorname{soc} \nabla(\lambda) \end{array}$$

$\nabla(\lambda)$ wird beschrieben durch Weyl'sche Charakterformel
Für $\operatorname{char} k = 0$ gilt $L(\lambda) = \nabla(\lambda)$

Für $G = \mathrm{SL}(2; k)$:

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \right\}$ ist Borel'sche
- $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}\varepsilon$ mit $\varepsilon : B \to k^\times$ gegeben durch $\begin{pmatrix} t & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \mapsto t$
- $\nabla(n\varepsilon) = k[X, Y]^{(n)}$

Für $G = \mathrm{SL}(2; k)$:

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \right\}$ ist Borel'sche
- $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}\varepsilon$ mit $\varepsilon : B \to k^\times$ gegeben durch $\begin{pmatrix} t & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \mapsto t$
- $\nabla(n\varepsilon) = k[X, Y]^{(n)}$

Falls $\operatorname{char} k = p > 0$:

- $L(n\varepsilon) = \nabla(n\varepsilon)$ falls $n < p$

Für $G = \mathrm{SL}(2;k)$:

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \right\}$ ist Borel'sche
- $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}\varepsilon$ mit $\varepsilon : B \to k^\times$ gegeben durch $\begin{pmatrix} t & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \mapsto t$
- $\nabla(n\varepsilon) = k[X, Y]^{(n)}$

Falls $\mathrm{char}\, k = p > 0$:

- $L(n\varepsilon) = \nabla(n\varepsilon)$ falls $n < p$
- $L(p\varepsilon) \subsetneq \nabla(p\varepsilon)$ alias $kX^p + kY^p \subsetneq k[X, Y]^{(p)}$

Für $G = \mathrm{SL}(2; k)$:

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \right\}$ ist Borel'sche
- $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}\varepsilon$ mit $\varepsilon : B \to k^\times$ gegeben durch $\begin{pmatrix} t & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \mapsto t$
- $\nabla(n\varepsilon) = k[X, Y]^{(n)}$

Falls $\operatorname{char} k = p > 0$:

- $L(n\varepsilon) = \nabla(n\varepsilon)$ falls $n < p$
- $L(p\varepsilon) \subsetneq \nabla(p\varepsilon)$ alias $kX^p + kY^p \subsetneq k[X, Y]^{(p)}$
- $L(p\varepsilon) = L(\varepsilon)^{[1]}$ Frobenius-Twist von $L(\varepsilon)$

Für $G = \mathrm{SL}(2; k)$:

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \right\}$ ist Borel'sche
- $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}\varepsilon$ mit $\varepsilon : B \to k^\times$ gegeben durch $\begin{pmatrix} t & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \mapsto t$
- $\nabla(n\varepsilon) = k[X, Y]^{(n)}$

Falls $\operatorname{char} k = p > 0$:

- $L(n\varepsilon) = \nabla(n\varepsilon)$ falls $n < p$
- $L(p\varepsilon) \subsetneq \nabla(p\varepsilon)$ alias $kX^p + kY^p \subsetneq k[X, Y]^{(p)}$
- $L(p\varepsilon) = L(\varepsilon)^{[1]}$ Frobenius-Twist von $L(\varepsilon)$
- Beschreibung aller irreduziblen Charaktere durch Steinberg's Tensorproduktsatz

Für $G = \mathrm{SL}(2; k)$:

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \right\}$ ist Borel'sche
- $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}\varepsilon$ mit $\varepsilon : B \to k^\times$ gegeben durch $\begin{pmatrix} t & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \mapsto t$
- $\nabla(n\varepsilon) = k[X, Y]^{(n)}$

Falls $\operatorname{char} k = p > 0$:

- $L(n\varepsilon) = \nabla(n\varepsilon)$ falls $n < p$
- $L(p\varepsilon) \subsetneq \nabla(p\varepsilon)$ alias $kX^p + kY^p \subsetneq k[X, Y]^{(p)}$
- $L(p\varepsilon) = L(\varepsilon)^{[1]}$ Frobenius-Twist von $L(\varepsilon)$
- Beschreibung aller irreduziblen Charaktere durch Steinberg's Tensorproduktsatz

Steinberg's Tensorproduktsatz:

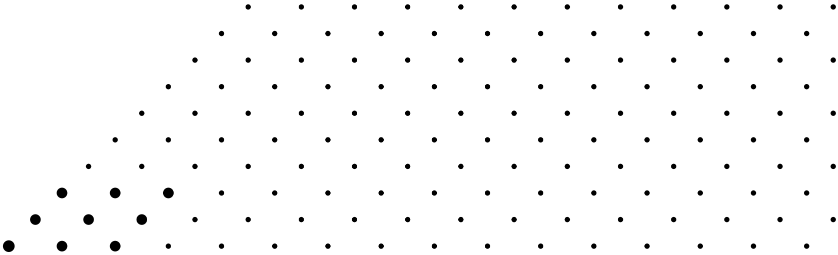
$G \supset B$ und $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{X}^+$ wieder allgemein.
Für $\lambda \in \mathfrak{X}^+$ betrachte p-adische Entwicklung

$$\lambda = p^d \lambda_d + \ldots + p^2 \lambda_2 + p\lambda_1 + \lambda_0$$

mit Ziffern λ_i in der fundamentalen Box, gegeben durch
Box$:= \{\mu \in \mathfrak{X}^+ \mid \langle \mu, \alpha^\vee \rangle < p$ für alle einfachen Wurzeln $\alpha\}$
So gilt

$$L(\lambda) \cong L(\lambda_d)^{[d]} \otimes \ldots \otimes L(\lambda_2)^{[2]} \otimes L(\lambda_1)^{[1]} \otimes L(\lambda_0)$$

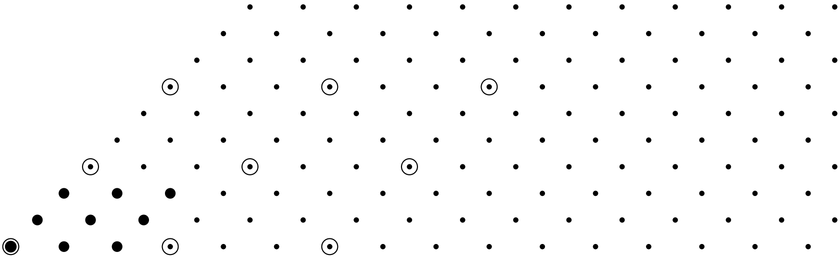
Hier meint $L^{[i]}$ den Twist der Darstellung L mit der i-ten Potenz des Frobenius-Automorphismus von $\mathrm{GL}(L)$.



Die 9 Elemente der Box im Fall $p = 3$ für $G = \mathrm{Sp}(4; k)$

$$L(\lambda) \cong L(\lambda_d)^{[d]} \otimes \ldots \otimes L(\lambda_2)^{[2]} \otimes L(\lambda_1)^{[1]} \otimes L(\lambda_0)$$

Aber was sind die Charaktere, ja die Dimensionen der $L(\lambda)$ für $\lambda \in \mathrm{Box}$? Lusztig-Vermutung erst ab $p = 5$.

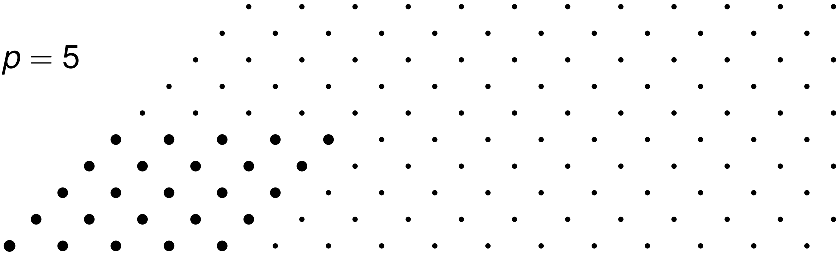


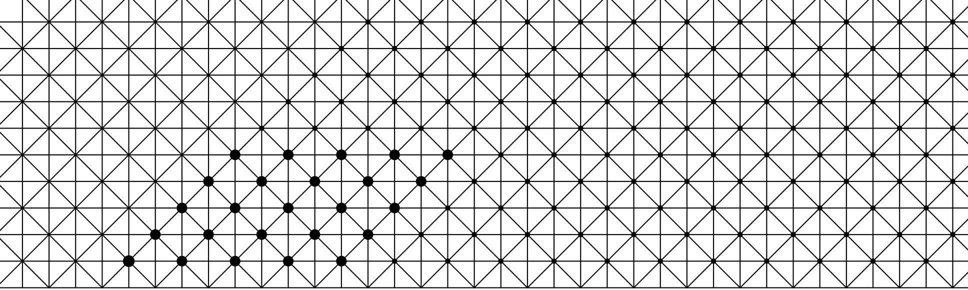
Die 9 Elemente der Box im Fall $p = 3$ für $G = \mathrm{Sp}(4; k)$
mitsamt den $p\lambda_1$ für $\lambda_1 \in \mathrm{Box}$

$$L(\lambda) \cong L(\lambda_d)^{[d]} \otimes \ldots \otimes L(\lambda_2)^{[2]} \otimes L(\lambda_1)^{[1]} \otimes L(\lambda_0)$$

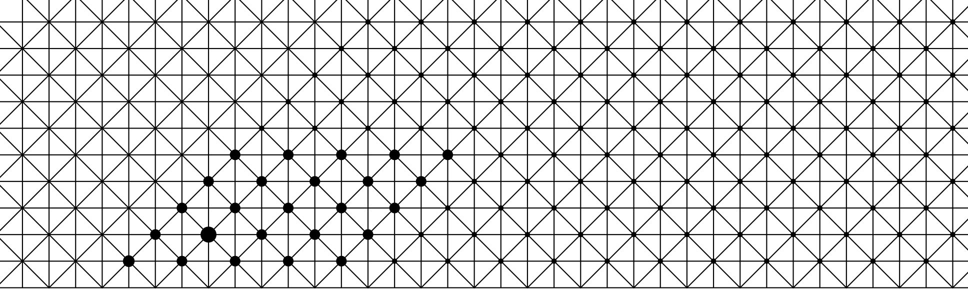
Aber was sind die Charaktere, ja die Dimensionen
der $L(\lambda)$ für $\lambda \in \mathrm{Box}$? Lusztig-Vermutung erst ab $p = 5$.

$p = 5$

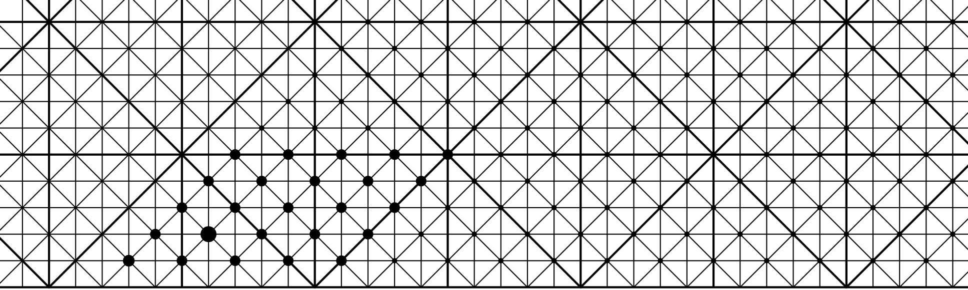




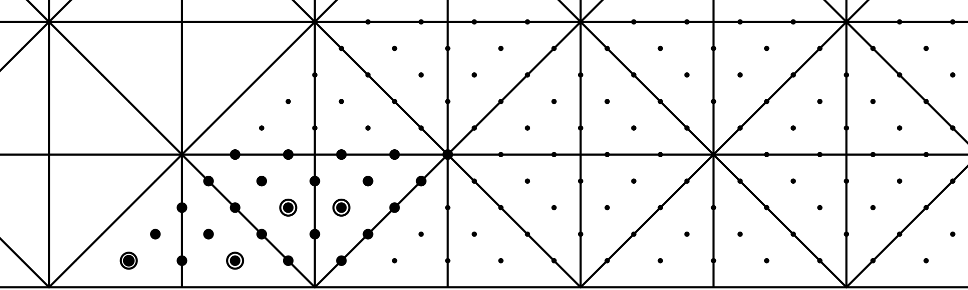
Betrachte affine Weylgruppe $\mathcal{W} = W \ltimes \langle R \rangle$



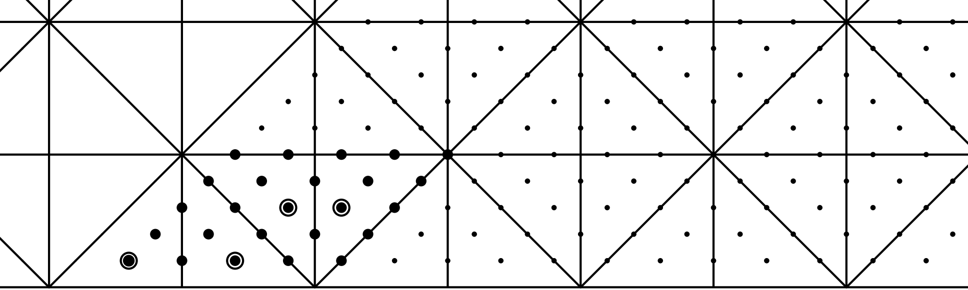
Betrachte affine Weylgruppe $\mathcal{W} = W \ltimes \langle R \rangle$
ρ Halbsumme der positiven Wurzeln



Betrachte affine Weylgruppe $\mathcal{W} = W \ltimes \langle R \rangle$
ρ Halbsumme der positiven Wurzeln
Neue $\mathcal{W}$-Operation $x \cdot_p \lambda := pxp^{-1}(\lambda + \rho) - \rho$



Betrachte affine Weylgruppe $\mathcal{W} = W \ltimes \langle R \rangle$
ρ Halbsumme der positiven Wurzeln
Neue $\mathcal{W}$-Operation $x \cdot_p \lambda := pxp^{-1}(\lambda + \rho) - \rho$
Die Punkte $x \cdot_p 0$ aus der Box

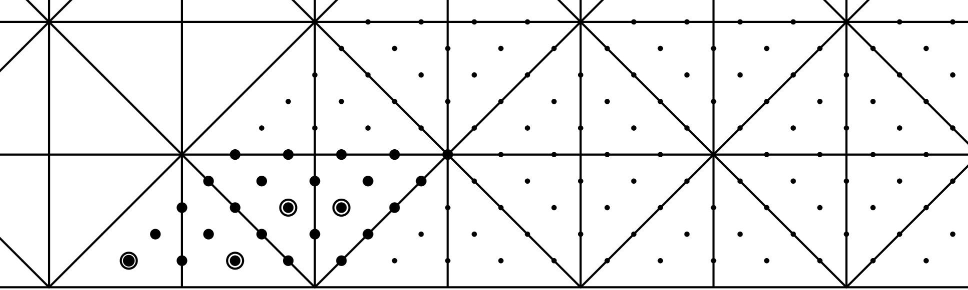


Lusztig-Vermutung

Für $x \in \mathcal{W}$ mit $x \cdot_p 0 \in \mathrm{Box}$ und p so groß, daß $z \cdot_p 0 = 0 \Rightarrow z = 1$ haben wir:

$$[L(x \cdot_p 0)] = \sum_y (-1)^{l(x)+l(y)} P_{w_\circ y, w_\circ x}(1)\ [\nabla(y \cdot_p 0)]$$

Translationsprinzip: Diese $[L(x \cdot_p 0)]$ liefern alle $[L(\lambda)]$ für $\lambda \in \mathrm{Box}$

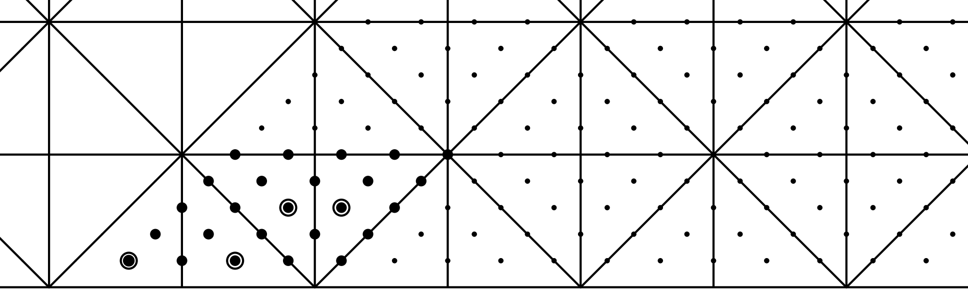


Lusztig-Vermutung

Für $x \in \mathcal{W}$ mit $x \cdot_p 0 \in \text{Box}$ und p so groß,
daß $z \cdot_p 0 = 0 \Rightarrow z = 1$ haben wir:

$$[L(x \cdot_p 0)] = \sum_y (-1)^{l(x)+l(y)} P_{w_\circ y, w_\circ x}(1) \, [\nabla(y \cdot_p 0)]$$

Translationsprinzip: Diese $[L(x \cdot_p 0)]$ liefern alle $[L(\lambda)]$ für $\lambda \in \text{Box}$
Aber was sind die Kazhdan-Lusztig-Polynome $P_{w_\circ y, w_\circ x}$?

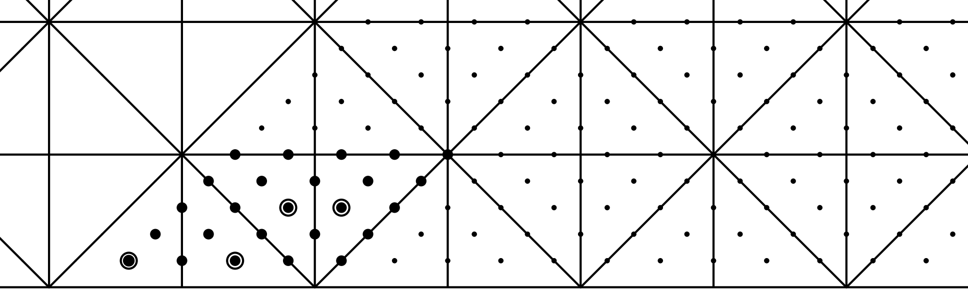


Lusztig-Vermutung

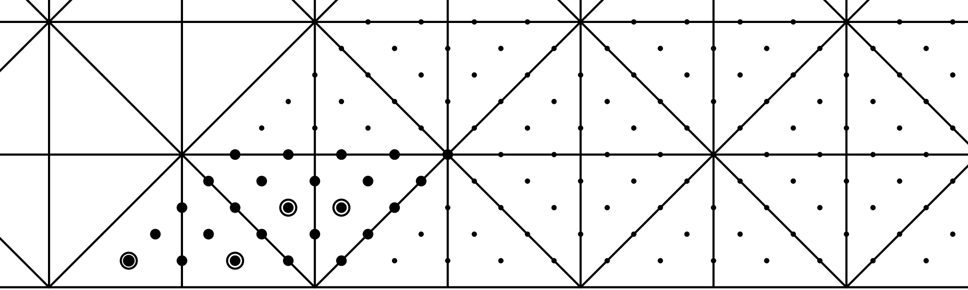
Für $x \in \mathcal{W}$ mit $x \cdot_p 0 \in \mathrm{Box}$ und p so groß,
daß $z \cdot_p 0 = 0 \Rightarrow z = 1$ haben wir:

$[L(x \cdot_p 0)] = \sum_y (-1)^{l(x)+l(y)} P_{w_\circ y, w_\circ x}(1)\ [\nabla(y \cdot_p 0)]$

Translationsprinzip: Diese $[L(x \cdot_p 0)]$ liefern alle $[L(\lambda)]$ für $\lambda \in \mathrm{Box}$
Aber was sind die Kazhdan-Lusztig-Polynome $P_{w_\circ y, w_\circ x}$?



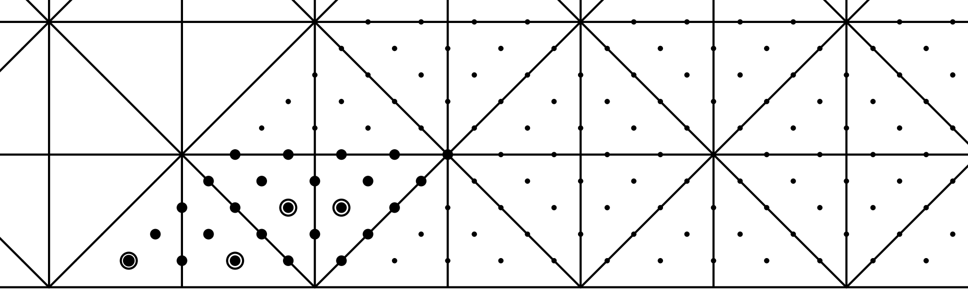
Für A, B die Alkoven von $x \cdot_p 0$, $y \cdot_p 0$ setze
$L_A := L(x \cdot_p 0)$, $\nabla_B := \nabla(y \cdot_p 0)$ und $m_{B,A} := P_{w_\circ y, w_\circ x}$



Für A, B die Alkoven von $x \cdot_p 0$, $y \cdot_p 0$ setze
$L_A := L(x \cdot_p 0)$, $\nabla_B := \nabla(y \cdot_p 0)$ und $m_{B,A} := P_{w_\circ y, w_\circ x}$

Lusztig-Vermutung: Für A in der fundamentalen Box gilt

$$[L_A] = \sum_B (-1)^{d(A,B)} m_{B,A}(1)\ [\nabla_B]$$

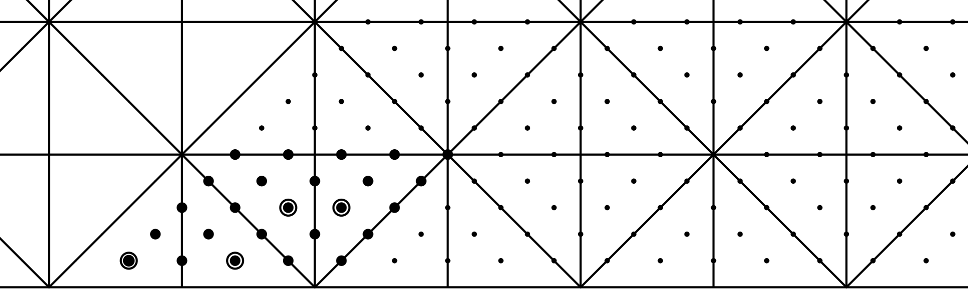


Für A, B die Alkoven von $x \cdot_p 0$, $y \cdot_p 0$ setze
$L_A := L(x \cdot_p 0)$, $\nabla_B := \nabla(y \cdot_p 0)$ und $m_{B,A} := P_{w_\circ y, w_\circ x}$

Lusztig-Vermutung: Für A in der fundamentalen Box gilt

$$[L_A] = \sum_B (-1)^{d(A,B)} m_{B,A}(1)\ [\nabla_B]$$

$d(A, B)$ die Zahl der Spiegelebenen, die A und B trennen

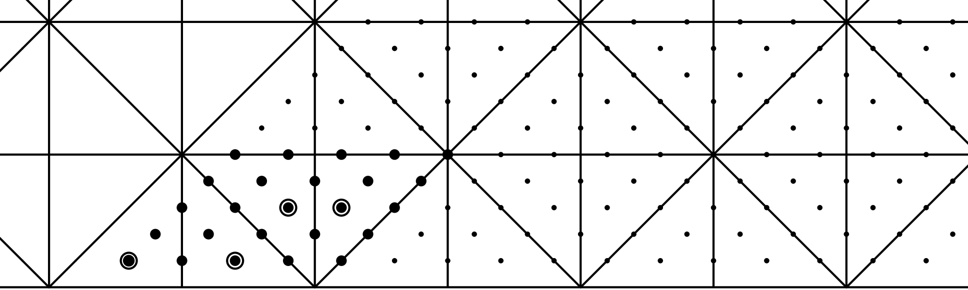


Für A, B die Alkoven von $x \cdot_p 0$, $y \cdot_p 0$ setze
$L_A := L(x \cdot_p 0)$, $\nabla_B := \nabla(y \cdot_p 0)$ und $m_{B,A} := P_{w_\circ y, w_\circ x}$

Lusztig-Vermutung: Für A in der fundamentalen Box gilt

$$[L_A] = \sum_B (-1)^{d(A,B)} m_{B,A}(1)\ [\nabla_B]$$

$d(A, B)$ die Zahl der Spiegelebenen, die A und B trennen
Aber was sind die Kazhdan-Lusztig-Polynome $m_{B,A} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$?

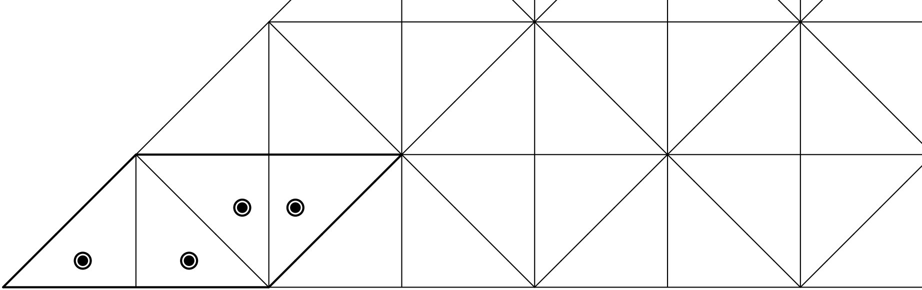


Für A, B die Alkoven von $x \cdot_p 0$, $y \cdot_p 0$ setze
$L_A := L(x \cdot_p 0)$, $\nabla_B := \nabla(y \cdot_p 0)$ und $m_{B,A} := P_{w_\circ y, w_\circ x}$

Lusztig-Vermutung: Für A in der fundamentalen Box gilt

$$[L_A] = \sum_B (-1)^{d(A,B)} m_{B,A}(1)\ [\nabla_B]$$

$d(A, B)$ die Zahl der Spiegelebenen, die A und B trennen
Aber was sind die Kazhdan-Lusztig-Polynome $m_{B,A} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$?

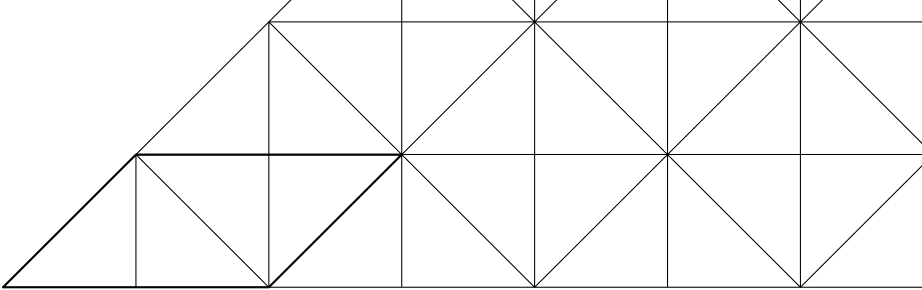


Für A, B Alkoven von $x \cdot_p 0,\ y \cdot_p 0$ setze
$L_A := L(x \cdot_p 0)$, $\nabla_B := \nabla(y \cdot_p 0)$ und $m_{B,A} := P_{w_\circ y, w_\circ x}$

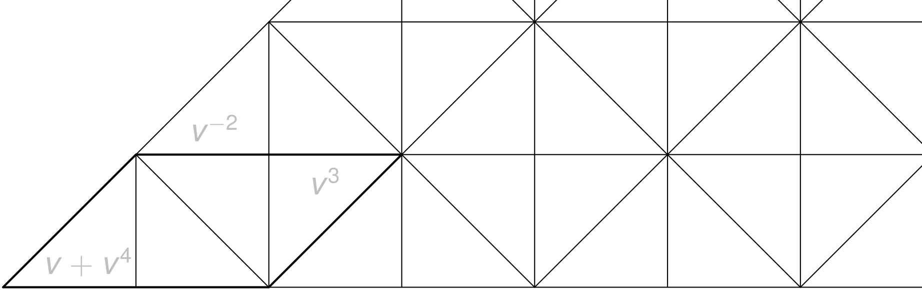
Lusztig-Vermutung: Für A in der fundamentalen Box gilt

$$[L_A] = \sum_B (-1)^{d(A,B)} m_{B,A}(1)\ [\nabla_B]$$

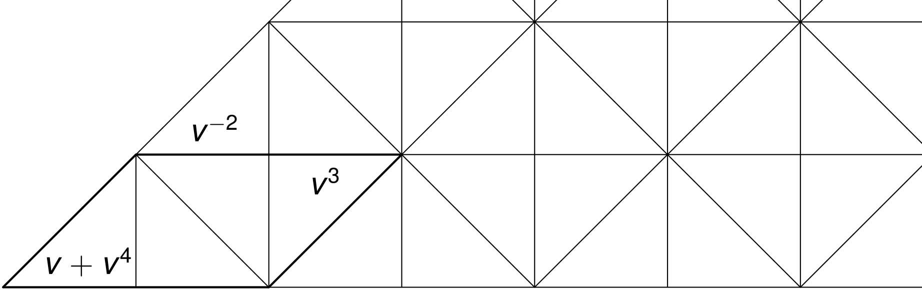
$d(A, B)$ die Zahl der Spiegelebenen, die A und B trennen
Aber was sind die Kazhdan-Lusztig-Polynome $m_{B,A} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$?



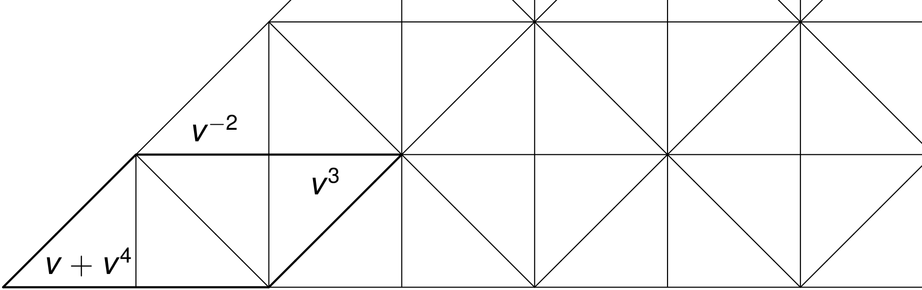
- Betrachte den freien Modul $\mathcal{M} := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]\mathcal{A}^+$ über der Menge $\mathcal{A}^+$ der Alkoven in der dominanten Weylkammer



- Betrachte den freien Modul $\mathcal{M} := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]\mathcal{A}^+$ über der Menge $\mathcal{A}^+$ der Alkoven in der dominanten Weylkammer
- Notation: Schreibe Koeffizienten in ihre Alkoven

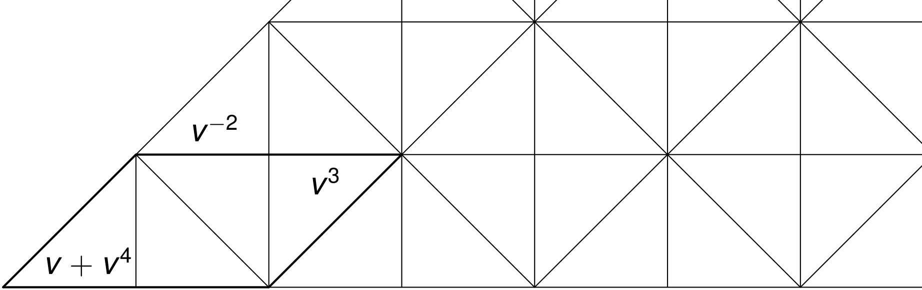


- Betrachte den freien Modul $\mathcal{M} := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]\mathcal{A}^+$ über der Menge $\mathcal{A}^+$ der Alkoven in der dominanten Weylkammer
- Notation: Schreibe Koeffizienten in ihre Alkoven
- Elemente von $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]\mathcal{A}^+$ heißen „Patterns“



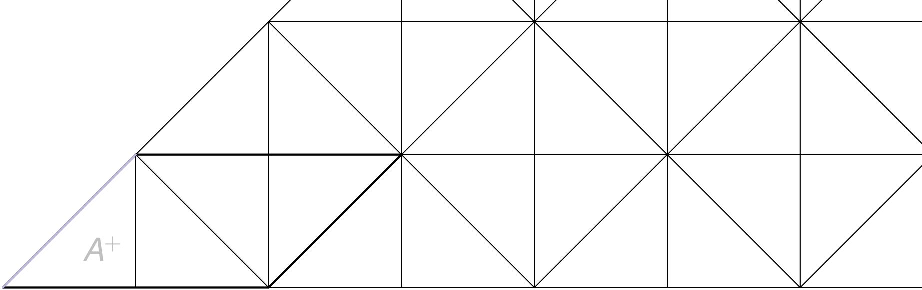
- Betrachte den freien Modul $\mathcal{M} := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]\mathcal{A}^+$ über der Menge $\mathcal{A}^+$ der Alkoven in der dominanten Weylkammer
- Notation: Schreibe Koeffizienten in ihre Alkoven
- Elemente von $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]\mathcal{A}^+$ heißen „Patterns“
- Erkläre ausgezeichnete Patterns

$$\underline{M}_A = \sum_B m_{B,A} B \in A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+$$

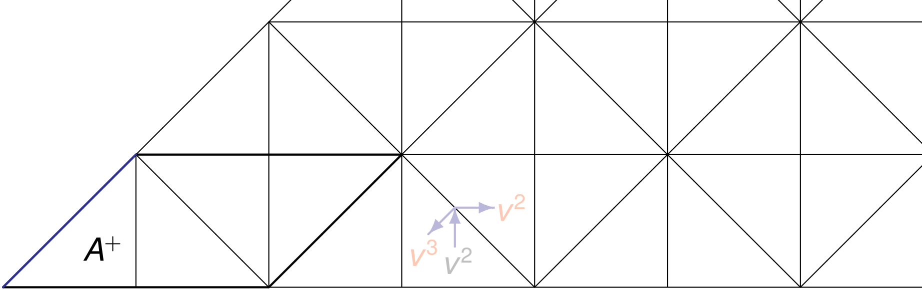


- Betrachte den freien Modul $\mathcal{M} := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]\mathcal{A}^+$ über der Menge $\mathcal{A}^+$ der Alkoven in der dominanten Weylkammer
- Notation: Schreibe Koeffizienten in ihre Alkoven
- Elemente von $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]\mathcal{A}^+$ heißen „Patterns“
- Erkläre ausgezeichnete Patterns

$$\underline{M}_A = \sum_B m_{B,A} B \in A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+$$

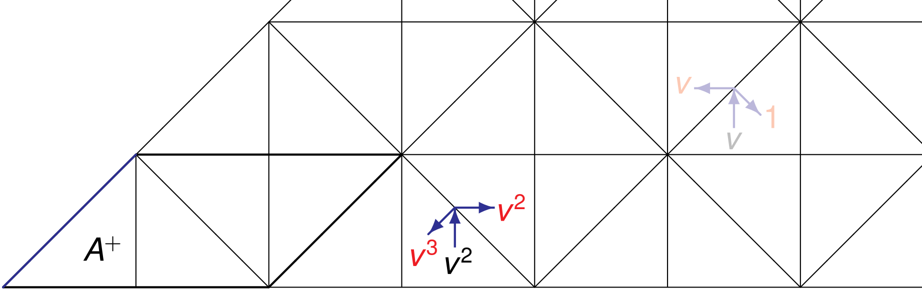


- Gegeben s eine Wand von A^+ erkläre $[s] : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ durch



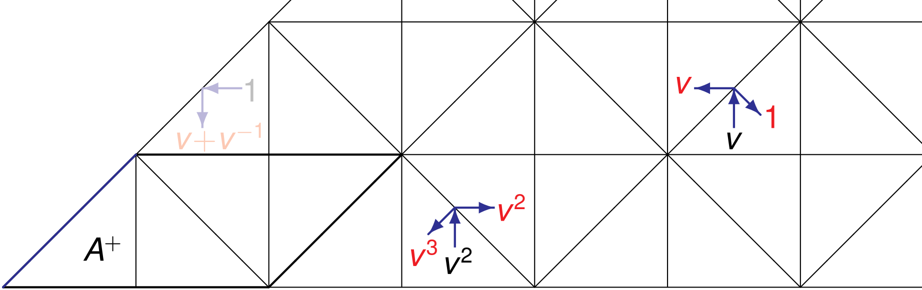
- Gegeben s eine Wand von A^+ erkläre $[s] : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ durch

  $[s] : A \mapsto As + vA$ falls $As > A$ und $As \in \mathcal{A}^+$;



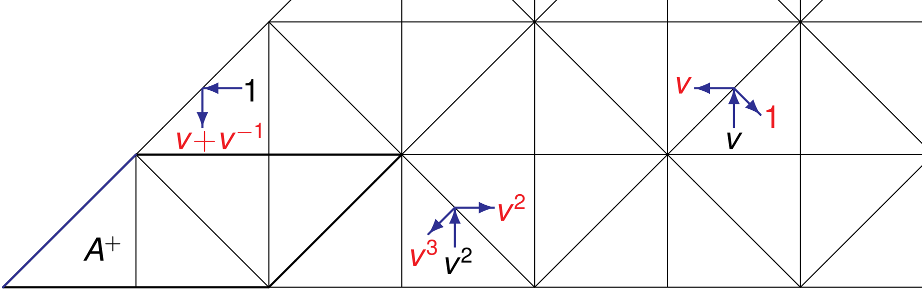
- Gegeben s eine Wand von A^+ erkläre $[s] : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ durch

$$[s] : A \mapsto As + vA \qquad \text{falls } As > A \text{ und } As \in \mathcal{A}^+;$$
$$[s] : A \mapsto As + v^{-1}A \qquad \text{falls } As < A \text{ und } As \in \mathcal{A}^+;$$



- Gegeben s eine Wand von A^+ erkläre $[s] : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ durch

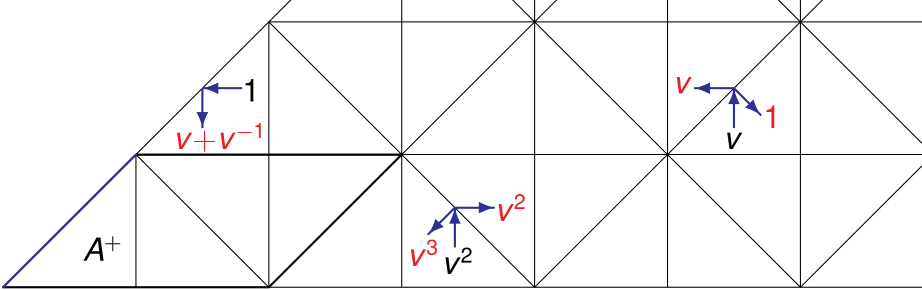
$$
\begin{array}{ll}
[s] : A \mapsto As + vA & \text{falls } As > A \text{ und } As \in \mathcal{A}^+; \\
[s] : A \mapsto As + v^{-1}A & \text{falls } As < A \text{ und } As \in \mathcal{A}^+; \\
[s] : A \mapsto (v + v^{-1})A & \text{falls } As \notin \mathcal{A}^+;
\end{array}
$$



- Gegeben s eine Wand von A^+ erkläre $[s] : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ durch

$$
\begin{aligned}
&[s] : A \mapsto As + vA && \text{falls } As > A \text{ und } As \in \mathcal{A}^+;\\
&[s] : A \mapsto As + v^{-1}A && \text{falls } As < A \text{ und } As \in \mathcal{A}^+;\\
&[s] : A \mapsto (v + v^{-1})A && \text{falls } As \notin \mathcal{A}^+;
\end{aligned}
$$

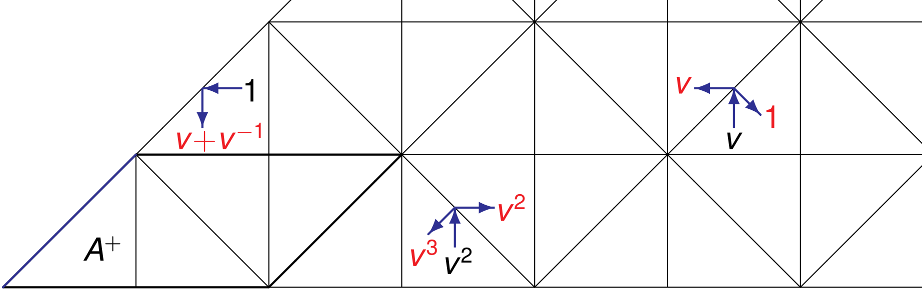
- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$



- Gegeben s eine Wand von A^+ erkläre $[s] : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ durch

$$
\begin{array}{ll}
[s] : A \mapsto As + vA & \text{falls } As > A \text{ und } As \in \mathcal{A}^+; \\
[s] : A \mapsto As + v^{-1}A & \text{falls } As < A \text{ und } As \in \mathcal{A}^+; \\
[s] : A \mapsto (v + v^{-1})A & \text{falls } As \notin \mathcal{A}^+;
\end{array}
$$

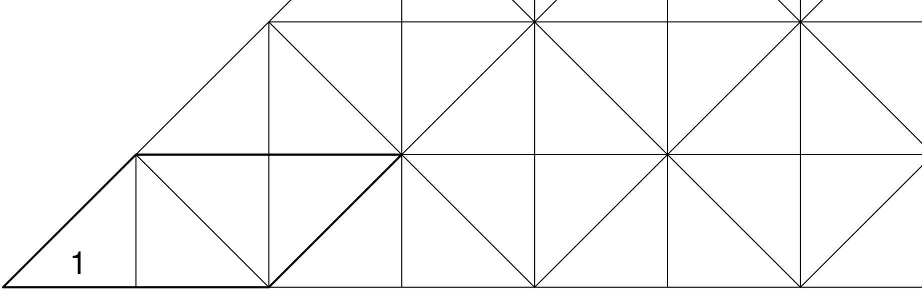
- Sei $\mathcal{M}^{sd} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{sd}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



- Gegeben s eine Wand von A^+ erkläre $[s] : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ durch

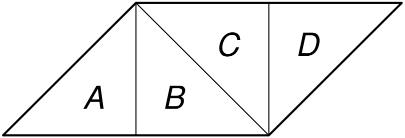
$$
\begin{array}{ll}
[s] : A \mapsto As + vA & \text{falls } As > A \text{ und } As \in \mathcal{A}^+; \\
[s] : A \mapsto As + v^{-1}A & \text{falls } As < A \text{ und } As \in \mathcal{A}^+; \\
[s] : A \mapsto (v + v^{-1})A & \text{falls } As \notin \mathcal{A}^+;
\end{array}
$$

- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$

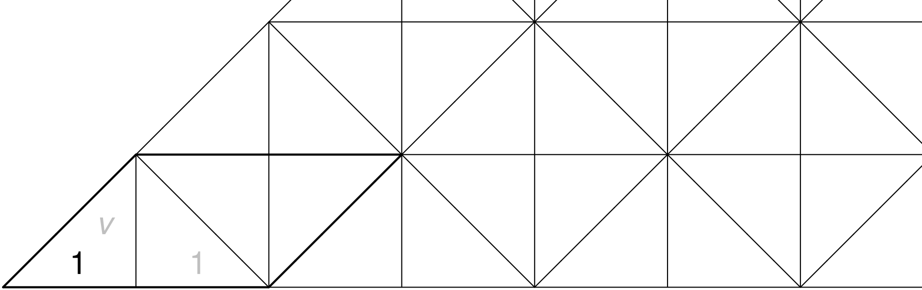


$\underline{M}_{A^+} = A^+$ alias $\underline{M}_A = A$

$[L_A] = [\nabla_A]$ die triviale Darstellung

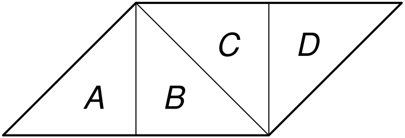


- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$

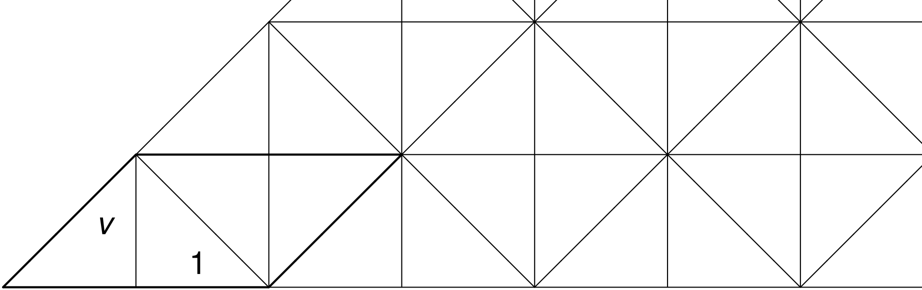


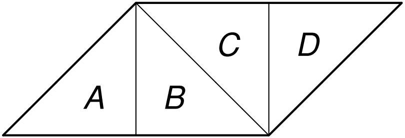
$\underline{M}_{A^+} = A^+$ alias $\underline{M}_A = A$

$[L_A] = [\nabla_A]$ die triviale Darstellung

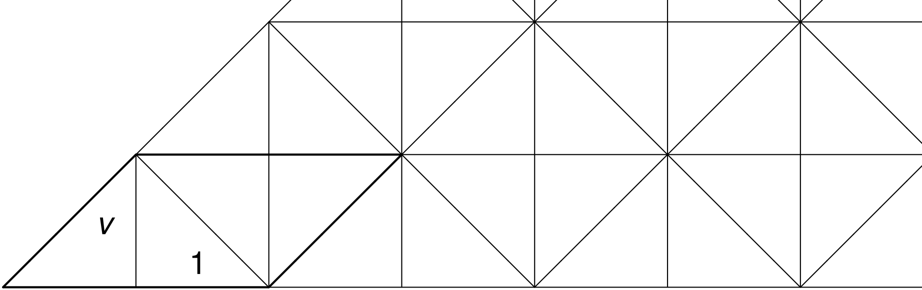


- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



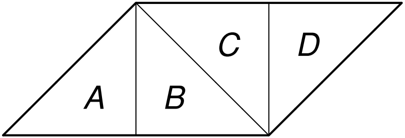


- Sei $\mathcal{M}^{\text{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\text{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$

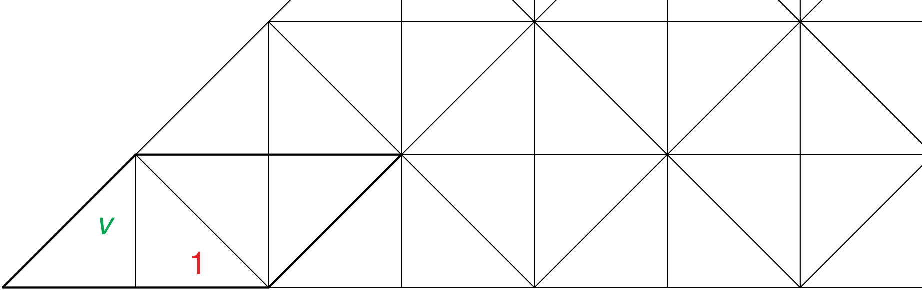


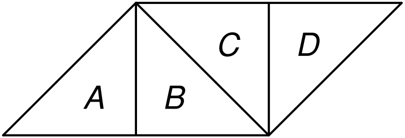
$\underline{M}_B = B + vA$

$[L_B] = [\nabla_B] - [\nabla_A]$

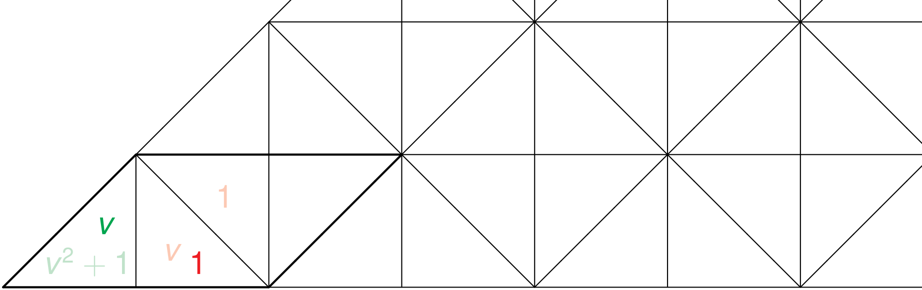


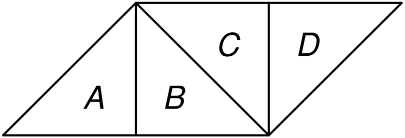
- Sei $\mathcal{M}^{\text{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\text{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



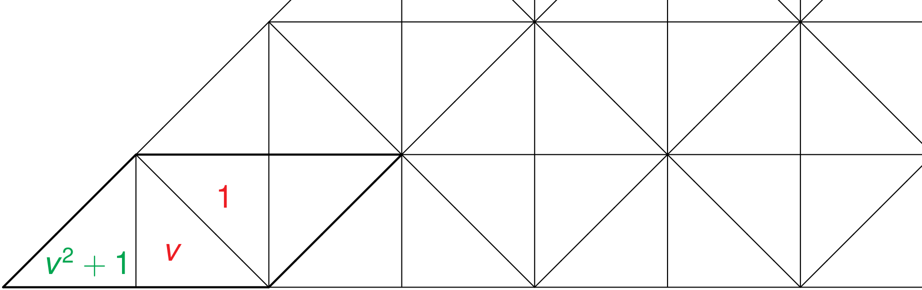


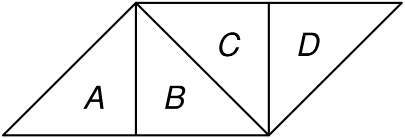
- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



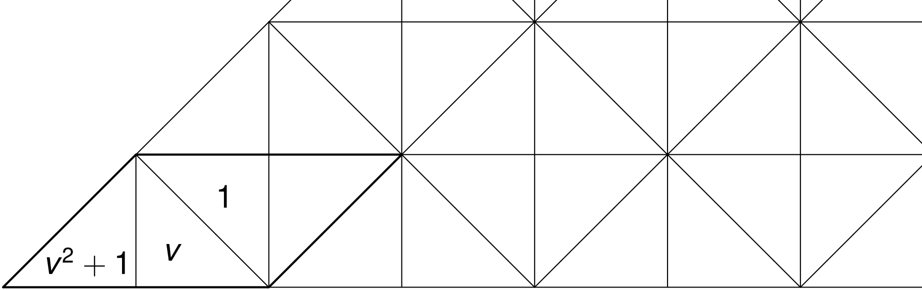


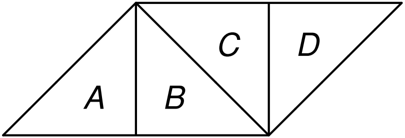
- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



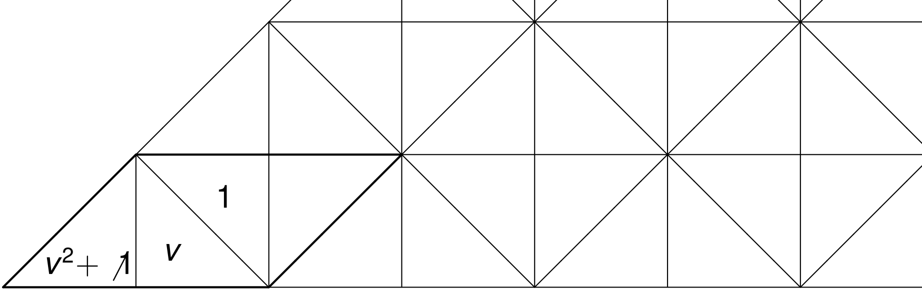


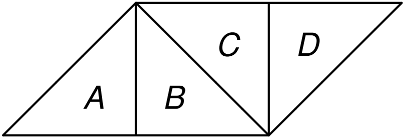
- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



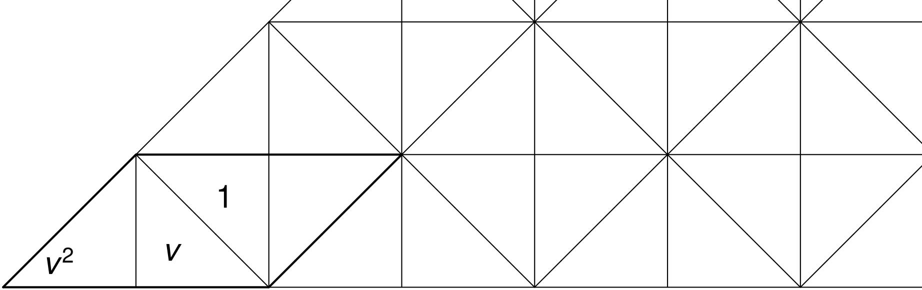


- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



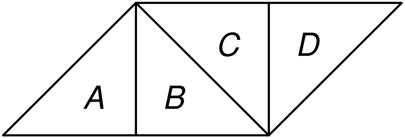


- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$

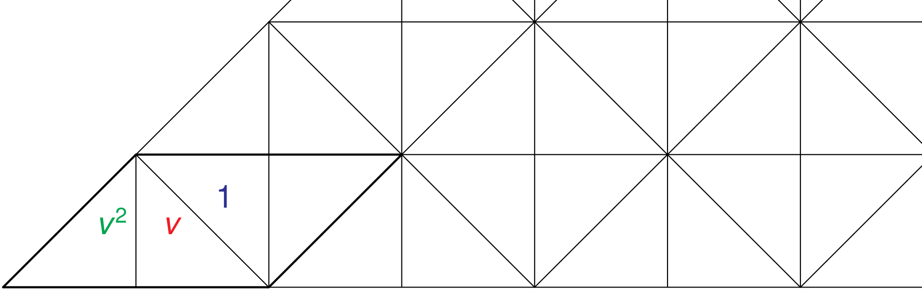


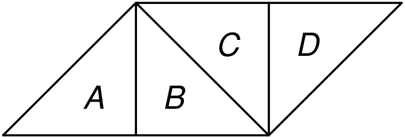
$$\underline{M}_C = C + vB + v^2 A$$

$$[L_C] = [\nabla_C] - [\nabla_B] + [\nabla_A]$$

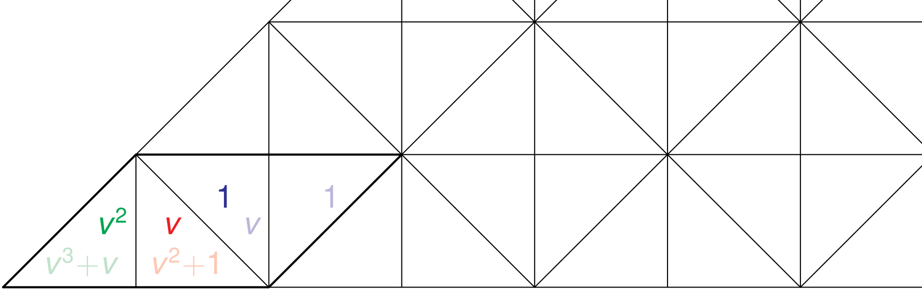


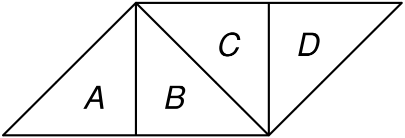
- Sei $\mathcal{M}^{\text{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\text{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



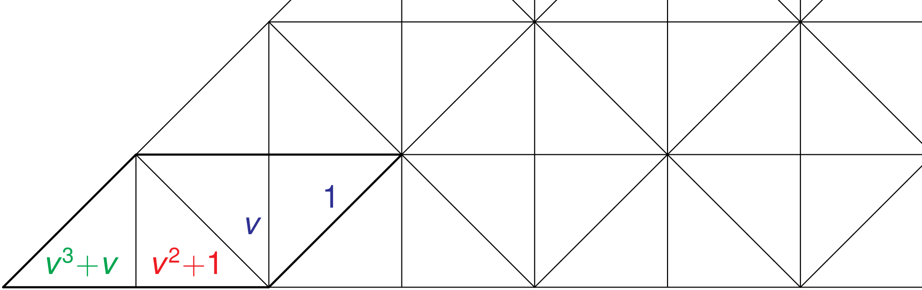


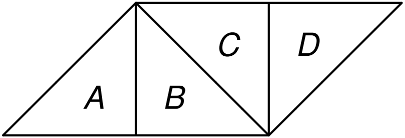
- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



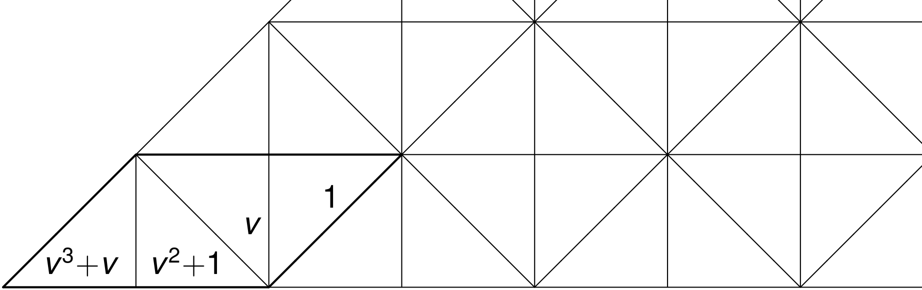


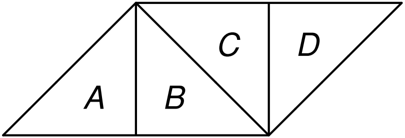
- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



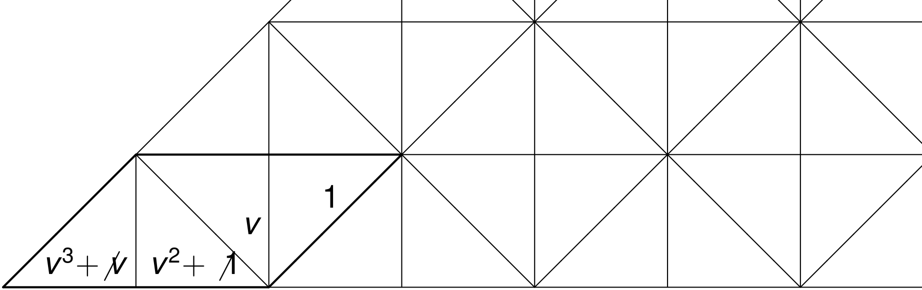


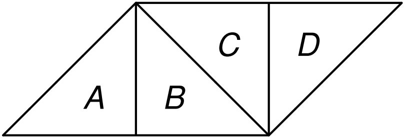
- Sei $\mathcal{M}^{\text{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\text{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



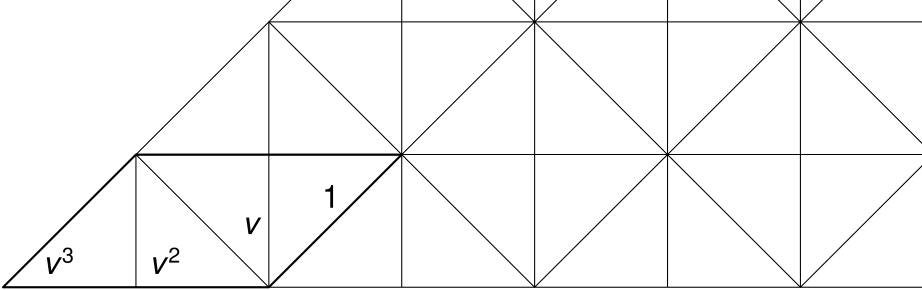


- Sei $\mathcal{M}^{\text{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\text{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



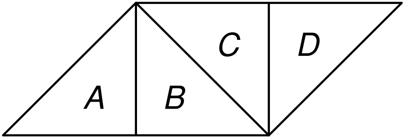


- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$

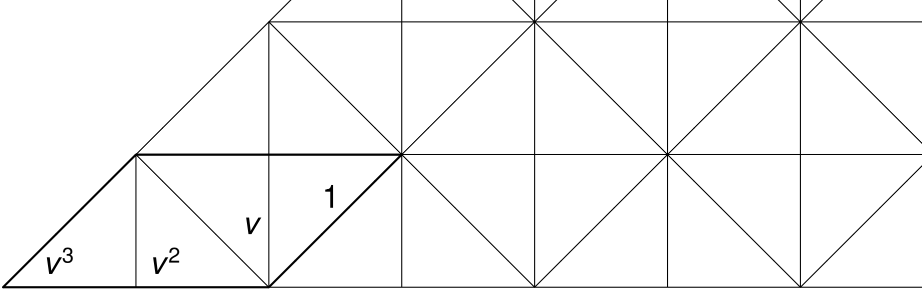


$$\underline{M}_D = D + vC + v^2 B + v^3 A$$

$$[L_D] = [\nabla_D] - [\nabla_C] + [\nabla_B] - [\nabla_A]$$

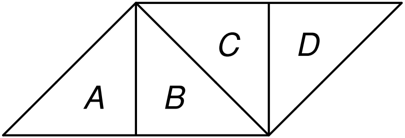


- Sei $\mathcal{M}^{\text{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\text{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



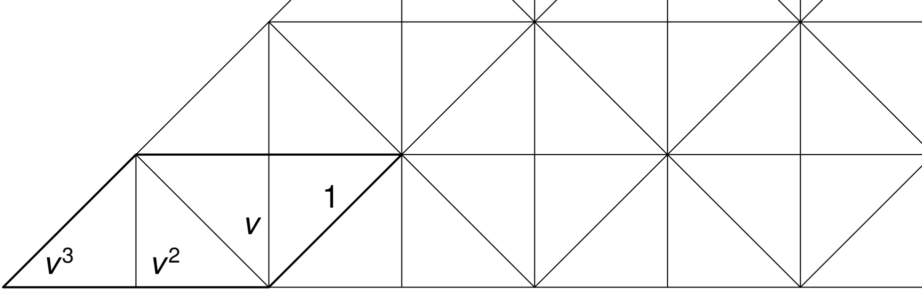
$\underline{M}_D = D + vC + v^2 B + v^3 A$

$[L_D] = [\nabla_D] - [\nabla_C] + [\nabla_B] - [\nabla_A]$



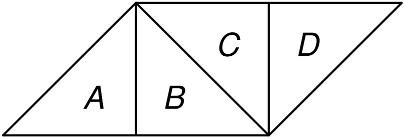
ENDE

- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$



$\underline{M}_D = D + vC + v^2 B + v^3 A$

$[L_D] = [\nabla_D] - [\nabla_C] + [\nabla_B] - [\nabla_A]$



ENDE

- Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{sd}} \subset \mathcal{M}$ die kleinste Untergruppe, die A^+ enthält und stabil ist unter allen $[s]$
- $\underline{M}_A \in (A + v\mathbb{Z}[v]\mathcal{A}^+) \cap \mathcal{M}^{\mathrm{sd}}$ eindeutig bestimmt für $A \in \mathcal{A}^+$