Analysis I

Wolfgang Soergel

17. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

A Grundlagen 7

I Allgemeine Grundlagen 9
1 Einstimmung 10
1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel 10
1.2 Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff 16
2 Naive Mengenlehre 22
2.1 Mengen 22
2.2 Abbildungen 31
2.3 Logische Symbole und Konventionen 36
3 Algebraische Grundbegriffe 39
3.1 Mengen mit Verknüpfung 39
3.2 Gruppen 43
3.3 Körper 47

II Geschichtliches und Philosophisches 51
1 Zum Ursprung des Wortes Mathematik 52
2 Was ist Mathematik? 52
3 Zum Wesen der Mathematik 53
4 Herkunft einiger Symbole 54

B Analysis 55

III Funktionen einer Veränderlichen 57
1 Die reellen Zahlen 61
1.1 Wurzeln rationaler Zahlen 61
1.2 Ordnungen auf Mengen 61
1.3 Angeordnete Körper 65
1.4 Die reellen Zahlen 68
2 Folgen und Reihen 75
2.1 Konvergenz von Folgen 75

2.2 Vollständigkeit der reellen Zahlen 83
2.3 Vergleich von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ 85
2.4 Die Kreiszahl π 89
2.5 Grenzwerte von Reihen 91
2.6 Wachstum und Zerfall 98
3 Stetigkeit 105
3.1 Definition und erste Beispiele 105
3.2 Umkehrfunktionen und Zwischenwertsatz 110
3.3 Grenzwerte von Funktionen 115
3.4 Stetige Funktionen auf Kompakta 120
3.5 Integration stetiger Funktionen 122
4 Differentiation und Integration 130
4.1 Differentiation 130
4.2 Ableitungsregeln 133
4.3 Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung 137
4.4 Regeln von de l'Hospital 146
4.5 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung 147
4.6 Integrationsregeln 150
4.7 Hyperbolische trigonometrische Funktionen 152
5 Potenzreihen und höhere Ableitungen 158
5.1 Funktionenfolgen und Potenzreihen 158
5.2 Taylorentwicklung 166
5.3 Rechnen mit Approximationen 168
5.4 Der Abel'sche Grenzwertsatz 171
6 Stetigkeit in mehreren Veränderlichen 173
6.1 Vorschläge zur Veranschaulichung 173
6.2 Stetigkeit bei metrischen Räumen 174
6.3 Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen 180
6.4 Offene und abgeschlossene Teilmengen 182
6.5 Kompakte metrische Räume 186
6.6 Affine Räume 188
6.7 Normierte Räume 190
6.8 Überdeckungen kompakter metrischer Räume 195
6.9 Integrale mit Parametern 198
7 Vektorwertige Funktionen einer Veränderlichen 201
7.1 Bogenlänge in metrischen Räumen 201
7.2 Grenzwerte für Abbildungen metrischer Räume 203
7.3 Ableiten von vektorwertigen Funktionen 204
7.4 Die Bogenlänge als Integral 209
7.5 Definition von Sinus und Cosinus 213
7.6 Vollständigkeit und Exponential von Matrizen 219

7.7 Eigenschaften von Sinus und Cosinus 224
8 Komplexe Zahlen mit Anwendungen 234
8.1 Der Körper der komplexen Zahlen 234
8.2 Die Exponentialfunktion im Komplexen 239
8.3 Der Fundamentalsatz der Algebra 242
8.4 Integration von vektorwertigen Funktionen 244
8.5 Integration gebrochen rationaler Funktionen 247
8.6 Komplexe Differenzierbarkeit 251
9 Lösung einiger Schwingungsgleichungen 257
9.1 Gedämpfte Schwingungen 257
9.2 Differentialgleichungen höheren Grades 261
9.3 Gekoppelte Schwingungen 263
9.4 Angeregte Schwingungen 264
10 Grundlegendes zu Fourierreihen 267
10.1 Eindeutigkeit der Fourierreihe 267
10.2 Der Satz von Stone-Weierstraß 268
10.3 Geometrie in euklidischen Vektorräumen 273
10.4 Konvergenz der Fourierreihe 276

Literaturverzeichnis **279**

Index **281**

Teil A

Grundlagen

Kapitel I

Allgemeine Grundlagen

Hier habe ich Notationen und Begriffsbildungen zusammengefaßt, von denen ich mir vorstelle, daß sie zu Beginn des Studiums in enger Abstimmung zwischen den beiden Grundvorlesungen erklärt werden könnten.

Contents

1 Einstimmung **10**

1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel . . 10

1.2 Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff 16

2 Naive Mengenlehre **22**

2.1 Mengen 22

2.2 Abbildungen 31

2.3 Logische Symbole und Konventionen 36

3 Algebraische Grundbegriffe **39**

3.1 Mengen mit Verknüpfung 39

3.2 Gruppen 43

3.3 Körper 47

1 Einstimmung

1.1 Vollständige Induktion und binomische Formel

Satz 1.1.1. *Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Beweis. Bei diesem Beweis sollen Sie gleichzeitig das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion** lernen. Wir bezeichnen mit $A(n)$ die Aussage, daß die Formel im Satz für ein gegebenes n gilt, und zeigen

Induktionsbasis: Die Aussage $A(1)$ ist richtig. In der Tat gilt die Formel $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$. In der Tat, unter der Annahme, daß unsere Formel für ein gegebenes n gilt, der sogenannten **Induktionsannahme** oder **Induktionsvoraussetzung**, rechnen wir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

und folgern so, daß die Formel auch für $n + 1$ gilt.

Es ist damit klar, daß unsere Aussage $A(n)$ richtig ist alias daß unsere Formel gilt für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$. □

Bemerkung 1.1.2. Dieser Beweis stützt sich auf unser intuitives Verständnis der natürlichen Zahlen. Man kann das Konzept der natürlichen Zahlen auch formal einführen und so die natürlichen Zahlen in gewisser Weise "besser" verstehen. Das mögen Sie in der Logik lernen.

Bemerkung 1.1.3. Es herrscht keine Einigkeit in der Frage, ob man die Null eine natürliche Zahl nennen soll. In diesem Text ist stets die Null mit gemeint, wenn von natürlichen Zahlen die Rede ist. Wollen wir die Null dennoch ausschließen, so sprechen wir wie oben von einer "natürlichen Zahl $n \geq 1$".

Bemerkung 1.1.4. Ich will kurz begründen, warum es mir natürlich scheint, auch die Null eine natürliche Zahl zu nennen: Hat bildlich gesprochen jedes Kind einer Klasse einen Korb mit Äpfeln vor sich und soll seine Äpfel zählen, so kann es ja durchaus vorkommen, daß in seinem Korb gar kein Apfel liegt, weil es zum Beispiel alle seine Äpfel bereits gegessen hat. In der Begrifflichkeit der Mengenlehre ausgedrückt, die wir in 2.1 einführen werden, muß man die leere Menge endlich nennen, damit jede Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist. Will man dann erreichen, daß die Kardinalität jeder endlichen Menge eine natürliche Zahl ist, so darf man die Null nicht aus den natürlichen Zahlen herauslassen.

Bemerkung 1.1.5. Man kann sich den Satz anschaulich klar machen als eine Formel für die Fläche eines Querschnitts für eine Treppe der Länge n mit Stufenabstand und Stufenhöhe eins. In der Tat bedeckt ein derartiger Querschnitt ja offensichtlich ein halbes Quadrat der Kantenlänge n nebst n halben Quadraten der Kantenlänge 1. Ein weiterer Beweis geht so:

$$\begin{array}{rcccccc} 1+2+\ldots+n & = & 1/2 & + & 2/2 & +\ldots & +n/2 \\ & & +n/2 & & +(n-1)/2 & +\ldots & +1/2 \\ & = & \frac{n+1}{2} & + & \frac{n+1}{2} & +\ldots & +\frac{n+1}{2} \\ & = & n(n+1)/2 & & & & \end{array}$$

Ich will diesen Beweis benutzen, um eine neue Notation einzuführen.

Definition 1.1.6. Gegeben $a_1, a_2, \ldots, a_n$ schreiben wir

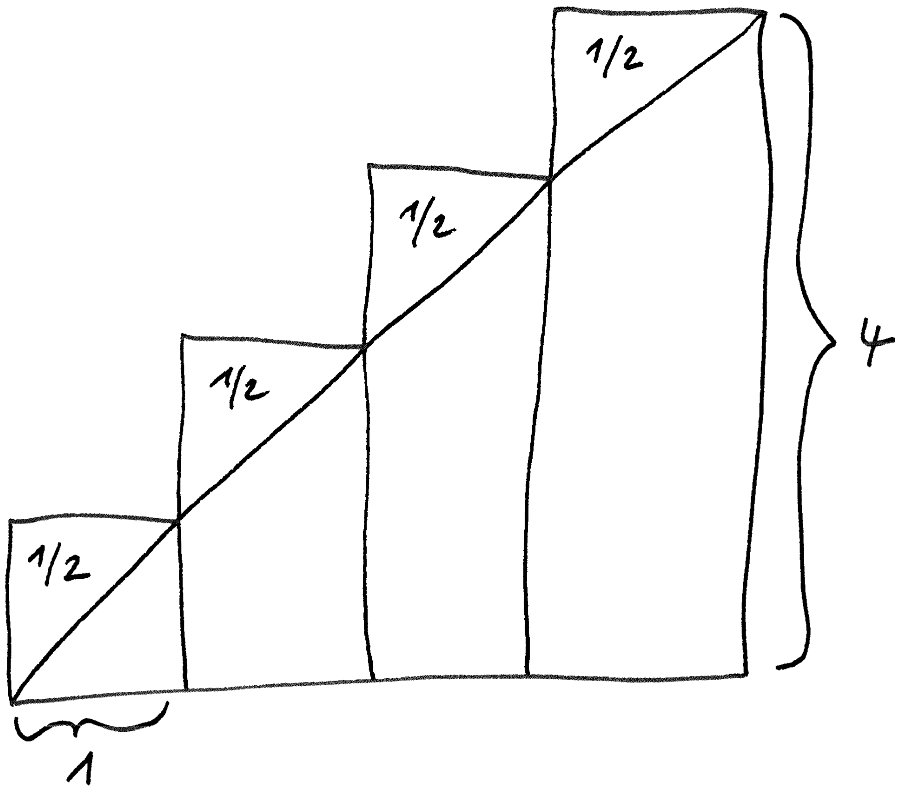
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Das Symbol $\sum$ ist ein großes griechisches S und steht für "Summe". In diesem und ähnlichen Zusammenhängen heißen $a_1, \ldots, a_n$ die **Summanden** und i heißt der **Laufindex**, weil er eben etwa in unserem Fall von 1 bis n läuft.

Bemerkung 1.1.7. Das Wort "Definition" kommt aus dem Lateinischen und bedeutet "Abgrenzung". In Definitionen versuchen wir, die Bedeutungen von Symbolen und Begriffen so klar wie möglich festzulegen.

Beispiel 1.1.8. In der $\sum$-Notation liest sich der in 1.1.5 gegebene Beweis so:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} i & = & \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} \\ & & \text{und nach Indexwechsel } i = n+1-k \text{ hinten} \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{2} \\ & & \text{dann mache } k \text{ zu } i \text{ in der zweiten Summe} \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+1-i}{2} \\ & & \text{und nach Zusammenfassen beider Summen} \\ & = & \sum_{i=1}^{n} \frac{n+1}{2} \\ & & \text{ergibt sich offensichtlich} \\ & = & n(\frac{n+1}{2}) \end{array}$$



1/2
1/2
1/2
1/2
4
1

Definition 1.1.9. In einer ähnlichen Bedeutung wie $\sum$ verwendet man auch das Symbol $\prod$, ein großes griechisches P, für "Produkt" und schreibt

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n$$

Die $a_1, \ldots, a_n$ heißen in diesem und ähnlichen Zusammenhängen die **Faktoren** des Produkts.

Definition 1.1.10. Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ definieren wir die Zahl $n!$ (sprich: n **Fakultät**) durch die Formel

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Wir treffen zusätzlich die Vereinbarung $0! = 1$ und haben also $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ und so weiter.

1.1.11. Wir werden in Zukunft noch öfter Produkte mit überhaupt keinem Faktor zu betrachten haben und vereinbaren deshalb gleich hier schon, daß Produkten, bei denen die obere Grenze des Laufindex um eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 1 zugewiesen werden soll. Ebenso vereinbaren wir auch, daß Summen, bei denen die obere Grenze des Laufindex um Eins kleiner ist als seine untere Grenze, der Wert 0 zugewiesen werden soll.

Satz 1.1.12 (Bedeutung der Fakultät). *Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n voneinander verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.*

Beispiel 1.1.13. Es gibt genau $3! = 6$ Möglichkeiten, die drei Buchstaben a, b und c in eine Reihenfolge zu bringen, nämlich

$$\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}$$

In gewisser Weise stimmt unser Satz sogar für $n = 0$: In der Terminologie, die wir in III.1.2 einführen werden, gibt es genau eine Anordnung der leeren Menge.

Beweis. Hat man n voneinander verschiedene Objekte, so hat man n Möglichkeiten, ein Erstes auszusuchen, dann $(n-1)$ Möglichkeiten, ein Zweites auszusuchen und so weiter, bis schließlich nur noch eine Möglichkeit bleibt, ein Letztes auszusuchen. Insgesamt haben wir also in der Tat wie behauptet $n!$ mögliche Reihenfolgen. □

Definition 1.1.14. Wir definieren für beliebiges n und jede natürliche Zahl k die **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (sprich: n **über** k) durch die Regeln

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j} = \frac{n(n-1)\ldots \quad (n-k+1)}{k(k-1)\ldots \qquad 1} \text{ für } k \geq 1 \text{ und } \binom{n}{0} = 1.$$

Der Sonderfall $k = 0$ wird im Übrigen auch durch unsere allgemeine Formel gedeckt, wenn wir unsere Konvention 1.1.11 beherzigen. Im Lichte des folgenden Satzes schlage ich vor, die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ statt "n über k" inhaltsreicher "k aus n" zu sprechen.

Satz 1.1.15 (Bedeutung der Binomialkoeffizienten). *Gegeben natürliche Zahlen n und k gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n voneinander verschiedenen Objekten k Objekte auszuwählen.*

Beispiel 1.1.16. Es gibt genau $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$ Möglichkeiten, aus den vier Buchstaben a, b, c, d zwei auszuwählen, nämlich

$$\begin{array}{lll} a, b & b, c & c, d \\ a, c & b, d & \\ a, d & & \end{array}$$

Beweis. Wir haben n Möglichkeiten, ein erstes Objekt auszuwählen, dann $n - 1$ Möglichkeiten, ein zweites Objekt auszuwählen, und so weiter, also insgesamt $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ Möglichkeiten, k Objekte *der Reihe nach* auszuwählen. Auf die Reihenfolge, in der wir ausgewählt haben, kommt es uns aber gar nicht an, jeweils genau $k!$ von unseren $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ Möglichkeiten führen also nach 1.1.12 zur Auswahl derselben k Objekte. Man bemerke, daß unser Satz auch im Extremfall $k = 0$ noch stimmt, wenn wir ihn geeignet interpretieren: In der Terminologie, die wir gleich einführen werden, besitzt in der Tat jede Menge genau eine nullelementige Teilmenge, nämlich die leere Menge. □

Bemerkung 1.1.17. Offensichtlich gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq k$ die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Das folgt einerseits sofort aus der formalen Definition und ist andererseits auch klar nach der oben erklärten Bedeutung der Binomialkoeffizienten: Wenn wir aus n Objekten k Objekte auswählen, so bleiben $n-k$ Objekte übrig. Es gibt demnach gleichviele Möglichkeiten, k Objekte auszuwählen, wie es Möglichkeiten gibt, $n-k$ Objekte auszuwählen. Wir haben weiter $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ sowie $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$.

Definition 1.1.18. Wie in der Schule setzen wir $a^k = \prod_{i=1}^{k} a$ und verstehen im Lichte von 1.1.11 also insbesondere $a^0 = 1$.

Satz 1.1.19. *Für jede natürliche Zahl n gilt die* **binomische Formel**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Erster Beweis. Beim Ausmultiplizieren erhalten wir so oft $a^k b^{n-k}$, wie es Möglichkeiten gibt, aus unseren n Faktoren die k Faktoren $(a+b)$ auszusuchen, "in denen wir beim Ausmultiplizieren das b nehmen". Dieses Argument werden wir in 2.1.17 noch besser formulieren. □

Zweiter Beweis. Dieser Beweis ist eine ausgezeichnete Übung im Umgang mit unseren Symbolen und mit der vollständigen Induktion. Er scheint mir jedoch auch in einer für Beweise durch vollständige Induktion typischen Weise undurchsichtig. Zunächst prüfen wir für beliebiges n und jede natürliche Zahl $k \geq 1$ die Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

durch explizites Nachrechnen. Dann geben wir unserer Formel im Satz den Namen $A(n)$ und prüfen die Formel $A(0)$ und zur Sicherheit auch noch $A(1)$ durch Hinsehen. Schließlich gilt es, den Induktionsschritt durchzuführen als da heißt $A(n+1)$ aus $A(n)$ zu folgern. Dazu rechnen wir

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)^{n+1} & = & (a+b)(a+b)^n \\
 & & \text{und mit der Induktionsvoraussetzung} \\
 & = & (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
 & & \text{und durch Ausmultiplizieren} \\
 & = & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
 & & \text{und Indexwechsel } k = i-1 \text{ in der ersten Summe} \\
 & = & \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
 & & \text{dann mit } k \text{ statt } i \text{ und Absondern von Summanden} \\
 & = & a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \\
 & & \quad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\, a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\
 & & \text{und nach Zusammenfassen der mittleren Summen} \\
 & = & a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} + a^0 b^{n+1} \\
 & & \text{und Einbeziehen der abgesonderten Summanden} \\
 & = & \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{array}$$

und folgern so tatsächlich $A(n+1)$ aus $A(n)$. □

Bemerkung 1.1.20. Die Formel $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $k \geq 1$ kann man zur effektiven Berechnung der Binomialkoeffizienten mit dem sogenannten **Pascal'schen Dreieck** benutzen: Im Schema

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

seien die Einsen an den Rändern vorgegeben und eine Zahl in der Mitte berechne sich als die Summe ihrer beiden oberen "Nachbarn". Dann stehen in der $(n+1)$-ten Zeile der Reihe nach die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \dots$ bis $\binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1$.

1.2 Fibonacci-Folge und Vektorraumbegriff

Beispiel 1.2.1. Die **Fibonacci-Folge**

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

ensteht, indem man mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ beginnt und dann jedes weitere Folgenglied als die Summe seiner beiden Vorgänger bildet. Wir suchen nun für die Glieder dieser Folge eine geschlossene Darstellung. Dazu vereinbaren wir, daß wir Folgen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mit der Eigenschaft $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$ **Folgen vom Fibonacci-Typ**. nennen wollen. Kennen wir die beiden ersten Glieder einer Folge vom Fibonacci-Typ, so liegt natürlich bereits die gesamte Folge fest. Nun bemerken wir, daß für jede Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ vom Fibonacci-Typ und jedes α auch die Folge $\alpha x_0, \alpha x_1, \alpha x_2, \ldots$ vom Fibonacci-Typ ist, und daß für jede weitere Folge $y_0, y_1, y_2, \ldots$ vom Fibonacci-Typ auch die gliedweise Summe $(x_0 + y_0), (x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \ldots$ eine Folge vom Fibonacci-Typ ist. Der Trick ist dann, danach zu fragen, für welche β die Folge $x_i = \beta^i$ vom Fibonacci-Typ ist. Das ist ja offensichtlich genau dann der Fall, wenn gilt $1 + \beta = \beta^2$, als da heißt für $\beta_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Für beliebige c, d ist mithin die Folge

$$x_i = c\beta_+^i + d\beta_-^i$$

vom Fibonacci-Typ, und wenn wir c und d bestimmen mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$, so ergibt sich eine explizite Darstellung unserer Fibonacci-Folge. Wir suchen also c und d mit

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c + d \\ 1 & = & c\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) + d\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right) \end{array}$$

und folgern leicht $c = -d$ und $1 = c\sqrt{5}$ alias $c = 1/\sqrt{5} = -d$. Damit ergibt sich schließlich für unsere ursprüngliche Fibonacci-Folge die explizite Darstellung

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i$$

Übung 1.2.2. Kann man für jede Folge $x_0, x_1, \ldots$ vom Fibonacci-Typ Zahlen c, d finden mit $x_i = c\beta_+^i + d\beta_-^i$ für alle i? Finden Sie eine geschlossene Darstellung für die Glieder der Folge, die mit $0, 0, 1$ beginnt und dem Bildungsgesetz $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3}$ gehorcht.

Beispiel 1.2.3. Wir betrachten ein lineares Gleichungssytem der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + & \ldots & +\alpha_{1m}x_m & = & 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + & \ldots & +\alpha_{2m}x_m & = & 0 \\ & \vdots & & & \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + & \ldots & +\alpha_{nm}x_m & = & 0 \end{array}$$

Wie man zu vorgegebenen $\alpha_{i,j}$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ die Menge L aller Lösungen $(x_1, \ldots, x_m)$ ermittelt, sollen sie später in dieser Vorlesung lernen. Zwei Dinge aber sind a priori klar:

1. Sind $(x_1, \ldots, x_m)$ und $(x'_1, \ldots, x'_m)$ Lösungen, so ist auch ihre komponentenweise Summe $(x_1 + x'_1, \ldots, x_m + x'_m)$ eine Lösung;

2. Ist $(x_1, \ldots, x_m)$ eine Lösung und α eine reelle Zahl, so ist auch das komponentenweise Produkt $(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_m)$ eine Lösung.

Beispiel 1.2.4. Wir betrachten die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die zweimal differenzierbar sind und der Differentialgleichung

$$f'' = -f$$

genügen. Lösungen sind zum Beispiel die Funktionen $\sin, \cos$, die Nullfunktion oder auch die Funktionen $f(x) = \sin(x + a)$ für konstantes a. Wie man die Menge L aller Lösungen beschreiben kann, sollen Sie nicht hier lernen. Zwei Dinge aber sind a priori klar:

1. Mit f und g ist auch die Funktion $f + g$ eine Lösung;

2. Ist f eine Lösung und α eine reelle Zahl, so ist auch αf eine Lösung.

Beispiel 1.2.5. Wir betrachten die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Tafelebene. Graphisch stellen wir solch eine Parallelverschiebung dar durch einen Pfeil von irgendeinem Punkt zu seinem Bild unter der Verschiebung. Im folgenden Bild stellen also alle Pfeile dieselbe Parallelverschiebung dar:

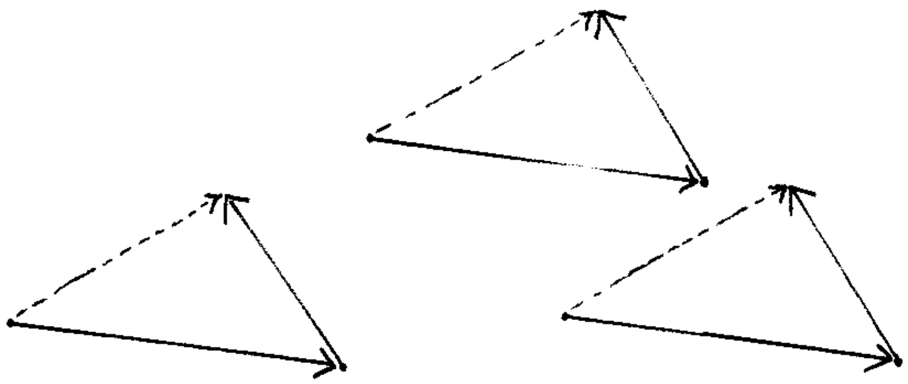
$$\nearrow \quad \nearrow \qquad \nearrow$$
$$\nearrow$$

Was für ein Ding diese Gesamtheit P aller Parallelverschiebungen eigentlich ist, scheint mir recht undurchsichtig, aber einige Dinge sind a priori klar:

1. Sind p und q Parallelverschiebungen, so ist auch ihre "Hintereinanderausführung" $p \circ q$, sprich "p nach q" eine Parallelverschiebung.

2. Ist α eine reelle Zahl und p eine Parallelverschiebung, so können wir eine neue Parallelverschiebung αp bilden, das "α-fache von p". Bei negativen Vielfachen vereinbaren wir hierzu, daß eine entsprechende Verschiebung in die Gegenrichtung gemeint ist.

3. Führen wir eine neue Notation ein und schreiben für die Hintereinanderausführung $p \circ q = p \dotplus q$, so gelten für beliebige Parallelverschiebungen



Die Hintereinanderausführung der beiden Parallelverschiebungen der Tafel- oder hier vielmehr der Papierebene, die durch die durchgezogenen Pfeile dargestellt werden, wird die durch die gestrichelten Feile dargestellt.

p, q, r der Tafelebene und beliebige reelle Zahlen α, β die Formeln

$$\begin{array}{rcl} (p \dotplus q) \dotplus r &=& p \dotplus (q \dotplus r) \\ p \dotplus q &=& q \dotplus p \\ \alpha(\beta p) &=& (\alpha\beta)p \\ (\alpha + \beta)p &=& (\alpha p) \dotplus (\beta p) \\ \alpha(p \dotplus q) &=& (\alpha p) \dotplus (\alpha q) \end{array}$$

Will man sich die Gesamtheit aller Parallelverschiebungen der Tafelebene anschaulich machen, so tut man im Übrigen gut daran, einen Punkt als "Ursprung" auszuzeichnen und jede Parallelverschiebung mit dem Punkt der Tafelebene zu identifizieren, auf den unsere Parallelverschiebung diesen Ursprung abbildet.

Beispiel 1.2.6. Analoges gilt für die Gesamtheit der Parallelverschiebung des Raums und auch für die Gesamtheit aller Verschiebungen einer Geraden und, mit noch mehr Mut, für die Gesamtheit aller Zeitspannen.

Bemerkung 1.2.7. Die Formeln unserer kleinen Formelsammlung von eben gelten ganz genauso auch für die Lösungsmenge unserer Differentialgleichung $f'' = -f$, wenn wir $f \dotplus g = f + g$ verstehen, für die Lösungsmenge unseres linearen Gleichungssystems, wenn wir

$$(x_1, \ldots, x_m) \dotplus (x_1', \ldots, x_m') = (x_1 + x_1', \ldots, x_m + x_m')$$

verstehen, und für die Menge aller Folgen vom Fibonacci-Typ, wenn wir ähnlich die Summe $\dotplus$ zweier Folgen erklären. Das erste Ziel der folgenden Vorlesungen über lineare Algebra ist es, einen abstrakten Formalismus aufzubauen, dem sich alle diese Beispiele unterordnen. Wir verfolgen damit zwei Ziele gleichzeitig:

1. Unser abstrakter Formalismus soll uns dazu verhelfen, die uns als Augentieren und Nachkommen von Ästehüpfern angeborene räumliche Anschauung nutzbar zu machen zum Verständnis der bis jetzt gegebenen Beispiele und der vielen weiteren Beispiele von Vektorräumen, denen Sie im Verlauf Ihres Studiums noch begegnen werden. So werden sie etwa lernen, daß man sich die Menge aller Folgen vom Fibonacci-Typ durchaus als Ebene vorstellen darf und die Menge aller Folgen mit vorgegebenem Folgenglied an einer vorgegebenen Stelle als eine Gerade in dieser Ebene. Suchen wir also alle Folgen vom Fibonacci-Typ mit zwei vorgegebenen Folgengliedern, so werden wir im allgemeinen genau eine derartige Lösung finden, da sich eben zwei Geraden in der Ebene im allgemeinen in genau einem Punkt schneiden. In diesem Licht betrachtet soll der abstrakte Formalismus uns also helfen, formale Fragestellungen der Anschauung zugänglich zu machen. Ich denke, diese Nähe zur

Anschauung ist auch der Grund dafür, daß die lineare Algebra meist an den Anfang des Studiums gestellt wird: Von der Schwierigkeit des Formalismus her gesehen gehört sie nämlich keineswegs zu den einfachsten Gebieten der Mathematik, hier würde ich eher an Gruppentheorie oder Graphentheorie oder dergleichen denken.

2. Unser abstrakter Formalismus soll so unmißverständlich sein und seine Spielregeln so klar, daß Sie in die Lage versetzt werden, alles nachzuvollziehen und mir im Prinzip und vermutlich auch in der Realität Fehler nachzuweisen. Schwammige Begriffe wie "Tafelebene" oder "Parallelverschiebung des Raums" haben in einem solchen Formalismus keinen Platz mehr. In diesem Licht betrachtet verfolgen wir mit dem Aufbau des abstrakten Formalismus auch das Ziel einer großen Vereinfachung durch Reduktion auf die Beschreibung einiger weniger Aspekte der uns umgebenden in ihrer Komplexität kaum präzise faßbaren Wirklichkeit.

Als Motivation für den weiteren Fortgang der Vorlesungen über lineare Algebra formuliere ich nun ohne Rücksicht auf noch unbekannte Begriffe und Notationen die abstrakte Definition eines reellen Vektorraums.

Definition 1.2.8. Ein **reeller Vektorraum** ist ein Tripel bestehend aus den folgenden drei Dingen:

1. Einer Menge V;
2. Einer Verknüpfung $V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v \dot{+} w$, die V zu einer abelschen Gruppe macht;
3. Einer Abbildung $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$,

derart, daß für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} \alpha(\beta v) & = & (\alpha\beta)v \\ (\alpha+\beta)v & = & (\alpha v) \dot{+} (\beta v) \\ \alpha(v \dot{+} w) & = & (\alpha v) \dot{+} (\alpha w) \\ 1v & = & v \end{array}$$

Bemerkung 1.2.9. Hier ist nun viel zu klären: Was ist eine Menge? Eine Verknüpfung? Eine abelsche Gruppe? Eine Abbildung? Was bedeuten die Symbole $\times, \to, \mapsto, \in, \mathbb{R}$? Wir beginnen in der nächsten Vorlesung mit der Klärung dieser Begriffe und Notationen.

2 Naive Mengenlehre

2.1 Mengen

Bemerkung 2.1.1. Beim Arbeiten mit reellen Zahlen oder räumlichen Gebilden reicht auf der Schule ein intuitives Verständnis meist aus, und wenn die Intuition in die Irre führt, ist ein Lehrer zur Stelle. Wenn Sie jedoch selbst unterrichten oder etwas beweisen wollen, reicht dieses intuitive Verständnis nicht mehr aus. *In dieser Darstellung wird deshalb zunächst der Begriff der reellen Zahlen und auch der Begriff des Raums zurückgeführt auf Grundbegriffe der Mengenlehre, den Begriff der rationalen Zahlen und elementare Logik.* Bei der Arbeit mit diesen Begriffen führt uns die Intuition nicht so leicht in die Irre, wir geben uns deshalb mit einem intuitiven Verständnis zufrieden und verweisen jeden, der es noch genauer wissen will, auf eine Vorlesung über Logik. Wir beginnen mit etwas intuitiver Mengenlehre.

Bemerkung 2.1.2. Nach dem Begründer der Mengenlehre Georg Cantor ist eine **Menge** eine

> Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m, m', m'', $\ldots$ unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.

Diese Objekte nennen wir die **Elemente** der Menge. Verbinden wir mit einer Menge eine geometrische Vorstellung, so nennen wir ihre Elemente auch **Punkte** und die Menge selbst einen **Raum**. Ein derartiges Herumgerede ist natürlich keine formale Definition, aber das Ziel dieser Vorlesung ist auch nicht die formale Begründung der Mengenlehre, die Sie später in der Logik kennenlernen können. Sie sollen vielmehr die Bedeutung dieser Worte intuitiv erfassen wie ein Kleinkind, das Sprechen lernt: Indem sie mir und anderen Mathematikern zuhören, wie wir mit diesen Worten sinnvolle Sätze bilden, uns nachahmen, und beobachten, welchen Effekt Sie damit hervorrufen. Unter anderem dazu sind die Übungsgruppen da.

Beispiele 2.1.3. Endliche Mengen gibt man oft durch eine vollständige Liste ihrer Elemente in geschweiften Klammern an, zum Beispiel in der Form $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Die Elemente dürfen mehrfach genannt werden und es kommt nicht auf die Reihenfolge an, in der sie genannt werden. So haben wir also $\{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$. Die Aussage "x ist Element von X" wird mit $x \in X$ abgekürzt, ihre Verneinung "x ist nicht Element von X" mit $x \notin X$. Es gibt auch die sogenannte **leere Menge** $\emptyset = \{\ \}$, die gar kein Element enthält. Andere Beispiele sind die Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, die Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ und die Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Deren Name kommt von lateinisch “ratio” für “Verhältnis”. Man beachte, daß wir auch hier Elemente mehrfach genannt haben, es gilt ja $p/q = p'/q'$ genau dann, wenn $pq' = p'q$. Auf deutsch bezeichnet man die rationalen Zahlen manchmal auch als **Bruchzahlen**.

Bemerkung 2.1.4. In Texten, in deren Konventionen die Null keine natürliche Zahl ist, verwendet man meist die abweichenden Notationen $\mathbb{N}$ für die Menge $\{1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_0$ für die Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Die in diesem Text verwendete Notation $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ stimmt mit der internationalen Norm ISO 31-11 überein.

Definition 2.1.5. Eine Menge Y heißt **Teilmenge** einer Menge X genau dann, wenn jedes Element von Y auch ein Element von X ist. Man schreibt dafür $Y \subset X$ oder $X \supset Y$. Zum Beispiel gilt stets $\emptyset \subset X$ und $\{x\} \subset X$ ist gleichbedeutend zu $x \in X$. Zwei Teilmengen einer gegebenen Menge, die kein gemeinsames Element haben, heißen **disjunkt**.

Bemerkung 2.1.6. Diese Notation weicht ab von der internationalen Norm ISO 31-11, die statt unserem $\subset$ das Symbol $\subseteq$ vorschlägt. In den Konventionen von ISO 31-11 hat das Symbol $\subset$ abweichend die Bedeutung einer **echten**, d.h. von der ganzen Menge verschiedenen Teilmenge, für die wir die Bezeichnung $\subsetneq$ verwenden werden. Meine Motivation für diese Abweichung ist, daß das Symbol für beliebige Teilmengen sehr häufig und das für echte Teilmengen nur sehr selten vorkommt.

Definition 2.1.7. Wir vereinbaren, daß wir auch die leere Menge endlich nennen wollen, damit jede Teilmenge einer endlichen Menge auch wieder endlich ist. Die Zahl der Elemente einer endlichen Menge X nennen wir ihre **Kardinalität** oder **Mächtigkeit** und notieren sie $|X|$ oder $\mathrm{card}(X)$. Ist X unendlich, so schreiben wir kurz $|X| = \infty$ und ignorieren in unserer Notation, daß auch unendliche Mengen “verschieden groß” sein können, für ein Beispiel siehe III.2.3.5. Für endliche Mengen X ist demnach ihre Kardinalität stets eine natürliche Zahl $|X| \in \mathbb{N}$ und $|X| = 0$ ist gleichbedeutend zu $X = \emptyset$.

Definition 2.1.8. Oft bildet man neue Mengen als Teilmengen bestehender Mengen und schreibt $Y = \{x \in X \mid x \text{ hat eine gewisse Eigenschaft}\}$. Zum Beispiel gilt $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$ oder $\{0, 1\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a^2 = a\}$. Eine Variante dieser Notation soll hier nur mit zwei Beispielen erklärt werden: $\{2a \mid a \in \mathbb{N}\}$ bezeichnet die Menge aller geraden natürlichen Zahlen, $\{ab \mid a, b \in \mathbb{N}, a \geq 2, b \geq 2\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die nicht prim und auch nicht Null oder Eins sind.

Definition 2.1.9. Es ist auch erlaubt, die "Menge aller Teilmengen" einer gegebenen Menge X zu bilden. Sie heißt die **Potenzmenge** von X und wird mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.1.10. Ist X eine endliche Menge, so ist auch ihre Potenzmenge endlich und es gilt $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. Für $X = \{1, 2\}$ besteht zum Beispiel $\mathcal{P}(X)$ aus vier Elementen und genauer gilt $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Definition 2.1.11. Gegeben zwei Mengen X, Y können wir auf verschiedene Arten neue Mengen bilden:

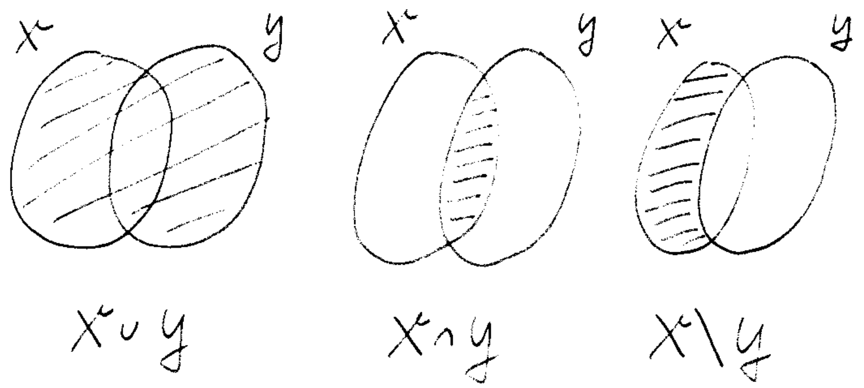
1. Die **Vereinigung** $X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$, zum Beispiel ist $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

2. Den **Schnitt** $X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ und } z \in Y\}$, zum Beispiel ist $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$. Zwei Mengen sind also disjunkt genau dann, wenn ihr Schnitt die leere Menge ist.

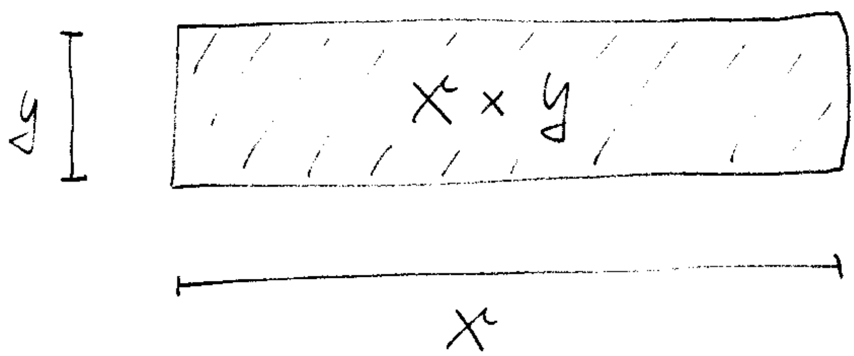
3. Die **Differenz** $X\backslash Y = \{z \in X \mid z \notin Y\}$, zum Beispiel haben wir $\{1, 2\}\backslash\{2, 3\} = \{1\}$. Man schreibt statt $X\backslash Y$ auch $X - Y$. Ist Y eine Teilmenge von X, so heißt $X\backslash Y$ das **Komplement** von Y in X.

4. Das **kartesische Produkt** $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$, als da heißt die Menge aller geordneten Paare. Es gilt also $(x, y) = (x', y')$ genau dann, wenn gilt $x = x'$ und $y = y'$. Zum Beispiel haben wir $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$. Oft benutzt man für das kartesische Produkt $X \times X$ einer Menge X mit sich selbst die Abkürzung $X \times X = X^2$.

Bemerkung 2.1.12. Wir werden in unserer intuitiven Mengenlehre die ersten drei Operationen nur auf Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge anwenden, die uns in der einen oder anderen Weise bereits zur Verfügung steht. Die Potenzmenge und das kartesische Produkt dahingegen benutzen wir, um darüber hinaus neue Mengen zu erschaffen. Diese Konstruktionen erlauben es, im Rahmen der Mengenlehre so etwas wie Abstraktionen zu bilden: Wenn wir uns zum Beispiel die Menge T aller an mindestens einem Tag der Weltgeschichte lebenden oder gelebt habenden Tiere als eine Menge im Cantor'schen Sinne denken, so würden wir Konzepte wie "männlich" oder "Hund" oder "Fleischfresser" formal als Teilmengen dieser Menge definieren, d.h. als Elemente von $\mathcal{P}(T)$, und das Konzept "ist Kind von" als eine Teilmenge des kartesischen Produkts dieser Menge T mit sich selbst, also als ein Element von $\mathcal{P}(T \times T)$.



Eine gute Anschauung für die ersten drei Operationen liefern die sogenannten **van-de-Ven-Diagramme** wie sie die obenstehenden Bilder zeigen. Sie sind allerdings nicht zu genau zu hinterfragen, denn ob die Punkte auf einem Blatt Papier im Sinne von Cantor “bestimmte wohlunterschiedene Objekte unserer Anschauung” sind, scheint mir sehr fraglich. Wenn man jedoch jedes der schraffierten Gebiete im Bild auffasst als die Menge aller darin liegenden Kreuzungspunkte auf einem dazugedachten Millimeterpapier und keine dieser Kreuzungspunkte auf den Begrenzungslinien liegen, so können sie wohl schon als eine Menge im Cantor’schen Sinne angesehen werden.



Dies Bild muß anders interpretiert werden als die Vorherigen. Die Mengen X und Y sind nun zu verstehen als die Mengen der Punkte der vertikalen und horizontalen Geradensegmente und ein Punkt des Quadrats meint das Element $(x, y) \in X \times Y$, das in derselben Höhe wie $y \in Y$ senkrecht über $x \in X$ liegt.

Bemerkung 2.1.13. Für das Rechnen mit Mengen überlegt man sich die folgenden Regeln:

$$\begin{array}{rcl} X \cap (Y \cap Z) & = & (X \cap Y) \cap Z \\ X \cup (Y \cup Z) & = & (X \cup Y) \cup Z \\[1ex] X \cup (Y \cap Z) & = & (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \\ X \cap (Y \cup Z) & = & (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\[1ex] X \backslash (Y \cup Z) & = & (X \backslash Y) \cap (X \backslash Z) \\ X \backslash (Y \cap Z) & = & (X \backslash Y) \cup (X \backslash Z) \\[1ex] X \backslash (X \backslash Y) & = & X \cap Y \end{array}$$

Eine gute Anschauung für diese Regeln liefern die van-de-Ven-Diagramme, wie sie die nebenstehenden Bilder zeigen.

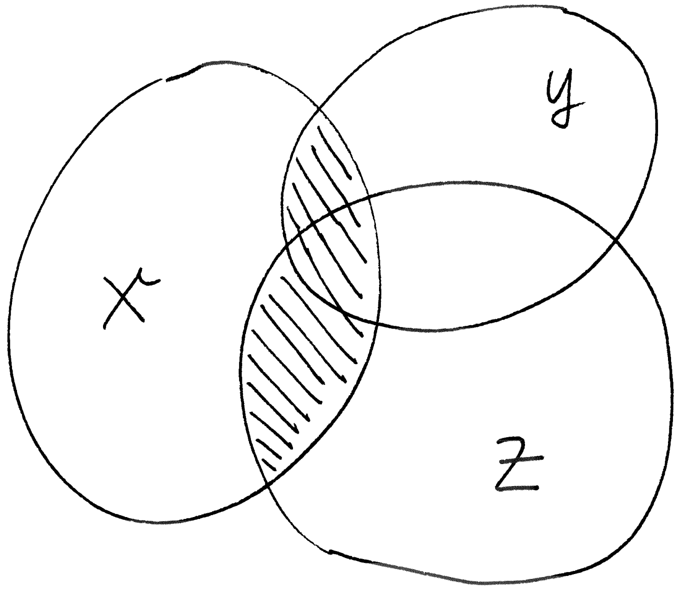
Übung 2.1.14. Sind X und Y endliche Mengen, so gilt für die Kardinalitäten $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ und $|X \cup Y| = |X \backslash Y| + |X \cap Y| + |Y \backslash X|$.

Satz 2.1.15 (Bedeutung der Binomialkoeffizienten). *Gegeben $n, k \in \mathbb{N}$ gibt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an, in Formeln*

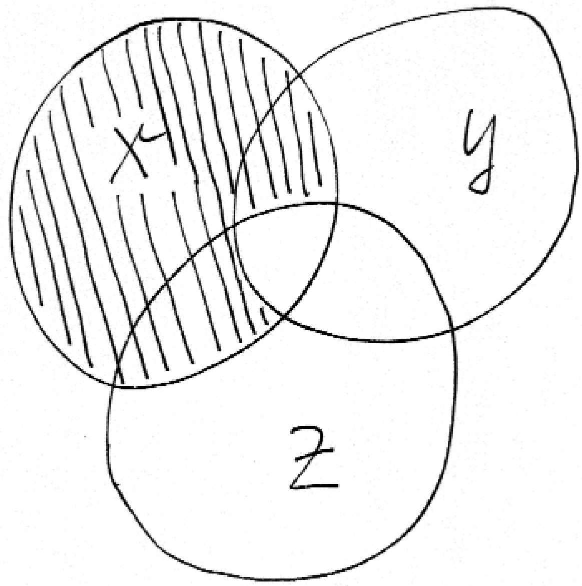
$$|X| = n \quad \textit{impliziert} \quad |\{Y \subset X \mid |Y| = k\}| = \binom{n}{k}$$

Beweis. Vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ gilt die Aussage, denn eine nullelementige Menge hat genau eine k-elementige Teilmenge falls $k = 0$ und keine k-elementige Teilmenge falls $k \geq 1$. Nehmen wir nun an, die Aussage sei für ein n schon bewiesen. Eine $(n + 1)$-elementige Menge X schreiben wir als $X = M \cup \{x\}$, wo M eine n-elementige Menge ist und $x \notin M$. Ist $k = 0$, so gibt es genau eine k-elementige Teilmenge von $M \cup \{x\}$, nämlich die leere Menge. Ist $k \geq 1$, so gibt es in $M \cup \{x\}$ nach Induktionsannahme genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen, die x nicht enthalten. Die k-elementigen Teilmengen dahingegen, die x enthalten, ergeben sich durch Hinzunehmen von x aus den $(k - 1)$-elementigen Teilmengen von M, von denen es gerade $\binom{n}{k-1}$ gibt. Insgesamt hat $M \cup \{x\}$ damit also genau $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ k-elementige Teilmengen. □

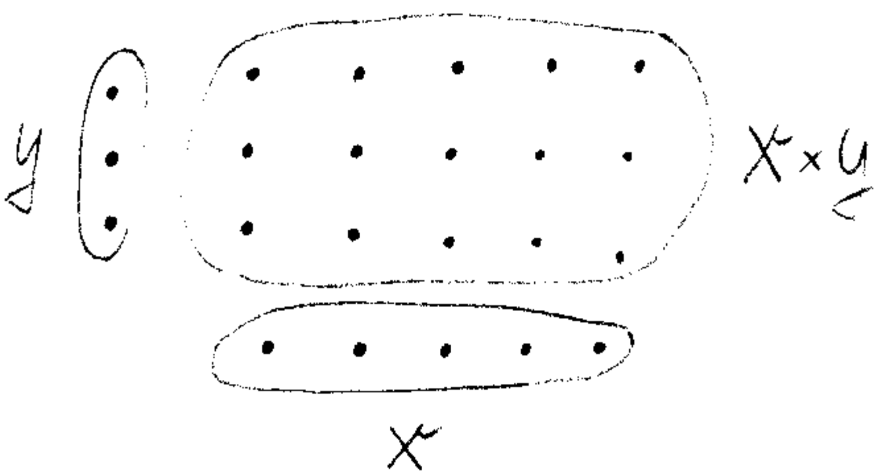
Bemerkung 2.1.16. Wieder scheint mir dieser Beweis in der für vollständige Induktion typischen Weise undurchsichtig. Ich ziehe deshalb den in 1.1.15 gegebenen weniger formellen Beweis vor. Man kann auch diesen Beweis formalisieren und verstehen als Spezialfall der sogenannten "Bahnformel" **??**, vergleiche **??**.



$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$



$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$



Anschauliche Darstellung des Produkts einer Menge mit fünf und einer Menge mit drei Elementen

Bemerkung 2.1.17. Wir geben nun die versprochene präzise Formulierung unseres ersten Beweises der binomischen Formel. Wir rechnen dazu

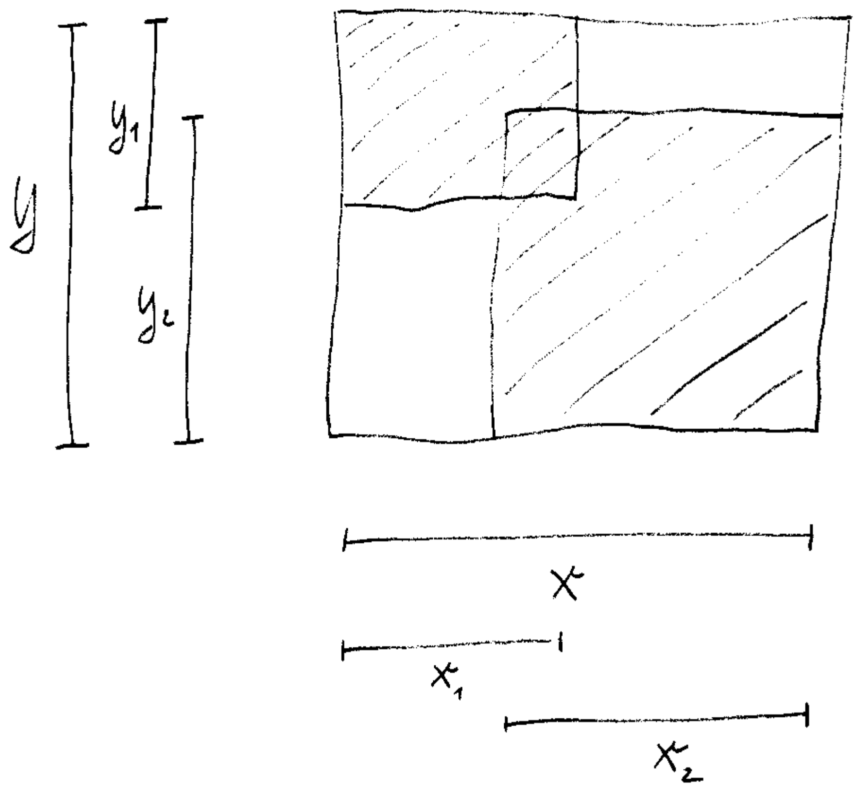
$$(a+b)^n = \sum_{Y \subset \{1,2,\ldots,n\}} a^{|Y|} b^{n-|Y|}$$

wo die rechte Seite in Verallgemeinerung der in Abschnitt 1.1 eingeführten Notation bedeuten soll, daß wir für jede Teilmenge Y von $\{1, 2, \ldots, n\}$ den angegebenen Ausdruck $a^{|Y|} b^{n-|Y|}$ nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren. Dann fassen wir gleiche Summanden zusammen und erhalten mit 2.1.15 die binomische Formel.

Übung 2.1.18. Es gilt $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$.

Bemerkung 2.1.19. Ich will nicht verschweigen, daß der in diesem Abschnitt dargestellte naive Zugang zur Mengenlehre durchaus begriffliche Schwierigkeiten mit sich bringt: Zum Beispiel darf die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller Mengen nicht als Menge angesehen werden, da wir sonst die "Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten", in Formeln gegeben durch $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M} \mid A \notin A\}$, bilden könnten. Für diese Menge kann aber weder $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ noch $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ gelten ... Diese Art von Schwierigkeiten kann erst ein formalerer Zugang klären und auflösen, bei dem man unsere naiven Vorstellungen durch Ketten von Zeichen aus einem wohlbestimmten endlichen Alphabet ersetzt und Wahrheit durch Verifizierbarkeit vermittels rein algebraischer "erlaubter Manipulationen" solcher Zeichenketten, die in "Axiomen" festgelegt werden. Diese Verifikationen kann man dann durchaus auch einer Rechenmaschine überlassen, so daß wirklich auf "objektivem" Wege entschieden werden kann, ob ein "Beweis" für die "Richtigkeit" einer unserer Zeichenketten in einem vorgegebenen axiomatischen Rahmen stichhaltig ist. Allerdings kann in derartigen Systemen von einer Zeichenkette algorithmisch nur entschieden werden, ob sie eine "sinnvolle Aussage" ist, nicht aber, ob sie "bewiesen" werden kann. Noch viel stärker zeigt der Unvollständigkeitssatz von Gödel, daß es in einem derartigen axiomatischen Rahmen, sobald er reichhaltig genug ist für eine Beschreibung des Rechnens mit natürlichen Zahlen, stets sinnvolle Aussagen gibt derart, daß entweder die Aussage und ihre Verneinung oder aber weder die Aussage noch ihre Verneinung bewiesen werden können. Mit diesen und ähnlichen Fragestellungen beschäftigt sich die Logik in ihren Grenzbereichen zur Informatik.

Bemerkung 2.1.20. Um mich nicht dem Vorwurf auszusetzen, während des Spiels die Spielregeln ändern zu wollen, sei bereits hier erwähnt, daß in **??** noch weitere wichtige Konstruktionen der Mengenlehre eingeführt werden, und daß wir in **??** einige weniger offensichtliche Folgerungen erläutern, die



Aus $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$ folgt noch lange nicht
$X \times Y = (X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$

meines Erachtens bereits an den Rand dessen gehen, was man in unserem informellen Rahmen als Argumentation noch vertreten kann.

2.2 Abbildungen

Definition 2.2.1. Seien X, Y Mengen. Eine **Abbildung** $f : X \to Y$ ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet, das **Bild** von x unter f, auch genannt der **Wert** von f an der Stelle x.

2.2.2. Wem das zu vage ist, der mag die alternative Definition vorziehen, nach der eine **Abbildung** $f : X \to Y$ eine Teilmenge $f \subset X \times Y$ ist derart, daß es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in f$. Dies eindeutig bestimmte y schreiben wir dann $f(x)$ und sind auf einem etwas formaleren Weg wieder am selben Punkt angelangt. In unseren Konventionen nennen wir besagte Teilmenge den **Graphen von** f und notieren sie mit dem Symbol Γ (sprich: Gamma), einem großen griechischen G, und schreiben also

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

Definition 2.2.3. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so nennen wir X ihren **Definitionsbereich** und Y ihren **Wertebereich**. Zwei Abbildungen nennen wir gleich genau dann, wenn sie denselben Definitionsbereich X, denselben Wertebereich Y und dieselbe Abbildungsvorschrift $f \subset X \times Y$ haben. Die Menge aller Abbildungen von X nach Y bezeichnen wir mit $\operatorname{Ens}(X, Y)$ nach der französischen Übersetzung **ensemble** des deutschen Begriffs "Menge".

2.2.4. Wir notieren Abbildungen oft in der Form

$$\begin{array}{rccc} f : & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

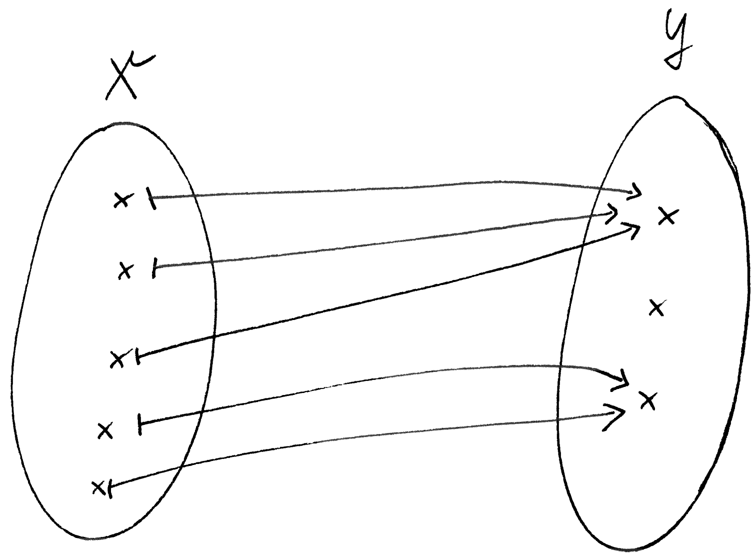
und verschiedenen Verkürzungen. Zum Beispiel sprechen wir von "einer Abbildung $X \to Y$" oder "der Abbildung $n \mapsto n^3$ von der Menge der natürlichen Zahlen in sich selber".

Beispiele 2.2.5. Für jede Menge X haben wir die **identische Abbildung** oder **Identität**

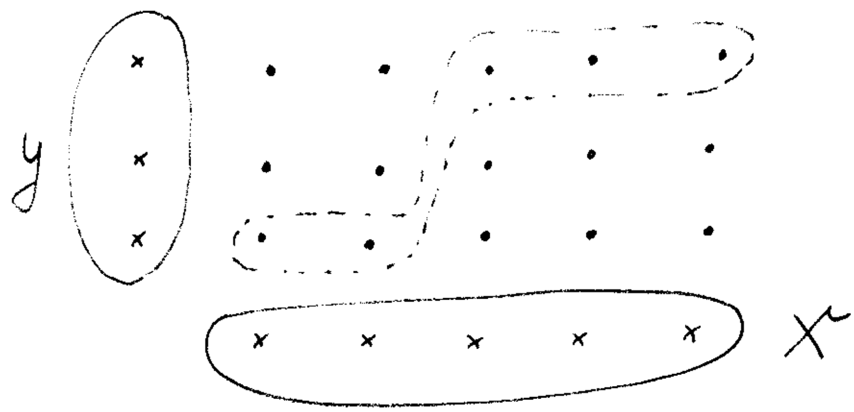
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id} = \mathrm{id}_X : & X & \to & X \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

Ein konkreteres Beispiel für eine Abbildung ist das Quadrieren

$$\begin{array}{rccc} q : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n^2 \end{array}$$



Eine Abbildung einer Menge mit fünf in eine mit drei Elementen



Der Graph der oben angegebenen Abbildung, wobei das X oben mit dem X hier identifiziert wurde durch “Umkippen nach Rechts”

Definition 2.2.6. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$ eine Teilmenge, so definieren wir ihr **Bild** oder genauer ihre **Bildmenge** $f(A)$, eine Teilmenge von Y, durch

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Eine Abbildung, deren Bild aus genau einem Element besteht, nennen wir eine **konstante Abbildung**.

Beispiel 2.2.7. Für unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$ von eben gilt

$$q(\mathbb{Z}) = \{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{N}$$

2.2.8. Gegeben ein festes $c \in Y$ schreiben wir oft auch kurz c für die Abbildung $X \to Y$, $x \mapsto c$ für alle $x \in X$ in der Hoffnung, daß aus dem Kontext klar wird, ob die Abbildung $c : X \to Y$ oder das Element $c \in Y$ gemeint sind. Die konstanten Abbildungen sind natürlich genau alle Abbildungen dieser Gestalt mit nichtleerem Definitionsbereich X.

Definition 2.2.9. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $B \subset Y$ eine Teilmenge, so definieren wir ihr **Urbild** $f^{-1}(B)$, eine Teilmenge von X, durch

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Besteht B nur aus einem Element, so schreiben wir auch $f^{-1}(x)$ statt $f^{-1}(\{x\})$. Für die Abbildung q aus 2.2.7 gilt zum Beispiel $q^{-1}(1) = \{1, -1\}$ und $q^{-1}(-1) = \emptyset$.

Definition 2.2.10. Sind schließlich drei Mengen X, Y, Z gegeben und Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, so definieren wir eine Abbildung $g \circ f : X \to Z$, die **Verknüpfung** der Abbildungen f und g, durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Bemerkung 2.2.11. Die Notation $g \circ f$, sprich "g nach f" für "erst f, dann g" ist gewöhnungsbedürftig, erklärt sich aber durch die Formel $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Betrachten wir zum Beispiel zusätzlich zum Quadrieren $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die Abbildung $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x + 1$, so gilt $(q \circ t)(x) = (x + 1)^2$ aber $(t \circ q)(x) = x^2 + 1$. Natürlich gilt $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ für jede Teilmenge $A \subset X$ und umgekehrt $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ für jede Teilmenge $C \subset Z$.

Definition 2.2.12. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. f heißt **injektiv** oder eine **Injektion** genau dann, wenn aus $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Injektionen schreibt man oft $\hookrightarrow$.

2. f heißt **surjektiv** oder eine **Surjektion** genau dann, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Surjektionen schreibt man manchmal $\twoheadrightarrow$.

3. f heißt **bijektiv** oder eine **Bijektion** genau dann, wenn f injektiv und surjektiv ist. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Bijektionen schreibt man oft $\xrightarrow{\sim}$.

Bemerkung 2.2.13. Ist $X \subset Y$ eine Teilmenge, so ist die **Einbettung** oder **Inklusion** $i : X \to Y$, $x \mapsto x$ stets injektiv. Ist $g : Y \to Z$ eine Abbildung und $X \subset Y$ eine Teilmenge, so nennen wir die Verknüpfung $g \circ i$ von g mit der Inklusion auch die **Einschränkung** von g auf X und notieren sie $g \circ i = g|X = g|_X : X \to Z$. Oft bezeichnen wir eine Einschränkung aber auch einfach mit demselben Buchstaben g in der Hoffnung, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welche Abbildung genau gemeint ist.

Bemerkung 2.2.14. Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist die Abbildung $f : X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ stets surjektiv. Der Leser möge entschuldigen, daß wir hier zwei verschiedene Abbildungen mit demselben Symbol f bezeichnet haben. Das wird noch öfter vorkommen.

Beispiele 2.2.15. Unsere Abbildung $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Die Identität $\mathrm{id} : X \to X$ ist stets bijektiv. Sind X und Y endliche Mengen, so gibt es genau dann eine Bijektion von X nach Y, wenn X und Y dieselbe Kardinalität haben, in Formeln $|X| = |Y|$.

Satz 2.2.16. *Seien $f, f_1 : X \to Y$ und $g, g_1 : Y \to Z$ Abbildungen.*

1. *Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.*

2. *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.*

3. *Sind g und f injektiv, so auch $g \circ f$.*

4. *Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$.*

5. *Ist f surjektiv, so folgt aus $g \circ f = g_1 \circ f$ schon $g = g_1$.*

6. *Ist g injektiv, so folgt aus $g \circ f = g \circ f_1$ schon $f = f_1$.*

Beweis. Übung. □

Bemerkung 2.2.17. Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so ist die Menge $\{(f(x), x) \in Y \times X \mid x \in X\}$ im Sinne von 2.2.2 eine Abbildung oder, vielleicht klarer, der Graph einer Abbildung $Y \to X$. Diese Abbildung in die Gegenrichtung heißt die **Umkehrabbildung** oder **Umkehrfunktion** auch die **inverse Abbildung** zu f und wird mit $f^{-1} : Y \to X$ bezeichnet. Offensichtlich ist mit f auch f^{-1} eine Bijektion.

Beispiel 2.2.18. Die Umkehrabbildung unserer Bijektion $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$ ist die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x - 1$.

Übung 2.2.19. Gegeben eine Bijektion $f : X \to Y$ ist $g = f^{-1}$ die einzige Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Ebenso ist auch $h = f^{-1}$ die einzige Abbildung $h : Y \to X$ mit $h \circ f = \mathrm{id}_X$.

Bemerkung 2.2.20. Gegeben drei Mengen X, Y, Z haben wir eine offensichtliche Bijektion $\mathrm{Ens}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(X, \mathrm{Ens}(Y, Z))$. Etwas vage formuliert ist also eine Abbildung $X \times Y \to Z$ dasselbe wie eine Abbildung, die jedem $x \in X$ eine Abbildung $Y \to Z$ zuordnet, und symmetrisch natürlich auch dasselbe wie eine Abbildung, die jedem $y \in Y$ eine Abbildung $X \to Z$ zuordnet.

Satz 2.2.21 (Bedeutung der Fakultät). *Sind X und Y zwei Mengen mit je n Elementen, so gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen $f : X \to Y$.*

Beweis. Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wir haben n Möglichkeiten, ein Bild für x_1 auszusuchen, dann noch $(n - 1)$ Möglichkeiten, ein Bild für x_2 auszusuchen, und so weiter, bis schließlich nur noch 1 Element von Y als mögliches Bild von x_n in Frage kommt. Insgesamt gibt es also $n(n - 1) \cdots 1 = n!$ Möglichkeiten für f. Da wir $0! = 1$ gesetzt hatten, stimmt unser Satz auch für $n = 0$. □

Übung 2.2.22. Seien X, Y endliche Mengen. So gibt es genau $|Y|^{|X|}$ Abbildungen von X nach Y, und darunter sind genau $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)\ldots(|Y|-|X|+1)$ Injektionen.

Übung 2.2.23. Sei X eine Menge mit n Elementen, und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ gegeben mit $n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$. Man zeige: Es gibt genau $n!/(\alpha_1! \cdots \alpha_r!)$ Abbildungen $f : X \to \{1, \ldots, r\}$, die jedes i genau α_i-mal als Wert annehmen, in Formeln

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} = \mathrm{card}\{f \mid |f^{-1}(i)| = \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots r\}$$

Bemerkung 2.2.24. Manche Autoren bezeichnen diese Zahlen auch als **Multinomialkoeffizienten** und verwenden die Notation

$$\frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} = \binom{n}{\alpha_1; \ldots; \alpha_r}$$

Mich überzeugt diese Notation nicht, da sie im Gegensatz zu unserer Notation für die Binomialkoeffizienten recht eigentlich nichts kürzer macht.

Übung 2.2.25. Man zeige die Formel

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r}$$

Hier ist zu verstehen, daß wir für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$ den angegebenen Ausdruck nehmen und alle diese Ausdrücke aufsummieren.

Übung 2.2.26. Eine **zyklische Anordnung** einer endlichen Menge M ist eine Abbildung $z : M \to M$ derart, daß wir durch mehrmaliges Anwenden von z auf ein beliebiges Element $x \in M$ jedes Element $y \in M$ erhalten können. Man zeige, daß es auf einer n-elementigen Menge mit $n \geq 1$ genau $(n-1)!$ zyklische Anordnungen gibt.

Bemerkung 2.2.27. Die Terminologie "zyklische Anordnung" scheint mir etwas unglücklich, da unsere Struktur nun beim besten Willen keine Ordnung ist. Andererseits ist das Angeben einer Anordnung auf einer endlichen Menge M schon auch etwas ähnliches.

2.3 Logische Symbole und Konventionen

Bemerkung 2.3.1. In der Mathematik meint **oder** immer, daß auch beides erlaubt ist. Wir haben diese Konvention schon benutzt bei der Definition der Vereinigung wenn wir schreiben $X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$, zum Beispiel $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

Bemerkung 2.3.2. Sagt man der Mathematik, es gebe ein Objekt mit diesen und jenen Eigenschaften, so ist stets gemeint, daß es *mindestens ein* derartiges Objekt geben soll. Hätten wir diese Sprachregelung rechtzeitig vereinbart, so hätten wir zum Beispiel das Wörtchen "mindestens" in Teil 2 von 2.2.12 bereits weglassen können. Sagt ihnen also ein Mathematiker, er habe einen Bruder, so kann es auch durchaus sein, daß er noch weitere Brüder hat! Will man in der Mathematik Existenz und Eindeutigkeit ausdrücken, so sagt man, es gebe **genau ein** Objekt mit diesen und jenen Eigenschaften. Sagt ihnen also ein Mathematiker, er habe genau einen Bruder, so können sie sicher sein, daß er nicht noch weitere Brüder hat.

Bemerkung 2.3.3. Die folgenden Abkürzungen erweisen sich als bequem und werden recht häufig verwendet:

$\forall$	für alle
$\exists$	es gibt
$\exists!$	es gibt genau ein
$\ldots \Rightarrow \cdots$	aus … folgt $\cdots$
$\ldots \Leftarrow \cdots$	… folgt aus $\cdots$
$\ldots \Leftrightarrow \cdots$	… ist gleichbedeutend zu $\cdots$

Ist zum Beispiel $f : X \to Y$ eine Abbildung, so können wir unsere Definitionen injektiv, surjektiv, und bijektiv etwas formaler so schreiben:

$$\begin{array}{lcl} f \text{ injektiv} & \Leftrightarrow & (f(x) = f(z) \Rightarrow x = z) \\ f \text{ surjektiv} & \Leftrightarrow & \forall y \in Y \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y \\ f \text{ bijektiv} & \Leftrightarrow & \forall y \in Y \exists! x \in X \text{ mit } f(x) = y \end{array}$$

Bemerkung 2.3.4. Bei den "für alle" und "es gibt" kommt es in der Mathematik sehr auf die Reihenfolge an, viel mehr als in der weniger präzisen Umgangssprache. Man betrachte zum Beispiel die beiden folgenden Aussagen:

"Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ so daß gilt $m \geq n$"

"Es gibt $m \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $m \geq n$"

Offensichtlich ist die erste richtig, die zweite aber falsch. Weiter mache man sich klar, daß die "für alle" und "es gibt" bei Verneinung vertauscht werden. Äquivalent sind zum Beispiel die beiden folgenden Aussagen

"Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n^2 = 2$"

"Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 \neq 2$"

Bemerkung 2.3.5. Wollen wir zeigen, daß aus einer Aussage A eine andere Aussage B folgt, so können wir ebensogut zeigen: Gilt B nicht, so gilt auch A nicht. In formelhafter Schreibweise haben wir also

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{nicht } A) \Leftarrow (\text{nicht } B))$$

Wollen wir zum Beispiel zeigen $(g \circ f \text{ surjektiv}) \Rightarrow (g \text{ surjektiv})$, so reicht es, wenn wir uns überlegen: Ist g nicht surjektiv, so ist $g \circ f$ erst recht nicht surjektiv.

Eine Injektion

Eine Surjektion

Eine Bijektion

3 Algebraische Grundbegriffe

Auf der Schule versteht man unter einer “reellen Zahl” meist einen unendlichen Dezimalbruch, wobei man noch aufpassen muß, daß durchaus verschiedene unendliche Dezimalbrüche dieselbe reelle Zahl darstellen können, zum Beispiel gilt in den reellen Zahlen ja

$$0,99999\ldots = 1,00000\ldots$$

Diese reellen Zahlen werden dann addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert ohne tiefes Nachdenken darüber, wie man denn zum Beispiel mit den eventuell unendlich vielen Überträgen bei der Addition und Subtraktion umgehen soll, und warum dann Formeln wie $(a+b)-c = a+(b-c)$ wirklich gelten, zum Beispiel für $a = b = c = 0,999\ldots$. Dieses tiefe Nachdenken wollen wir im Folgenden vom Rest der Vorlesung abkoppeln und müssen dazu sehr präzise formulieren, welche Eigenschaften für die Addition, Multiplikation und Anordnung in “unseren” reellen Zahlen gelten sollen: In der Terminologie, die in den folgenden Abschnitten eingeführt wird, werden wir die reellen Zahlen charakterisieren als einen angeordneten Körper, in dem jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke sogar eine größte untere Schranke besitzt. Von dieser Charakterisierung ausgehend erklären wir dann, welche reelle Zahl ein gegebener unendlicher Dezimalbruch darstellt, und errichten das Gebäude der Analysis. In demselben Begriffsgebäude modellieren wir auch den Anschauungsraum, vergleiche 1.2.8. Um diese Charakterisierungen und Modellierungen verständlich zu machen, führen wir zunächst einige grundlegende algebraische Konzepte ein, die Ihnen im weiteren Studium der Mathematik noch oft begegnen werden.

3.1 Mengen mit Verknüpfung

Definition 3.1.1. Eine **Verknüpfung** $\top$ **auf einer Menge** A ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \top : & A \times A & \to & A \\ & (a,b) & \mapsto & a \top b \end{array}$$

die also jedem geordneten Paar (a,b) mit $a,b \in A$ ein weiteres Element $(a \top b) \in A$ zuordnet.

Beispiele 3.1.2. 1. Die Addition von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

2. Die Multiplikation von ganzen Zahlen ist eine Verknüpfung
$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array}$$

3. Die Zuordnung min, die jedem Paar von natürlichen Zahlen die kleinere zuordnet (wenn sie verschieden sind, man setzt sonst $\min(a,a)=a$), ist eine Verknüpfung
$$\begin{array}{rccc} \min: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (a,b) & \mapsto & \min(a,b) \end{array}$$

4. Sei X eine Menge. Die Verknüpfung von Abbildungen liefert eine Verknüpfung auf der Menge $\operatorname{Ens}(X,X)$ aller Abbildungen von X in sich selber
$$\begin{array}{rccc} \circ: & \operatorname{Ens}(X,X)\times\operatorname{Ens}(X,X) & \to & \operatorname{Ens}(X,X) \\ & (f,g) & \mapsto & f\circ g \end{array}$$

5. Bezeichne $\mathbb{Q}^\times=\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ die Menge der von Null verschiedenen rationalen Zahlen. So ist das Teilen eine Verknüpfung
$$\begin{array}{rccc} /: & \mathbb{Q}^\times\times\mathbb{Q}^\times & \to & \mathbb{Q}^\times \\ & (a,b) & \mapsto & a/b \end{array}$$

6. Jede Verknüpfung $\top$ auf einer Menge induziert eine Verknüpfung auf ihrer Potenzmenge vermittels der Vorschrift
$$U\top V=\{u\top v \mid u\in U,\ v\in V\}$$

Definition 3.1.3. Eine Verknüpfung $\top$ auf einer Menge A heißt **assoziativ** genau dann, wenn gilt $a\top(b\top c)=(a\top b)\top c \quad \forall a,b,c\in A$. Sie heißt **kommutativ** genau dann, wenn gilt $a\top b=b\top a \quad \forall a,b\in A$.

Beispiele 3.1.4. Von unseren Beispielen sind die ersten drei assoziativ und kommutativ, das vierte ist assoziativ aber nicht kommutativ falls X mehr als ein Element hat, das fünfte ist weder assoziativ noch kommutativ.

Bemerkung 3.1.5. Ist eine Verknüpfung assoziativ, so liefern Ausdrücke der Form $a_1\top a_2\ldots\top a_n$ wohlbestimmte Elemente von A, das Resultat ist genauer unabhängig davon, wie wir die Klammern setzen. Um diese Erkenntnis zu formalisieren, vereinbaren wir für so einen Ausdruck die Interpretation
$$a_1\top a_2\ldots\top a_n=a_1\top(a_2\top(\ldots(a_{n-1}\top a_n)\ldots))$$
und zeigen

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

Man kann Verknüpfungen auf endlichen Mengen darstellen durch ihre **Verknüpfungstafel**. Hier habe ich etwa die Verknüpfungstafel der Verknüpfung min auf der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ angegeben. Natürlich muß man sich dazu einigen, ob im Kästchen aus Spalte a und Zeile b nun $a \top b$ oder vielmehr $b \top a$ stehen soll, aber bei einer kommutativen Verknüpfung wie min kommt es zum Glück nicht darauf an.

Lemma 3.1.6. *Gegeben* $(A, \top)$ *eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung und* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in A$ *gilt*

$$(a_1 \top \dots \top a_n) \top (b_1 \top \dots \top b_m) = a_1 \top \dots \top a_n \top b_1 \top \dots \top b_m$$

Beweis. Wir folgern aus dem Assoziativgesetz $(a_1 \top \dots \top a_n) \top (b_1 \top \dots \top b_m) = a_1 \top ((a_2 \top \dots \top a_n) \top (b_1 \top \dots \top b_m))$ und sind fertig mit vollständiger Induktion über n. □

Bemerkung 3.1.7. Das Wort Lemma, im Plural Lemmata, kommt wohl von griechisch $\lambda\alpha\mu\beta\alpha\nu\epsilon\iota\nu$ "nehmen" und bezeichnet in der Mathematik meist kleinere Resultate oder auch Zwischenschritte von größeren Beweisen, denen der Author außerhalb ihres engeren Kontexts keine große Bedeutung zumißt.

Definition 3.1.8. Sei $(A, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Ist $n \in \{1, 2, \dots\}$ eine von Null verschiedene natürliche Zahl und $a \in A$, so schreiben wir

$$\underbrace{a \top a \top \dots \top a}_{\text{n-mal}} = n^\top a$$

Bemerkung 3.1.9. Ist m eine zweite von Null verschiedene natürliche Zahl, so erhalten wir für assoziative Verknüpfungen mithilfe unseres Lemmas die Regeln $(n+m)^\top a = (n^\top a) \top (m^\top a)$ und $(nm)^\top a = n^\top (m^\top a)$. Ist unsere Verknüpfung auch noch kommutativ, so gilt zusätzlich $n^\top (a \top b) = (n^\top a) \top (n^\top b)$.

Definition 3.1.10. Sei $(A, \top)$ eine Menge mit Verknüpfung. Ein Element $e \in A$ heißt **neutrales Element** von $(A, \top)$ genau dann, wenn gilt

$$e \top a = a \top e = a \quad \forall a \in A$$

Bemerkung 3.1.11. In einer Menge mit Verknüpfung $(A, \top)$ kann es höchstens ein neutrales Element e geben, denn für jedes weitere Element e' mit $e' \top a = a \top e' = a \quad \forall a \in A$ haben wir $e' = e' \top e = e$. Wir dürfen also den bestimmten Artikel verwenden und in einer Menge mit Verknüpfung von **dem** neutralen Element reden.

Definition 3.1.12. Ein **Monoid** ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, in der es ein neutrales Element gibt. Ist $(A, \top)$ ein Monoid, so erweitern wir unsere Notation $n^\top a$ auf alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, indem wir $0^\top a$ als das neutrale Element von A verstehen, für alle $a \in A$.

Bemerkung 3.1.13. In Monoiden gelten die Regeln 3.1.9 für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Die natürlichen Zahlen bilden mit der Addition ein Monoid $(\mathbb{N}, +)$ mit neutralem Element 0. Sie bilden auch unter der Multiplikation ein Monoid $(\mathbb{N}, \cdot)$ mit neutralem Element 1. Die leere Menge ist *kein* Monoid, ihr fehlt das neutrale Element.

3.2 Gruppen

Bemerkung 3.2.1. Ich empfehle, bei der Lektüre dieses Abschnitts die Tabelle auf Seite 46 gleich mitzulesen, die die Bedeutungen der nun folgenden Formalitäten in den zwei gebräuchlichsten Notationssystemen angibt. In diesen Notationssystemen sollten alle Formeln aus der Schulzeit vertraut sein.

Definition 3.2.2. 1. Ist $(A, \top)$ ein Monoid und $a \in A$ ein Element, so nennen wir ein weiteres Element $\bar{a} \in A$ **invers** zu a genau dann, wenn gilt $a \top \bar{a} = e = \bar{a} \top a$ für $e \in A$ das neutrale Element unseres Monoids.

2. Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element ein Inverses besitzt.

3. Eine **kommutative Gruppe** oder **abelsche Gruppe** ist eine Gruppe, deren Verknüpfung kommutativ ist.

Bemerkung 3.2.3. Die Terminologie “abelsche Gruppe” wurde zu Ehren des norwegischen Mathematikers Niels Hendrik Abel eingeführt und ist sehr gebräuchlich.

Lemma 3.2.4. *Jedes Element eines Monoids besitzt höchstens ein Inverses.*

Beweis. Aus $a \top \bar{a} = e = \bar{a} \top a$ und $a \top b = e = b \top a$ folgt durch Anwenden von $b \top$ auf die erste Gleichung mit dem Assoziativgesetz sofort $\bar{a} = b$. □

Bemerkung 3.2.5. Wir dürfen also den bestimmten Artikel benutzen und von **dem** Inversen eines Elements einer Gruppe reden. Offensichtlich ist das Inverse des Inversen stets das ursprüngliche Element, in Formeln $\bar{\bar{a}} = a$.

Lemma 3.2.6. *Sind a und b Elemente einer Gruppe, so wird das Inverse von $a \top b$ wird gegeben durch die Formel $\overline{(a \top b)} = \bar{b} \top \bar{a}$.*

Beweis. In der Tat rechnen wir schnell $(a \top b) \top (\bar{b} \top \bar{a}) = e$. Diese Formel ist auch aus dem täglichen Leben vertraut: Wenn man morgends zuerst die Strümpfe anzieht und dann die Schuhe, so muß man abends zuerst die Schuhe ausziehen und dann die Strümpfe. □

Beispiele 3.2.7. Von unseren Beispielen 3.1.2 für Verknüpfungen oben ist nur $(\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe, und diese Gruppe ist kommutativ. Ein anderes Beispiel für eine kommutative Gruppe ist die Menge $\mathbb{Q}^\times$ der von Null verschiedenen rationalen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung. Für jede Menge X ist auch die Menge $\mathrm{Ens}^\times(X)$ aller Bijektionen von X auf sich selbst eine Gruppe, mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Die Bijektionen von einer Menge X mit sich selber heißen auch die **Permutationen von** X. Die Gruppe der Permutationen einer Menge X ist für $|X| > 2$ nicht kommutativ. Das Inverse einer Bijektion ist ihre Umkehrabbildung.

	123	213	312	321	132	231
123	123	213	312	321	132	231
213	213	123	321	312	231	132
312	312	132	231	213	321	123
321	321	231	132	123	312	213
132	132	312	213	231	123	321
231	231	321	123	132	213	312

Die Verknüpfungstafel der Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$. Eine solche Permutation σ habe ich dargestellt durch das geordnete Zahlentripel $\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)$, und im Kästchen aus der Zeile τ und der Spalte σ steht $\tau \circ \sigma$.

Definition 3.2.8. Ist $(A, \top)$ eine Gruppe, so erweitern wir unsere Notation $n^\top a$ auf alle $n \in \mathbb{Z}$, indem wir setzen $n^\top a = (-n)^\top \bar{a}$ für $n \in \{-1, -2, \ldots\}$.

Bemerkung 3.2.9. In einer Gruppe gelten für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ die Regeln $(n+m)^\top a = (n^\top a)\top(m^\top a)$ und $(nm)^\top a = n^\top(m^\top a)$. Ist die Gruppe kommutativ, so gilt zusätzlich $n^\top(a \top b) = (n^\top a)\top(n^\top b)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 3.2.10. Verknüpfungen werden meist additiv oder multiplikativ geschrieben, wobei die additive Schreibweise kommutativen Verknüpfungen vorbehalten ist und ebenso die Bruchnotation $1/a$ und b/a bei multiplikativer Schreibweise. Bei additiv geschriebenen Gruppen nennt man das Inverse von a meist das **Negative** von a. Bei nichtkommutativen und multiplikativ notierten Gruppen benutzt man für das Inverse von a nur die von der allgemeinen Notation a^n abgeleitete Notation a^{-1}. Die Tabelle fasst die üblichen Notationen für unsere abstrakten Begriffsbildungen in diesem Kontext zusammen und gibt unsere allgemeinen Resultate und Konventionen in diesen Notationen wieder. Diejenigen Formeln und Konventionen, die keine Inversen brauchen, benutzt man auch allgemeiner für beliebige Monoide.

Übung 3.2.11. Sind a, b, c Elemente einer Gruppe, so folgt aus $a \top b = a \top c$ bereits $b = c$. Ebenso folgt auch aus $b \top a = c \top a$ bereits $b = c$.

Übung 3.2.12. Sei A ein Monoid und e sein neutrales Element. Unser Monoid ist genau dann eine Gruppe, wenn es für jedes $a \in A$ ein $\bar{a} \in A$ gibt mit $\bar{a} \top a = e$, und dies Element $\bar{a}$ ist dann notwendig das Inverse von a in A. Noch Mutigere zeigen: Ist A eine Menge mit assoziativer Verknüpfung und existiert ein $e \in A$ mit $e \top a = a \ \forall a \in A$ sowie für jedes $a \in A$ ein $\bar{a} \in A$ mit $\bar{a} \top a = e$, so ist A eine Gruppe.

Bemerkung 3.2.13. Gegeben eine Abbildung $I \to A$, $i \mapsto a_i$ von einer endlichen Menge in ein kommutatives additiv bzw. multiplikativ notiertes Monoid vereinbaren wir die Notationen

$$\sum_{i \in I} a_i \qquad \text{bzw.} \qquad \prod_{i \in I} a_i$$

für die "Verknüpfung aller a_i". Ist I die leere Menge, so vereinbaren wir, daß dieser Ausdruck das neutrale Element von A bedeuten möge, also 0 bzw. 1. Wir haben diese Notation bereits verwendet in 2.1.17, und für die konstante Abbildung $I \to \mathbb{N}$, $i \mapsto 1$ hätten wir zum Beispiel

$$\sum_{i \in I} 1 = |I|$$

Unsere Notation 1.1.11 für mit einem Laufindex notierte Summen bzw. Produkte verwenden wir bei Monoiden analog.

$a \top b$	$a+b$	$a \cdot b$, ab
e	0	1
$\bar{b}$	$-b$	$1/b$
$a \top \bar{b}$	$a-b$	a/b
$n^{\top} a$	na	a^n
$e \top a = a \top e = a$	$0+a=a+0=a$	$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
$a \top \bar{a} = e$	$a+(-a)=0$	$a/a=1$
$\bar{\bar{a}} = a$	$-(-a)=a$	$1/(1/a)=a$
$(-1)^{\top} a = \bar{a}$	$(-1)a=-a$	$a^{-1}=1/a$
$\overline{(a \top b)} = \bar{b} \top \bar{a}$	$-(a+b)=(-b)+(-a)$	$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$, $1/ab=(1/b)(1/a)$
$\overline{(a \top \bar{b})} = b \top \bar{a}$	$-(a-b)=b-a$	$1/(a/b)=b/a$
$n^{\top}(m^{\top} a) = (nm)^{\top} a$	$n(ma)=(nm)a$	$(a^m)^n = a^{nm}$
$(m+n)^{\top} a = (m^{\top} a) \top (n^{\top} a)$	$(m+n)a=(ma)+(na)$	$a^{(m+n)} = (a^m)(a^n)$
$\overline{n^{\top} a} = (-n)^{\top} a$	$-(na)=(-n)a$	$(a^n)^{-1} = a^{-n}$
$0^{\top} a = e$	$0a=0$	$a^0=1$
$n^{\top}(a \top b) = (n^{\top} a) \top (n^{\top} b)$	$n(a+b)=(na)+(nb)$	$(ab)^n = (a^n)(b^n)$

Tabelle I.1: Konventionen und Formeln in verschiedenen Notationssystemen

3.3 Körper

Definition 3.3.1. Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ (englisch **field**, französisch **corps**) ist eine Menge K mit zwei assoziativen und kommutativen Verknüpfungen derart, daß gilt

1. $(K, +)$ ist eine Gruppe, die **additive Gruppe** des Körpers.
2. Bezeichnet $0_K \in K$ das neutrale Element der Gruppe $(K, +)$, so folgt aus $a \neq 0_K \neq b$ schon $ab \neq 0_K$ und $(K \backslash \{0_K\}, \cdot)$ ist eine Gruppe, die **multiplikative Gruppe** des Körpers.
3. Es gilt das **Distributivgesetz**
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \forall a, b, c \in K$$

Bemerkung 3.3.2. Wenn wir mit Buchstaben rechnen, werden wir meist $a \cdot b = ab$ abkürzen. Zusätzlich vereinbaren wir zur Vermeidung von Klammern die Regel "Punkt vor Strich", so daß also zum Beispiel das Distributivgesetz kürzer in der Form $a(b+c) = ab+ac$ geschrieben werden kann. Die multiplikative Gruppe eines Körpers K notieren wir $K^\times = K \backslash \{0_K\}$. Es bezeichne $1_K \in K^\times$ das neutrale Element der Multiplikation. Wir kürzen meist 0_K ab durch 0 und 1_K durch 1 in der Erwartung, daß man aus dem Kontext erschließt, ob mit 0 und 1 natürliche Zahlen oder Elemente eines speziellen Körpers gemeint sind. Meistens kommt es darauf im Übrigen gar nicht an.

Bemerkung 3.3.3. Für alle a, b in einem Körper und alle $n \geq 0$ gilt die binomische Formel
$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}$$

Um das einzusehen prüft man, daß wir bei der Herleitung nur Körperaxiome verwandt haben. Man beachte hierbei unsere Konvention $0_K^0 = 1_K$ aus 3.1.12.

Beispiele 3.3.4. Ein Beispiel für einen Körper ist der Körper der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Ein anderes Beispiel ist der zweielementige Körper mit den durch die Axiome erzwungenen Rechenregeln, der fundamental ist in der Informatik. Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bilden keinen Körper, da $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe ist, da es nämlich in $\mathbb{Z} \backslash \{0\}$ nur für 1 und -1 ein multiplikatives Inverses gibt.

Lemma 3.3.5 (Folgerungen aus den Körperaxiomen). *Sei K ein Körper. So gilt*

1. $a0 = 0 \quad \forall a \in K$.
2. $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ *oder* $b = 0$.
3. $-a = (-1)a \quad \forall a \in K$.
4. $(-1)(-1) = 1$.
5. $(-a)(-b) = ab \quad \forall a, b \in K$.
6. $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ *für alle* $a, c \in K$ *und* $b, d \in K^\times$.
7. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ *für alle* $a \in K$ *und* $b, c \in K^\times$.
8. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ *für alle* $a, c \in K$ *und* $b, d \in K^\times$.
9. $m(ab) = (ma)b$ *für alle* $m \in \mathbb{Z}$ *und* $a, b \in K$.

Beweis.

1. Man folgert das aus $a0 + a0 = a(0 + 0) = a0$ durch Hinzuaddieren von $-(a0)$ auf beiden Seiten.
2. In der Tat folgt aus ($a \neq 0$ und $b \neq 0$) schon ($ab \neq 0$) nach den Körperaxiomen.
3. In der Tat gilt $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$, und $-a$ ist ja gerade definiert als das eindeutig bestimmte Element von K so daß $a + (-a) = 0$.
4. In der Tat gilt nach dem Vorhergehenden $(-1)(-1) = -(-1) = 1$.
5. Um das nachzuweisen ersetzen wir einfach $(-a) = (-1)a$ und $(-b) = (-1)b$ und verwenden $(-1)(-1) = 1$.
6. Das ist klar.
7. Das ist klar.
8. Das wird bewiesen, indem man die Brüche auf einen Hauptnenner bringt und das Distributivgesetz anwendet.
9. Das folgt durch wiederholtes Anwenden des Distributivgesetzes.

□

Übung 3.3.6. Ist K ein Körper derart, daß es kein $x \in K$ gibt mit $x^2 = -1$, so kann man die Menge $K \times K = K^2$ zu einem Körper machen, indem man die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{array}{rcl} (a,b)+(c,d) & = & (a+c, b+d) \\ (a,b)\cdot(c,d) & = & (ac-bd, ad+bc) \end{array}$$

Die Abbildung $K \to K^2$, $a \mapsto (a,0)$ ist dann verträglich mit Addition und Multiplikation. Kürzen wir $(a,0)$ mit a ab und setzen $(0,1) = \mathrm{i}$, so gilt $\mathrm{i}^2 = -1$ und $(a,b) = a + b\,\mathrm{i}$. Analoges gilt, wenn man statt -1 irgendein anderes Element des Körpers betrachtet, das kein Quadrat ist.

Definition 3.3.7. Gegeben Mengen mit Verknüpfung $(A, \top)$ und $(B, \perp)$ verstehen wir unter einem **Homomorphismus** von A nach B eine Abbildung $\varphi : A \to B$ derart, daß gilt $\varphi(a \top a') = \varphi(a) \perp \varphi(a')$ für alle $a, a' \in A$. Sind unsere beiden Mengen mit Verknüpfung Gruppen, so sprechen wir von einem **Gruppenhomomorphismus**. Einen bijektiven Homomorphismus nennen wir einen **Isomorphismus**.

Bemerkung 3.3.8. Dieselben Definitionen verwenden wir auch bei Mengen mit mehr als einer Verknüpfung. Zum Beispiel ist ein **Körperhomomorphismus** φ von einem Körper K in einen Körper L eine Abbildung $\varphi : K \to L$ derart, daß gilt $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in K$, und ein **Körperisomorphismus** ist ein bijektiver Körperhomomorphismus. Ein Beispiel für einen Körperhomomorphismus ist unsere Abbildung $K \to K^2$ aus 3.3.6.

Übung 3.3.9. Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ bildet stets das neutrale Element von G auf das neutrale Element von H ab und vertauscht mit Inversenbildung, in Formeln $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}\ \forall a \in G$. Ein Körperhomomorphismus ist stets injektiv.

Kapitel II

Geschichtliches und Philosophisches

Contents

1 Zum Ursprung des Wortes Mathematik 52
2 Was ist Mathematik? 52
3 Zum Wesen der Mathematik 53
4 Herkunft einiger Symbole 54

1 Zum Ursprung des Wortes Mathematik

Das Wort "Mathematik" kommt vom griechischen "$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma$", das sich hinwiederum ableitet von "$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha$" für "der Lerngegenstand, die Wissenschaft" nach dem Verb "$\mu\alpha\nu\vartheta\alpha\nu\omega$" für "lernen, verstehen". Das Anhängen der Endung "-$\iota\kappa o\varsigma$" oder im Anschluß an einen Vokal "-$\tau\iota\kappa o\varsigma$" hat eine ähnliche Bedeutung wie im Deutschen das Anhängen von "-ig" oder "-lich" bzw. "-tlich", etwa wie in Mut $\mapsto$ mutig, Haar $\mapsto$ haarig oder wohnen $\mapsto$ wohnlich, eigen $\mapsto$ eigentlich. In diesem Sinne wäre die wörtliche Übersetzung von "$\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma$" also "das Lernige" oder "das Verständliche" oder freier "der Forschungsgegenstand". Platon verwendet den Begriff "$\tau o\ \mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\nu$" in diesem Sinne in Sophista 219c:2 und Timaeus 88c:1. In der hellenistischen Zeit verengte sich die Bedeutung ein erstes Mal und bezeichnete etwas, was wir heute eher als "Mathematik und Naturwissenschaften" bezeichnen würden. Erst in neuerer Zeit verengte sich die Bedeutung dann weiter auf das, was wir heute unter Mathematik verstehen.

2 Was ist Mathematik?

Ich denke, die heutige Mathematik mag man in einem ersten Ansatz beschreiben als die Wissenschaft von den einfachsten Begriffen: Wieviel einfacher sind doch Abbildungen zwischen Mengen, Zahlen und ihre Rechenregeln, Geraden und Ebenen im Vergleich zu Pflanzen und Menschen, Hass und Liebe, ja selbst Luft und Wasser! Diese einfachsten Begriffe müssen nun jedoch mit der größten Vorsicht und Präzision gehandhabt werden, damit uns unsere an den Umgang mit Pflanzen und Menschen, Hass und Liebe, Luft und Wasser gewöhnte Intelligenz nicht in die Irre führt. Die eigentliche Mathematik besteht dann darin, diese einfachsten Begriffe zu größeren Theorien zu kombinieren, und die eigentlichen Einsichten entstehen auch erst in dieser Gesamtschau.

Ich sehe darin eine Affinität zur Musik, in der man ja auch von einfachsten Geräuschen, in der Klassik etwa von den Tönen der Tonleiter, ausgeht und diese einfachsten Grundbausteine zu Kompositionen kombiniert, deren Sinnhaftigkeit nur in der Gesamtschau erschlossen werden kann. Auf einen Gegensatz zur Musik will ich im nächsten Absatz noch ausführlicher zu sprechen kommen: Während auch die schönste Musik meines Erachtens vom Komponisten nicht entdeckt sondern vielmehr erschaffen wird, scheint es sich mir bei der Mathematik gerade umgekehrt zu verhalten. Sicher gibt es sozusagen "komponierte" mathematische Artikel, aber die mathematischen Inhalte selbst lassen sich von Menschenhand nicht formen und wollen entdeckt werden.

3 Zum Wesen der Mathematik

In diesem Zusammenhang will ich noch auf eine gerne diskutierte Frage eingehen: Wird Mathematik eigentlich entdeckt oder entwickelt? Aus meiner eigenen Erfahrung mit dieser widerspenstigen Materie und auch der Erfahrung beim Erklären von Beweisen scheint es mir offensichtlich, daß mathematische Inhalte "objektiv da sind", also unabhängig vom menschlichen Subjekt existieren und entdeckt werden. Was jedoch entwickelt werden muß ist eine Sprache, die es uns ermöglicht, uns über diese Inhalte zu verständigen und sie zu nutzen. Hier kam und kommt es durchaus zu parallelen Entwicklungen, man denke etwa an die beiden Notationen $\dot{x}$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ für die Ableitung oder an verschiedene Algorithmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme oder an die verschiedenen Notationen für die natürlichen Zahlen.

Bildlich gesprochen scheint mir die Mathematik wie eine weitverzweigte Höhle, voller Wunder und wertvoller Mineralien, die wir Mathematiker einerseits erkunden und andererseits erschließen. Die Höhle selbst ist objektiv vorhanden und es gilt, immer weiter in sie vorzudringen und Neues zu entdecken. Wo und wie dann jedoch Treppen und Wege und Beleuchtung angebracht werden und eventuell sogar eine kleine Eisenbahn zum Transport der Mineralien, darin haben wir große Freiheit und in diesem Sinne wird Mathematik auch entwickelt. Natürlich sind diese beiden Aufgaben eng miteinander verwoben und wie weit wir selbst vordringen können hängt ganz wesentlich davon ab, wie weit unsere Vorläufer gekommen sind und wie weit sie die Höhle bereits zugänglich gemacht haben.

Die Mathematik wird insbesondere von Außenstehenden oft als eine tote Wissenschaft erlebt, in der "alles schon seit dreihundert Jahren bekannt sei". Dieser Eindruck mag damit zusammenhängen, daß Mathematik durchaus "verholzt" in dem Sinne, daß sie einen festen Stamm an Wissen und kodifizierter Sprache ausbildet. Das aber ermöglicht es unserer Wissenschaft auch gerade wieder, hoch hinaus zu wachsen.

Beim Erlernen dieser Wissenschaft denke ich, man soll versuchen, sich aller gedanklichen Kräfte zu bedienen, derer ein Mensch fähig ist. Geeignet für das Durchdringen mathematischer Sachverhalte scheinen mir insbesondere die räumliche oder noch besser die räumlich-zeitliche Anschauung, das abstrakte logische Denken und das formale Umformen von Zeichenketten auf Papier. Hilfreich kann auch unsere sprachliche Intelligenz sein: Bereits kleine Kinder lernen ja das Zählen, indem sie zunächst "Eins-Zwei-Drei-Vier-Fünf" memorieren wie "Abrakadabra Simsalabim", und ältere lernen ähnlich den Satz des Pythagoras oder die binomischen Formeln.

4 Herkunft einiger Symbole

Ich habe versucht, etwas über die Herkunft einiger mathematischer Symbole in Erfahrung zu bringen, die schon aus der Schule selbstverständlich sind. Das Gleichheitszeichen $=$ scheint auf ein 1557 von Robert Recorde publiziertes Buch zurückzugehen und soll andeuten, daß das, was auf der linken und rechten Seite dieses Zeichens steht, so gleich ist wie die beiden Strichlein, die das uns heute so selbstverständliche Gleichheitszeichen bilden. Davor schrieb man statt einem Gleichheitszeichen meist *ae* für "äquivalent". Das Pluszeichen $+$ ist wohl ein Auschnitt aus dem Symbol &, das hinwiederum enstanden ist durch Zusammenziehen der beiden Buchstaben im lateinischen Wörtchen *et*.

Die Dezimaldarstellung der natürlichen Zahlen kam Mitte des vorigen Jahrtausends aus Indien über die Araber nach Italien. Bis dahin rechnete man in Europa in römischer Notation. Sie müssen nur versuchen, in dieser Notation zwei größere Zahlen zu multiplizieren, um zu ermessen, welchen wissenschaftlichen und auch wirtschaftlichen Fortschritt der Übergang zur Dezimaldarstellung bedeutete. Das Beispiel der Dezimaldarstellung zeigt in meinen Augen auch, wie entscheidend das sorgfältige Einbeziehen trivialer Spezialfälle, manchmal als "Theorie der leeren Menge" verspottet, für die Eleganz der Darstellung mathematischer Sachverhalte sein kann: Sie wurde ja eben dadurch erst ermöglicht, daß man ein eigenes Symbol für "gar nichts" erfand! Ich denke, daß der Aufbau eines effizienten Notationssystems, obwohl er natürlich nicht denselben Stellenwert einnehmen kann wie die Entwicklung mathematischer Inhalte, dennoch in der Lehre ein wichtiges Ziel sein muß. In diesem Text habe ich mir die größte Mühe gegeben, unter den gebräuchlichen Notationen diejenigen auszuwählen, die mir am sinnvollsten schienen, und sie soweit wie möglich aufzuschlüsseln.

Teil B

Analysis

Kapitel III

Funktionen einer Veränderlichen

Contents

1 Die reellen Zahlen 61

1.1 Wurzeln rationaler Zahlen 61

1.2 Ordnungen auf Mengen 61

1.3 Angeordnete Körper 65

1.4 Die reellen Zahlen 68

2 Folgen und Reihen 75

2.1 Konvergenz von Folgen 75

2.2 Vollständigkeit der reellen Zahlen 83

2.3 Vergleich von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ 85

2.4 Die Kreiszahl π 89

2.5 Grenzwerte von Reihen 91

2.6 Wachstum und Zerfall 98

3 Stetigkeit 105

3.1 Definition und erste Beispiele 105

3.2 Umkehrfunktionen und Zwischenwertsatz 110

3.3 Grenzwerte von Funktionen 115

3.4 Stetige Funktionen auf Kompakta 120

3.5 Integration stetiger Funktionen 122

4 Differentiation und Integration 130

4.1 Differentiation . . . 130
4.2 Ableitungsregeln . . . 133
4.3 Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung . . . 137
4.4 Regeln von de l'Hospital . . . 146
4.5 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung . 147
4.6 Integrationsregeln . . . 150
4.7 Hyperbolische trigonometrische Funktionen . . . 152

5 Potenzreihen und höhere Ableitungen . . . 158

5.1 Funktionenfolgen und Potenzreihen . . . 158
5.2 Taylorentwicklung . . . 166
5.3 Rechnen mit Approximationen . . . 168
5.4 Der Abel'sche Grenzwertsatz . . . 171

6 Stetigkeit in mehreren Veränderlichen . . . 173

6.1 Vorschläge zur Veranschaulichung . . . 173
6.2 Stetigkeit bei metrischen Räumen . . . 174
6.3 Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen . . 180
6.4 Offene und abgeschlossene Teilmengen . . . 182
6.5 Kompakte metrische Räume . . . 186
6.6 Affine Räume . . . 188
6.7 Normierte Räume . . . 190
6.8 Überdeckungen kompakter metrischer Räume . . . 195
6.9 Integrale mit Parametern . . . 198

7 Vektorwertige Funktionen einer Veränderlichen 201

7.1 Bogenlänge in metrischen Räumen . . . 201
7.2 Grenzwerte für Abbildungen metrischer Räume . . 203
7.3 Ableiten von vektorwertigen Funktionen . . . 204
7.4 Die Bogenlänge als Integral . . . 209
7.5 Definition von Sinus und Cosinus . . . 213
7.6 Vollständigkeit und Exponential von Matrizen . . 219
7.7 Eigenschaften von Sinus und Cosinus . . . 224

8 Komplexe Zahlen mit Anwendungen . . . 234

8.1 Der Körper der komplexen Zahlen . . . 234
8.2 Die Exponentialfunktion im Komplexen . . . 239

8.3 Der Fundamentalsatz der Algebra 242
8.4 Integration von vektorwertigen Funktionen 244
8.5 Integration gebrochen rationaler Funktionen 247
8.6 Komplexe Differenzierbarkeit 251
9 Lösung einiger Schwingungsgleichungen 257
9.1 Gedämpfte Schwingungen 257
9.2 Differentialgleichungen höheren Grades 261
9.3 Gekoppelte Schwingungen 263
9.4 Angeregte Schwingungen 264
10 Grundlegendes zu Fourierreihen 267
10.1 Eindeutigkeit der Fourierreihe 267
10.2 Der Satz von Stone-Weierstraß 268
10.3 Geometrie in euklidischen Vektorräumen 273
10.4 Konvergenz der Fourierreihe 276

Dieser Text ist entstanden als Nachbereitung einer Grundvorlesung zur Analysis, in der ich das von meinen Kollegen aus der Physik geforderte Pensum, nämlich innerhalb von zwei Semestern bis zum Satz von Stokes vorzustossen, weit verfehlt habe. Er verfolgt das Ziel, einem Dozenten der Grundvorlesungen und insbesondere mir selbst bei der Erfüllung dieses Pensums zu helfen, indem er auf gut zweihundert Seiten ausgehend von der Konstruktion der reellen Zahlen über den üblichen Stoff der beiden Gundvorlesungen zur Analysis bis zu einem vollständigen Beweis des Satzes von Stokes führt. Vorausgesetzt werden nur Kenntnisse aus der linearen Algebra soweit sie zum entsprechenden Zeitpunkt bereits erwartet werden dürfen. Großen Wert habe ich auf eine koordinatenfreie Entwicklung der grundlegenden Konzepte der Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher gelegt in der Hoffnung, daß der Kalkül der Differentialformen dadurch verständlicher wird.

Naturgemäß hat dieser Text nicht viel Fleisch auf den Rippen. Nennenswerte Abstriche habe ich insbesondere gemacht durch eine sehr knappe Behandlung des Riemann-Integrals, das nur für stetige Funktionen erklärt wird; durch Hintanstellen des Lebesgue-Integrals; durch das Auslassen uneigentlicher Integrale; durch das Vermeiden topologischer Räume; und durch eine große Armut an ausgearbeiteten Beispielen. Das mag jedoch auch wieder dazu beitragen, daß das logische Grundgerüst klarer hervortritt. Ich hoffe, daß in zwei Semestern genug Zeit bleibt, dieses Skelett je nach Geschmack etwas zu bekleiden. Die beiden Abschnitte über komplexe Zahlen und Fourierreihen können im Prinzip übersprungen werden, mir scheint der darin behandelte Stoff jedoch eher noch wichtiger als der Stokes'sche Integralsatz. Bei der Arbeit geholfen haben mir insbesondere die Texte von Spivak [Spi65], Forster [For92], Lang [Lan68], und Bröcker [Brö95]. Als voll bekleidete Texte studiere man die Klassiker [Cou71, Rud76, Kön97]. Weitere ergiebige Quellen sind [Heu03, Heu02].

1 Die reellen Zahlen

Hier trennen sich nun die Wege der linearen Algebra, in der man sich zunächst nur auf die bereits eingeführten algebraischen Konzepte stützt und bis auf weiteres mit beliebigen Körpern arbeiten kann, und der Analysis, für die das Wesen der reellen Zahlen grundlegend ist.

1.1 Wurzeln rationaler Zahlen

Satz 1.1.1. *Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

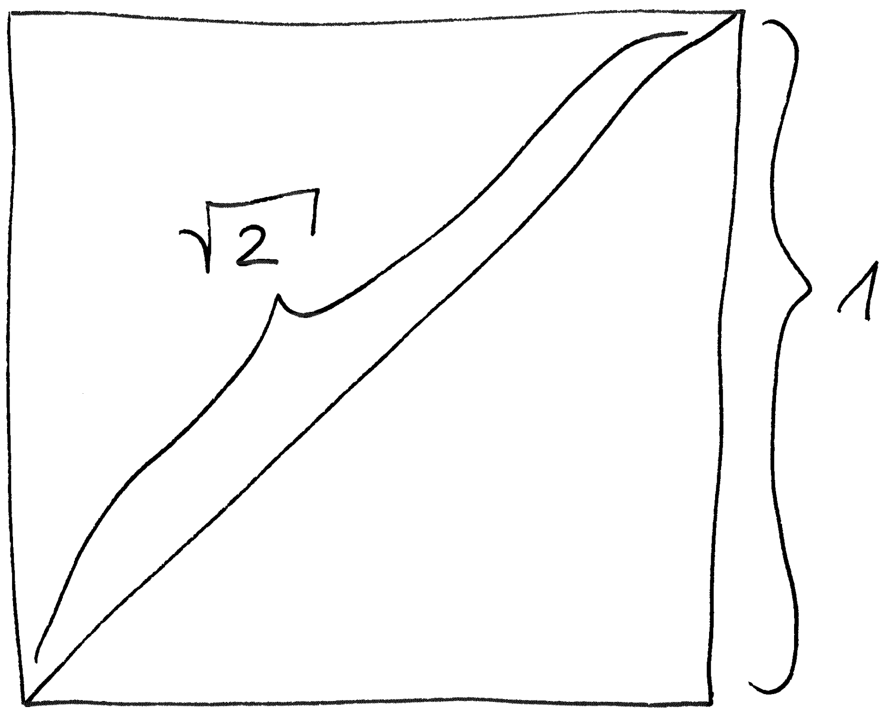
Bemerkung 1.1.2. Dieser Satz erklärt, warum wir uns mit den rationalen Zahlen nicht zufrieden geben. In der Tat suchen wir nach einem Zahlbereich, in dem jeder anschaulich definierbaren Länge wie zum Beispiel der Länge der Diagonale eines Quadrats der Kantenlänge Eins auch tatsächlich eine Zahl entspricht. Wir zeigen in 2.3.2, daß im Zahlbereich der reellen Zahlen immerhin aus allen nichtnegativen Zahlen Quadratwurzeln gezogen werden können, und diskutieren in 2.4.1, wie man sogar unsere anschauliche Vorstellung von der Länge des Einheitskreises zur Definition einer reellen Zahl präzisieren kann.

Erster Beweis. Setzen wir die in **??** bewiesene Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt voraus, so folgt unmittelbar, daß das Quadrat eines unkürzbaren Bruches mit Nenner $\neq \pm 1$ wieder ein unkürzbarer Bruch mit Nenner $\neq \pm 1$ ist. Aus $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ folgt also $x^2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Gäbe es mithin ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$, so müßte x bereits selbst eine ganze Zahl sein. Offensichtlich gibt es jedoch keine ganze Zahl $x \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 = 2$. □

Zweiter Beweis. Ohne die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung als bekannt vorauszusetzen können wir in unserer speziellen Situation auch elementarer mit dem Primfaktor Zwei durch Widerspruch argumentieren: Nehmen wir an, wir fänden ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \neq 0$ derart, daß $x = p/q$ ein unkürzbarer Bruch wäre mit $x^2 = 2$. Es folgte $p^2 = 2q^2$, also p^2 gerade, also p gerade, also p^2 durch 4 teilbar, also q^2 gerade, also q gerade. Dann wäre unser Bruch aber doch kürzbar gewesen, nämlich durch Zwei. □

1.2 Ordnungen auf Mengen

Definition 1.2.1. Eine **Relation** R auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir meist xRy. Eine Relation R heißt eine **Ordnungsrelation** oder auch eine **partielle Ordnung** oder auch einfach nur eine **Ordnung** genau dann, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt



$\sqrt{2}$
1

1. **Transitivität:** (xRy und yRz) $\Rightarrow xRz$;
2. **Antisymmetrie:** (xRy und yRx) $\Rightarrow x = y$;
3. **Reflexivität:** Es gilt xRx für alle $x \in X$.

Eine Ordnungsrelation heißt eine **Anordnung** oder auch eine **totale Ordnung** genau dann, wenn wir zusätzlich haben

4. **Totalität:** Für alle $x, y \in X$ gilt xRy oder yRx.

Bemerkung 1.2.2. Ordnungsrelationen schreibt man meist $x \leq y$, statt $x \leq y$ schreibt man dann oft auch $y \geq x$. Weiter kürzt man ($x \leq y$ und $x \neq y$) ab mit $x < y$ und ebenso ($x \geq y$ und $x \neq y$) mit $x > y$. Auf jeder angeordneten Menge definieren wir Verknüpfungen max und min in offensichtlicher Verallgemeinerung von I.3.1.2.3.

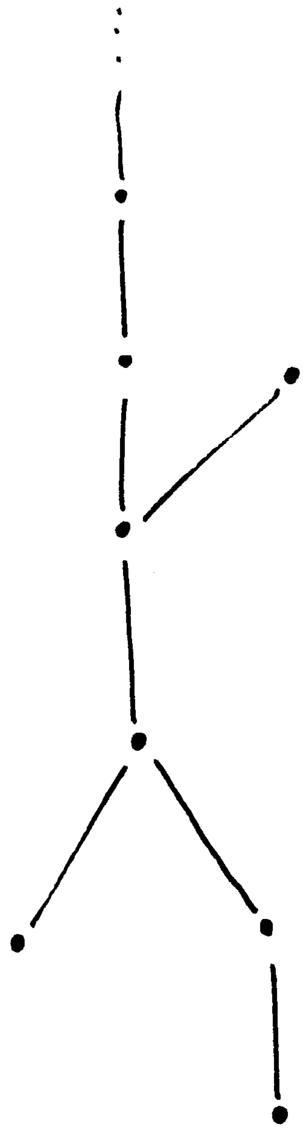
Definition 1.2.3. Sei $(Y, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.

1. Ein Element $g \in Y$ heißt ein **größtes Element** von Y genau dann, wenn gilt $g \geq y \quad \forall y \in Y$. Ein Element $g \in Y$ heißt ein **maximales Element** von Y genau dann, wenn es kein $y \in Y$ gibt mit $y > g$.
2. Ein Element $k \in Y$ heißt ein **kleinstes Element** von Y genau dann, wenn gilt $k \leq y \quad \forall y \in Y$. Ein Element $k \in Y$ heißt ein **minimales Element** von Y genau dann, wenn es kein $y \in Y$ gibt mit $y < k$.

Bemerkung 1.2.4. Jede partiell geordnete Menge besitzt höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element. Wir dürfen deshalb den bestimmten Artikel verwenden und von **dem** größten bzw. kleinsten Element reden. Besitzt eine partiell geordnete Menge ein größtes bzw. ein kleinstes Element, so ist dies auch ihr einziges maximales bzw. minimales Element. Sonst kann es jedoch maximale bzw. minimale Elemente in großer Zahl geben, zumindest dann, wenn unsere Ordnungsrelation keine Anordnung ist. Auf Englisch benutzt man für eine partiell geordnete Menge alias einen "partially ordered set" oft die Abkürzung **poset**.

Definition 1.2.5. Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $Y \subset X$ eine Teilmenge.

1. Ein Element $o \in X$ heißt eine **obere Schranke** von Y genau dann, wenn gilt $o \geq y \quad \forall y \in Y$.
2. Ein Element $u \in X$ heißt eine **untere Schranke** von Y genau dann, wenn gilt $u \leq y \quad \forall y \in Y$.



Eine partiell geordnete Menge mit zwei minimalen und einem maximalen Element, die weder ein kleinstes noch ein größtes Element besitzt. Die fetten Punkte stellen die Elemente unserer Menge dar, und ein Element ist größer als ein anderers, wenn es von diesem "durch einen aufsteigenden Weg erreicht werden kann".

Definition 1.2.6. Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $Y \subset X$ eine Teilmenge.

1. Ein Element $s \in X$ heißt die **kleinste obere Schranke** oder das **Supremum** von Y in X genau dann, wenn s das kleinste Element ist in der Menge $\{o \in X \mid o \text{ ist obere Schranke von } Y\}$. Wir schreiben dann $s = \sup Y$.

2. Ein Element $i \in X$ heißt die **größte untere Schranke** oder auch das **Infimum** von Y in X genau dann, wenn i das größte Element ist in der Menge $\{u \in X \mid u \text{ ist untere Schranke von } Y\}$. Wir schreiben dann $i = \inf Y$.

Bemerkung 1.2.7. Besitzt eine Teilmenge $Y \subset X$ ein größtes Element $g \in Y$, so gilt $g = \sup Y$. Besitzt eine Teilmenge $Y \subset X$ ein kleinstes Element $k \in Y$, so gilt $k = \inf Y$. Sind Teilmengen $Z \subset Y \subset X$ gegeben und besitzen Z und Y ein Supremum in X, so gilt $\sup Z \leq \sup Y$.

Beispiel 1.2.8. Auf der Potenzmenge einer beliebigen Menge ist die Inklusionsrelation eine partielle Ordnung. Bezüglich dieser Ordnung ist die Vereinigung im Sinne von **??** das Supremum und der Schnitt das Infimum.

1.3 Angeordnete Körper

Definition 1.3.1. Ein **angeordneter Körper** ist ein Körper $(K, +, \cdot)$ mit einer Anordnung $\leq$ derart, daß gilt

1. $x \leq y \;\Rightarrow\; x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in K.$

2. $(0 \leq x \text{ und } 0 \leq y) \;\Rightarrow\; 0 \leq xy \quad \forall x, y \in K.$

Die Elemente $x \in K$ mit $x > 0$ bzw. $x < 0$ nennt man **positiv** bzw. **negativ**. Die Elemente mit $x \geq 0$ bzw. $x \leq 0$ nennt man folgerichtig **nichtnegativ** bzw. **nichtpositiv**.

Lemma 1.3.2. *In jedem angeordneten Körper gilt:*

1. $(x \leq y \text{ und } a \leq b) \Rightarrow (x + a \leq y + b)$.

2. $(x \leq y \text{ und } a \geq 0) \Rightarrow (ax \leq ay)$.

3. $(0 \leq x < y \text{ und } 0 \leq a < b) \Rightarrow (0 \leq xa < yb)$.

4. $(x \leq y) \Rightarrow (-y \leq -x)$.

5. $(x \geq y \text{ und } a \leq 0) \Rightarrow (ax \leq ay)$.

6. $(x \neq 0) \Rightarrow (x^2 > 0)$.

7. $1 > 0$.

8. $(x > 0) \Rightarrow (x^{-1} > 0)$.

9. $(0 < x \leq y) \Rightarrow (0 < y^{-1} \leq x^{-1})$.

Beweis. 1. In der Tat folgt $x + a \leq y + a \leq y + b$.

2. In der Tat folgt $0 \leq y - x$, also $0 \leq a(y - x) = ay - ax$ und damit dann $ax \leq ay$.

3. In der Tat erhalten wir $0 \leq xa \leq ya < yb$.

4. Das folgt durch Addition von $(-y - x)$ auf beiden Seiten.

5. In der Tat folgern wir $x \geq y \Rightarrow (-a)x \geq (-a)y \Rightarrow ax \leq ay$.

6. In der Tat ist $x^2 = (-x)^2$ und $x > 0 \Leftrightarrow (-x) < 0$.

7. Das folgt aus $1 = 1^2 \neq 0$.

8. Das folgt durch Multiplikation mit $(x^{-1})^2$.

9. Das folgt durch Multiplikation mit $y^{-1}x^{-1}$.

□

Bemerkung 1.3.3. Schreiben wir zur besonderen Betonung wieder 0_K und 1_K, so gelten demnach in jedem angeordneten Körper K die Ungleichungen

$$\ldots < (-1_K) + (-1_K) < (-1_K) < 0_K < 1_K < 1_K + 1_K < \ldots$$

Insbesondere folgt aus $m1_K = n1_K$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ schon $m = n$. Die Abbildung $\mathbb{Z} \to K$, $m \mapsto m1_K$ ist also eine Injektion. Das Bild dieser Injektion müßte wohl eigentlich einen eigenen Namen kriegen, zum Beispiel $\mathbb{Z}_K$, aber wir kürzen unsere Notation ab, bezeichnen dieses Bild auch mit $\mathbb{Z}$ und schreiben kürzer m statt $m1_K$. Weiter erhalten wir auch eine Injektion $\mathbb{Q} \to K$, $m/n \mapsto m1_K/n1_K$, die wir zum Beispiel $q \mapsto q_K$ notieren könnten. Wir sind auch hier etwas nachlässig, bezeichnen das Bild unserer Injektion $\mathbb{Q} \to K$ meist kurzerhand mit demselben Buchstaben $\mathbb{Q}$ statt genauer $\mathbb{Q}_K$ zu schreiben, und hängen auch den Elementen von $\mathbb{Q}$ meist keinen Index an, wenn wir eigentlich ihr Bild in K meinen.

Übung 1.3.4. Man zeige, daß für jeden angeordneten Körper K die in 1.3.3 definierte Abbildung $\mathbb{Q} \to K$ ein Körperhomomorphismus ist.

Definition 1.3.5. Für jeden angeordneten Körper K definieren wir den **Absolutbetrag**, eine Abbildung $K \to K$, $x \mapsto |x|$, durch die Vorschrift

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0; \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Bemerkung 1.3.6. Wir listen einige Eigenschaften des Absolutbetrags auf. Der Beweis der ersten vier sei dem Leser überlassen.

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $|-x| = |x|$

3. $|xy| = |x||y|$

4. $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ falls $x \neq 0$

5. Es gilt die sogenannte **Dreiecksungleichung**

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in K$$

   in Worten: Der Betrag einer Summe ist stets kleinergleich der Summe der Beträge der Summanden. In der Tat gilt ja $x + y \leq |x| + |y|$ und ebenso $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Unsere Ungleichung heißt deshalb Dreiecksungleichung, weil sie in einem allgemeineren Kontext sagt, daß in einem Dreieck zwei Seiten zusammen stets länger sind als die dritte.

6. $||a| - |b|| \leq |a + b| \quad \forall a, b \in K.$

   In der Tat folgt aus der Dreiecksungleichung $|a| = |(a + b) + (-b)| \leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$, also $|a| - |b| \leq |a + b|$. Ebenso folgert man aber auch $|b| - |a| \leq |a + b|$.

Übung 1.3.7. In jedem angeordneten Körper gilt:

1. Aus $|x - a| < \eta$ und $|y - b| \leq \eta$ folgt $|(x + y) - (a + b)| \leq 2\eta$;

2. Aus $|x - a| \leq \eta \leq 1$ und $|y - b| \leq \eta \leq 1$ folgt $|xy - ab| \leq \eta(|b| + 1 + |a|)$;

3. Aus $|y - b| \leq \eta \leq |b|/2$ und $b \neq 0$ folgt $y \neq 0$ und $|1/y - 1/b| \leq 2\eta/|b|^2$.

Übung 1.3.8. In jedem angeordneten Körper gilt für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die sogenannte **Bernoulli-Ungleichung** $(1+x)^n \geq 1+nx$. Hinweis: Vollständige Induktion.

1.4 Die reellen Zahlen

Bemerkung 1.4.1. Der folgende Satz enthält diejenige Charakterisierung eines gewissen angeordneten Körpers von “reellen Zahlen”, auf der die ganze Vorlesung aufbaut. Der Beweis der Existenz eines derartigen angordneten Körpers ist für das weitere Verständnis der Vorlesung belanglos. Ich gebe hier nur eine Beweisskizze, als da heißt einen Beweis für höhere Semester, um Sie zu überzeugen, daß wir nicht während des nächsten halben Jahres Folgerungen ziehen aus Grundannahmen, die überhaupt nie erfüllt sind. Ich rate dazu, bei der ersten Lektüre auf das genauere Studium des Existenzbeweises zu verzichten, der sich bis 1.4.5 hinzieht. Vom Beweis der Eindeutigkeit sind Teile durchaus auch für die Ziele dieser Vorlesung von Belang. Wir formulieren diese Teile als die eigenständigen Aussagen 1.4.9 und 1.4.10. Der Rest wird dem Leser als Übung 1.4.15 überlassen, die wieder für höhere Semester gedacht ist.

Satz 1.4.2 (Charakterisierung der reellen Zahlen). *1. Es gibt einen angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ derart, daß in der angeordneten Menge $\mathbb{R}$ jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke auch eine größte untere Schranke besitzt.*

2. Dieser angeordnete Körper ist im wesentlichen eindeutig bestimmt. Ist genauer $(\mathbb{R}', +, \cdot, \leq)$ ein zweiter derartiger angeordneter Körper, so gibt es genau einen Körperisomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}'$, und für diesen Körperisomorphismus gilt $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$.

Bemerkung 1.4.3. Die im Satz gegebene Charakterisierung trifft auf den angeordneten Körper der rationalen Zahlen nicht zu. Zum Beispiel mögen Sie zur Übung zeigen, daß die nichtleere Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ in $\mathbb{Q}$ zwar untere Schranken besitzt, aber keine größte untere Schranke.

Beweis von 1.4.2.1. Wir konstruieren einen derartigen Körper $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ als eine Menge $\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ von Teilmengen der Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen,

$$\mathbb{R} \quad = \quad \left\{ \alpha \subset \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \text{ ist nicht leer,} \\ \alpha \text{ hat eine untere Schranke,} \\ \alpha \text{ hat kein kleinstes Element,} \\ \alpha \text{ enthält mit } x \text{ auch jedes } y \geq x. \end{array} \right\}$$

Man nennt solch ein α einen **Dedekind'schen Schnitt** und bezeichnet die so konstruierte Menge $\mathbb{R}$ als das “Dedekind'sche Modell der reellen Zahlen”. Auf unserer Menge $\mathbb{R}$ von Teilmengen von $\mathbb{Q}$ ist die Inklusionsrelation eine

Anordnung und wir schreiben $\alpha \leq \beta$ statt $\alpha \supset \beta$. Ist $Y \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge mit unterer Schranke, so liegt offensichtlich auch die Vereinigung

$$\bigcup_{\alpha \in Y} \alpha = \{q \in \mathbb{Q} \mid \text{Es gibt } \alpha \in Y \text{ mit } q \in \alpha\}$$

aller Teilmengen aus Y in $\mathbb{R}$ und ist das Infimum von Y. Damit haben wir bereits eine angeordnete Menge mit der geforderten Eigenschaft konstruiert. Wir müssen darauf nur noch eine Addition und eine Multiplikation erklären derart, daß unsere Struktur zu einem angeordneten Körper wird. Die Addition ist unproblematisch: Wir setzen

$$\alpha + \beta = \{x + y \mid x \in \alpha, y \in \beta\}$$

und prüfen mühelos, daß aus $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ schon folgt $\alpha+\beta \in \mathbb{R}$, daß $\mathbb{R}$ so zu einer kommutativen Gruppe wird mit neutralem Element $0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, und daß gilt $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Wir erlauben uns nun die Abkürzung $0_{\mathbb{R}} = 0$. Die Multiplikation positiver Elemente ist ebenfalls unproblematisch: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ setzen wir

$$\alpha\beta = \{xy \mid x \in \alpha, y \in \beta\}$$

und prüfen mühelos, daß aus $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ schon folgt $\alpha\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ und daß $\mathbb{R}_{>0}$ so zu einer kommutativen Gruppe wird mit neutralem Element $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$. Das Distributivgesetz in $\mathbb{Q}$ impliziert mit diesen Definitionen auch sofort die Regel

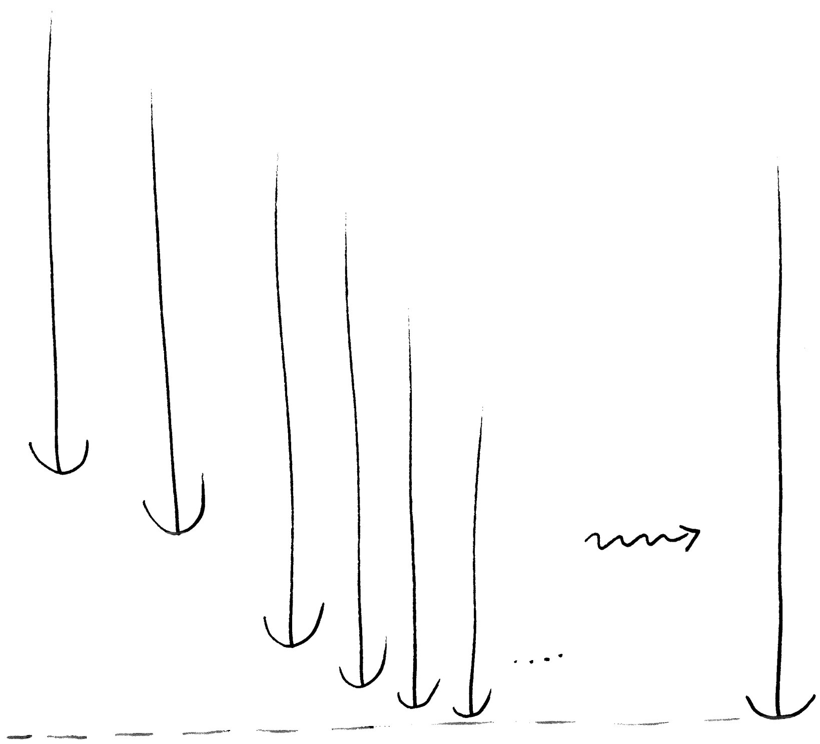
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$. Um unsere Multiplikation so auf ganz $\mathbb{R}$ auszudehnen, daß $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper wird, verwenden wir das anschließende technische Lemma 1.4.4. Der Beweis der in Teil 2 behaupteten Eindeutigkeit ist die Übung 1.4.15. □

Lemma 1.4.4. *Sei $(R, +)$ eine kommutative Gruppe mit einer Anordnung $\leq$ derart, daß gilt $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$. Sei auf $R_{>0}$ eine Verknüpfung $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ gegeben, die $R_{>0}$ zu einer kommutativen Gruppe macht. Gilt außerdem die Regel*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R_{>0}$$

so gibt es genau eine Fortsetzung unserer Verknüpfung $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ auf ganz R derart, daß $(R, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper wird.



Zum Infimum in $\mathbb{R}$

Beweis. Wenn die Fortsetzung unserer Multiplikation auf ganz R das Distributivgesetz erfüllen soll, müssen wir notwendig setzen

$$\alpha\beta = \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \text{ oder } \beta = 0; \\ -((-\alpha)\beta) & \alpha < 0,\ \beta > 0; \\ -(\alpha(-\beta)) & \alpha > 0,\ \beta < 0; \\ (-\alpha)(-\beta) & \alpha < 0,\ \beta < 0. \end{cases}$$

Es gilt nur noch, für diese Multiplikation die Körperaxiome nachzuweisen. Unsere Multiplikation auf R ist offensichtlich kommutativ und assoziativ und macht $R\backslash\{0\}$ zu einer Gruppe. Wir müssen also nur noch das Distributivgesetz

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in R$$

nachweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hierbei $\alpha > 0$ und $\beta + \gamma > 0$ annehmen, und die einzigen nicht offensichtlichen Fälle sind dann $\beta > 0$, $\gamma < 0$ bzw. $\beta < 0$, $\gamma > 0$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\beta > 0$, $\gamma < 0$. Nach unseren Annahmen gilt ja die Regel

$$\alpha\beta = \alpha((\beta + \gamma) + (-\gamma)) = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha(-\gamma)$$

und daraus folgt sofort $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ auch in diesem letzten Fall. □

Übung 1.4.5. Bezeichne $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ das Dedekind'sche Modell der reellen Zahlen. Man zeige, daß die durch die Struktur eines angeordneten Körpers auf $\mathbb{R}$ nach 1.3.3 definierte Abbildung $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ auch beschrieben werden kann durch die Vorschrift $p \mapsto p_{\mathbb{R}} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > p\}$.

Definition 1.4.6. Wir wählen für den weiteren Verlauf der Vorlesung einen festen angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, in dem jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke auch eine größte untere Schranke hat, erlauben uns wegen der in 1.4.2.2 formulierten "Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus" den bestimmten Artikel und nennen ihn **den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen**.

Übung 1.4.7. Man zeige: Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit einer oberen Schranke hat auch eine kleinste obere Schranke.

Übung 1.4.8. Seien X und Y nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Bezeichnet $X + Y \subset \mathbb{R}$ die Menge $\{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$, so zeige man $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.

Satz 1.4.9. *Die natürlichen Zahlen besitzen keine obere Schranke in den reellen Zahlen, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*

Beweis. Das ist evident für den angeordneten Körper $\mathbb{R}$, den wir im Beweis von 1.4.2 konstruiert haben. Da diese Konstruktion jedoch nicht ganz einfach war, zeigen wir auch, wie unser Satz direkt aus unserer Definition 1.4.6 abgeleitet werden kann. Dazu argumentieren wir durch Widerspruch: Hätte die Teilmenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ eine obere Schranke, so hätte sie nach 1.4.7 auch eine kleinste obere Schranke a. Dann wäre aber $a - 1 < a$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, also gäbe es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > (a-1)$. Es folgte $(n+1) > a$, und a wäre doch keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ gewesen. □

Korollar 1.4.10. *1. Unter jeden reellen Zahl findet man noch ganze Zahlen, in Formeln: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es $m \in \mathbb{Z}$ mit $m < x$.*

2. Für positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine positive natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

3. Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt stets noch eine rationale Zahl, in Formeln: Gegeben $x < y$ in $\mathbb{R}$ gibt es $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus 1.4.9. Um die Zweite zu zeigen, suche man $n > 1/\varepsilon$. Um die dritte Aussage zu zeigen, suchen wir zunächst $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ mit $0 < \frac{1}{n} < y - x$, also $1 < ny - nx$, das heißt $1 + nx < ny$. Nun gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < ny < b$, also gibt es eine größte ganze Zahl m mit $m < ny$ und folglich $ny \leq m + 1$, woraus hinwiederum folgt $nx < m$ und dann $x < \frac{m}{n} < y$. □

Bemerkung 1.4.11. Ein angeordneter Körper heißt **archimedisch angeordnet** genau dann, wenn es zu jedem Element x des Körpers eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n > x$. Das obige Korollar 1.4.10 gilt mit demselben Beweis für jeden archimedisch angeordneten Körper.

Definition 1.4.12. Mit einem endlichen Dezimalbruch wie $3,141$ bezeichnet man wie auf der Schule die rationale Zahl $3141/1000$. Die durch einen **unendlichen Dezimalbruch** wie $3,1415\ldots$ dargestellte reelle Zahl definieren wir als das Supremum der Menge aller ihrer endlichen Teilausdrücke bzw. das Infimum, wenn ein Minus davorsteht. Wir setzen also zum Beispiel

$$3,1415\ldots \quad = \quad \sup \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3,1 \\ 3,14 \\ 3,141 \\ 3,1415 \\ \ldots \end{array} \right\}$$

wo wir die Elemente der Menge aller endlichen Teilausdrücke der Übersichtlichkeit halber untereinander geschrieben haben statt sie durch Kommata zu trennen und rationale Zahlen stillschweigend identifiziert haben mit ihren Bildern in $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4.13. *1. Jede reelle Zahl läßt sich durch einen unendlichen Dezimalbruch darstellen.*

2. Genau dann stellen zwei verschiedene unendliche Dezimalbrüche dieselbe reelle Zahl dar, wenn es eine Stelle vor oder nach dem Komma gibt und eine von Neun verschiedene Ziffer z derart, daß die beiden Dezimalbrüche bis zu dieser Stelle übereinstimmen, ab dieser Stelle jedoch der eine die Form $z99999\ldots$ hat und der andere die Form $(z+1)00000\ldots$.

Beweis. Für den ersten Teil reicht es zu zeigen, daß sich jede nichtnegative reelle Zahl $y \geq 0$ als ein unendlicher Dezimalbruch darstellen läßt. Nehmen wir zu jedem $s \in \mathbb{N}$ die größte reelle Zahl $r_s \leq y$ unter y mit höchstens s Stellen nach dem Komma, so gilt

$$y = \sup\{r_0, r_1, r_2, \ldots\}$$

In der Tat ist y eine obere Schranke dieser Menge, aber jede reelle Zahl $x < y$ ist keine obere Schranke dieser Menge: Nach 1.4.10 oder, genauer, seinem Beweis gibt es nämlich für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ ein $s \in \mathbb{N}$ und ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $x < m \cdot 10^{-s} < y$, als da heißt, es gibt ein s mit $x < r_s$. Den zweiten Teil überlassen wir dem Leser zur Übung. $\square$

Bemerkung 1.4.14. Ich will die Gleichheit $1 = 0,999\ldots$ auch noch im Dedekind'schen Modell der reellen Zahlen erläutern und beginne dazu mit der offensichtlichen Gleichheit

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid q > -1\} = \bigcup_{n \geq 1} \{q \in \mathbb{Q} \mid q > -0,\underbrace{999\ldots9}_{n}\}$$

von Teilmengen von $\mathbb{Q}$. Sie bedeutet nach 1.4.5 und der Beschreibung des Infimums im Dedekind'schen Modell der reellen Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ genau die Gleichheit

$$-1_{\mathbb{R}} = \inf\{(-0,\underbrace{999\ldots9}_{n})_{\mathbb{R}} \mid n \geq 1\}$$

und mit unserer Konvention für die Interpretation unendlicher Dezimalbrüche 1.4.12 dann auch die Gleichheit von reellen Zahlen

$$-1 = -0,999\ldots$$

Jetzt gilt es nur noch, das Negative zu nehmen. Ich bemerke weiter, daß es durchaus möglich ist, die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche ohne alle Identifizierungen zu betrachten und mit der Struktur einer angeordneten Menge zu versehen, in der dann sogar jede nichtleere Teilmenge mit unterer Schranke eine größte untere Schranke hat. Es ist jedoch nicht möglich, die gewohnte Addition und Multiplikation von den endlichen Dezimalbrüchen so auf die angeordnete Menge aller unendlichen Dezimalbrüche ohne jegliche Identifizierungen fortzusetzen, daß wir einen angeordneten Körper erhalten. Der naive Ansatz scheitert hier bereits an dem Problem, daß nicht klar ist, wie man mit den eventuell unendlich vielen Überträgen bei der Addition und Multiplikation umgehen soll.

Übung 1.4.15 *(Für höhere Semester).* Man zeige 1.4.2.2. Hinweis: Die gesuchte Bijektion φ kann zum Beispiel konstruiert werden durch die Vorschrift $\varphi(\alpha) = \inf\{q_{\mathbb{R}'} \mid q \in \mathbb{Q},\ q_{\mathbb{R}} > \alpha\}$.

2 Folgen und Reihen

2.1 Konvergenz von Folgen

Definition 2.1.1. Eine Teilmenge einer Menge mit Ordnungsrelation heißt ein **Intervall** genau dann, wenn mit zwei beliebigen Punkten aus besagter Teilmenge auch jeder Punkt zwischen den beiden zu unserer Teilmenge gehört.

Bemerkung 2.1.2. Ist $(X, \leq)$ eine Menge mit Ordnungsrelation, so heißt demnach in Formeln ausgedrückt eine Teilmenge $I \subset X$ ein Intervall oder genauer ein "Intervall in X" genau dann, wenn für beliebige $x, y, z \in X$ mit $x < y < z$ aus $x, z \in I$ folgt $y \in I$. Jeder Schnitt von Intervallen ist wieder ein Intervall.

Übung 2.1.3. Jede Teilmenge Y einer angeordneten Menge X ist die disjunkte Vereinigung aller maximalen in Y enthaltenen Intervalle von X. Hinweis: Hat ein System von Intervallen von X nichtleeren Schnitt, so ist auch seine Vereinigung wieder ein Intervall von X.

Definition 2.1.4. Wir erweitern die reellen Zahlen durch die zwei Punkte $-\infty$ und ∞ zu der in hoffentlich offensichtlicher Weise angeordneten Menge der sogenannten **erweiterten reellen Zahlen**

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

Bemerkung 2.1.5. Jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt in $\overline{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum. Für ein Intervall $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit Supremum $a = \sup I$ und Infimum $b = \inf I$ gibt es die Alternativen $a \in I$ oder $a \notin I$ und $b \in I$ oder $b \notin I$. Es gibt damit vier Typen von Intervallen in $\overline{\mathbb{R}}$, für die die beiden folgenden Notationen gebräuchlich sind:

$$\begin{array}{lclcl}
[a,b] & = & [a,b] & = & \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\} \\
]a,b[& = & (a,b) & = & \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\} \\
[a,b[& = & [a,b) & = & \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b\} \\
]a,b] & = & (a,b] & = & \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b\}
\end{array}$$

Wählen wir hier $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig mit $a < b$, so erhalten wir genau alle Intervalle in $\overline{\mathbb{R}}$ mit mehr als einem Element. Wir benutzen die eben erklärten Notationen jedoch auch im Fall $a \geq b$, sie bezeichnen dann manchmal eine einpunktige Menge und meist die leere Menge. Ich hoffe, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann mit (a, b) ein Intervall gemeint ist und wann ein Paar aus $\mathbb{R}^2$. Ein Intervall in $\mathbb{R}$ nennen wir ein **reelles Intervall**.

Bemerkung 2.1.6. Ein Intervall in $\overline{\mathbb{R}}$ heißt **kompakt** genau dann, wenn es eines unserer $[a, b]$ ist. Der Begriff "kompakt" wird in 3.4.1 auf beliebige Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ verallgemeinert. Ein reelles Intervall heißt **offen** genau dann, wenn es eines unserer (a, b) hat. Der Begriff "offen" wird in 4.3.1 auf beliebige Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ verallgemeinert. Wir nennen ein reelles Intervall **halboffen** genau dann, wenn es nicht aus einem einzigen Punkt besteht, und verallgemeinern den Begriff "halboffen" in 4.1.1 auf beliebige Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$. So sind in diesem Text etwa alle offenen Intervalle auch halboffen. In der Literatur wird der Begriff halboffen meist abweichend davon verwendet als Bezeichnung für alle reellen Intervalle, die weder offen noch kompakt sind.

Definition 2.1.7. Gegeben ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt eine Teilmenge $W \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine **Umgebung von** x genau dann, wenn sie ein Intervall (a, b) umfaßt mit $a < x < b$. Eine Teilmenge $W \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt eine **Umgebung von** ∞ genau dann, wenn sie ein Intervall $(a, \infty]$ umfaßt mit $a < \infty$. Eine Teilmenge $W \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt eine **Umgebung von** $-\infty$ genau dann, wenn sie ein Intervall $[-\infty, b)$ umfaßt mit $-\infty < b$.

Bemerkung 2.1.8. Eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ können wir auch charakterisieren als eine Teilmenge $W \subset \overline{\mathbb{R}}$, die für mindestens ein reelles $\varepsilon > 0$ das Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ umfaßt, oder äquivalent als eine Teilmenge, die für mindestens ein reelles $\varepsilon > 0$ das Intervall $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ umfaßt. Eine der Motivationen für unsere großzügige Definition des Umgebungsbegriffs ist, daß er uns durch seine große Allgemeinheit dazu verhelfen soll, die Diskussion derartiger Nebensächlichkeiten weitgehend zu vermeiden. Gegeben $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ nennen wir das offene Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ die ε-**Umgebung von** x.

Beispiel 2.1.9. Das kompakte Intervall $[0, 1]$ ist eine Umgebung von jedem Punkt aus dem offenen Intervall $(0, 1)$, aber von keinem anderen Punkt der erweiterten reellen Zahlengeraden. $\mathbb{Q}$ ist für keinen Punkt der erweiterten reellen Zahlengeraden eine Umgebung.

Bemerkung 2.1.10. Offensichtlich besitzen je zwei verschiedene Punkte der erweiterten reellen Zahlengeraden zueinander disjunkte Umgebungen, und der Schnitt von je zwei Umgebungen ein- und desselben Punktes ist wieder eine Umgebung des besagten Punktes.

Bemerkung 2.1.11. Bei der Vor- und Nachbereitung dieser Vorlesung ist mir erst richtig klar geworden, welch großer Teil der Diskussion der Begriffe Grenzwert und Stetigkeit im Rahmen der Analysis einer reellen Veränderlichen nur die Struktur der reellen Zahlen als angeordnete Menge betrifft. Die Resultate dieses Abschnitts gelten im Übrigen mit unverändertem Beweis auch allgemeiner für einen beliebigen archimedisch angeordneten Körper und zu einem guten Teil sogar für einen beliebigen angeordneten Körper.

Definition 2.1.12. Eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$ von den natürlichen Zahlen in eine Menge X nennen wir eine **Folge** in X. Wir schreiben eine Folge meist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $x_0, x_1, x_2, \ldots$ oder auch einfach nur x_n. Die x_i heißen die **Folgenglieder**. Manchmal nennen wir allerdings auch Abbildungen Folgen, die erst ab $n = 1$ definiert sind.

Definition 2.1.13. Sagen wir, eine Aussage gelte für **fast alle Elemente** einer Menge, so soll das bedeuten, daß sie gilt für alle Elemente bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen. Sagen wir, eine Aussage gelte für **fast alle Glieder** einer Folge, so soll das bedeuten, daß für fast alle Indizes n unsere Aussage für das n-te Folgenglied gilt.

Definition 2.1.14. Sei $x_0, x_1, \ldots$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und $x \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Punkt. Wir sagen, **die Folge x_n konvergiere gegen x** genau dann, wenn jede Umgebung von x fast alle Glieder der Folge enthält. Wir schreiben in diesem Fall auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

und nennen x einen **Grenzwert** oder lateinisierend **Limes** der Folge. Nach dem im folgenden bewiesenen Lemma 2.1.19 dürfen wir uns sogar den bestimmten Artikel erlauben und von **dem** Grenzwert reden.

Beispiel 2.1.15. Die **konstante Folge** $x_n = x\ \forall n$ konvergiert gegen x. In der Tat liegen bei dieser Folge in jeder Umgebung von x nicht nur fast alle, sondern sogar alle Folgenglieder.

Beispiel 2.1.16. Die Folge $x_n = n$ konvergiert gegen plus Unendlich, in Formeln

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

In der Tat umfaßt jede Umgebung U von ∞ per definitionem ein Intervall der Gestalt $(a, \infty]$ für $a \in \mathbb{R}$, und bereits in jedem derartigen Intervall liegen nach 1.4.9 fast alle Folgenglieder.

Definition 2.1.17. Eine **Nullfolge** ist eine Folge, die gegen Null konvergiert.

Beispiel 2.1.18. Die Folge $x_n = 1/n$ ist eine Nullfolge, in Formeln

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

In der Tat umfaßt jede Umgebung U von 0 per definitionem ein Intervall der Gestalt $(-\varepsilon, \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$, und bereits in jedem derartigen Intervall liegen alle Folgenglieder mit $n > (1/\varepsilon)$, nach 1.4.9 also fast alle Folgenglieder.

Lemma 2.1.19 (Eindeutigkeit des Grenzwerts). *Ein- und dieselbe Folge kann nicht gegen zwei verschiedene Punkte konvergieren, in Formeln*

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = x \textit{ und } \lim_{n\to\infty} x_n = y) \Rightarrow (x = y)$$

Beweis. Durch Widerspruch. Sind unsere Punkte x und y verschieden, so besitzen sie auch disjunkte Umgebungen W und W'. Dann können aber von unseren unendlich vielen Folgengliedern nicht fast alle in W und fast alle in W' liegen, also kann unsere Folge nicht gleichzeitig gegen x und gegen y konvergieren. □

Definition 2.1.20. Unter einem **Fundamentalsystem** von Umgebungen eines Punktes versteht man ein System alias eine Menge von Umgebungen besagten Punktes derart, daß jede Umgebung unseres Punktes mindestens eine Umgebung unseres Systems umfaßt.

Beispiele 2.1.21. Die ε-Umgebungen eines Punktes $x \in \mathbb{R}$ bilden ein Fundamentalsystem von Umgebungen von x, desgleichen aber auch alle Intervalle $[x - 3\varepsilon, x + 4\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ oder alle Intervalle $[x - 1/n, x + 1/n]$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Ein Fundamentalsystem von Umgebungen von ∞ bilden etwa die Intervalle $[K, \infty]$ mit $K \in \mathbb{R}$ oder mit $K \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.1.22. Um die Konvergenz einer Folge gegen einen Punkt nachzuweisen müssen wir offensichtlich nur für alle Umgebungen aus einem möglichen Fundamentalsystem prüfen, daß fast alle Folgenglieder darin liegen. Für Konvergenz gegen einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ müssen wir zum Beispiel nur prüfen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die ε-Umgebung von x fast alle Glieder der Folge enthält, im Fall einer reellen Folge also, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit $n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. Im Fall $x = \infty$ dahingegen ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ gleichbedeutend dazu, daß für jedes $K \in \mathbb{N}$ fast alle Folgenglieder oberhalb von K liegen.

Bemerkung 2.1.23. Ich will versuchen, in der Vorlesung einem Farbencode zu folgen, nach dem vorgegebene Umgebungen von Grenzwerten und dergleichen in gelber Farbe dargestellt werden und dazu zu findende N und dergleichen in roter Farbe.

Bemerkung 2.1.24. Mit unserer Konvention für die “Konvergenz gegen $\pm\infty$” bewegen wir uns zwar im Rahmen des allgemeinen Begriffs der Konvergenz in “topologischen Räumen” **??**, aber außerhalb der in der einführenden Literatur zur Analysis üblichen Konventionen, in denen die Terminologie **bestimmte Divergenz gegen** $\pm\infty$ verwendet wird. Üblicherweise bleibt in anderen Worten der Begriff der konvergenten Folge reserviert für Folgen, die gegen eine reelle Zahl konvergieren. Wir nennen solche Folgen **reell konvergent**.

Falls eine Folge nicht konvergiert, auch nicht gegen ∞ oder $-\infty$, so nennt man sie **unbestimmt divergent**. Wir verlieren mit dieser Terminologie zwar etwas an Kohärenz, da wir im weiteren "Reihen" aus wieder anderen Gründen nur dann konvergent nennen werden, wenn die Folge ihrer Partialsummeen *reell* konvergent ist. Das schien mir jedoch ein kleineres Übel, als es eine unnötig einschränkende oder in Fälle aufspaltende Formulierung von Aussagen wie 2.1.28 oder 2.2.6 wäre.

Proposition 2.1.25. *Für jede Folge x_n von von Null verschiedenen reellen Zahlen gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} |\tfrac{1}{x_n}| = \infty$$

Beweis. Für alle $K > 0$ gilt natürlich $|\frac{1}{x_n}| \in (K, \infty] \quad \Leftarrow \quad x_n \in (-K^{-1}, K^{-1})$. Gilt also die rechte Seite bei vorgegebenem $K > 0$ für fast alle Folgenglieder, so auch die Linke. Ebenso gilt für alle $\varepsilon > 0$ offensichtlich $x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \Leftarrow$ $|\frac{1}{x_n}| \in (\frac{1}{\varepsilon}, \infty]$. Gilt also die rechte Seite bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für fast alle Folgenglieder, so auch die Linke. $\square$

Bemerkung 2.1.26. Vereinbaren wir $1/|\infty| = 1/|-\infty| = 0$ und $|1/0| = \infty$, so gilt diese Proposition mit demselben Beweis sogar für jede Folge in $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.1.27. *Die folgende Tabelle beschreibt das Konvergenzverhalten der Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von x:*

$$\begin{array}{rl} x > 1 & \lim_{n\to\infty} x^n = \infty; \\ x = 1 & \lim_{n\to\infty} x^n = 1; \\ |x| < 1 & \lim_{n\to\infty} x^n = 0; \\ x \leq -1 & \textit{Die Folge } x^n \textit{ divergiert unbestimmt.} \end{array}$$

Beweis. Im Fall $x > 1$ schreiben wir $x = 1 + y$ mit $y > 0$ und erhalten mit der binomischen Formel

$$x^n = (1 + y)^n \geq 1 + ny$$

Aber natürlich gilt $1 + ny \geq K$ genau dann, wenn gilt $n \geq \frac{1}{y}(K - 1)$, und das gilt bei festem K für fast alle n. Im Fall $x = 1$ ist die Folge konstant 1 und es ist nichts zu zeigen. Falls $0 < |x| < 1$ gilt nach dem Vorhergehenden $\lim_{n\to\infty} |1/x^n| = \infty$ und daraus folgt mit Proposition 2.1.25 $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Für $x = 0$ gilt das natürlich eh. Im Fall $x \leq -1$ gilt $|x^n - x^{n+1}| \geq 2$ für alle n. Also kann die Folge nicht gegen eine reelle Zahl a konvergieren, denn dann müßte gelten $|a - x^n| < 1$ für fast alle n und dann nach der Dreiecksungleichung $|x^n - x^{n+1}| < 2$ für fast alle n. Die Folge kann in diesem Fall aber auch nicht gegen $\pm\infty$ konvergieren, da die Folgenglieder immer abwechselnd positiv und negativ sind. $\square$

Lemma 2.1.28 (Quetschlemma). *Sind in $\overline{\mathbb{R}}$ drei Folgen a_n, b_n, c_n gegeben mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle n, und konvergieren a_n und c_n gegen denselben Grenzwert, so konvergiert auch b_n gegen diesen Grenzwert.*

Beweis. Das folgt aus den Definitionen mit der Erkenntnis, daß sich jede Umgebung eines Punktes verkleinern läßt zu einer Umgebung desselben Punktes, die ein Intervall ist. Es reicht ja, für jede solche "Intervallumgebung" I des gemeinsamen Grenzwerts von a_n und c_n zu zeigen, daß fast alle b_n darinliegen. Das ist aber klar, da fast alle a_n und fast alle c_n darinliegen. □

Beispiel 2.1.29. Konvergiert eine Folge reeller Zahlen a_n gegen ∞, so konvergiert jede Folge reeller Zahlen b_n mit $a_n \leq b_n$ für alle n auch gegen ∞. Das folgt zum Beispiel, indem wir als c_n die konstante Folge ∞ nehmen und das Quetschlemma anwenden.

Lemma 2.1.30 (Erhaltung von Ungleichungen). *Seien a_n, b_n Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$ mit Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Gilt $a_n \leq b_n$ für alle n, so folgt $a \leq b$.*

Beweis. Wäre hier $b < a$, so fänden wir k mit $b < k < a$. Dann wäre $[-\infty, k)$ eine Umgebung von b und $(k, \infty]$ eine Umgebung von a. Fast alle a_n müssten also in $(k, \infty]$ liegen und fast alle b_n in $[-\infty, k)$ und es folgte $a_n > b_n$ für fast alle n im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Satz 2.1.31 (Rechenregeln für Grenzwerte). *Seien a_n, b_n Folgen reeller Zahlen mit reellen Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.*

1. *Die Summe bzw. das Produkt unserer Folgen konvergieren gegen die Summe bzw. das Produkt ihrer Grenzwerte, in Formeln*

$$\begin{array}{lcl} \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) & = & a + b \\ \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) & = & ab \end{array}$$

2. *Sind alle Glieder der Folge b_n sowie ihr Grenzwert b von Null verschieden, so gilt für die Folge der Kehrwerte*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

Lemma 2.1.32. 1. *Gegeben $a, b \in \mathbb{R}$ und eine Umgebung W von $a + b$ gibt es Umgebungen U von a und V von b mit $U + V \subset W$.*

2. *Gegeben $a, b \in \mathbb{R}$ und eine Umgebung W von $a \cdot b$ gibt es Umgebungen U von a und V von b mit $U \cdot V \subset W$.*

3. *Gegeben $b \in \mathbb{R}^\times$ und eine Umgebung W von b^{-1} gibt es eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^\times$ von b mit $V^{-1} \subset W$.*

Bemerkung 2.1.33. In Erinnerung an I.3.1.2.6 verstehen wir hier $U + V = \{x + y \mid x \in U,\ y \in V\}$ und $U \cdot V = \{x \cdot y \mid x \in U,\ y \in V\}$. In Anlehnung an I.2.2.6 verstehen wir weiter $V^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in V\}$.

Beweis des Lemmas. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß W sogar eine ε-Umgebung von $a + b$ ist. Nehmen wir dann für U bzw. V die $\varepsilon/2$-Umgebung von a bzw. b, so gilt in der Tat $U + V \subset W$. Für die zweite Formel beginnen wir mit der Abschätzung

$$\begin{array}{rcl} |xy - ab| & = & |(x-a)y + a(y-b)| \\ & \leq & |x-a||y| + |a||y-b| \end{array}$$

Aus den beiden Ungleichungen $|x - a| < \eta$ und $|y - b| < \eta$ folgt zunächst $|y| < |b| + \eta$ und dann

$$|xy - ab| \leq \eta(|b| + \eta + |a|)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nun wieder annehmen, daß W eine ε-Umgebung von $a \cdot b$ ist. Wählen wir dann ein $\eta \in (0, 1)$ mit $\varepsilon > \eta(|b|+1+|a|)$ und nehmen als U bzw. V die η-Umgebungen von a bzw. b, so gilt folglich in der Tat $U \cdot V \subset W$. Um die letzte Aussage zu zeigen, nehmen wir der Einfachkeit halber $b > 0$ an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir nun $W = (a, d)$ mit $0 < a < b < d < \infty$ annehmen, und dann betrachten wir schlicht $V = (d^{-1}, a^{-1})$ und sind fertig. □

Jetzt zeigen wir den Satz. Wir müssen für jede Umgebung W von $a+b$ zeigen, daß fast alle Glieder der Folge $a_n + b_n$ darinliegen. Nach dem vorhergehenden Lemma 2.1.32 finden wir jedoch Umgebungen U von a und V von b mit $U + V \subset W$. Da nach Annahme fast alle Glieder der ersten Folge in U liegen und fast alle Glieder der zweiten Folge in V, liegen damit in der Tat fast alle Glieder der Folge $a_n + b_n$ in W. Ganz genauso folgt aus den anderen Teilen von Lemma 2.1.32, daß der Grenzwert des Produktes zweier Folgen das Produkt der Grenzwerte ist, und ähnlich aber einfacher, daß der Grenzwert der Kehrwerte der Kehrtwert des Grenzwerts ist. □

Beispiel 2.1.34.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 + n}{3n^3 + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + (1/n)^2}{3 + (1/n)} = \frac{5 + 0^2}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$

Bemerkung 2.1.35. Die Addition und die Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lassen sich nicht so zu Abbildungen von ganz $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ nach $\overline{\mathbb{R}}$ fortsetzen, daß die ersten beiden Teile von 2.1.32 entsprechend gelten. Alle derartigen Fortsetzungen auf Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ stimmen jedoch auf dem Schnitt der jeweiligen Definitionsbereiche überein, so daß es sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation jeweils eine größtmögliche "sinnvolle Fortsetzung" gibt, die wir im Rahmen der Topologie **??** als die größtmögliche "stetige Fortsetzung" werden verstehen können. Wir beschreiben diese Fortsetzungen von Addition und Multiplikation durch Abbildungen $+, \cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}} \cup \{*\}$ mit einem eigenen Symbol $*$ für "nicht sinnvoll in $\overline{\mathbb{R}}$ zu definieren". Unsere Fortsetzungen werden mit dieser Konvention gegeben durch die Formeln

$$\begin{array}{rcrcrl} a + \infty & = & \infty + a & = & \infty & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ a + (-\infty) & = & -\infty + a & = & -\infty & \forall a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \infty + (-\infty) & = & -\infty + \infty & = & * & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcrcrl} a\infty & = & \infty a & = & \infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a > 0 \\ a\infty & = & \infty a & = & -\infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a < 0 \\ a(-\infty) & = & (-\infty)a & = & -\infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a > 0 \\ a(-\infty) & = & (-\infty)a & = & \infty & \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, a < 0 \\ 0\infty & = & \infty 0 & = & * & \\ 0(-\infty) & = & (-\infty)0 & = & * & \end{array}$$

Übung 2.1.36. Man zeige: Die Regeln 2.1.31.1 zum Vertauschen von Grenzwertbildung mit Addition und Multiplikation gelten auch noch, wenn wir $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ zulassen und $a + b$ beziehungsweise $a \cdot b$ sinnvoll definiert sind im Sinne der vorhergehenden Bemerkung 2.1.35.

Übung 2.1.37. Für jedes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ gibt es eine absteigende Folge von Umgebungen $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ derart, daß jede Umgebung von x fast alle der U_n umfaßt.

Übung 2.1.38. Ist $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine nichtleere Teilmenge, so ist $\sup A$ das größte Element in der Menge G aller Punkte aus den erweiterten reellen Zahlen, die Grenzwerte von Folgen aus A sind.

Übung 2.1.39. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Umgekehrt folgt aus $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ bereits $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Übung 2.1.40. Ist (a_n) eine reell konvergente Folge reeller Zahlen, so gilt $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

2.2 Vollständigkeit der reellen Zahlen

Definition 2.2.1. Eine Menge von reellen Zahlen heißt **beschränkt** genau dann, wenn sie in $\mathbb{R}$ eine obere und eine untere Schranke besitzt. Eine Folge reeller Zahlen heißt beschränkt genau dann, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

Lemma 2.2.2. *Jede reell konvergente Folge von reellen Zahlen ist beschränkt.*

Beweis. Ist $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert unserer Folge, so liegen fast alle Folgenglieder in $[x-1, x+1]$. Die endlich vielen Ausnahmen können wir durch hinreichend große Schranken auch noch einfangen. □

Definition 2.2.3. Eine Folge x_n in einer Menge mit Ordnungsrelation heißt
monoton wachsend genau dann, wenn gilt $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots$
streng monoton wachsend genau dann, wenn gilt $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$
monoton fallend genau dann, wenn gilt $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots$
streng monoton fallend genau dann, wenn gilt $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$

Eine Folge heißt **monoton** genau dann, wenn sie monoton wächst oder monoton fällt. Eine Folge heißt **streng monoton** genau dann, wenn sie streng monoton wächst oder streng monoton fällt. Diese Begriffe werden in 3.2.1 auf Abbildungen zwischen beliebigen angeordneten Mengen verallgemeinert.

Lemma 2.2.4. *Jede monoton wachsende Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen das Supremum der Menge ihrer Folgenglieder. Jede monoton fallende Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert gegen das Infimum der Menge ihrer Folgenglieder. Jede monotone beschränkte Folge von reellen Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl.*

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, die Zweite zeigt man analog und die Dritte ist eine offensichtliche Konsequenz. Sei in der Tat s das Supremum alias die kleinste obere Schranke der Menge aller Folgenglieder. Kein p mit $p < s$ ist dann eine obere Schranke der Menge aller Folgenglieder, folglich liegen für jedes $p < s$ ein und damit wegen der Monotonie fast alle x_n in $(p, s]$. Damit liegen in jeder Umgebung von s fast alle Folgenglieder. □

Definition 2.2.5. Sei $x_0, x_1, x_2, \ldots$ eine Folge. Sind $0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ natürliche Zahlen, so nennen wir die Folge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Gliedern

$$x_{n_0}, x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$$

eine **Teilfolge** der Folge x_n. Schreiben wir eine Folge als eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to X$, $x \mapsto x(n) = x_n$, so ist eine Teilfolge von x demnach eine Abbildung der Gestalt $x \circ f$ für eine streng monoton wachsende Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Lemma 2.2.6. *Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert, und zwar gegen denselben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge.*

Beweis. Das ist klar nach den Definitionen. □

Lemma 2.2.7. *Jede Folge in einer angeordneten Menge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Bemerkung 2.2.8. Hier mögen Sie sich an unsere Sprachregelung I.2.3.2 erinnern. Gemeint ist demnach: Jede Folge in einer angeordneten Menge besitzt mindestens eine monotone Teilfolge.

Beweis. Wir nennen ein Folgenglied x_n oder präziser seinen Index n einen "Aussichtspunkt" der Folge genau dann, wenn alle späteren Folgenglieder kleiner sind, in Formeln $x_n > x_m$ für alle $m > n$. Besitzt unsere Folge unendlich viele Aussichtspunkte, so bilden diese eine streng monoton fallende Teilfolge. Sonst gibt es einen letzten Aussichtspunkt x_n. Dann finden wir aber eine monoton wachsende Teilfolge, die mit x_{n+1} beginnt, denn ab dem Index $n+1$ kommt dann nach jedem Folgenglied noch ein anderes, das mindestens ebenso groß ist. □

Satz 2.2.9 (Bolzano-Weierstraß). *Jede Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt eine in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergente Teilfolge. Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine reell konvergente Teilfolge.*

Beweis. Jede Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt nach 2.2.7 eine monotone Teilfolge, und diese ist nach 2.2.4 konvergent in $\overline{\mathbb{R}}$. Ist unsere Folge beschränkt, so ist auch jede solche Teilfolge beschränkt und konvergiert folglich gegen eine reelle Zahl. □

Definition 2.2.10. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen heißt eine **Cauchy-Folge** genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$ falls $n, m \geq N$.

Satz 2.2.11. *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Daß jede reell konvergente Folge Cauchy sein muß, ist leicht zu sehen: Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt, daß es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|x_n - x| < \varepsilon/2$ für $n \geq N$. Daraus folgt dann $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für $n, m \geq N$. Wir zeigen nun umgekehrt, daß auch jede Cauchy-Folge gegen eine reelle Zahl konvergiert. Eine Cauchy-Folge x_n ist sicher beschränkt, denn wählen wir für $\varepsilon = 1$ ein $N = N_\varepsilon$, so liegen fast alle Folgenglieder im Intervall $(x_N - 1, x_N + 1)$, und die endlich vielen Ausnahmen können wir durch eine hinreichend große Schranke auch noch einfangen. Unsere Cauchy-Folge besitzt daher nach 2.2.9 eine reell konvergente Teilfolge x_{n_k}, sagen wir $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Wir behaupten, daß dann auch die Folge x_n selbst gegen x konvergiert. In der Tat gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε mit $n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$. Aus $n \geq N_\varepsilon$ folgt damit insbesondere $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$ für fast alle k und dann im Grenzwert $|x_n - x| \leq \varepsilon$, da ja die Ungleichungen $-\varepsilon \leq x_n - x_{n_k} \leq \varepsilon$ bestehen bleiben beim Grenzübergang $k \to \infty$. □

Bemerkung 2.2.12. Ein angeordneter Körper, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt **vollständig**. Dieser Begriff ist Teil einer alternativen Charakterisierung der reellen Zahlen, die wir hier als Übung formulieren.

Übung 2.2.13. Gegeben ein angeordneter Körper sind gleichbedeutend: (1) Jede nichtleere Teilmenge mit einer unteren Schranke besitzt eine größte untere Schranke und (2) Der Körper ist archimedisch angeordnet und vollständig.

Übung 2.2.14 ***(Intervallschachtelungsprinzip)***. Gegeben eine absteigende Folge von nichtleeren kompakten Intervallen $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots$ ist auch ihr Schnitt $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} I_\nu$ nicht leer.

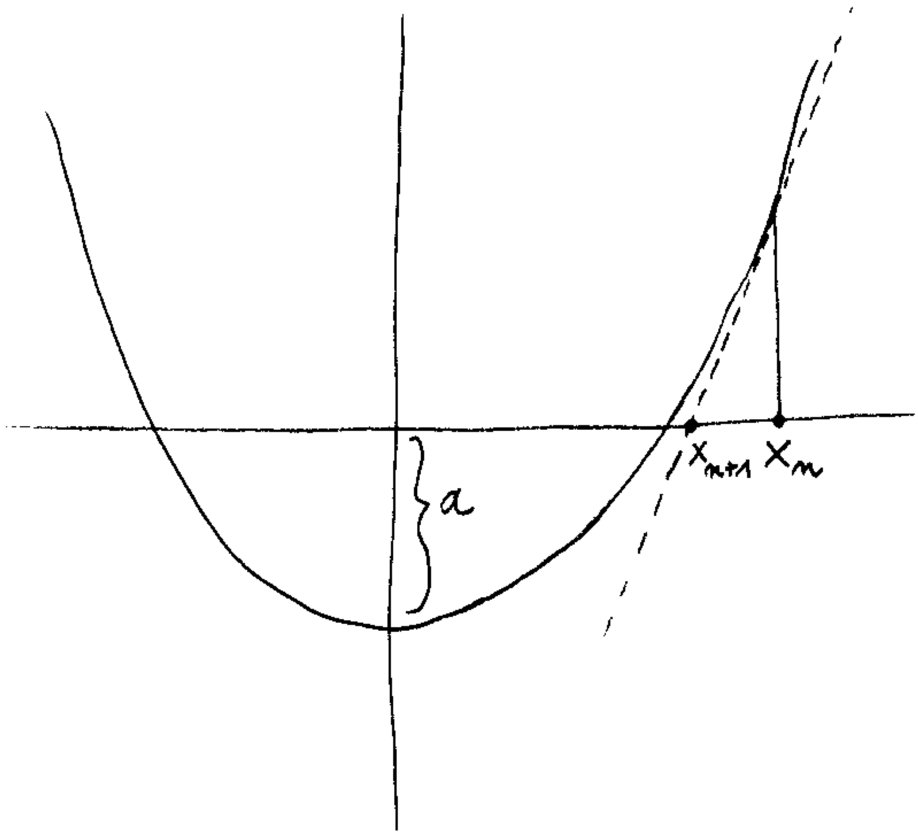
2.3 Vergleich von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Bemerkung 2.3.1. Wir erinnern daran, daß es nach 1.1.1 keine rationale Zahl mit Quadrat Zwei gibt. Im Gegensatz dazu zeigen wir nun, daß es in den reellen Zahlen zu jeder nichtnegativen reellen Zahl eine Quadratwurzel gibt.

Satz 2.3.2. *Für jede nichtnegative reelle Zahl $a \geq 0$ gibt es genau eine nichtnegative reelle Zahl $x \geq 0$ mit $x^2 = a$. Man bezeichnet dies x mit $\sqrt{a}$ und nennt es die* **Wurzel** *oder genauer* **Quadratwurzel** *von a.*

Beweis. Haben wir einmal eine Lösung $X = b$ der Gleichung $X^2 - a = 0$ gefunden, so gilt $X^2 - a = (X+b)(X-b)$. Folglich ist $X = -b$ dann die einzige andere Lösung, denn ein Produkt in einem Körper ist nur dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Die Eindeutigkeit der nichtnegativen Lösung ist damit klar und nur die Existenz muß noch gezeigt werden. Wir konstruieren dazu eine Folge und beginnen mit $x_0 = \max(1, a)$. Dann gilt sicherlich schon einmal $x_0^2 \geq a$. Gegeben $x_n > 0$ mit $x_n^2 \geq a$ machen wir den Ansatz $(x_n - \varepsilon)^2 = a$ und erhalten $\varepsilon = (x_n^2 + \varepsilon^2 - a)/2x_n$. Nun vernachlässigen wir $\varepsilon^2/2x_n$, vergessen unseren Ansatz und setzen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$



Graphische Darstellung unserer induktiven Formel für die Glieder der Folge x_n mit Grenzwert $\sqrt{a}$ aus dem Beweis von 2.3.2

Man sieht sofort, daß aus $x_n^2 \geq a$ und $x_n > 0$ folgt $x_{n+1}^2 \geq a$ und $x_n \geq x_{n+1} > 0$. Da die Folge der x_n monoton fällt und durch Null nach unten beschränkt ist, besitzt sie einen Grenzwert $x \geq 0$. Aus der Gleichung

$$2x_n x_{n+1} = x_n^2 + a$$

folgt dann $x^2 = a$ durch Übergang zum Grenzwert für $n \to \infty$ auf beiden Seiten. □

Bemerkung 2.3.3. Die Ungleichungen $a/x_n \leq \sqrt{a} < x_n$ erlauben uns sogar abzuschätzen, wie gut unsere Approximation x_n mindestens sein muß. Machen wir für den Fehler den Ansatz $x_n = \sqrt{a}(1 + f_n)$, so ergibt sich mit etwas Rechnen

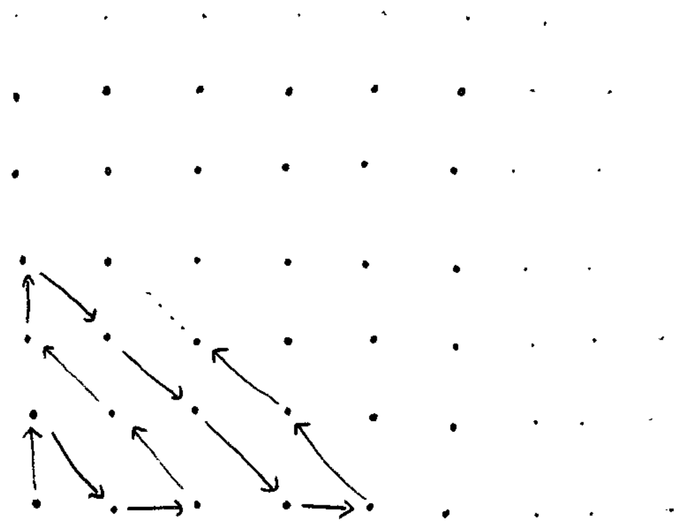
$$f_{n+1} = \frac{f_n^2}{2(1 + f_n)}$$

und indem wir im Nenner die 1 beziehungsweise f_n verkleinern zu Null erhalten wir die Abschätzung $f_{n+1} \leq \frac{1}{2}\min(f_n, f_n^2)$. Sobald also x_n so nah bei $\sqrt{a}$ ist, daß gilt $f_n < 1$, "verdoppelt sich die Anzahl der richtigen Stellen beim Übergang von x_n zu x_{n+1}". Man spricht unter diesen Umständen auch von **quadratischer Konvergenz**. Anschaulich erhält man x_{n+1}, indem man von x_n senkrecht hochgeht zum Graph der Funktion $y = x^2 - a$ und dann auf der Tangente an diesen Graphen wieder herunter auf die x-Achse. Es ist damit auch anschaulich klar, daß unser Verfahren sehr schnell konvergieren sollte. Dieses Verfahren kann auch zur Bestimmung der Nullstellen allgemeinerer Funktionen anwenden. Es heißt das **Newton-Verfahren**.

Definition 2.3.4. Eine Menge heißt **abzählbar** genau dann, wenn es eine Bijektion unserer Menge mit einer Teilmenge der Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen gibt. Gleichbedeutend können wir auch fordern, daß unsere Menge entweder leer ist oder es eine Surjektion von $\mathbb{N}$ darauf gibt. Eine Menge heißt **abzählbar unendlich** genau dann, wenn sie abzählbar aber nicht endlich ist. Eine Menge heißt **überabzählbar** genau dann, wenn sie nicht abzählbar ist.

Satz 2.3.5.
1. *Es gibt eine Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$, in Worten: Die Menge der rationalen Zahlen ist* **abzählbar unendlich***.*
2. *Es gibt keine Surjektion $\mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, in Worten: Die Menge der reellen Zahlen ist* **überabzählbar***.*

Beweis. 1. Für jede natürliche Zahl N gibt es nur endlich viele Brüche $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ und $|p| \leq N$, $|q| \leq N$. Wir beginnen unser



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar und damit natürlich auch allgemeiner das Produkt von je zwei und dann auch von endlich vielen abzählbaren Mengen.

Abzählen von $\mathbb{Q}$ mit den Brüchen für $N = 1$, dann nehmen wir die Brüche hinzu mit $N = 2$, und indem wir so weitermachen zählen wir ganz $\mathbb{Q}$ ab.

2. Hierzu verwenden wir das **Cantor'sche Diagonalverfahren**. Man beachte zunächst, daß ein unendlicher Dezimalbruch, in dem die Ziffern Null und Neun nicht vorkommen, nur dann dieselbe reelle Zahl darstellt wie ein beliebiger anderer unendlicher Dezimalbruch, wenn die beiden in jeder Stelle übereinstimmen. Wir nehmen nun eine beliebige Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \mapsto r_i$, und zeigen, daß sie keine Surjektion sein kann. Wir schreiben dazu jedes r_i als unendlichen Dezimalbruch. Dann finden wir einen unendlichen Dezimalbruch r, bei dem die Ziffern Null und Neun nicht vorkommen und so, daß r an der i-ten Stelle nach dem Komma verschieden ist von r_i und an der ersten Stelle vor dem Komma von r_0. Dies r ist dann verschieden von allen r_i und unsere Abbildung $i \mapsto r_i$ kann keine Surjektion gewesen sein. □

Bemerkung 2.3.6. Man kann sich fragen, ob jede Teilmenge der reellen Zahlen entweder abzählbar ist oder in Bijektion zu den reellen Zahlen selber. Diese Fragestellung, die schon auf Cantor zurückgeht, heißt die **Kontinuumshypothese**. Sie wurde 1963 von Paul Cohen in sehr merkwürdiger Weise gelöst: Er zeigte, daß unsere Frage in dem axiomatischen Rahmen, in dem man die Mengenlehre üblicherweise formalisiert, nicht entscheidbar ist. Cohen wurde für diese Leistung auf dem internationalen Mathematikerkongress 1966 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Die Kontinuumshypothese ist übrigends die erste Frage einer berühmten Liste von 23 Fragestellungen, den sogenannten **Hilbert'schen Problemen**, die David Hilbert 1900 auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris vorlegte in seinem Bemühen, "aus verschiedenen mathematischen Disziplinen einzelne bestimmte Probleme zu nennen, von deren Behandlung eine Förderung der Wissenschaft sich erwarten läßt".

2.4 Die Kreiszahl π

Bemerkung 2.4.1. Bekanntlich bezeichnet π, ein kleines griechisches P für Perimeter, das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises. Um diese Anschauung zu formalisieren zur Definition einer reellen Zahl im Sinne von 1.4.6 gehen wir aus von der anschaulichen Bedeutung von π als Länge des Halbkreises H mit Radius Eins

$$H = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1,\ b \geq 0\}$$

Seien dazu $x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die beiden Abbildungen, die jedem Punkt der Ebene seine erste bzw. zweite Koordinate zuordnen, also $v = (x(v), y(v)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 12{,}87538\ldots \\
r_1 &= 0{,}01338\ldots \\
r_2 &= 14{,}22222\ldots \\
r_3 &= 338{,}12345\ldots \\
&\vdots \\
r &= 1{,}134\ldots
\end{aligned}
$$

Illustration zum Cantor'schen Diagonalverfahren. Ähnlich zeigt man, daß die Menge $\mathrm{Ens}(\mathbb{N}, E)$ aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ in eine Menge E mit mindestens zwei Elementen nicht abzählbar ist.

Die Distanz $d(v, w) \in \mathbb{R}$ zwischen zwei Punkten $v, w \in \mathbb{R}^2$ der Ebene erklären wir in Erinnerung an Pythagoras duch die Formel

$$d(v, w) = \sqrt{(x(v) - x(w))^2 + (y(v) - y(w))^2}$$

und definieren die **Kreiszahl** $\pi \in \mathbb{R}$ als das Supremum über die "Längen aller in H einbeschriebenen Polygonzüge", in Formeln

$$\pi = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(v_{i-1}, v_i) \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N},\ v_0, v_1, \ldots, v_n \in H, \\ x(v_0) < x(v_1) < \ldots < x(v_n) \end{array} \right\}$$

Mithilfe der Abschätzung $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ erkennt man, daß die Zahl 4 eine obere Schranke ist für unsere Menge von Längen von Polygonzügen, mithin haben wir in der Tat eine reelle Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ definiert. Wir werden in 7.7.17 sehen, wie man diese Zahl im Prinzip bis zu einer beliebig vorgegebenen Stelle nach dem Komma berechnen kann. Die Definition selbst ist sehr einfach und wir konnten sie nur deshalb nicht gleich im Zusammenhang mit der Definition der reellen Zahlen geben, weil sie die erst in 2.3.2 eingeführten Wurzeln benötigt.

Bemerkung 2.4.2. Die Zahl π ist nicht rational, in Formeln $\pi \notin \mathbb{Q}$, wie Lambert bereits 1766 zeigen konnte. Anders ausgedrückt läßt sich π nicht durch einen periodischen Dezimalbruch darstellen. Wir geben einen Beweis in 7.7.6. Unsere Kreiszahl π ist noch nicht einmal **algebraisch**, als da heißt Nullstelle eines nichttrivialen Polynoms mit rationalen Koeffizienten, d.h. es gilt keine Gleichung der Gestalt

$$\pi^n + q_{n-1}\pi^{n-1} + \ldots + q_1\pi + q_0 = 0 \quad \text{mit } q_{n-1}, \ldots, q_0 \in \mathbb{Q} \text{ und } n \geq 1.$$

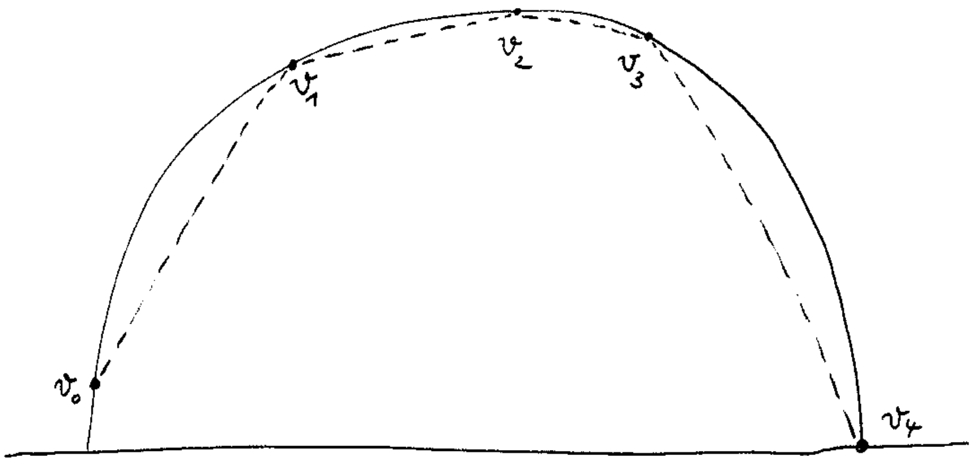
Derartige reelle Zahlen heißen **transzendent**, lateinisch für "überschreitend", da ihre Behandlung "die Grenzen der Algebra überschreitet". Die Transzendenz von π wurde 1882 von Lindemann in Freiburg bewiesen. Seine Büste steht im vierten Stock des Mathematischen Instituts. Er war übrigends Hilbert's Doktorvater.

2.5 Grenzwerte von Reihen

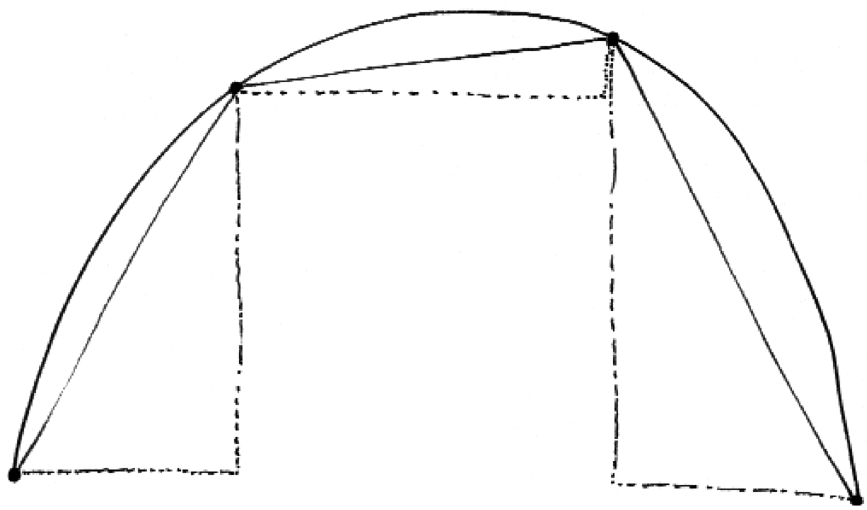
Definition 2.5.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bezeichnet die Folge der **Partialsummen** $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und, falls die Folge dieser Partialsummen konvergiert, auch ihren Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Wir



Ein einbeschriebener Polygonzug



Diese Abbildung soll veranschaulichen, warum Vier eine obere Schranke für die Längen einbeschriebener Polygonzüge ist: Die horizontalen Stücke haben Gesamtlänge ≤ 2, die vertikalen Stücke Gesamtlänge ≤ 2.

sagen dann, die **Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiere gegen** s. Nennen wir eine Reihe **konvergent**, so meinen wir stets, daß unsere Reihe gegen eine reelle Zahl konvergiert und nicht etwa gegen $\pm\infty$. Die a_k heißen die **Reihenglieder**.

Bemerkung 2.5.2. Es wäre terminologisch kohärenter gewesen, wie bei Folgen auch bei Reihen von "reell konvergenten Reihen" zu sprechen. Das schien mir jedoch ungeschickt, da man den Begriff dann nicht als Verb verwenden kann: "Die Reihe reell-konvergiert" klingt einfach zu holprig, und Sprechweisen wie "die Reihe konvergiert absolut" sind oft praktisch.

Beispiel 2.5.3.

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \textstyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \\ &= \textstyle\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1\end{aligned}$$

Satz 2.5.4 (Geometrische Reihe). *Sei* $|x| < 1$. *So gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Beweis. Sicher gilt $(1-x)(1+x+\ldots+x^n) = 1-x^{n+1}$, die Partialsummen unserer Reihe ergeben sich also zu

$$1+x+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

und streben für $n \to \infty$ wie gewünscht gegen $\frac{1}{1-x}$. $\square$

Beispiel 2.5.5. Zum Beispiel erhalten wir $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$ und

$$0{,}999\ldots = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 1$$

Übung 2.5.6. Genau dann läßt sich eine reelle Zahl durch einen periodischen Dezimalbruch darstellen, wenn sie rational ist.

Satz 2.5.7. *Sind* $\sum a_k$ *und* $\sum b_k$ *konvergente Reihen, so konvergieren auch die Reihen* $\sum (a_k + b_k)$ *und* $\sum \lambda a_k$ *und es gilt:*

$$\begin{aligned}\textstyle\sum (a_k + b_k) &= \textstyle\sum a_k + \sum b_k \\ \textstyle\sum \lambda a_k &= \textstyle\lambda \sum a_k\end{aligned}$$

Beweis. Das folgt sofort, wenn man 2.1.31 auf die Folgen der Partialsummen anwendet. □

Bemerkung 2.5.8. Eine Reihe kann nur dann konvergieren, wenn die Folge der Reihenglieder gegen Null strebt. In der Tat folgt das sofort, wenn wir 2.1.40 auf die Folge der Partialsummen anwenden.

Lemma 2.5.9. *Eine Reihe, die aus nichtnegativen Gliedern besteht, konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.*

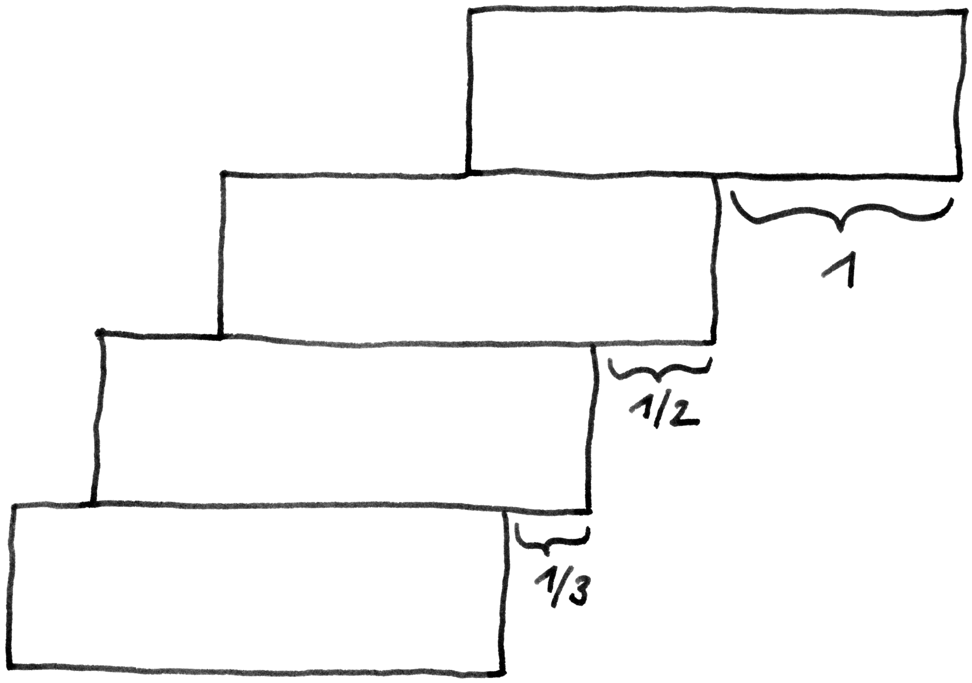
Beweis. Sind alle Reihenglieder nichtnegativ, so wächst die Folge der Partialsummen monoton. Ist diese Folge auch noch beschränkt, so muß sie nach 2.2.4 reell konvergent sein. Die Umkehrung ist eh klar. □

Beispiel 2.5.10. Die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert nicht, da ja gilt

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} & \geq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4} & \geq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} & \geq & \frac{1}{2} \\ \text{und} & \text{so} & \text{weiter.} \end{array}$$

Jedoch konvergieren die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für $s = 2, 3, 4, \ldots$, da für jede dieser Reihen die Folge der Partialsummen beschränkt ist durch $1+\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2$. In der Funktionentheorie können Sie lernen, daß diese Reihen sogar eine außerordentlich interessante Funktion $\zeta(s)$ definieren, die sogenannte **Riemann'sche ζ-Funktion**. Wir werden in **??** zeigen, daß zum Beispiel gilt $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ und nach **??** haben wir sogar ganz allgemein $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. Alle diese Formeln sind berühmte Resultate des 1707 in Basel geborenen Mathematikers **Leonhard Euler**.

Bemerkung 2.5.11. Für diejenigen unter Ihnen, die die komplexen Zahlen bereits kennen, sei erwähnt, daß es mit etwas größerem Aufwand sogar gelingt, $\zeta(s)$ zu definieren für jede komplexe Zahl $s \neq 1$. Die vielleicht berühmteste Vermutung der Mathematik, die sogenannte **Riemann'sche Vermutung** besagt, daß alle Nullstellen der Riemann'schen ζ-Funktion, die nicht auf der reellen Achse liegen, Realteil $1/2$ haben müssen. Ein Beweis dieser Vermutung hätte weitreichende Konsequenzen für unser Verständnis der Verteilung der Primzahlen, wie der Beweis des Primzahlsatzes **??** illustriert. Die Riemann'sche Vermutung ist übrigends der Kern des achten Hilbert'schen Problems.



Die Divergenz der harmonischen Reihe 2.5.10 zeigt, daß man mit hinreichend vielen identischen Bauklötzen einen beliebig weit neben seinem Grundklotz endenden Turm bauen kann. Obiges Bild zeigt etwa, wie weit man mit vier Klötzen so gerade eben mal kommen kann.

Definition 2.5.12. Wir sagen, eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiere absolut** genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel 2.5.13. Die sogenannte **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert, aber nicht absolut. Daß die Reihe nicht absolut konvergiert, hatten wir schon in 2.5.10 gesehen. Um zu zeigen, daß unsere Reihe dennoch konvergiert, beachten wir, daß für die Folge s_n der Partialsummen gilt

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \dots s_5 \leq s_3 \leq s_1$$

Folglich existiert $S = \sup\{s_2, s_4, \dots\}$. Da aber gilt $s_{2k} \leq S \leq s_{2k+1}$ für alle k erhalten wir $|S - s_n| \leq \frac{1}{n}$ und folglich $\lim_{n\to\infty} s_n = S$. Wir werden in 5.4.1 sehen, daß genauer gilt $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$.

Übung 2.5.14. Man zeige das sogenannte **Leibniz'sche Konvergenzkriterium**: Ist a_k eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$.

Satz 2.5.15. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ unsere absolut konvergente Reihe. Seien

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

die Partialsummen der Reihe selbst und der Reihe der Absolutbeträge. Nach Annahme konvergiert die Folge der S_n in $\mathbb{R}$ und ist also eine Cauchy-Folge. Da aber gilt $|s_n - s_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = S_n - S_m \quad \forall n > m$, ist dann auch s_n eine Cauchy-Folge und konvergiert in $\mathbb{R}$ nach 2.2.11. □

Satz 2.5.16 (Umordnungssatz). *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe und $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)}$ eine absolut konvergente Reihe und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Beweis. Da $\sum |a_k|$ konvergiert, finden wir sicher für jedes $\varepsilon > 0$ ein N mit $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$. Ist M so groß, daß gilt $u(\{1, \ldots, M\}) \supset \{1, \ldots, N\}$, so erhalten wir daraus für alle $n \geq N$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^{M} a_{u(k)} - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Diese Abschätzung gilt nach 2.1.30 und 2.1.39 dann auch im Grenzwert $n \to \infty$ und zeigt, daß die Folge der Partialsummen der umgeordneten Reihe konvergiert und denselben Grenzwert hat wie die Folge der Partialsummen der ursprünglichen Reihe. Wenden wir diese Erkenntnis an auf die Reihe der Absolutbeträge, so folgt auch die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe. □

Bemerkung 2.5.17. Ist $\sum a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen, die *nicht* absolut konvergiert, so gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = x$. In der Tat divergieren in diesem Fall die Reihen ihrer positiven und ihrer negativen Terme jeweils für sich genommen. Die Strategie ist nun, erst nur positive Reihenglieder zu nehmen, bis man oberhalb von x ist, dann nur negative bis man wieder drunterrutscht, und immer so weiter.

Übung 2.5.18. Ist $\sum a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen und $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ eine Umordnung mit der Eigenschaft, daß $|u(k) - k|$ beschränkt ist, so konvergiert auch die umgeordnete Reihe $\sum a_{u(k)}$ und zwar gegen denselben Grenzwert.

Proposition 2.5.19 (Majorantenkriterium). *Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Gibt es für unsere Reihe eine konvergente* **Majorante***, als da heißt eine konvergente Reihe $\sum b_k$ mit $|a_k| \leq b_k$ für fast alle k, so konvergiert unsere Reihe $\sum a_k$ absolut.*

Beweis. Aus 2.5.9 folgt in der Tat die Konvergenz der Reihe $\sum |a_k|$. □

Korollar 2.5.20 (Quotientenkriterium). *Sei $\sum a_k$ eine Reihe mit nichtverschwindenden Gliedern. Gibt es $\theta < 1$ mit $|a_{k+1}/a_k| < \theta$ für alle k, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut.*

Bemerkung 2.5.21. Bei diesem Kriterium ist wesentlich, daß θ nicht von k abhängt, die Ungleichungen $|a_{k+1}/a_k| < 1$ gelten ja auch für die divergente harmonische Reihe. Es gibt jedoch auch Reihen wie $\sum \frac{1}{k^2}$, die absolut konvergieren, obwohl sie unser Kriterium nicht dazu zwingt.

Beweis. Aus der Annahme folgt $|a_k| \leq |a_0|\theta^k$ für alle k, mithin ist die nach 2.5.4 konvergente Reihe $\sum |a_0|\theta^k$ eine Majorante unserer Reihe. □

Korollar 2.5.22. *Sei $\sum a_k$ eine Reihe mit nichtverschwindenden Gliedern. Gilt $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut.*

Beweis. Klar nach dem Quotientenkriterium 2.5.20. □

Definition 2.5.23. Gegeben eine beliebige Menge I und eine Abbildung $I \to \mathbb{R}$, $i \mapsto a_i$ sagt man, die Familie der a_i sei **summierbar mit Summe** s und schreibt

$$\sum_{i\in I} a_i = s$$

als Abkürzung für die Aussage, daß für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ existiert derart, daß für jedes endliche J mit $I_U \subset J \subset I$ gilt

$$\sum_{i\in J} a_i \in U$$

Übung 2.5.24. Man zeige, daß in einer summierbaren Familie von reellen Zahlen nur für höchstens abzählbar viele Indizes $i \in I$ das entsprechende a_i von Null verschieden sein kann. (Hinweis: Sonst gäbe es ein $n \geq 1$ derart, daß für unendlich viele i gälte $|a_i| > 1/n$.) Man zeige dann weiter, eine Familie von reellen Zahlen summierbar ist genau dann, wenn für eine und jede Abzählung ihrer von Null verschiedenen Glieder die enstehende Reihe absolut konvergiert.

2.6 Wachstum und Zerfall

Definition 2.6.1. Wir setzen

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

und erhalten so eine Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die **Exponentialfunktion**.

Bemerkung 2.6.2. Die fragliche Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ nach dem Quotientenkriterium oder genauer seinem Korollar 2.5.22 und sie konvergiert sogar außerordentlich schnell. Von einem formalen Standpunkt aus betrachtet ist unsere Definition also völlig unproblematisch und von einem rechentechnischen Standpunkt aus betrachtet ist sie sogar ungewöhnlich praktisch. Sie hat nur den Nachteil, daß aus der Definition heraus weder klar wird, warum gerade diese Funktion den Namen Exponentialfunktion verdient, noch warum sie überhaupt von Interesse ist. Ich erläutere das in den gleich anschließenden Bemerkungen.

Proposition 2.6.3. *Es gilt* $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

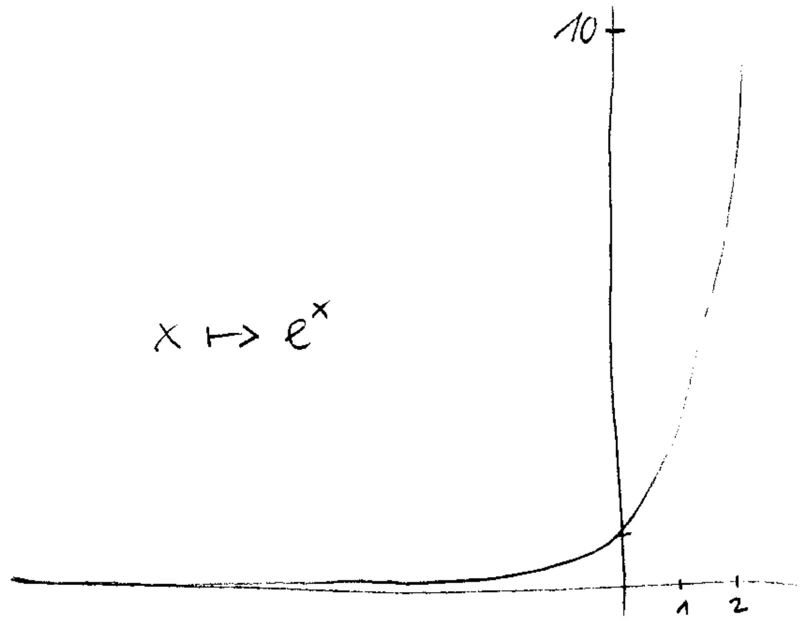
Bemerkung 2.6.4. Die Proposition kann man dahingehend interpretieren, daß $\exp(x)$ das Kapital ist, das in x Jahren aus einem Euro entsteht bei einer "kontinuierlichen Verzinsung mit einem Zinssatz von 100%". Legen wir das Geld zum Beispiel für 1 Jahr an, so haben wir bei jährlicher Verzinsung am Ende des Jahres 2 Euro auf dem Konto. Bei monatlicher Verzinsung ergeben sich mit Zinseszinsen schon $(1 + \frac{1}{12})^{12}$ Euro, und bei kontinuierlicher Verzinsung $\mathrm{e} = \exp(1) = 2,781\ldots$ Euro. Man nennt $\mathrm{e} = \exp(1)$ die **Euler'sche Zahl**. In der Schule haben Sie möglicherweise e^x statt $\exp(x)$ geschrieben, aber wir erlauben uns das erst ab 3.2.15, wo wir für beliebiges $a > 0$ die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a^n$ zu einer Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b \mapsto a^b$ fortsetzen und zwar nach 3.3.25 auf die einzig mögliche Weise, bei der die Funktion $b \mapsto a^b$ "stetig" ist im Sinne von 3.1.3 und die "Funktionalgleichung" $a^{b+c} = a^b a^c$ erfüllt.

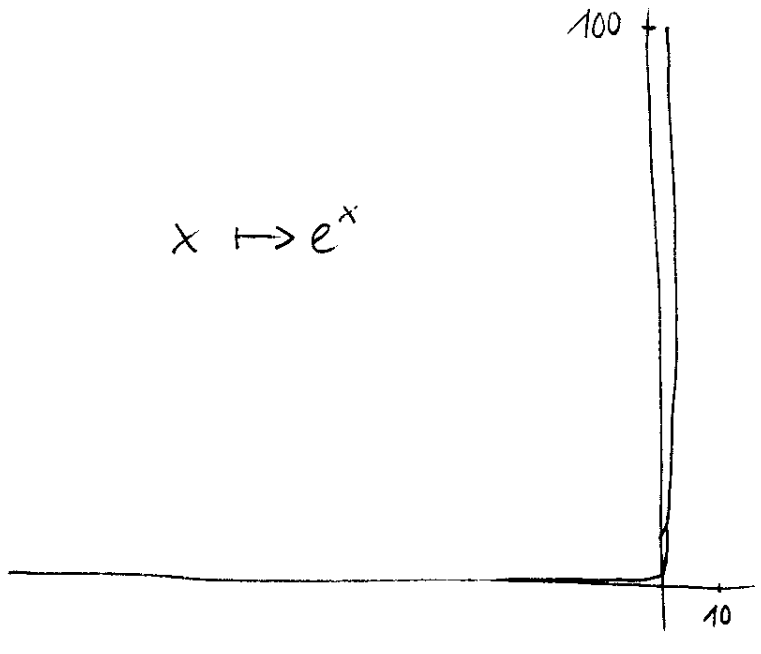
Bemerkung 2.6.5. In einem Ausdruck der Gestalt a^b nennt man a die "Basis" und b den "Exponenten", weil er eben exponiert oben an die Basis geschrieben wird. Daher rührt auch die Bezeichnung als "Exponentialfunktion". Ich würde unsere Funktion viel lieber ihrer Natur nach die "Funktion des natürlichen Wachstums" oder die "Wachstumsfunktion" nennen, aber die aus der Schreibweise abgeleitete Bezeichnung hat sich nun einmal durchgesetzt, mag sie auch aus historischen Zufällen entstanden sein: Hätte sich für die Bezeichnung des Quadrats einer Zahl a statt der Notation a^2 die Notation a_2 eingebürgert, so müßte nach diesem Schema der Begriffsbildung unsere Exponentialfunktion heute "Indizialfunktion" oder "Pedestalfunktion" heißen.

Bemerkung 2.6.6. Eine infinitesimale Formulierung der in 2.6.4 erläuterten Bedeutung der Exponentialfunktion gibt Korollar 4.3.7, in dem die Exponentialfunktion charakterisiert wird als die eindeutig bestimmte differenzierbare Funktion von den reellen Zahlen in sich selber, die mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt und bei Null den Wert Eins annimmt. Gehen wir von dieser Charakterisierung aus, so führt uns der Formalismus der Taylorreihen 5.2.2 ganz natürlich zu der Reihe, die wir in 2.6.1 haben vom Himmel fallen lassen, um möglichst schnell erste substanzielle Anwendungen unserer Betrachtungen zu Folgen und Reihen geben zu können.

Beweis. Mit der binomischen Formel ergibt sich

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \quad \ldots \quad \cdot n}$$





Der Graph der Exponentialfunktion in zwei Maßstäben. So entwickelt sich im Übrigen auch die Geschwindigkeit einer Vorlesung unter der Annahme, daß die Stoffmenge, die in einer Stunde vermittelt werden kann, proportional ist zu der Menge des Stoffes, den die Zuhörer bereits kennen...

Für beliebige $M, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt also

$$\begin{aligned} \left|\exp(x) - \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n\right| \leq \quad & \left|\exp(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{M} \frac{x^k}{k!}\right| \\ & + \left|\textstyle\sum_{k=0}^{M} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{M} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \quad \ldots \quad \cdot n}\right| \\ & + \left|\textstyle\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \quad \ldots \quad \cdot n}\right| \end{aligned}$$

Da die Exponentialreihe für vorgegebenes x absolut konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein M derart, daß für jedes n der erste und der letzte Term rechts beschränkt sind durch ε. Für dies feste M geht der mittlere Term bei $n \to \infty$ gegen Null, es gibt also $N = N_\varepsilon$ derart, daß er für dies feste M kleiner wird als ε falls $n \geq N$. Damit gilt $\left|\exp(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leq 3\varepsilon$ falls $n \geq N$. □

Satz 2.6.7 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Die Exponentialfunktion ist ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen, d.h. für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x) \neq 0 \neq \exp(y)$ *und*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Bemerkung 2.6.8. Stellen wir uns $\exp(x)$ vor als das Vermögen, daß in x Jahren aus einem Euro entsteht bei kontinuierlicher Verzinsung mit 100%, so erhalten wir offensichtlich gleichviel, ob wir unser Kapital $\exp(x)$ nach x Jahren gleich wieder für y Jahre anlegen, oder ob wir unseren Euro gleich von Anfang an $x + y$ Jahre arbeiten lassen. Das ist die Bedeutung der Funktionalgleichung. In 3.2.10 werden wir zeigen, daß die Exponentialfunktion sogar einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen liefert.

Bemerkung 2.6.9. Der gleich folgende Beweis der Funktionalgleichung gefällt mir nicht besonders. Ein anderer aber in seiner Weise auch etwas verwickelter Beweis wird in 2.6.16 vorgestellt. Ein mehr konzeptueller Zugang zur Exponentialfunktion und ihrer Funktionalgleichung wird in 4.6.9 und 4.6.10 skizziert. Er benötigt jedoch Hilfsmittel, die uns hier noch nicht zur Verfügung stehen, und er läßt auch nicht so einfach auf den Fall von Matrizen zu verallgemeinern, der für uns bei der Diskussion von Sinus und Cosinus eine wesentliche Rolle spielen wird. Wir schicken dem eigentlichen Beweis einige allgemeine Betrachtungen voraus.

Satz 2.6.10 (Produkt von Reihen). *Sind* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *und* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut *konvergente Reihen, so konvergiert auch die Summe der Produkte* $a_i b_j$ *für*

$(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *im Sinne von 2.5.23 und es gilt*

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß für irgendeine Bijektion $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $k \mapsto (u(k), v(k))$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} b_{v(k)}$ absolut konvergiert und daß gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} b_{v(k)} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

Natürlich haben wir

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{u(k)} b_{v(k)}| \leq \left(\sum_{i=0}^{N} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{M} |b_j|\right)$$

falls gilt $N \geq \max(u(0), \ldots, u(n))$ und $M \geq \max(v(0), \ldots, v(n))$. Damit konvergiert unsere Reihe $\sum a_{u(k)} b_{v(k)}$ absolut, und nach dem Umordnungssatz 2.5.16 können wir die Bijektion $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nehmen, die wir wollen, um den Grenzwert zu bestimmen. Jetzt wählen wir unsere Bijektion $w = (u, v)$ so, daß sie Bijektionen

$$\{0, \ldots, n^2 - 1\} \xrightarrow{\sim} \{0, \ldots, n-1\} \times \{0, \ldots, n-1\}$$

induziert, und erhalten Partialsummen

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} a_{u(k)} b_{v(k)} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j\right)$$

Der Übergang zum Grenzwert $n \to \infty$ zeigt dann die Behauptung. □

Bemerkung 2.6.11. Das Ende des Beweises hätte sehr viel besser ausgesehen, wenn wir unsere Reihen mit dem Index $k = 1$ beginnen ließen, aber so sieht der Anfang natürlicher aus. In Wirklichkeit zeigen wir eh für beliebige summierbare Familien reeller Zahlen $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_j)_{j\in J}$, daß auch die Familie aller Produkte $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ summierbar ist und daß gilt

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

Beweis der Funktionalgleichung 2.6.7. Wir rechnen

$$\begin{array}{rcl} \exp(x+y) & = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x+y)^k \\ & = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} x^i y^j \right) \\ & = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!} \frac{x^j}{j!} \right) \end{array}$$

wo wir im zweiten Schritt die binomische Formel verwenden und der Index $i+j=k$ an einer Summe bedeutet, daß wir über alle Paare $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $i+j=k$ summieren. Andererseits erhalten wir mit unserem Satz über das Produkt von Reihen bei einer geeigneten Wahl der Bijektion $w : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und nach Übergang zu einer Teilfolge der Folge der Partialsummen auch

$$\begin{array}{rcl} \exp(x)\exp(y) & = & \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) \\ & = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} \right) \end{array}$$

Da sicher gilt $\exp(0) = 1$, folgt $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x + (-x)) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und mithin $\exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Übung 2.6.12. Man folgere aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Formeln $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$, $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$, $\exp(nx) = (\exp x)^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$ sowie $\exp(x/2) = \sqrt{\exp(x)}$.

Übung 2.6.13. Der Übersichtlichkeit halber kürzen wir hier im Vorgriff auf 3.2.15 schon $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ ab. Man zeige, daß für $i, N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \binom{nN}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i} = \frac{N^i \,\mathrm{e}^{-N}}{i!}$$

Dieses Resultat ist in der Stochastik wichtig, wie ich im folgenden ausführen will. Gegeben ganz allgemein $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion $i \mapsto \lambda^i \mathrm{e}^{-\lambda}/i!$ die **Poisson-Verteilung** mit Parameter λ. Sie hat die folgende Bedeutung: Knetet man in einen großen Teig genau nN Rosinen ein und teilt ihn dann in n Rosinenbrötchen, so ist $\left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i}$ die Wahrscheinlichkeit, daß i vorgegebene Rosinen in einem fest gewählten Brötchen landen und die restlichen Rosinen in den anderen Brötchen. Mithin ist $\binom{nN}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{Nn-i}$ die Wahrscheinlichkeit, daß in einem fest gewählten Brötchen genau i Rosinen landen. Ist unser Brötchen klein im Vergleich zum ganzen Teig, so liegt diese Wahrscheinlichkeit also nahe bei $N^i \mathrm{e}^{-N}/i!$ oder allgemeiner bei $\lambda^i \mathrm{e}^{-\lambda}/i!$ mit λ der durchschnittlichen Zahl von Rosinen in dem Teigvolumen, das man für ein Brötchen braucht.

Übung 2.6.14. Man berechne die Euler'sche Zahl e bis auf 5 sichere Stellen hinter dem Komma.

Übung 2.6.15. Die Euler'sche Zahl e ist nicht rational. Man zeige dies, indem man von ihrer Darstellung als Reihe ausgeht und durch geeignete Abschätzungen nachweist, daß $q!\mathrm{e}$ für $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ nie eine ganze Zahl sein kann.

Übung 2.6.16. In dieser Übung sollen Sie einen anderen Zugang zur Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ausarbeiten, den ich in einer Arbeit von Martin Kneser kennengelernt habe: Man zeige dazu in Verallgemeinerung von 2.6.3, daß für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x)$. Mithilfe der Identität

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right) = \left(1 + \frac{x + y + (xy/n)}{n}\right)$$

folgere man dann die Funktionalgleichung.

3 Stetigkeit

3.1 Definition und erste Beispiele

Bemerkung 3.1.1. Abbildungen mit Werten in irgendeiner Art von Zahlen nennen wir **Funktionen**. Wir erlauben hier auch Werte in $\overline{\mathbb{R}}$. Wollen wir besonders betonen, daß nur reelle Zahlen als Werte angenommen werden, so sprechen wir von **reellwertigen Funktionen**. Reellwertige Funktionen auf der reellen Zahlengeraden kann man sich auf mindestens vier verschiedene Arten vorstellen:

1. In der Schule ist es üblich, eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch ihren Graphen $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ zu veranschaulichen, also durch eine Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$.

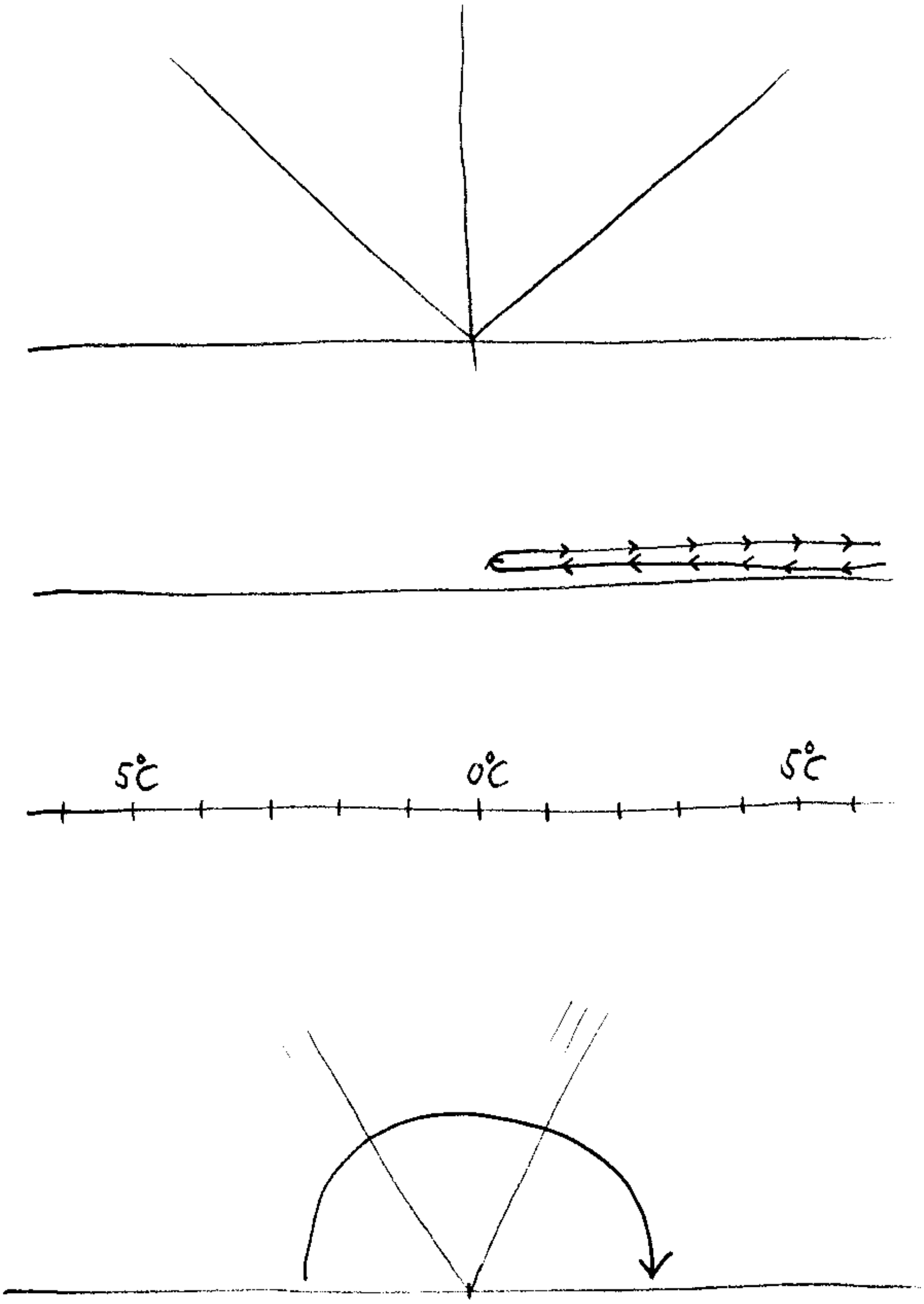
2. In der Physik ist es üblich, sich eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to X$, $t \mapsto f(t)$ von $\mathbb{R}$ in irgendeine Menge X vorzustellen als ein Teilchen, das sich "im Raum X bewegt und sich zur Zeit t (für lateinisch "tempus") am Punkt $f(t)$ befindet". In unserem Fall hätten wir uns also ein Teilchen vorzustellen, das sich auf der Zahlengerade $X = \mathbb{R}$ bewegt.

3. Eine reellwertige Funktion auf einer beliebigen Menge kann man sich als eine Temperaturverteilung auf besagter Menge vorstellen. In unserem Fall hätten wir uns also eine Temperaturverteilung auf der reellen Zahlengeraden vorzustellen.

4. In der Mathematik ist es auch nützlich, sich eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wirklich als Abbildung der Zahlengerade auf sich selber vorzustellen. Als Beispiel betrachten wir den Absolutbetrag, der als Abbildung aufgefaßt den negativen Teil der Zahlengerade auf den positiven Teil herüberklappt.

Bemerkung 3.1.2. Beliebige Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können wild aussehen. Wir führen nun die Klasse der "stetigen Funktionen" ein und zeigen insbesondere, daß für stetige auf einem Intervall definierte und injektive Funktionen auch ihr Bild ein Intervall ist und die Umkehrfunktion stetig. Das liefert uns dann viele neue Funktionen als Umkehrfunktionen bereits bekannter Funktionen. Anschaulich ist eine reellwertige Funktion auf einem reellen Intervall stetig genau dann, wenn man "ihren Graphen zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen". Diese Anschauung werden wir im Folgenden präzisieren. Wir erinnern an den Umgebungsbegriff aus 2.1.7.

Definition 3.1.3. Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Gegeben ein Punkt $p \in D$ heißt unsere Funktion **stetig bei** p genau dann,



Vier verschiedene Anschauungen für eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen am Beispiel des Absolutbetrags $x \mapsto |x|$

wenn es für jede Umgebung W von $f(p)$ eine Umgebung W' von p gibt mit $f(W' \cap D) \subset W$. Unsere Abbildung heißt **stetig** (englisch **continous**, französisch **continue**) genau dann, wenn sie stetig ist bei jedem Punkt $p \in D$.

Bemerkung 3.1.4. Wir vereinbaren diese Definition gleich im Fall einer Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und einer Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, weil so der Zusammenhang mit dem Grenzwertbegriff in 3.3 in voller Allgemeinheit dargestellt werden kann. Wie bei Folgen reicht es auch hier, die Existenz von W' für alle Umgebungen W eines Fundamentalsystems von Umgebungen von $f(p)$ zu zeigen.

Beispiele 3.1.5. Für alle $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist die Einbettung $i : D \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto x$ stetig. Der Absolutbetrag $\operatorname{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig. Für jedes $c \in \overline{\mathbb{R}}$ ist die konstante Funktion $c : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto c$ stetig. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $x < 0$ ist nicht stetig bei $p = 0$, ihre Einschränkung auf $D = \mathbb{R}^\times$ ist jedoch stetig. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ ist nur an der Stelle $p = 0$ stetig.

Satz 3.1.6 (Die Verknüpfung stetiger Funktionen ist stetig). *Seien genauer $D, E \subset \overline{\mathbb{R}}$ Teilmengen, $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen, und es gelte $f(D) \subset E$. Ist f stetig bei einem Punkt $p \in D$ und g stetig bei seinem Bild $f(p)$, so ist auch $g \circ f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto g(f(x))$ stetig bei p.*

Bemerkung 3.1.7. Genau genommen ist die Notation $g \circ f$ hier nicht korrekt: Wir müßten eigentlich erst eine Abbildung $\tilde{f} : D \to E$ definieren durch $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ und dann die Abbildung $g \circ \tilde{f}$ betrachten.

Beweis. Da g stetig ist bei $f(p)$, finden wir für jede Umgebung U von $g(f(p))$ eine Umgebung U' von $f(p)$ mit $g(U' \cap E) \subset U$. Da f stetig ist bei p, finden wir für diese Umgebung U' von $f(p)$ eine Umgebung U'' von p mit $f(U'' \cap D) \subset U'$. Damit finden wir in der Tat für jede Umgebung U von $(g \circ f)(p)$ eine Umgebung U'' von p mit $(g \circ f)(U'' \cap D) \subset U$. □

Bemerkung 3.1.8. Einschränkungen stetiger Funktionen sind stetig. Ist genauer $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig bei $p \in D$ und $E \subset D$ eine Teilmenge mit $p \in E$, so ist auch die Einschränkung $f|_E : E \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig bei p. Das folgt einerseits sofort aus der Definition und andererseits auch aus dem vorhergehenden Satz 3.1.7, indem wir die Einschränkung als Verknüpfung mit der nach 3.1.5 stetigen Einbettung von E schreiben.

Bemerkung 3.1.9 (**Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft**). Wird eine Funktion stetig bei einem Punkt nach Einschränkung auf eine Umgebung des besagten Punktes, so war sie dort schon selbst stetig. Ist also in Formeln $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion und $p \in D$ ein Punkt und gibt es eine Umgebung U von p derart, daß die Einschränkung von f auf $D \cap U$ stetig ist bei p, so ist auch $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ bereits stetig bei p. Um das zum Ausdruck zu bringen, sagt man dann etwas vage, die "Stetigkeit sei eine lokale Eigenschaft".

Lemma 3.1.10 (ε-δ-Kriterium für die Stetigkeit). *Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und $p \in D$ ein Punkt. Genau dann ist f stetig bei p, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ gilt $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.*

Beweis. Das folgt sofort aus den Definitionen. □

Übung 3.1.11. Seien $I, J \subset \overline{\mathbb{R}}$ Intervalle mit nichtleerem Schnitt und sei $f : (I \cup J) \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Sind die Einschränkungen $f|_I$ und $f|_J$ stetig, so ist auch f selbst stetig.

Lemma 3.1.12. *Die Funktion $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig.*

Beweis. Das ist gerade die Aussage von 2.1.32.3. □

Lemma 3.1.13. *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

Bemerkung 3.1.14. Die Stetigkeit der Exponentialfunktion können wir später auch aus dem allgemeinen Satz 5.1.4 folgern: Potenzreihen stellen auf ihrem Konvergenzbereich immer stetige Funktionen dar.

Beweis. Wir wenden das ε-δ-Kriterium 3.1.10 an. In der Tat finden wir

$$|\exp(x) - \exp(p)| = |\exp(p)| \cdot |\exp(x - p) - \exp(0)|$$

Nun beachten wir, daß für $|y| \leq 1$ gilt

$$|\exp(y) - \exp(0)| = |y| \cdot \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^{i-1}}{i!} \right| \leq |y| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y|^{i-1}}{(i-1)!} \leq |y| \exp(1)$$

wo wir im zweiten Schritt die Dreiecksungleichung sowie die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert verwenden und die Nenner verkleinern. Aus $|x - p| \leq 1$ folgt also $|\exp(x) - \exp(p)| \leq \exp(p)|x - p|\,\mathrm{e}$ und für gegebenes $\varepsilon > 0$ können wir nehmen $\delta = \inf\{1, \varepsilon/(\exp(p)\,\mathrm{e})\}$. □

Definition 3.1.15. Gegeben reellwertige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen $f + g, fg : D \to \mathbb{R}$ durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in D$.

Satz 3.1.16. Summe und Produkt stetiger Funktionen sind stetig. *Ist genauer $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ gegeben und $p \in D$ ein Punkt und sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig bei p, so sind auch $f + g$ und fg stetig bei p.*

Bemerkung 3.1.17. Nehmen f und g allgemeiner Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ an und sind an jeder Stelle $x \in D$ die Summe $f(x) + g(x)$ bzw. das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ sinnvoll definiert im Sinne von 2.1.35, so gilt der Satz entsprechend mit fast demselben Beweis.

Beweis. Wir zeigen das nur für die Multiplikation, der Fall der Addition geht analog. Ist W eine Umgebung von $f(p)g(p)$, so gibt es nach 2.1.32 Umgebungen U von $f(p)$ und V von $g(p)$ mit $U \cdot V \subset W$. Da sowohl f als auch g stetig sind bei p, gibt es weiter Umgebungen U' und V' von p mit $f(U' \cap D) \subset U$ und $g(V' \cap D) \subset V$. Ihr Schnitt $U' \cap V'$ ist dann eine Umgebung W' von p mit $(fg)(W' \cap D) \subset W$. □

Definition 3.1.18. Wir nennen eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine **Polynomfunktion** genau dann, wenn es $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß unsere Funktion gegeben wird durch die Abbildungsvorschrift $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$.

Bemerkung 3.1.19. Jede Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, in der fast alle Folgenglieder Null sind, liefert uns eine Polynomfunktion. Nach 8.3.5 liefern verschiedene Folgen auch stets verschiedene Funktionen. Im Licht dieser Tatsache werden wir unsere Polynomfunktionen meist kürzer Polynome nennen, obwohl eigentlich der Begriff Polynom eher den formalen Ausdruck meint. Diese Unterscheidung ist aber erst in der Algebra wirklich von Belang, wenn man zum Beispiel mit endlichen Körpern arbeitet.

Korollar 3.1.20. *Polynomfunktionen sind stetig.*

Beweis. Das folgt induktiv aus dem vorhergehenden Satz 3.1.16. □

Korollar 3.1.21 (Quotienten stetiger Funktionen sind stetig). *Ist genauer $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge und sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig und hat g keine Nullstelle in D, so ist auch die Funktion $f/g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)/g(x)$ stetig.*

Beweis. Bezeichne $i : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto 1/x$. Sie ist stetig nach 3.1.12. Also ist auch $i \circ g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/g(x)$ stetig, und dann auch das Produkt dieser Funktion mit der stetigen Funktion f. □

Bemerkung 3.1.22. Eine Funktion, die sich als der Quotient eines Polynoms durch ein von Null verschiedenes Polynom darstellen läßt, heißt eine **gebrochen rationale Funktion**. So eine Funktion ist a priori natürlich nur da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, und ist nach dem vorhergehenden Korollar auf dem Komplement der Nullstellenmenge ihres Nenners stetig. Betrachten wir unsere gebrochen rationale Funktion jedoch nicht als Abbildung, sondern als formalen Ausdruck, so verstehen wir unter ihrem Definitionsbereich die etwas größere Menge, auf der "nach maximalem Kürzen" der Nenner keine Nullstellen hat, vergleiche **??**.

3.2 Umkehrfunktionen und Zwischenwertsatz

Definition 3.2.1. Eine Abbildung f zwischen angeordneten Mengen heißt

monoton wachsend,	wenn gilt	$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
streng monoton wachsend,	wenn gilt	$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
monoton fallend,	wenn gilt	$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
streng monoton fallend,	wenn gilt	$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Eine Abbildung heißt **(streng) monoton** genau dann, wenn sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist. Das verallgemeinert unsere Begriffe für Folgen aus 2.2.3.

Proposition 3.2.2. *Ist $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein Intervall und $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ streng monoton, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig.*

Bemerkung 3.2.3. Wieder ist unsere Notation nicht ganz korrekt: Wir müßten eigentlich die Bijektion $\tilde{f} : I \xrightarrow{\sim} f(I)$, $x \mapsto f(x)$ betrachten, dazu die inverse Abbildung $\tilde{f}^{-1} : f(I) \xrightarrow{\sim} I$ nehmen, und unser $f^{-1} : f(I) \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren als die Verknüpfung von $\tilde{f}^{-1}$ mit der Einbettung $I \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Die Umkehrfunktion f^{-1} darf nicht verwechselt werden mit der Funktion $x \mapsto 1/f(x)$. Ist zum Beispiel $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$, so haben wir $1/f(x) = x^{-2}$, aber die Umkehrabbildung ist $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Die Notation ist hier leider nicht ganz eindeutig und oft muß man aus dem Kontext erschließen, ob mit f^{-1} die Umkehrfunktion von f oder vielmehr die Funktion $x \mapsto 1/f(x)$ gemeint ist.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit f streng monoton wachsend. Bezeichne $g : f(I) \to \overline{\mathbb{R}}$ die Umkehrfunktion, die unter diesen Umständen auch streng monoton wachsen muß. Gegeben $p \in f(I)$ müssen wir für jede Umgebung W von $g(p)$ eine Umgebung W' von p finden mit der Eigenschaft $g(W' \cap f(I)) \subset W$. Wir unterscheiden drei Fälle: Ist I eine Umgebung von $g(p)$, so umfaßt jede Umgebung W von $g(p)$ ein Intervall der Gestalt (a, b) mit $a < g(p) < b$ und $a, b \in I$ und wir können schlicht $W' = (f(a), f(b))$ nehmen. Besteht I nur aus einem einzigen Punkt, so ist eh alles klar. Besteht

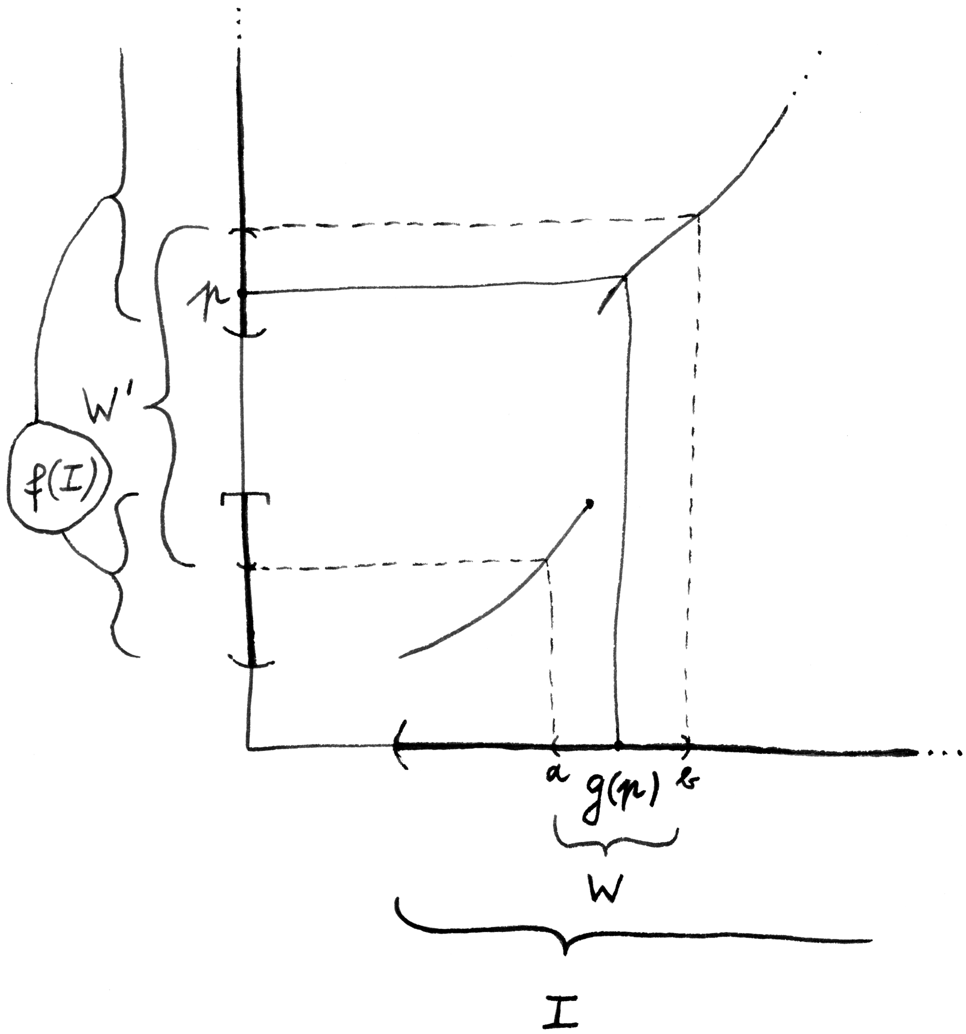


Illustration zum Beweis von 3.2.2. Man beachte, wie sich, salopp gesprochen, “Unstetigkeitsstellen der Ausgangsfunktion in Definitionslücken der Umkehrfunktion verwandeln”.

schließlich I aus mehr als einem Punkt und ist $g(p)$ eine seiner Grenzen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sein Supremum, so umfaßt jede Umgebung W von $g(p)$ ein Intervall der Gestalt $(a, g(p)]$ mit $a \in I$ und wir können $W' = (f(a), \infty]$ nehmen. □

Bemerkung 3.2.4. Wenden wir unseren Satz an auf die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, so finden wir insbesondere, daß das Wurzelziehen

$$[0, \infty) \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{x}$$

eine stetige Funktion ist. Da sich die Funktion $x \mapsto x^2$ stetig auf $[0, \infty]$ fortsetzen läßt durch die Vorschrift $\infty \mapsto \infty$, gilt nach unserem Satz dasselbe für die Wurzelfunktion. Analoges gilt auch für höhere Wurzeln, nur haben wir bis jetzt noch nicht bewiesen, daß wir solche höheren Wurzeln auch tatsächlich aus jeder nichtnegativen reellen Zahl ziehen können. Das folgt jedoch aus den Sätzen, die wir im Anschluß behandeln.

Satz 3.2.5 (Zwischenwertsatz). *Für $a \leq b$ aus $\overline{\mathbb{R}}$ nimmt eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(a) \leq f(b)$ annehmen. Gegeben $z \in [f(a), f(b)]$ suchen wir $p \in [a, b]$ mit $f(p) = z$. Wir betrachten dazu

$$p = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq z\}$$

und behaupten $f(p) = z$. In der Tat führen wir die Annahmen $f(p) < z$ und $f(p) > z$ beide zum Widerspruch: Aus $f(p) < z$ folgte zunächst $p < b$, und dann gäbe es aufgrund der Stetigkeit ein p' mit $p < p' < b$ und $f(p') \leq z$ und p wäre gar keine obere Schranke unserer Menge gewesen. Aus $f(p) > z$ folgte zunächst $a < p$, und dann gäbe es aufgrund der Stetigkeit ein p' mit $a < p' < p$ und $f(x) > z$ für alle $x \in [p', p]$. Also wäre auch p' schon eine obere Schranke unserer Menge und p könnte nicht ihre kleinste obere Schranke gewesen sein. □

Korollar 3.2.6 (Abstrakter Zwischenwertsatz). *Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion ist ein Intervall. Ist also in Formeln $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein Intervall und $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig, so ist auch $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Das folgt sofort aus 3.2.5. □

Satz 3.2.7 (über die Umkehrfunktion). *Sei $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein Intervall und sei $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ streng monoton und stetig. So ist auch $f(I) \subset \overline{\mathbb{R}}$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \overline{\mathbb{R}}$ ist streng monoton und stetig.*

Beweis. Dieser Satz ist nur die Zusammenfassung des abstrakten Zwischenwertsatzes 3.2.6 mit der Proposition 3.2.2 über die Stetigkeit der Umkehrfunktion. □

Definition 3.2.8. Für $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$ definieren wir die **q-te Wurzel**

$$\sqrt[q]{\ } : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

als die Umkehrfunktion zur q-ten Potenzfunktion $x \mapsto x^q$. Nach 3.2.2 ist $x \mapsto \sqrt[q]{x}$ stetig.

Übung 3.2.9. Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Man zeige das **Wurzelkriterium**: Gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut. Hinweis: Analog zum Beweis des Quotientenkriteriums. Meiner Erfahrung nach ist dies Kriterium in der Praxis selten von Nutzen, da es meist auf schwer zu bestimmende Grenzwerte führt.

Definition 3.2.10. Aus dem Zwischenwertsatz folgt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, denn wir haben offensichtlich $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty$ und dann nach 2.1.25 auch $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$. Wir können also den **(natürlichen) Logarithmus** einführen als die Umkehrfunktion

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

der Exponentialfunktion, $\log(\exp(x)) = x$, und erhalten aus Satz 3.2.7 die Stetigkeit des Logarithmus.

Bemerkung 3.2.11. Die Exponentialfunktion liefert nach 2.6.7 und 3.2.10 also einen Isomomorphismus der additiven Gruppe der reellen Zahlen mit der multiplikativen Gruppe aller positiven reellen Zahlen.

Bemerkung 3.2.12. Die Notation "log" ist leider nicht universell. Auf vielen Taschenrechnern und auch in älteren Büchern wird unsere Funktion "log" notiert als "ln" für "logarithmus naturalis" und das Kürzel "log" steht für den "Logarithmus zur Basis 10", den wir in 3.2.17 einführen und mit $\log_{10}$ bezeichnen werden. Der Logarithmus zur Basis 10 wird in manchen Quellen auch der "Brigg'sche Logarithmus" genannt und mit "lg" bezeichnet. Die Norm ISO 31-11 empfiehlt die Notationen "ln" und "lg", wir verwenden jedoch log statt ln, weil das in der reinen Mathematik so üblich ist und wir damit der Konvention folgen, spezielle Funktionen nach Möglichkeit mit Kürzeln aus drei Buchstaben zu notieren. "Logarithmus" ist das griechische Wort für "Rechnung", und für das Rechnen waren die Logarithmentafeln, in denen die Werte des Logarithmus zur Basis Zehn aufgelistet wurden, auch außerordentlich praktisch: Mit ihrer Hilfe konnte man nämlich Divisionen in Subtraktionen verwandeln und Wurzelziehen in Divisionen, wie wir gleich näher ausführen.

Bemerkung 3.2.13. Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion folgt sofort

$$\log(xy) = \log x + \log y \text{ und } \log(\mathrm{e}) = 1$$

Übung 3.2.14. Man folgere $\log(1) = 0$, $\log(x^{-1}) = -\log(x)$, $\log(x^n) = n\log(x)$ und $\log(\sqrt[q]{x}) = \frac{1}{q}\log(x)$.

Definition 3.2.15 (allgemeine Potenzen). Gegeben $a, x \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ setzen wir

$$a^x = \exp(x \log a)$$

Bemerkung 3.2.16. Man prüft ohne Schwierigkeiten die Formeln $a^0 = 1$, $a^1 = a$ und $a^{x+y} = a^x a^y$ und folgert insbesondere, daß im Fall $a > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ das hier definierte a^n übereinstimmt mit unserem a^n aus der Tabelle am Ende von Abschnitt I.3.2. Für beliebige $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$ prüft man leicht die Rechenregeln $a^{xy} = (a^x)^y$, $(ab)^x = a^x b^x$, $\sqrt[q]{a} = a^{1/q}$ und $\log(a^x) = x \log a$. Ist speziell $a = \mathrm{e}$ die Euler'sche Zahl, so gilt $\log \mathrm{e} = 1$ und folglich $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Definition 3.2.17. Gegeben $a > 0$ nennt man die Umkehrabbildung der Abbildung $x \mapsto a^x$ auch den **Logarithmus zur Basis** a

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

Bemerkung 3.2.18. Der natürliche Logarithmus ist also der Logarithmus mit der Euler'schen Zahl e als Basis, in Formeln $\log = \log_{\mathrm{e}}$. Der Logarithmus zur Basis a läßt sich durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken vermittels der Formel $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$. Man kommt deshalb meist mit dem natürlichen Logarithmus aus. Die Notation $\log_a$ ist konform mit der Norm ISO 31-11, in der zusätzlich auch noch die Abkürzung $\log_2 = \mathrm{lb}$ für den **binären Logarithmus** empfohlen wird.

Übung 3.2.19. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(b) = 0$. So hat f eine kleinste Nullstelle in $[a, b]$.

Übung 3.2.20. Jede Polynomfunktion $x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und n ungerade besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

Beispiel 3.2.21. Bei einem radiokativen Material wird nach einem Tag nur noch 90% der Strahlungsaktivität gemessen. Wie lange dauert es, bis die Aktivität auf die Hälfte abgeklungen ist? Nun, halten wir einen Referenzzeitpunkt beliebig fest, so wird die Aktivität nach Vergehen einer Zeitspanne τ gemäß Überlegungen wie in 2.6.4 gegeben durch eine Formel der Gestalt $M\,\mathrm{e}^{c\tau}$ mit unbekannten M und c. Wir kürzen die Zeiteinheit "Stunde" ab mit dem Buchstaben h für lateinisch "hora". Formal ist h eine Basis des in I.1.2.6

angedachten eindimensionalen reellen Vektorraums “aller Zeitspannen”, und formal ist auch M ein Element eines gedachten eindimensionalen reellen Vektorraums “aller Strahlungsaktivitäten” und c liegt im Raum der Linearformen auf dem Raum aller Zeitspannen, in dem wir mit h^{-1} dasjenige Element bezeichnen werden, das auf h den Wert Eins annimmt. So formal will ich hier aber eigentlich gar nicht werden und schreibe das Auswerten solch einer Linearform auf einer Zeitspanne schlicht als Produkt. Für $\tau = 24\,\mathrm{h}$ wissen wir nun nach unserer Messung $M\,\mathrm{e}^{c\cdot 24\,\mathrm{h}} = \frac{90}{100}M$ und damit $c = ((\log 9/10)/24)\,\mathrm{h}^{-1}$. Bezeichnet t die Zeitspanne, nach der die Aktivität auf die Hälfte abgeklungen ist, so haben wir also $M\,\mathrm{e}^{ct} = M/2$ alias $ct = -\log 2$ und damit

$$t = -\frac{\log 2}{c} = \frac{-\log(2)\cdot 24}{\log(9/10)}\,\mathrm{h}$$

Übung 3.2.22. Das eingestrichene A liegt bei 440 Herz. Bei wieviel Herz etwa liegt das eingestrichene F? Hinweis: Die Lösung dieser Aufgabe benötigt zusätzlich zu mathematischen Kenntnissen auch physikalische und musikalische Vorkenntnisse.

3.3 Grenzwerte von Funktionen

Bemerkung 3.3.1. Wir vereinbaren für die Differenz einer Menge X mit einer einpunktigen Menge $\{p\}$ die abkürzende Schreibweise $X\backslash\{p\} = X\backslash p$. Gegeben eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Punkte $p, b \in \overline{\mathbb{R}}$ sagen wir, $f(x)$ **strebt gegen** b **für** $x \to p$ und schreiben

$$\lim_{x\to p} f(x) = b$$

genau dann, wenn es für jede Umgebung W des Grenzwerts b eine Umgebung W' des Punktes p gibt mit $f(W'\backslash p) \subset W$ oder genauer, da W' ja auch ∞ oder $-\infty$ enthalten könnte und f dort nicht definiert ist, mit $f((W'\cap\mathbb{R})\backslash p) \subset W$. Im folgenden werden wir diese Begriffsbildung verallgemeinern auf den Fall von Funktionen mit beliebigem Definitionsbereich $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und müssen dazu einige Vorbereitungen treffen.

Definition 3.3.2. Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge. Ein Punkt $p \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt ein **Häufungspunkt von** D **in** $\overline{\mathbb{R}}$ genau dann, wenn jede Umgebung von p mindestens einen von p verschiedenen Punkt mit D gemeinsam hat.

Bemerkung 3.3.3. Diejenigen Punkte von D, die keine Häufungspunkte von D sind, nennt man die **isolierten Punkte von** D. Mich verwirrt in diesem Zusammenhang stets, daß ein Häufungspunkt von D kein Punkt von D zu sein braucht. Leider kenne ich keine bessere Sprechweise.

Übung 3.3.4. Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge. Genau dann ist p Häufungspunkt von D, wenn es eine Folge reeller Zahlen x_n in $D \setminus p$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

Definition 3.3.5 (Grenzwerte von Funktionen). Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Sei b ein weiterer Punkt aus $\overline{\mathbb{R}}$. Wir sagen, $f(x)$ **strebt gegen** b **für** $x \to p$ und schreiben

$$\lim_{x\to p} f(x) = b$$

genau dann, wenn es für jede Umgebung W des Grenzwerts b eine Umgebung W' des Punktes p gibt mit $f(W' \cap D \setminus p) \subset W$.

Bemerkung 3.3.6. Natürlich reicht es auch hier wieder, die Existenz von W' für jedes W aus einem Fundamentalsystem von Umgebungen des Grenzwerts b nachzuweisen.

Beispiel 3.3.7. Es gilt $\lim_{x\to\infty} x = \infty$, wir können ja in diesem Fall schlicht $W' = W$ nehmen. Für eine konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $\lim_{x\to p} c = c$, hier können wir für jedes W einfach $W' = \overline{\mathbb{R}}$ nehmen. Für $D = \mathbb{N}$ und $p = \infty$ spezialisiert der eben eingeführte Grenzwertbegriff zu unserem Grenzwertbegriff für Folgen aus 2.1.14. Der Grund dafür, daß wir Grenzwerte nur an Häufungspunkten erklären, ist das folgende Lemma.

Lemma 3.3.8 (Eindeutigkeit des Grenzwerts). *Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Aus $\lim_{x\to p} f(x) = a$ und $\lim_{x\to p} f(x) = b$ folgt $a = b$.*

Beweis. Durch Widerspruch. Wäre $a \neq b$, so gäbe es Umgebungen V von a und W von b mit $V \cap W = \emptyset$. Wir fänden Umgebungen V' und W' von p mit $f(V' \cap D \setminus p) \subset V$ und $f(W' \cap D \setminus p) \subset W$, mithin gälte

$$f(V' \cap W' \cap D \setminus p) = \emptyset$$

Da aber $V' \cap W'$ eine Umgebung von p ist und p ein Häufungspunkt von D gilt notwendig $V' \cap W' \cap D \setminus p \neq \emptyset$. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. □

Bemerkung 3.3.9. Der Grenzwert einer Funktion für $x \to p$ hängt nur von ihrem Verhalten in einer Umgebung von p ab. Ist genauer $p \in \overline{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion und U eine Umgebung von p, so existiert $\lim_{x\to p} f$ genau dann, wenn $\lim_{x\to p} f|_{D\cap U}$ existiert, und unter diesen Umständen stimmen die beiden Grenzwerte überein.

Proposition 3.3.10 (Grenzwerte und Stetigkeit). *Sei $p \in \overline{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und $f : D \backslash p \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Genau dann gilt $\lim_{x \to p} f(x) = b$ für ein $b \in \overline{\mathbb{R}}$, wenn die Fortsetzung von f auf $D \cup \{p\}$ durch $f(p) = b$ stetig ist bei p.*

Beweis. Das folgt sofort aus unseren Definitionen 3.1.3 und 3.3.5. □

Bemerkung 3.3.11. Ist also $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ gegeben und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig, so gilt für jeden Häufungspunkt $p \in D$ der Menge D notwendig $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Beispiel 3.3.12. Wir zeigen $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$. In der Tat, für jede Umgebung W von 0 gibt es $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset W$, und nehmen wir als Umgebung W' von ∞ die Menge $W' = (1/\varepsilon, \infty]$, so gilt offensichtlich $x \in W' \Rightarrow 1/x \in W$. Alternativ könnten wir auch wie folgt argumentieren: Die Funktion $[0, \infty] \to [0, \infty]$ mit $x \mapsto 1/x$ für $0 < x < \infty$ und $0 \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto 0$ ist streng monoton, deshalb ist nach 3.2.2 ihre Umkehrfunktion stetig. Die Umkehrfunktion fällt aber in diesem Fall mit der Funktion selbst zusammen. Also ist unsere Funktion stetig und mit 3.3.10 folgt $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$.

Übung 3.3.13 ***(Rechenregeln für Grenzwerte)***. Sei $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen mit reellen Grenzwerten $\lim_{x \to p} f(x) = b$ und $\lim_{x \to p} g(x) = c$. So gilt $\lim_{x \to p}(f + g)(x) = b + c$ und $\lim_{x \to p}(fg)(x) = bc$.

Übung 3.3.14 ***(Quetschlemma)***. Sei $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und seien $f, g, h : D \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen mit $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in D \setminus p$. So folgt aus $\lim_{x \to p} f(x) = b = \lim_{x \to p} h(x)$ schon $\lim_{x \to p} g(x) = b$.

Beispiel 3.3.15. Aus dem Quetschlemma 3.3.14 und der Darstellung von e^x durch die Exponentialreihe folgt $\lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^x = \infty$. Aus 3.3.10 und 3.2.2 folgt dann $\lim_{y \to \infty} \log y = \infty$. Das Quetschlemma mit der Darstellung von e^x duch die Exponentialreihe liefert auch $\lim_{x \to \infty}(x/\mathrm{e}^x) = 0$ und durch Substitution $x = \log y$ und 3.3.10 und 3.1.6 folgt dann $\lim_{y \to \infty}(\log y/y) = 0$.

Übung 3.3.16. Man zeige $\lim_{x \to \infty}(x^a/b^x) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $b > 1$. Man zeige $\lim_{x \to \infty}(\log x/x^c) = 0$ für alle $c > 0$. Man zeige $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Man zeige

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{(5n)!}{(n!)^5}} = 5^5$$

Bemerkung 3.3.17. Das Anwenden einer stetigen Funktion vertauscht mit der Grenzwertbildung. Ist genauer $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ und ist $q \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von E und $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit Bild in $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und existiert

$\lim_{x\to q} g(x) = p$ und liegt auch in D und ist $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig bei p, so gilt

$$\lim_{x\to q} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to q} g(x)\right)$$

Wir erhalten diese Aussage mithilfe von 3.3.10 als direkte Konsequenz aus der Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Funktionen 3.1.6. Speziell folgt für jede Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, die stetig ist bei einer Stelle $p \in D$, und jede Folge a_n in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = p$ bereits $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(p)$.

Bemerkung 3.3.18. Man folgert so zum Beispiel die Vertauschbarkeit 2.1.39 von Grenzwertbildung und Absolutbetrag aus der Stetigkeit des Absolutbetrags und die Vertauschbarkeit 2.1.31.2 von Grenzwertbildung mit Kehrwerten aus der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto 1/x$.

Beispiel 3.3.19. Für alle $a > 0$ folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion und indem man für ein logisch vollständiges Argument die folgende Gleichungskette von hinten nach vorne liest

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} & = & \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\log a\right) \\ & = & \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log a\right) \\ & = & \exp(0) \\ & = & 1 \end{array}$$

Bemerkung 3.3.20. Es gibt noch weitere Möglichkeiten, aus dem Zusammenhang zwischen Grenzwert und Stetigkeit 3.3.10 sowie der Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Funktionen 3.1.6 ähnliche Aussagen abzuleiten. Zusammen mit der bereits als 3.3.17 ausführlicher besprochenen Aussage erhält man so insbesondere die drei Implikationen

$$\begin{array}{lcl} (\lim_{x\to q} g(x) = p \text{ und } f \text{ stetig bei } p) & \Rightarrow & \lim_{x\to q} f(g(x)) = f(p) \\ \left(g \text{ stetig bei } q \text{ und } \lim_{y\to g(q)} f(y) = b\right) & \Rightarrow & \lim_{x\to p} f(g(x)) = b \\ (\lim_{x\to q} g(x) = p \text{ und } \lim_{y\to p} f(y) = b) & \Rightarrow & \lim_{x\to q} f(g(x)) = b \end{array}$$

Übung 3.3.21 ***(Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert)***. Sei $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ und seien $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei Funktionen, die Grenzwerte besitzen für $x \to p$. Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D \setminus p$, so folgt $\lim_{x\to p} f(x) \leq \lim_{x\to p} g(x)$.

Übung 3.3.22. Gilt für eine durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ gegebene Funktion $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ und irgendein reelles p die Formel $\lim_{x\to p} f(x)/(x-p)^n = 0$, so folgt $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Hinweis: Durch Verschieben kann man sich auf den Fall $p = 0$ zurückziehen.

Definition 3.3.23. Eine besondere Notation vereinbaren wir für den Fall einer Funktion $f : (a,b) \setminus p \to \overline{\mathbb{R}}$ und $p \in (a,b)$, wenn wir den Grenzwert für $x \to p$ ihrer Restriktion auf (a,p) oder auf (p,b) untersuchen wollen. Wir sprechen dann vom **linkseitigen** bzw. vom **rechtseitigen Grenzwert** und notieren diese Grenzwerte

$$\lim_{x \to p} f|_{(a,p)} = \lim_{x \nearrow p} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to p} f|_{(p,b)} = \lim_{x \searrow p} f(x)$$

In diesem Fall existiert der Grenzwert genau dann, wenn der linkseitige Grenzwert und der rechtseitige Grenzwert existieren und übereinstimmen, wie man leicht aus den Definitionen folgert.

Beispiel 3.3.24. Es gilt $\lim_{x \searrow 0} 1/x = \infty$ und $\lim_{x \nearrow 0} 1/x = -\infty$.

Satz 3.3.25 (Einparameteruntergruppen von $\mathbb{R}$). *Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in sich selber sind genau die Abbildungen $x \mapsto \lambda x$ für festes $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, als da heißt eine stetige Abbildung mit $F(x+y) = F(x) + F(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Es reicht zu zeigen, daß F die Gleichung $F(x) = xF(1)$ erfüllt. Auch ohne die Stetigkeit von F zu benutzen, folgern wir $F(q) = qF(1)$ zunächst für alle $q \in \mathbb{N}$, dann für alle $q \in \mathbb{Z}$, dann für alle $q \in \mathbb{Q}$. Um unsere Gleichung $F(x) = xF(1)$ sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ zu zeigen, wählen wir eine Folge q_n von rationalen Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ und erhalten $F(x) = \lim_{n\to\infty} F(q_n) = \lim_{n\to\infty} q_n F(1) = xF(1)$, also $F(x) = \lambda x$ für $\lambda = F(1)$. □

Satz 3.3.26 (Einparameteruntergruppen von $\mathbb{R}^\times$). *Die stetigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen sind genau die Abbildungen $x \mapsto a^x$ für festes $a \in \mathbb{R}_{>0}$.*

Beweis. Ist $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, als da heißt eine stetige Abbildung mit $G(x+y) = G(x)G(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, so bildet G nach I.3.3.9 notwendig das neutrale Element auf das neutrale Element ab, in Formeln $G(0) = 1$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt $G(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Damit können wir den Gruppenhomomorphismus $F = \log \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden und aus 3.3.25 folgt sofort $F(x) = xF(1)$, also $G(x) = \exp(F(x)) = \exp(xF(1)) = \exp(x \log G(1))$. □

Satz 3.3.27 (Stetigkeit als Folgenstetigkeit). *Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt. So sind gleichbedeutend:*

1. *f ist stetig bei a.*

2. *Für jede Folge $a_0, a_1, \ldots$ von Punkten aus D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.*

Bemerkung 3.3.28. Die in diesem Satz gegebene Charakterisierung von Stetigkeit wird vielfach sogar als Definition derselben gewählt. Das ist auch der Grund, warum ich den Satz bereits hier beweise, obwohl er im weiteren Verlauf der Vorlesung erst sehr viel später eine Rolle spielen wird.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ haben wir schon in 3.3.17 erledigt, wir konzentrieren uns deshalb auf $2 \Rightarrow 1$. Das zeigen wir durch Widerspruch. Für unser $a \in \overline{\mathbb{R}}$ finden wir nach 2.1.37 eine absteigende Folge von Umgebungen $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ derart, daß jede Umgebung V von a fast alle V_n umfaßt. Ist f nicht stetig bei a, so gibt es eine Umgebung U von $f(a)$ derart, daß für kein n gilt $f(V_n \cap D) \subset U$. Für jedes n finden wir also $a_n \in V_n \cap D$ mit $f(a_n) \notin U$. Die a_n bilden dann eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, für die nicht gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. □

Übung 3.3.29. Man finde alle stetigen Funktionen $G : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ mit $G(xy) = G(x) + G(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^\times$.

Übung 3.3.30. Man zeige, daß die Aussage der vorhergehenden Sätze 3.3.25 und 3.3.26 sogar folgt, wenn wir von unseren Gruppenhomomorphismen nur die Stetigkeit bei Null fordern.

Übung 3.3.31. Sei $L \subset \mathbb{R}$ eine Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen ohne reelle Häufungspunkte. So gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $L = \mathbb{Z}\alpha$.

Übung 3.3.32. Sei $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Teilmenge, $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. So gilt $\lim_{x\to p} f(x) = b$ genau dann, wenn für jede Folge x_n in $D \setminus p$ mit $x_n \to p$ gilt $f(x_n) \to b$.

3.4 Stetige Funktionen auf Kompakta

Definition 3.4.1. Man nennt eine Teilmenge $K \subset \overline{\mathbb{R}}$ **kompakt** oder ein **Kompaktum** genau dann, wenn jede Folge in K eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus K konvergiert. Eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ heißt ein **reelles Kompaktum**.

Bemerkung 3.4.2. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß 2.2.9 sieht man leicht, daß die kompakten Intervalle in $\overline{\mathbb{R}}$ genau die Intervalle der Gestalt $[a, b]$ mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ sind.

Satz 3.4.3 (Extremwerte auf Kompakta). *Jede stetige Funktion auf einem nichtleeren Kompaktum nimmt das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte als Funktionswert an.*

Bemerkung 3.4.4. Ist in Formeln $K \neq \emptyset$ kompakt und $f : K \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig, so gibt es $p, q \in K$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in K$. Ist f reellwertig, so ist insbesondere sein Bild beschränkt. Salopp gesprochen "kann eine stetige reellwertige Funktion auf einem Kompaktum nicht nach Unendlich streben".

Beweis. Da K nicht leer ist, finden wir eine Folge x_n in K mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K)$. Diese Folge besitzt nun nach Annahme eine Teilfolge, die gegen einen Punkt q aus K konvergiert. Indem wir zu dieser Teilfolge übergehen dürfen wir sogar annehmen, unsere Folge sei selbst schon konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x_n = q$. Nach 3.3.27 folgt dann

$$f(q) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K)$$

Die Existenz von $p \in K$ mit $f(p) = \inf f(K)$ zeigt man analog. □

Definition 3.4.5. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge von reellen Zahlen. Eine reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** genau dann, wenn folgende Aussage richtig ist: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ derart, daß für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Bemerkung 3.4.6. Bei der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit kommt es wesentlich auf den Definitionsbereich D an. Da wir Funktionen vielfach angeben ohne ihren Definitionsbereich explizit festzulegen, ist es in diesem Zusammenhang oft sinnvoll, den jeweils gemeinten Definitionsbereich zu präzisieren. Dazu benutzen wir die Sprechweise "f ist gleichmäßig stetig auf D".

Beispiel 3.4.7. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist *nicht* gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, denn $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y|$ kann auch für sehr kleines $|x - y|$ noch groß sein, wenn nur $|x + y|$ hinreichend groß ist. Die Einschränkung dieser Funktion auf ein beliebige reelles Kompaktum ist aber daselbst gleichmäßig stetig nach dem anschließenden Satz.

Satz 3.4.8 (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta). *Jede reellwertige stetige Funktion auf einem reellen Kompaktum ist auf besagtem Kompaktum gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch und zeigen, daß eine Funktion auf einem reellen Kompaktum, die nicht gleichmäßig stetig ist, auch nicht stetig sein kann. Sei $K \subset \mathbb{R}$ unser Kompaktum und $f : K \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, für das wir kein $\delta > 0$ finden könnten: Wir probieren alle $\delta = \frac{1}{n}$ und finden immer wieder x_n, $y_n \in K$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und dennoch $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Gehen wir zu einer Teilfolge über, so dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Folge der x_n gegen einen Punkt von K konvergiert,

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ mit $x \in K$. Damit folgt natürlich $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Wäre nun f stetig bei x, so folgte

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

und damit lägen notwendig fast alle $f(x_n)$ und fast alle $f(y_n)$ im Intervall $(f(x) - \varepsilon/2, f(x) + \varepsilon/2)$, im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Wir haben also gezeigt, daß eine Funktion auf einem reellen Kompaktum, die nicht gleichmäßig stetig ist, auch nicht stetig sein kann. □

Übung 3.4.9. Jede endliche Vereinigung von Kompakta ist kompakt.

Übung 3.4.10. Das Bild eines Kompaktums unter einer stetigen Abbildung ist stets auch wieder kompakt.

3.5 Integration stetiger Funktionen

Definition 3.5.1. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes reelles Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reellwertige Funktion. Wir definieren die Menge $I(f) \subset \mathbb{R}$ aller "naiven Integrale zu Treppen, die unter f liegen" durch

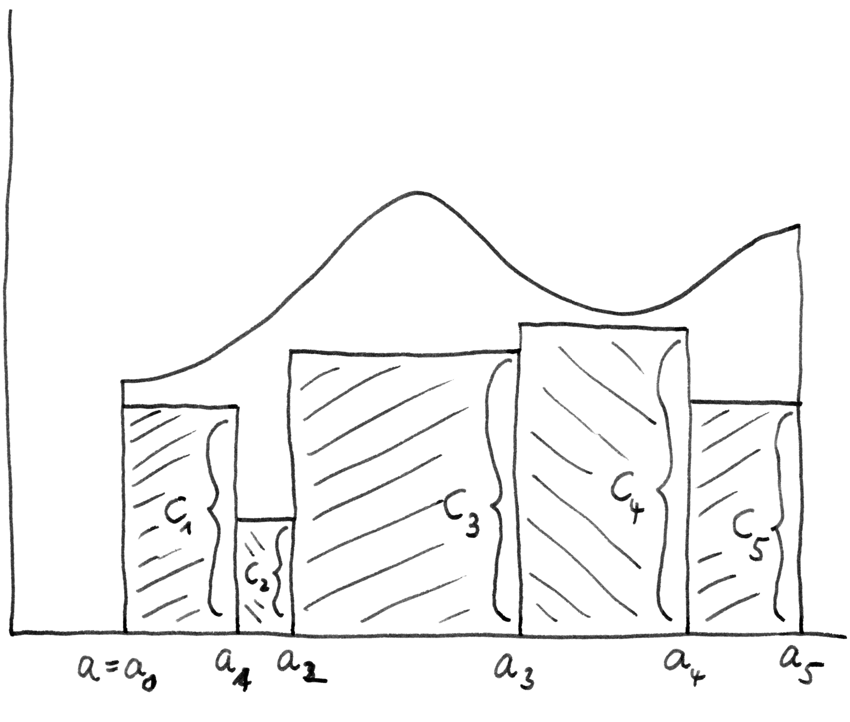
$$I(f) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i(a_i - a_{i-1}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Alle möglichen Wahlen von } n \in \mathbb{N} \\ \text{und von Stellen } a_0 = a \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b \\ \text{und von Werten } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \text{ derart,} \\ \text{daß gilt } \; f(x) \geq c_i \text{ für alle } x \in [a_{i-1}, a_i] \end{array} \right\}$$

Da f stetig ist, hat es nach 3.4.3 einen beschränkten Wertebereich, d.h. es gibt $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Daraus folgt, daß $m(b-a)$ zu $I(f)$ gehört und daß $M(b-a)$ eine obere Schranke von $I(f)$ ist. Als nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat $I(f)$ nach 1.4.7 ein Supremum in $\mathbb{R}$. Wir nennen dies Supremum das **Integral der Funktion f über das Intervall** $[a, b]$ und schreiben

$$\sup I(f) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f = \int_{[a,b]} f$$

Bemerkung 3.5.2. Anschaulich mißt das Integral von f die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, wobei Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ zu rechnen sind. Der folgende Satz faßt einige Eigenschaften unseres Integrals zusammen. Man kann leicht zeigen, daß unser Integral sogar durch diese Eigenschaften charakterisiert wird.

Satz 3.5.3 (Integrationsregeln). *1. Für die konstante Funktion mit dem Wert* 1 *gilt* $\int_a^b 1 = b - a$.



Die schraffierte Fläche stellt ein Element von $I(f)$ dar für die durch den geschwungenen Graphen dargestellte Funktion f.

2. *Für $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ stetig und $b \in [a, c]$ gilt $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

3. *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, in Kurzschreibweise $f \leq g$, so folgt $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

4. *Für $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.*

5. *Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.*

Bemerkung 3.5.4. Die beiden letzten Punkte bedeuten, daß das Integral eine lineare Abbildung ist vom reellen Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf unserem kompakten Intervall in die reellen Zahlen.

Beweis. 1. Wir wissen ja schon, daß aus $m = 1 \leq f(x) \leq 1 = M$ folgt $b - a \leq \int_a^b f \leq b - a$.

2. Für Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ definiert man eine neue Teilmenge $A + B \subset \mathbb{R}$ durch die Vorschrift $A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$. Offensichtlich gilt

$$I(f) = I(f|_{[a,b]}) + I(f|_{[b,c]})$$

Für beliebige nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ haben wir aber $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ nach Übung 1.4.8.

3. Aus $f \leq g$ folgt offensichtlich $I(f) \subset I(g)$.

4 & 5. Um die letzten beiden Aussagen zu zeigen, müssen wir etwas weiter ausholen. Für unsere stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und beliebiges $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ unterteilen wir unser Intervall **äquidistant**, lateinisierend für "mit gleichen Abständen", durch

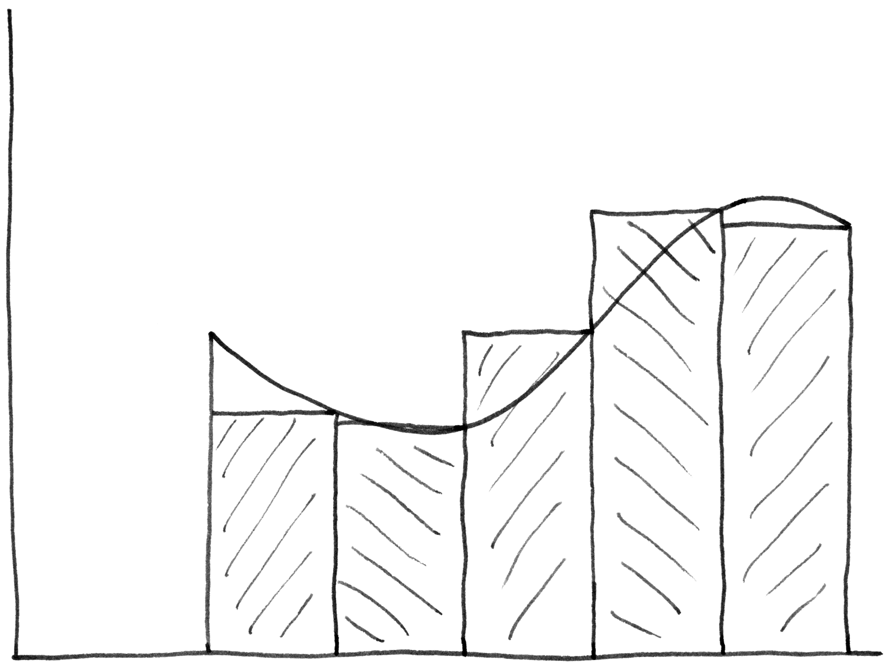
$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_r = b$$

Es gilt also $t_i = a + i(b - a)/r$. Wir definieren nun die r-te **Riemann-Summe** $S^r(f) \in \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$S^r(f) = \sum_{i=1}^{r} f(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{r} f(t_i)(\tfrac{b-a}{r})$$

In der anschließenden Proposition 3.5.5 werden wir zeigen

$$\int_a^b f = \lim_{r \to \infty} S^r(f)$$



Die schraffierte Fläche stellt die fünfte Riemannsumme der durch den geschwungenen Graphen beschriebenen Funktion dar.

Damit erhalten wir dann sofort

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b (f+g) & = & \lim\limits_{r\to\infty} S^r(f+g) \\ & = & \lim\limits_{r\to\infty} (S^r(f)+S^r(g)) \\ & = & \lim\limits_{r\to\infty} S^r f + \lim\limits_{r\to\infty} S^r g \\ & = & \int_a^b f + \int_a^b g \end{array}$$

und ähnlich folgt $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$. □

Proposition 3.5.5. *Für $a \leq b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt $\int_a^b f = \lim\limits_{r\to\infty} S^r(f)$.*

Bemerkung 3.5.6. In der Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, die auf den Philosophen und Mathematiker Leibniz zurückgeht, bedeutet das Integralzeichen $\int$ ein S wie "Summe" und $\mathrm{d}x$ meint "Differenz im x-Wert". Manchmal verwendet man auch allgemeiner für eine weitere Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit guten Eigenschaften, etwa für g die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen, die Notation $\int f\,\mathrm{d}g$ und meint damit den Grenzwert der Summen $\sum_{i=1}^r f(t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$, dessen Existenz ich hier nicht diskutieren will.

Bemerkung 3.5.7. Man mag versucht sein, die in der Proposition enthaltene Charakterisierung gleich als Definition des Integrals zu nehmen. Ich rate davon jedoch ab, da die Existenz des fraglichen Grenzwerts nicht so leicht zu zeigen ist und auch die zweite unserer Integrationsregeln mit dieser Definition sehr viel schwerer herzuleiten wäre.

Beweis. Wir definieren zusätzlich zur r-ten Riemann-Summe die r-ten **Untersummen** und **Obersummen** durch

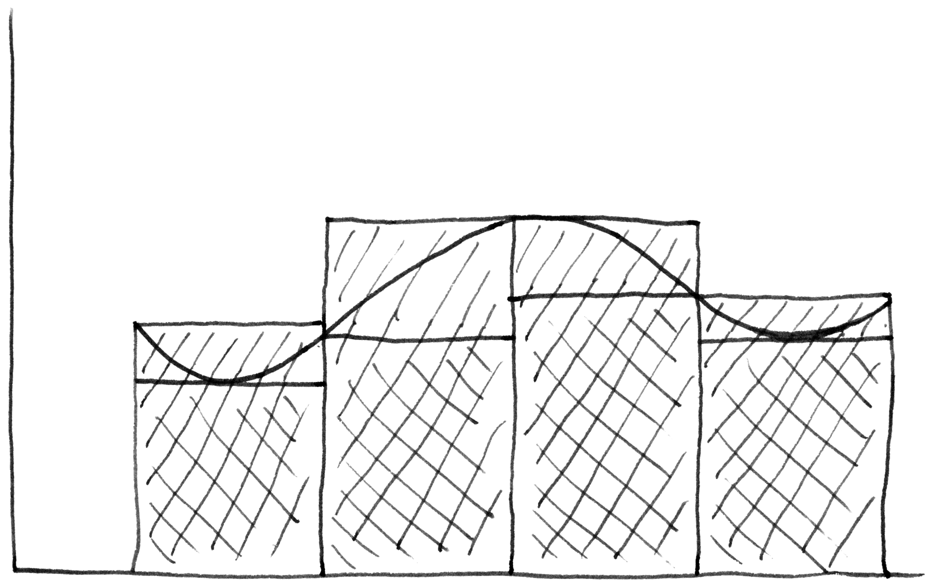
$$\underline{S}^r(f) = \sum_{i=1}^r (\inf f[t_{i-1},t_i])(\tfrac{b-a}{r}) \qquad \text{und} \qquad \overline{S}^r(f) = \sum_{i=1}^r (\sup f[t_{i-1},t_i])(\tfrac{b-a}{r})$$

und behaupten die Ungleichungen

$$\begin{array}{ccccc} \underline{S}^r(f) & \leq & S^r(f) & \leq & \overline{S}^r(f) \\ \underline{S}^r(f) & \leq & \int_a^b f & \leq & \overline{S}^r(f) \end{array}$$

Die erste Zeile ist offensichtlich. Die zweite Zeile erhalten wir zum Beispiel, indem wir aus den bereits bewiesenen Teilen 1 und 3 des Satzes die Ungleichungen

$$(\inf f[t_{i-1},t_i])(\tfrac{b-a}{r}) \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \leq (\sup f[t_{i-1},t_i])(\tfrac{b-a}{r})$$



Die schraffierte Fläche stellt die vierte Obersumme der durch den geschwungenen Graphen beschriebenen Funktion dar, der kreuzweise schraffierte Teil ihre Untersumme.

folgern, diese Ungleichungen aufsummieren, und die Mitte mit dem auch bereits bewiesenen Teil 2 des Satzes zu $\int_a^b f$ zusammenfassen. Damit sind beide Zeilen von Ungleichungen bewiesen. Nun ist f auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig, für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert also $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Wählen wir N mit $(\frac{b-a}{N}) < \delta$ und nehmen dann $r \geq N$, so schwankt unsere Funktion f auf jedem Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ höchstens um ε, mithin gilt $0 \leq \overline{S}^r(f) - \underline{S}^r(f) \leq \varepsilon(b-a)$ und damit $|S^r(f) - \int_a^b f| \leq \varepsilon(b-a)$. Die Proposition ist gezeigt. □

Beispiel 3.5.8.
$$\begin{aligned} \int_0^b x \ \mathrm{d}x &= \lim_{r\to\infty} \left(\tfrac{b}{r} + \tfrac{2b}{r} + \cdots \tfrac{rb}{r}\right) \tfrac{b}{r} \\ &= \lim_{r\to\infty} \tfrac{r(r+1)}{2} \cdot \tfrac{b^2}{r^2} \\ &= \tfrac{b^2}{2} \end{aligned}$$

Lemma 3.5.9. *Für $a \leq b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt die Abschätzung*
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Beweis. Aus $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt $-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$. □

Bemerkung 3.5.10. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sind $a, b \in I$ gegeben mit $a > b$, so definieren wir $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ durch die Vorschrift
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$
Mit dieser Konvention gilt dann für beliebige a, b, c in einem reellen Intervall I und jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ die Formel
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Übung 3.5.11. Sei $a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n = b$ eine **Unterteilung** des kompakten reellen Intervalls $[a,b]$. Gegeben eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bezeichnet man die Summen
$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(a_i - a_{i-1})$$
mit beliebigen $\zeta_i \in [a_{i-1}, a_i]$ als die **Riemann-Summen** von f zur vorgegebenen Unterteilung. Die maximale Länge $\sup\{a_i - a_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ eines Teilintervalls heißt die **Feinheit** der Unterteilung. Man zeige: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß alle Riemann-Summen von f zu Unterteilungen der Feinheit $\leq \delta$ vom Integral $\int f$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ haben.

Übung 3.5.12. Man zeige den **Mittelwertsatz der Integralrechnung**: Gegeben ein nichtleeres kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $\int f = (b-a)f(\xi)$. Gegeben eine weitere stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es sogar $\xi \in [a, b]$ mit $\int fg = f(\xi) \int g$.

Übung 3.5.13. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade** genau dann, wenn gilt $f(-x) = f(x)$ für alle x, und **ungerade** genau dann, wenn gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle x. Man zeige für jede ungerade stetige Funktion und alle reellen r die Formel $\int_{-r}^{r} f = 0$.

4 Differentiation und Integration

4.1 Differentiation

Definition 4.1.1. Wir nennen eine Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{R}}$ **halboffen** genau dann, wenn sie mit jedem Punkt auch ein ganzes Intervall umfaßt, das besagten Punkt enthält und nicht nur aus diesem einen Punkt besteht.

Definition 4.1.2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge und $p \in I$ ein Punkt. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar bei p mit Ableitung** $b \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn gilt

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage ab durch $f'(p) = b$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(p) = b$ oder, wenn die Funktion $x \mapsto f(x)$ durch einen größeren Ausdruck in x gegeben ist, durch

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=p} f(x) = b$$

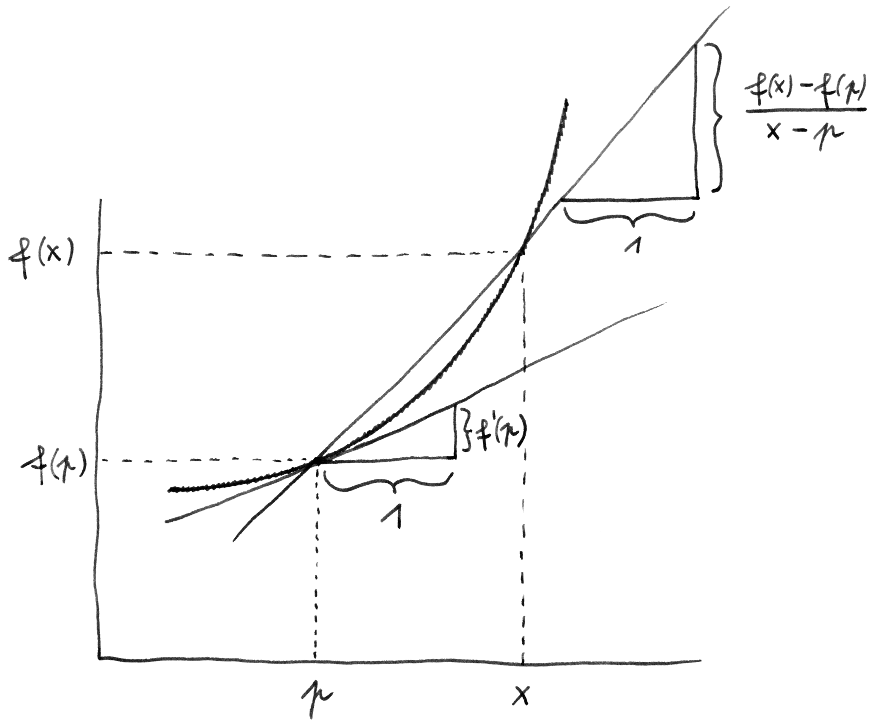
Bemerkung 4.1.3. Jede nicht vertikale, d.h. nicht zur y-Achse parallele Gerade in der Ebene ist die Lösungsmenge genau einer Gleichung der Gestalt $y = a + bx$. Die reelle Zahl b heißt in diesem Fall die **Steigung** unserer Gerade. Anschaulich bedeutet der **Differenzenquotient**

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

die Steigung der Gerade durch die Punkte $(p, f(p))$ und $(x, f(x))$. Diese Gerade heißt auch eine **Sekante**, lateinisch für "Schneidende", da sie eben den Graphen unserer Funktion in den beiden besagten Punkten schneidet. Der Grenzwert $f'(p)$ der Sekantensteigungen bedeutet anschaulich die Steigung der **Tangente**, lateinisch für "Berührende", an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$. Die Umkehrung dieser Anschauung liefert auch eine präzise Definition besagter Tangente als der Gerade durch den Punkt $(p, f(p))$ mit der Steigung $f'(p)$.

Bemerkung 4.1.4. Wir geben noch zwei Umformulierungen der Definition der Differenzierbarkeit. Ist $I \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge und $p \in I$, so ist nach 3.3.10 eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung $f'(p) = b$ genau dann, wenn es eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ gibt, die stetig ist bei p mit Funktionswert $\varphi(p) = b$ derart, daß für alle $x \in I$ gilt

$$f(x) = f(p) + (x - p)\varphi(x)$$



Eine Sekantensteigung und die Tangentensteigung der durch den gezahnten Graphen dargestellten Funktion

Anschaulich bedeutet diese Forderung, daß die "Sekantensteigungsfunktion" $\varphi(x) = (f(x)-f(p))/(x-p)$ durch die Vorschrift $\varphi(p) = b$ stetig an die Stelle p fortgesetzt werden kann. In nochmals anderen Formeln ist unsere Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p mit Ableitung b genau dann, wenn gilt

$$f(p+h) = f(p) + bh + \varepsilon(h)h$$

für eine Funktion ε, die stetig ist bei Null und die dort den Wert Null annimmt. Hierbei ist zu verstehen, daß die Funktion ε definiert sein soll auf der Menge aller h mit $h + p \in I$. Diese Formulierung des Ableitungsbegriffs hat den Vorteil, besonders gut zum Ausdruck zu bringen, daß für festes p und kleines h der Ausdruck $f(p) + bh$ eine gute Approximation von $f(p + h)$ ist.

Beispiele 4.1.5. Eine konstante Funktion auf einer halboffenen Menge von reellen Zahlen ist an jedem nicht isolierten Punkt besagter Menge differenzierbar mit Ableitung Null. Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ hat in jedem Punkt p die Ableitung $\mathrm{id}'(p) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}(p) = 1$.

Lemma 4.1.6. *Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist differenzierbar in jedem Punkt von $\mathbb{R}^\times$ und ihre Ableitung bei einer Stelle $p \in \mathbb{R}^\times$ ist $-\frac{1}{p^2}$.*

Beweis. Wir rechnen $\lim_{x\to p} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{p}}{x-p} = \lim_{x\to p} \frac{-1}{xp} = -\frac{1}{p^2}$ nach 3.3.11. □

Lemma 4.1.7. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge. Ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $p \in I$, so ist f stetig bei p.*

Beweis. Das folgt sofort aus der vorhergehenden Proposition 4.1.4. □

Definition 4.1.8. Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definiert auf einem offenen Intervall um einen Punkt $p \in (a, b)$ und existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \searrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

so nennen wir sie die **linksseitige** bzw. die **rechtsseitige Ableitung** von f an der Stelle p.

Lemma 4.1.9. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definiert auf einem offenen Intervall um einen Punkt $p \in (a, b)$. Genau dann ist f differenzierbar bei p, wenn dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung existieren und übereinstimmen.*

Beweis. Übung. □

Beispiel 4.1.10. Man überlegt sich zum Beispiel, daß der Absolutbetrag $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ nicht differenzierbar ist bei $p = 0$, da dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung zwar existieren, aber nicht übereinstimmen.

4.2 Ableitungsregeln

Proposition 4.2.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei einem Punkt $p \in I$. So sind auch die Funktionen $f + g$ und fg differenzierbar bei p und es gilt*

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p) \quad \textit{und} \quad (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

Beweis. Wir schreiben wie in 4.1.4

$$\begin{array}{rcccccc} f(p+h) & = & f(p) & + & f'(p)h & + & \varepsilon(h)h \\ g(p+h) & = & g(p) & + & g'(p)h & + & \hat{\varepsilon}(h)h \end{array}$$

für Funktionen $\varepsilon, \hat{\varepsilon}$, die stetig sind bei Null die dort verschwinden, und erhalten durch Addieren bzw. Multiplizieren dieser Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(p+h) & = & (f+g)(p) + [f'(p) + g'(p)]\, h \quad + [\varepsilon(h) + \hat{\varepsilon}(h)]\, h \\ (fg)(p+h) & = & (fg)(p) + [f'(p)g(p) + f(p)g'(p)]\, h \\ & & + [f'(p)g'(p)h + \varepsilon(h)g(p) + f(p)\hat{\varepsilon}(h) + h\varepsilon(h)\hat{\varepsilon}(h)]\, h \end{array}$$

Nach unseren Kenntnissen über stetige Funktionen steht aber in der zweiten eckigen Klammer auf der rechten Seite jeder dieser Gleichungen eine Funktion, die stetig ist bei $h = 0$ und die dort den Wert Null annimmt. □

Definition 4.2.2. Ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ definiert auf einer halboffenen Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ und differenzierbar an jedem Punkt von I, so nennen wir f **differenzierbar auf** I und nennen die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$, $p \mapsto f'(p)$ ihre **Ableitung**.

Beispiel 4.2.3. Zum Beispiel ist $1/x$ differenzierbar auf $\mathbb{R}^\times$ mit Ableitung $-1/x^2$, und sind f und g differenzierbar, so auch $f+g$ und fg und für ihre Ableitungen gelten die **Summenregel** und die **Produktregel** oder **Leibniz-Regel**

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Korollar 4.2.4 (Ableiten ganzzahliger Potenzen). *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und unter der Voraussetzung $x \neq 0$ im Fall $n \leq 0$ ist die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^n$ die Funktion $x \mapsto nx^{n-1}$.*

Beweis. Man zeigt das durch vollständige Induktion über n separat für $n \geq 0$ und $n \leq -1$. Im Fall $n = 0$ ist die Ableitung der konstanten Funktion $x^0 = 1$ natürlich überall definiert und Null, kann aber aber nur für $x \neq 0$ in der Form $0x^{-1}$ geschrieben werden. □

Satz 4.2.5 (Kettenregel). *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ halboffene Teilmengen und $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen und es gelte $f(I) \subset J$. Sei f differenzierbar in p und g differenzierbar in $f(p)$. So ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in p mit Ableitung*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

Beweis. Der besseren Übersichtlichkeit halber benutzen wir hier Großbuchstaben für die Ableitungen und setzen $f'(p) = L$ und $g'(f(p)) = M$. Wir haben

$$\begin{aligned} f(p+h) &= f(p) + Lh + \varepsilon(h)h \\ g(f(p)+k) &= g(f(p)) + Mk + \hat{\varepsilon}(k)k \end{aligned}$$

für Funktionen ε und $\hat{\varepsilon}$, die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Wir erhalten durch Einsetzen von $Lh + \varepsilon(h)h$ für k sofort

$$\begin{aligned} g(f(p+h)) &= g(f(p) + Lh + \varepsilon(h)h) \\ &= g(f(p)) + MLh + M\varepsilon(h)h + \hat{\varepsilon}(Lh + \varepsilon(h)h)(L + \varepsilon(h))h \end{aligned}$$

Es ist nun aber offensichtlich, daß sich hier die Summe der Terme ab dem dritten Summanden in der Gestalt $\eta(h)h$ schreiben läßt für eine Funktion η, die stetig ist bei Null und die dort verschwindet, und wir erhalten

$$(g \circ f)(p+h) = (g \circ f)(p) + MLh + \eta(h)h$$ □

Proposition 4.2.6 (Quotientenregel). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion ohne Nullstelle und $p \in I$ ein Punkt.*

1. *Ist f differenzierbar bei p, so ist auch $1/f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/f(x)$ differenzierbar bei p und hat dort die Ableitung $-f'(p)/f(p)^2$.*

2. *Ist zusätzlich $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei p, so ist auch $\frac{g}{f}$ differenzierbar bei p mit Ableitung*

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}$$

Beweis. 1 folgt sofort aus 4.1.6 mit der Kettenregel. 2 folgt aus 1 mit der Produktregel. □

Bemerkung 4.2.7. Ist also $I \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge und sind $g, f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und hat f keine Nullstelle auf I, so ist auch g/f differenzierbar mit Ableitung

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

Lemma 4.2.8 (Ableitung der Exponentialfunktion). *Die Exponentialfunktion ist ihre eigene Ableitung, in Formeln* $\exp'(p) = \exp(p) \quad \forall p \in \mathbb{R}$.

Beweis. In 5.1.12 werden wir lernen, daß man "Potenzreihen gliedweise differenzieren darf". Da wir das aber bis jetzt noch nicht wissen, müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir bestimmen zunächst die Ableitung der Exponentialfunktion an der Stelle $p = 0$ und erhalten

$$\begin{array}{rcl} \exp'(0) & = & \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} \\ & = & \lim_{x\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{i!} \\ & = & \lim_{x\to 0} \left(1 + x \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-2}}{i!}\right) \\ & = & 1 \end{array}$$

nach 3.3.14 und 3.3.13, da ja $\left|\sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-2}}{i!}\right|$ für $|x| \leq 1$ beschränkt ist durch die Euler'sche Zahl e. Um $\exp'(p)$ für beliebiges p zu bestimmen, rechnen wir

$$\begin{array}{rcl} \exp'(p) & = & \lim_{h\to 0} \frac{\exp(p+h)-\exp(p)}{h} \\ & = & \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} \exp(p) \\ & = & \exp(p) \end{array}$$

wo wir im letzten Schritt den schon behandelten Fall $p = 0$ verwenden und formal 3.3.20 benutzen, unm den Grenzwert $x \to p$ in einen Grenzwert $h \to 0$ umzuformen. □

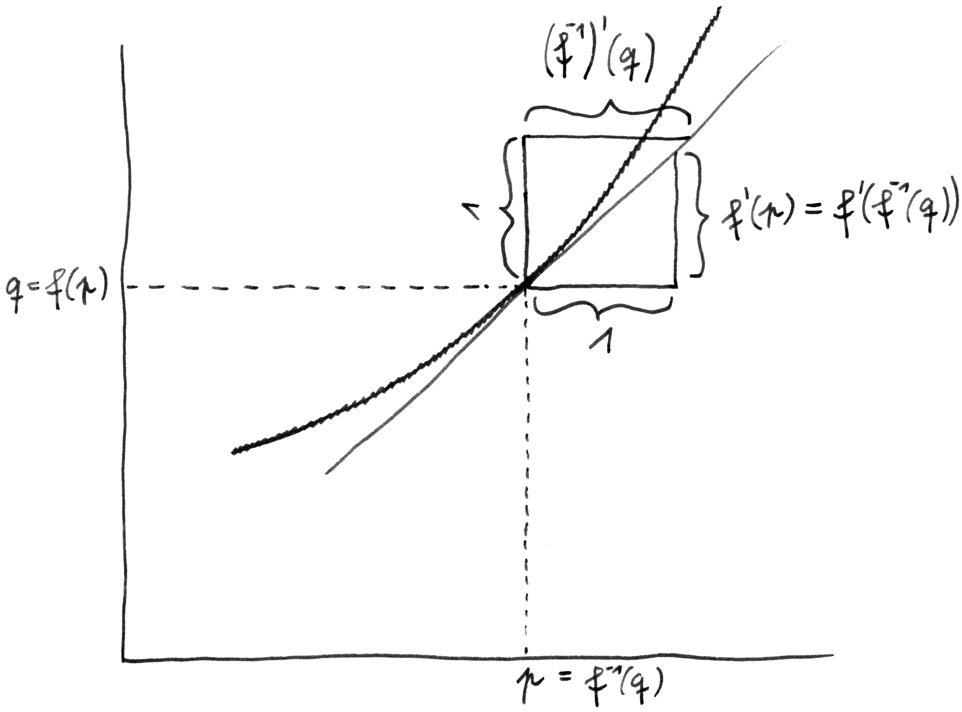
Satz 4.2.9 (Ableitung von Umkehrfunktionen). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein halboffenes Intervall und sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *streng monoton, stetig auf* I *und differenzierbar im Punkt* $p \in I$ *mit Ableitung* $f'(p) \neq 0$. *So ist auch die Umkehrfunktion* $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $q = f(p)$ *mit Ableitung*

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

Beweis. Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) - f(p) = (x - p)\varphi(x)$ und $\varphi(p) = f'(p)$. Setzen wir hier $x = f^{-1}(y)$, so ist $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(I) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $(y - q)\psi(y) = f^{-1}(y) - f^{-1}(q)$ und $\psi(q) = 1/f'(p)$. □

Beispiel 4.2.10. Die **Ableitung des Logarithmus** ist mithin

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp(\log q)} = \frac{1}{q}$$



Veranschaulichung der Formel 4.2.9 für die Ableitung von Umkehrfunktionen

Damit ergibt sich für alle $a \in \mathbb{R}$ die **Ableitung der allgemeinen Potenzen** $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ zu $x \mapsto ax^{a-1}$. In der Tat, nach Definition gilt ja $x^a = \exp(a \log x)$, die Ableitung wird also $a \frac{1}{x} \exp(a \log x) = ax^{a-1}$.

Lemma 4.2.11. *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar.

Beweis. Wir betrachten allgemeiner für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \quad = \quad \begin{cases} x^{-n}\,\mathrm{e}^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

und zeigen, daß sie differenzierbar ist mit Ableitung $f_n' = -nf_{n+1} + f_{n+2}$. Damit sind wir dann natürlich fertig. Das einzige Problem ist die Ableitung an der Stelle $p = 0$, wo wir nachweisen müssen, daß die Sekantensteigungen "von rechts" auch gegen Null streben, daß also für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

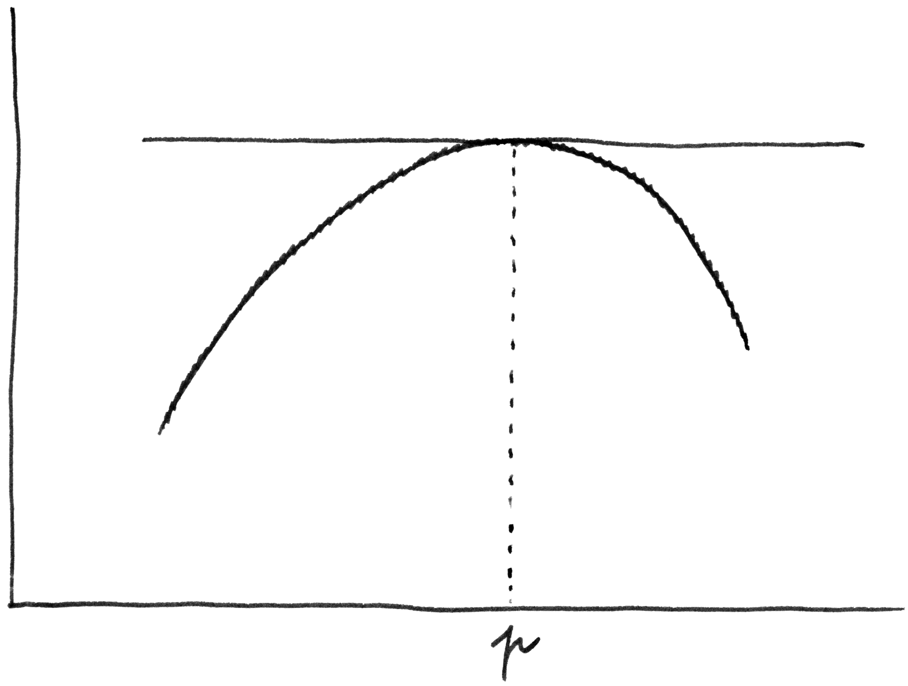
$$\lim_{x \searrow 0} x^{-n-1}\,\mathrm{e}^{-1/x} = 0$$

Nun wissen wir aber nach der Definition von exp, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt $\exp(x) > x^m/m!$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt also $\exp(1/x) > x^{-n-2}/(n+2)!$ und wir folgern $0 < x^{-n-1}\,\mathrm{e}^{-1/x} < (n+2)!\,x$ für $x > 0$. □

4.3 Folgerungen aus Eigenschaften der Ableitung

Definition 4.3.1. Eine Teilmenge der reellen Zahlen oder auch von $\overline{\mathbb{R}}$ heißt **offen** genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist. In Formeln ist demnach eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ offen genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset U$.

Satz 4.3.2 (Notwendige Bedingung für ein Extremum). *Nimmt eine reellwertige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge der reellen Zahlen definiert ist, an einem Punkt dieser offenen Teilmenge ihr Maximum oder ihr Minimum an und ist sie dort auch differenzierbar, so verschwindet an diesem Punkt ihre Ableitung.*



Veranschaulichung der notwendigen Bedingung für ein Maximum 4.3.2

Beweis. Bezeichne $U \subset \mathbb{R}$ unsere offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ unsere Funktion. Nimmt f ein Maximum an bei $p \in U$, so gilt für die Sekantensteigungsfunktion $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ offensichtlich $\varphi(x) \geq 0$ für $x < p$ und $\varphi(x) \leq 0$ für $x > p$. Wenn der Grenzwert der Sekantensteigungen existiert, so folgt mit 3.3.21 notwendig $0 \leq \lim_{x \nearrow p} \varphi(x) = \lim_{x \to p} \varphi(x) = \lim_{x \searrow p} \varphi(x) \leq 0$ und damit ist dann dieser Grenzwert Null. Nimmt f ein Minimum an bei p, so argumentiert man analog. □

Beispiel 4.3.3. Das **Brechungsgesetz** behauptet, daß das Verhältnis vom Sinus des Eintrittswinkels zum Sinus des Austrittswinkels eines Lichtstrahls beim Übergang zwischen zwei Medien, sagen wir Luft und Wasser, konstant ist. Wir leiten es nun ab aus dem Fresnel'schen Prinzip, nach dem ein Lichtstrahl "stets den schnellsten Weg nimmt". Ist sagen wir die Lichtgeschwindigkeit in Wasser das γ-fache der Lichtgeschwindigkeit in Luft, so sollte nach diesem Prinzip der Lichtstrahl mit den Bezeichnungen aus nebenstehendem Bild bei dem x in das Wasser eintauchen, für das

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \gamma\sqrt{b^2 + (L - x)^2}$$

minimal wird. Ableiten liefert dafür die notwendige Bedingung

$$\frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \gamma\frac{-2(L - x)}{2\sqrt{b^2 + (L - x)^2}} = 0$$

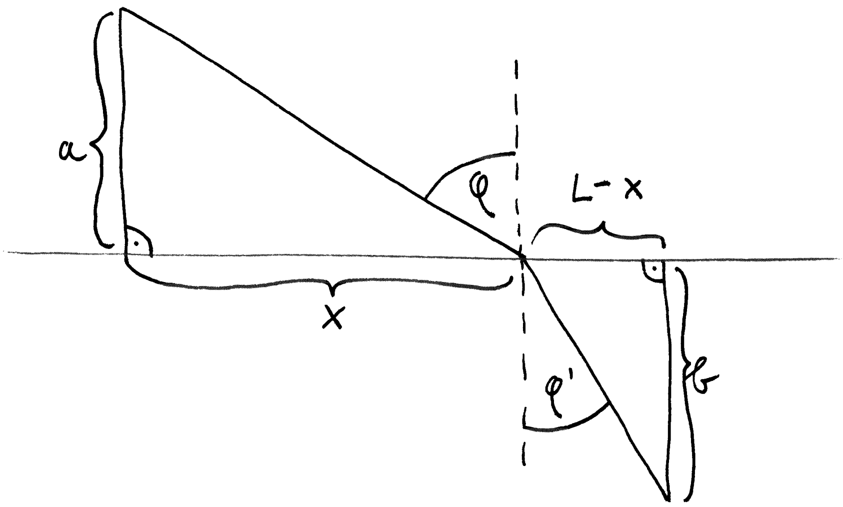
und damit steht das Brechnungsgesetz $\sin\varphi = \gamma \sin\varphi'$ auch schon da.

Satz 4.3.4 (von Rolle). *Seien $a < b$ aus $\overline{\mathbb{R}}$ gegeben und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b). Gilt dann $f(a) = f(b)$, so gibt es $p \in (a, b)$ mit $f'(p) = 0$.*

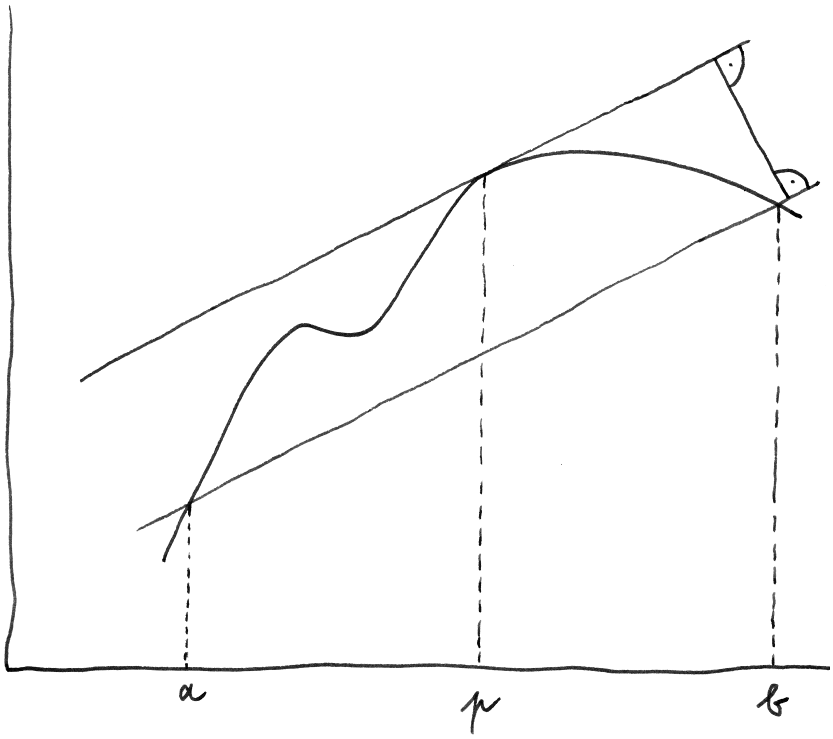
Beweis. Nach 3.4.3 gibt es Punkte $p, q \in [a, b]$, an denen f sein Maximum und sein Minimum annimmt. Liegt einer dieser Punkte im Innern (a, b) unseres Intervalls, so verschwindet dort die Ableitung nach dem vorhergehenden Satz und wir sind fertig. Nimmt f sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand des Intervalls an, so ist die Funktion f wegen unserer Annahme $f(a) = f(b)$ konstant und wir sind auch fertig. □

Korollar 4.3.5 (Mittelwertsatz). *Seien $a < b$ aus $\mathbb{R}$ gegeben und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem ganzen kompakten Intervall $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b). So gibt es $p \in (a, b)$ mit*

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Zum Brechungsgesetz



Veranschaulichung des Mittelwertsatzes 4.3.5

Beweis. Man wende den vorhergehenden Satz von Rolle an auf die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R},\ \ g(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Satz 4.3.6 (Erste Ableitung und Monotonie). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. So gilt*

$$\begin{array}{lcl} f' > 0 & \Rightarrow & f \text{ wächst streng monoton} \\ f' \geq 0 & \Leftrightarrow & f \text{ wächst monoton} \\ f' < 0 & \Rightarrow & f \text{ fällt streng monoton} \\ f' \leq 0 & \Leftrightarrow & f \text{ fällt monoton} \\ f' = 0 & \Leftrightarrow & f \text{ ist konstant} \end{array}$$

Beweis. Es reicht, die beiden ersten Aussagen zu zeigen. Wächst f nicht streng monoton, so gibt es $a < b$ mit $f(a) \geq f(b)$ und nach dem Mittelwertsatz finden wir $p \in (a, b)$ mit

$$f'(p) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq 0$$

Wächst f nicht monoton, so finden wir in derselben Weise $p \in I$ mit $f'(p) < 0$. Das zeigt schon mal $\Rightarrow$. Umgekehrt folgt aus f monoton wachsend, daß alle Sekantensteigungen nichtnegativ sind, und damit auch alle Grenzwerte von Sekantensteigungen. □

Korollar 4.3.7. *Genau dann stimmt eine differenzierbare Funktion auf einem reellen halboffenen Intervall überein mit ihrer Ableitung, wenn sie bis auf einen konstanten Faktor die Exponentialfunktion ist.*

Beweis. Bezeichne $I \subset \mathbb{R}$ unser halboffenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ unsere differenzierbare Funktion mit $f = f'$. Die Ableitung der Funktion $f(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ ergibt sich mit der Produktregel zu $f'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - f(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, mithin ist die Funktion $f(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ konstant, sagen wir mit einzigem Funktionswert c, und wir folgern $f(x) = c\,\mathrm{e}^{x}\ \forall x \in I$. □

Übung 4.3.8. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und löst die Differentialgleichung $f' = \alpha f$, so gilt $f(x) = f(0)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz 4.3.9 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in I$ ein Punkt mit $f'(p) = 0$. Sei die Ableitung f' von f differenzierbar bei p.*

1. *Gilt $f''(p) > 0$, so besitzt f ein* **isoliertes lokales Minimum** *bei p, als da heißt, es gibt $r > 0$ derart, daß gilt $f(q) > f(p)$ für alle $q \in I$ mit $0 < |q - p| < r$.*

2. *Gilt* $f''(p) < 0$, *so besitzt* f *ein* **isoliertes lokales Maximum** *bei* p.

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(p) + (x-p)\varphi(x) \\ &= (x-p)\varphi(x) \end{aligned}$$

mit φ stetig in p und $\varphi(p) = f''(p) > 0$. So gibt also $r > 0$ mit $\varphi(q) > 0$ für $q \in I \cap (p-r, p+r)$, und wir folgern $f'(q) < 0$ für $q \in I \cap (p-r, p)$ und $f'(q) > 0$ für $q \in I \cap (p, p+r)$. Unseren Funktion f fällt also streng monoton auf $I \cap (p-r, p)$ und wächst streng monoton auf $I \cap (p, p+r)$. Der andere Fall $f''(p) < 0$ wird analog behandelt. □

Definition 4.3.10. Wir nennen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall I **konvex** bzw. **konkav** genau dann, wenn ihr Graph unter bzw. über jeder seiner Sekanten liegt, wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

bzw. $\geq$ für konkave Funktionen.

Übung 4.3.11. Man zeige, daß diese Bedingung gleichbedeutend ist zu

$$f(tx + (1-t)z) \leq tf(x) + (1-t)f(z) \quad \forall t \in [0,1]$$

Satz 4.3.12 (Zweite Ableitung und Konvexität). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein halboffenes Intervall und sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine zweimal differenzierbare Funktion. So gilt*

$$\begin{array}{lcl} f \text{ ist konvex} & \Leftrightarrow & f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \\ f \text{ ist konkav} & \Leftrightarrow & f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \end{array}$$

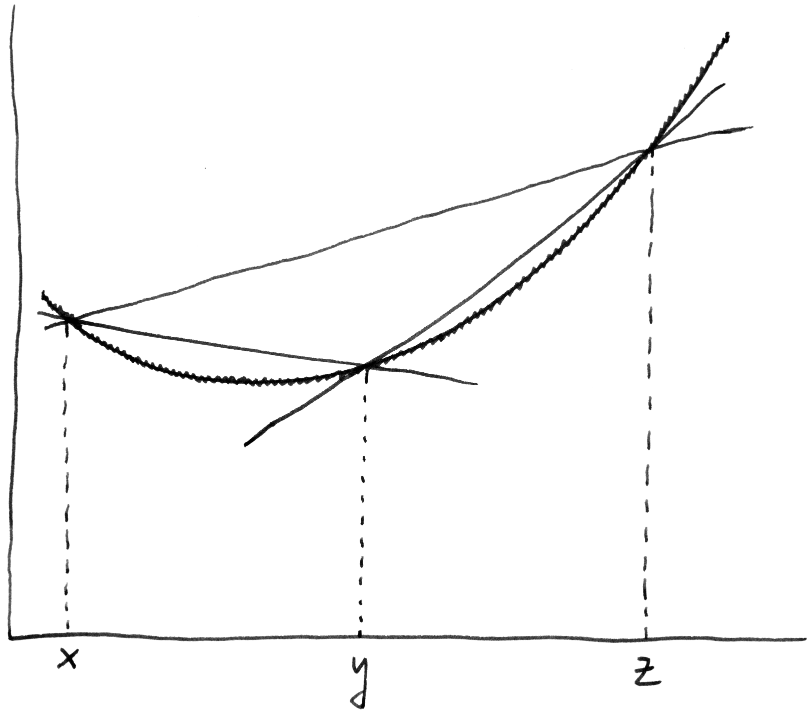
Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage. Ist f nicht konvex, so gibt es x, y, z mit $x < y < z$ aber

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Nach dem Mittelwertsatz finden wir dann aber $\xi < \zeta$ mit $f'(\xi) > f'(\zeta)$ und bei nochmaligem Anwenden η mit $f''(\eta) < 0$. Ist umgekehrt f konvex, so reicht es nach 4.3.6 zu zeigen, daß f' monoton wächst. Kürzen wir dazu die Steigung der Sekante durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ ab mit $s_{xy} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, so impliziert die Konvexität die Ungleichungskette

$$s_{xy} \leq s_{xz} \leq s_{yz}$$

Hier ist $s_{xy} \leq s_{yz}$ eine direkte Konsequenz der Konvexität, und da sicher



Veranschaulichung unserer Ungleichungskette für die Sekantensteigungen bei konvexen Funktionen aus dem Beweis von 4.3.12

gilt $(x-y)s_{xy} + (y-z)s_{yz} = (x-z)s_{xz}$, liegt s_{xz} als ein “gewichtetes Mittel” zwischen s_{xy} und s_{xz}. Unsere Ungleichungskette schreiben wir nun aus zu

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

Die Sekantensteigungsfunktionen $y \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ und $y \mapsto \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ wachsen insbesondere monoton auf $(x,z]$ bzw. $[x,z)$ und im Grenzwert folgt

$$f'(x) \leq \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq f'(z) \qquad \square$$

Definition 4.3.13. Wir nennen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall I **streng konvex** (bzw. **streng konkav**) genau dann, wenn ihr Graph echt unter (bzw. echt über) jeder Sekante liegt, wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

bzw. $>$ für streng konkave Funktionen.

Satz 4.3.14. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. So gilt*

$$\begin{array}{lcl} f \textit{ ist streng konvex} & \Leftarrow & f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \\ f \textit{ ist streng konkav} & \Leftarrow & f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \end{array}$$

Beweis. Übung. $\square$

Übung 4.3.15. Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zeige man die Ungleichung $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$. Hinweis: Man gehe aus von der Konvexität der Exponentialfunktion.

Übung 4.3.16. Gegeben reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und $p \geq 1$ zeige man die Ungleichung $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$. Hinweis: Man gehe aus von der Konvexität der Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$.

Übung 4.3.17. Für $P \subset \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen gilt

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p} = \infty$$

In der Tat folgt aus $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und der Entwicklung in eine geometrische Reihe $(1 - 1/p)^{-1} = (1 + p^{-1} + p^{-2} \ldots)$, daß die Menge der Partialprodukte des unendlichen Produkts $\prod_{p \in P}(1 - 1/p)^{-1}$ nicht beschränkt sein kann. Nun wende man den Logarithmus an und schätze ab.

4.4 Regeln von de l'Hospital

Satz 4.4.1 (Regeln von de l'Hospital). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von I. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen derart, daß gilt*

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x\to p} |f(x)| = \lim_{x\to p} |g(x)| = \infty$$

Haben g und g' keine Nullstelle auf $I \setminus p$ und existiert der Grenzwert des Quotienten der Ableitungen $\lim_{x\to p}(f'(x)/g'(x))$ in $\overline{\mathbb{R}}$, so existiert auch der Grenzwert des Quotienten der Funktionen $\lim_{x\to p}(f(x)/g(x))$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und es gilt

$$\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to p}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

Beweis. Wir beginnen den Beweis mit folgendem

Lemma 4.4.2 (Allgemeiner Mittelwertsatz). *Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ gegeben und seien f, g stetige reellwertige Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a, b]$, die differenzierbar sind auf dem offenen Intervall (a, b). So gibt es $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi)(g(a) - g(b)) = g'(\xi)(f(a) - f(b))$$

Bemerkung 4.4.3. Ich kann für diesen Satz leider keine Anschauung anbieten. Verschwindet g' nirgends auf (a, b), so gilt $g(a) \neq g(b)$ nach dem Satz von Rolle 4.3.4 und wir können unsere Gleichung schreiben in der Form

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Ist also $g(x) = x$, so erhalten wir unseren Mittelwertsatz 4.3.5 als Spezialfall. Im Gegensatz zu 4.3.5 wird der allgemeine Mittelwertsatz nur beim Beweis der Regeln von de l'Hospital eine Rolle spielen, weshalb ich ihm auch nur den Status eines Lemmas eingeräumt habe.

Beweis. Man wende den Satz von Rolle 4.3.4 an auf die Funktion

$$F(x) = f(x)\,(g(a)) - g(b)) \; - g(x)\,(f(a) - f(b)) \qquad \square$$

Jetzt zeigen wir die Regeln von de l'Hospital. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p \notin I$ annehmen, indem wir sonst I an der Stelle p in zwei Teile zerschneiden und den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert bei p getrennt betrachten. Für jede Umgebung W des Grenzwerts

$$q = \lim_{x\to p} f'(x)/g'(x)$$

finden wir nun per definitionem eine Intervallumgebung V von p mit $\xi \in I \cap V \Rightarrow f'(\xi)/g'(\xi) \in W$. Für beliebige $a, b \in I \cap V$ mit $a \neq b$ folgt dann aus dem allgemeinen Mittelwertsatz

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} \in W$$

Von nun an müssen wir die beiden Fälle im Satz getrennt weiterbehandeln. Zunächst nehmen wir an, es gelte $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = 0$. Ist W ein kompaktes Intervall, so folgt $f(a)/g(a) \in W$ sofort, indem wir a festhalten, b gegen p streben lassen und uns an die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert erinnern. Die Behauptung im ersten Fall folgt dann, da für jeden Punkt seine kompakten Intervallumgebungen ein Fundamentalsystem von Umgebungen bilden. Jetzt behandeln wir noch den Fall $\lim_{x \to p} |f(x)| = \lim_{x \to p} |g(x)| = \infty$. In diesem Fall dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch annehmen, daß f auf I keine Nullstelle hat, so daß gilt

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f(b)}{g(b)} \left(\frac{1 - f(a)/f(b)}{1 - g(a)/g(b)} \right)$$

Sei nun $a \in I \cap V$ fest gewählt. Für jedes und insbesondere auch für sehr nahe bei Eins liegendes $\alpha \in (0, 1)$ finden wir dann eine Umgebung U von p derart, daß gilt

$$b \in U \cap I \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - f(a)/f(b)}{1 - g(a)/g(b)} \in (\alpha, \alpha^{-1})$$

Indem wir zusätzlich $U \subset V$ wählen, finden wir damit für jede Umgebung W von q und jedes $\alpha \in (0, 1)$ eine Umgebung U von p mit $b \in U \cap I \Rightarrow f(b)/g(b) \in (\alpha, \alpha^{-1})W$. Die Behauptung folgt nun im zweiten Fall, da es für jede Umgebung W' von q eine Umgebung W von q und ein $\alpha \in (0, 1)$ gibt mit $(\alpha, \alpha^{-1})W \subset W'$. $\square$

Beispiel 4.4.4. Für $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} (\log x)/x^\lambda &= \lim_{x \to \infty} (1/x)/\lambda x^{\lambda - 1} \\ &= \lim_{x \to \infty} 1/\lambda x^\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

4.5 Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung

Satz 4.5.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$ ein Punkt.*

So ist die Funktion

$$\begin{array}{rrcl} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array}$$

die einzige differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ *mit* $F' = f$ *und* $F(a) = 0$.

Bemerkung 4.5.2. Im Fall $x < a$ ist dies Integral unter Verwendung unserer Konvention 3.5.10 als $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_x^a f(t)\ \mathrm{d}t$ zu interpretieren.

Beweis. Für $p \in I$ rechnen wir

$$\lim_{x\to p} \frac{F(x) - F(p)}{x - p} = \lim_{x\to p} \frac{1}{x-p} \int_p^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

Da nun f stetig ist, finden wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß aus $|t - p| \leq \delta$ folgt $f(p) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(p) + \varepsilon$. Aus $0 < |x - p| \leq \delta$ folgen also durch Bilden des Integrals und Teilen durch $(x - p)$ die Ungleichungen

$$f(p) - \varepsilon \ \leq\ \frac{1}{x-p} \int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t \ \leq\ f(p) + \varepsilon$$

und damit ist gezeigt, daß der Ausdruck in der Mitte für $x \to p$ gegen $f(p)$ konvergiert. Es folgt $F'(p) = f(p)$ für alle $p \in I$. Ist $G : I \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar mit $G' = f$, so verschwindet die Ableitung der Differenz $G-F$ identisch. Nach 4.3.6 ist diese Differenz also konstant, und haben wir dann auch noch $G(a) = 0$, so ist sie konstant Null und wir folgern $F = G$. □

Korollar 4.5.3 (Integrieren mit Stammfunktionen). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein halboffenes Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Ist* $G : I \to \mathbb{R}$ *eine* **Stammfunktion** *von* f*, als da heißt eine differenzierbare Funktion mit Ableitung* $G' = f$*, so gilt für alle* $a, b \in I$ *die Formel*

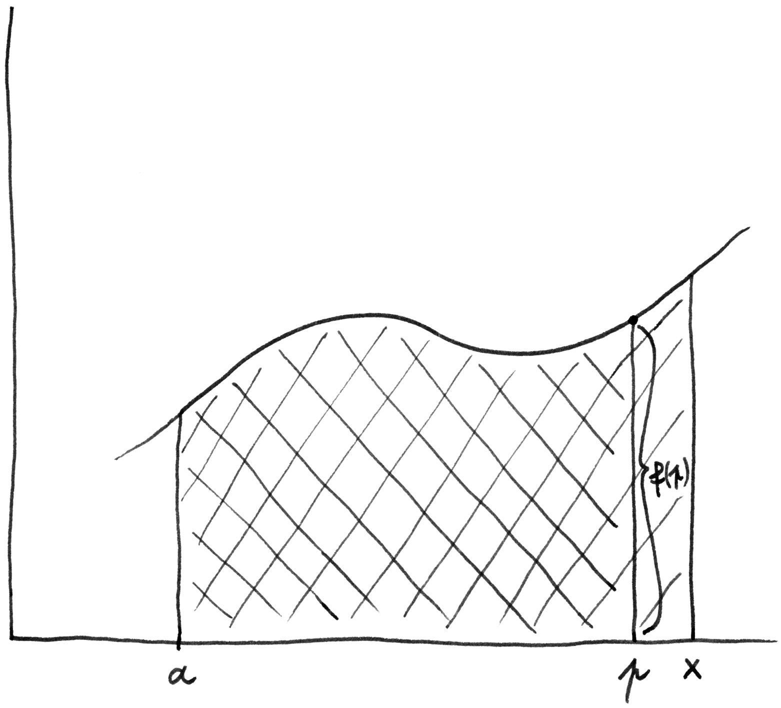
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = G(b) - G(a)$$

Beweis. Wir betrachten $F : I \to \mathbb{R}$ wie im Satz und folgern aus der Eindeutigkeitsaussage von dort $F(x) = G(x) - G(a)$ für alle $x \in [a, b]$. □

Bemerkung 4.5.4. Ist G ein komplizierter Ausdruck, so ist es bequem und üblich, die Differenz $G(b) - G(a)$ mit $G(x)|_a^b$ abzukürzen. Man spricht einen solchen Ausdruck “G, ausgewertet zwischen den Grenzen a und b”. Für a, b positiv ergibt sich zum Beispiel

$$\int_a^b \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \log x|_a^b = \log b - \log a$$

Veranschaulichung der Regel von de l'Hospital 4.4.1 im Fall $p \in \mathbb{R}$ unter der Annahme, daß beide Funktionen bei p nach Null streben



Veranschaulichung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung 4.5.1. Die kreuzweise schraffierte Fläche stellt $F(p)$ dar, die irgendwie schraffierte $F(x)$, die einfach schraffierte $F(x) - F(p)$.

Die Ableitung von $\mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log|x|$ ist im Übrigen $x \mapsto 1/x$, als da heißt, für a, b negativ würden wir $\log|b| - \log|a|$ erhalten. Über den Nullpunkt hinweg dürfen wir die Funktion $1/x$ aber natürlich trotzdem nicht integrieren!

Übung 4.5.5. Der **Integrallogarithmus** $\mathrm{Li} : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ wird erklärt durch die Vorschrift

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

Man zeige $\lim_{x\to\infty} x \,\mathrm{Li}(x)/\log(x) = 1$.

4.6 Integrationsregeln

Satz 4.6.1 (Integration durch Substitution). *Gegeben zwei reelle Zahlen $a < b$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : g([a, b]) \to \mathbb{R}$ stetig gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

wobei im Fall $g(b) < g(a)$ das Integral rechts im Sinne unserer Konvention 3.5.10 zu verstehen ist.

Bemerkung 4.6.2. Es gibt durchaus differenzierbare Abbildungen, deren Ableitung nicht stetig ist. Ein Beispiel findet man erst in 7.7.18, da wir vorher den Sinus noch nicht zur Verfügung haben, aber davon abgesehen kann es auch hier schon verstanden werden.

Beweis. Ist g konstant, so verschwinden beide Seiten und die Formel gilt. Ist sonst F eine Stammfunktion von f, so ist $F \circ g$ nach der Kettenregel 4.2.5 eine Stammfunktion von $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ und berechnen wir beide Integrale mithilfe dieser Stammfunktionen, so ergibt sich auf beiden Seiten der Wert $F(g(b)) - F(g(a))$. □

Bemerkung 4.6.3. Wächst g streng monoton, so kann man auch leicht einen anschaulicheren Beweis geben, indem man $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$ äquidistant unterteilt und nach dem Mittelwertsatz $\xi_i \in (a_{i-1}, a_i)$ findet mit $g(a_i) - g(a_{i-1}) = g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$ und die Gleichheit von Riemannsummen

$$\sum_{i=1}^r f(g(\xi_i))g'(\xi_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^r f(g(\xi_i))(g(a_i) - g(a_{i-1}))$$

betrachtet. Mithilfe von 3.5.11 zeigt man dann leicht, daß diese Gleichheit im Grenzwert $r \to \infty$ gerade die Substitutionsregel liefert.

Bemerkung 4.6.4. Als Gedächtnisstütze, die später auch echte Bedeutung erhält, kann man sich merken, daß beim Substituieren (lateinisch ebenso wie "Prostitution" für "Ersetzen") von y durch $g(x)$ nicht nur $f(y)$ durch $f(g(x))$ ersetzt werden muß, sondern auch $\mathrm{d}y$ durch $g'(x)\,\mathrm{d}x$, wie es die Notation $g'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ suggeriert.

Bemerkung 4.6.5. In Anwendungen wird man oft mit einer umkehrbaren Abbildung g arbeiten und die Regel in der Form

$$\int_\alpha^\beta f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

verwenden. Auch wenn g nicht umkehrbar ist, kann man in der Weise vorgehen, statt $g^{-1}(\alpha)$ und $g^{-1}(\beta)$ darf man dann eben irgendwelche a, b wählen derart, daß g auf ganz $[a, b]$ stetig differenzierbar ist und daß gilt $\alpha = g(a)$ und $\beta = g(b)$. Meist arbeiten wir sogar ohne explizite Erwähnung der Grenzen: Suchen wir nur eine Stammfunktion, so kommt es auf die untere Grenze eh nicht an, und die obere Grenze wird mitgedacht und nach gelungener Integration wieder "zurücksubstituiert", wie es unsere Formel fordert.

Beispiel 4.6.6. Wir bestimmen eine Stammfunktion von $f(y) = y\sqrt{1-y}$ durch die Substitution $\sqrt{1-y} = x$, $y = 1 - x^2 = g(x)$, $\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x$ zu

$$\begin{aligned}
\int y\sqrt{1-y}\ \mathrm{d}y &= \int (1-x^2)x(-2x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int (2x^4 - 2x^2)\ \mathrm{d}x \\
&= \tfrac{2}{5}x^5 - \tfrac{2}{3}x^3 \\
&= \tfrac{2}{5}(1-y)^2\sqrt{1-y} - \tfrac{2}{3}(1-y)\sqrt{1-y}
\end{aligned}$$

Satz 4.6.7 (Partielle Integration). *Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Beweis. Nach der Produktregel gilt $fg' = (fg)' - f'g$ auf $[a, b]$, folglich stimmen auch die Integrale dieser Funktionen überein. □

Beispiele 4.6.8.

$$\begin{aligned}
\int x^2\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x &= x^2\,\mathrm{e}^x - \int 2x\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\
&= x^2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + \int 2\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \\
&= (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \log x\ \mathrm{d}x &= x\log x - \int x\tfrac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\
&= x\log x - x
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.6.9. Ich erkläre nun noch einen alternativen Zugang zur Exponentialfunktion, der unsere Definition über eine a priori unmotivierte Reihe vermeidet. Suchen wir eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $f' = f$ und $f(0) = 1$, so haben wir ja nach der Substitutionsregel

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} \,\mathrm{d}t = \int_1^{f(x)} \frac{1}{u} \,\mathrm{d}u$$

Man definiert also notgedrungen eine Funktion $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ durch $\log(y) = \int_1^y u^{-1} \,\mathrm{d}u$ und die gesuchte Funktion f muß die Umkehrfunktion dazu sein.

Übung 4.6.10. Wie könnte ein Autor, der diesen Zugang gewählt hat, die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion beweisen?

Übung 4.6.11. Man zeige durch Vergleich mit dem Integral der Funktion $x^{-\alpha}$, daß für jedes $\alpha > 1$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ konvergiert.

4.7 Hyperbolische trigonometrische Funktionen

Definition 4.7.1. Der **Sinus hyperbolicus** und **Cosinus hyperbolicus** sind die Abbildungen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben werden durch die Formeln

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Bemerkung 4.7.2. Den Graphen des Cosinus hyperbolicus nennt man auch die **Kettenlinie**, weil er nämlich dieselbe Gestalt hat wie eine hängende Kette. Wir zeigen das in 7.4.10 im Anschluß an die Diskussion der Bogenlänge.

Bemerkungen 4.7.3. Offensichtlich gilt $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$, $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, und $\cosh(-x) = \cosh(x)$, die Ableitungen unserer Funktionen sind

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$$

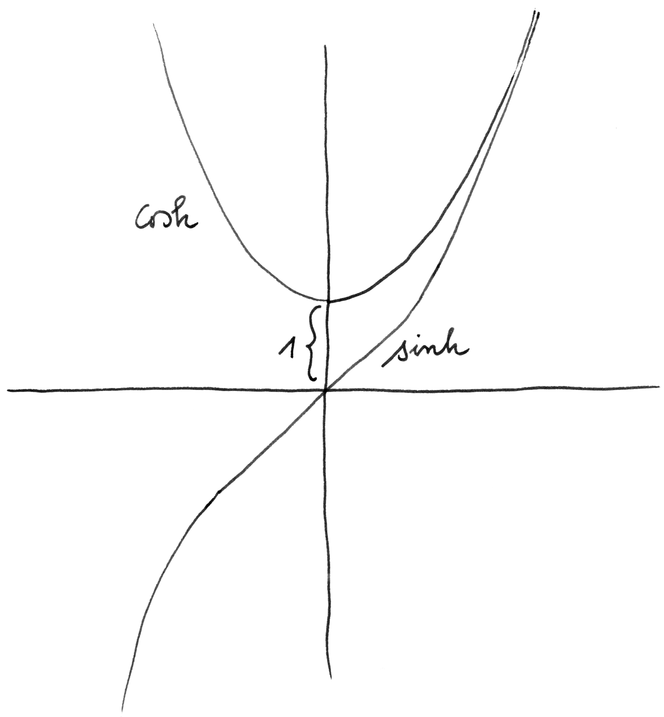
es gelten $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ und die Additionstheoreme

$$\begin{array}{rcl} \sinh(a+b) & = & \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b) \\ \cosh(a+b) & = & \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) \end{array}$$

Die Funktion cosh nimmt bei $x = 0$ ihr Minimum an und sinh ist eine Bijektion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die inverse Abbildung nennt man **Area Sinus hyperbolicus** und bezeichnet sie mit $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sie läßt sich auch elementar ausdrücken als $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ und für die Ableitung von arsinh erhalten wir

$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

Anschauliche Bedeutung der Substitutionsregel nach 4.6.3



Die Graphen von Sinus und Cosinus hyperbolicus da ja $\sinh'(x) = \cosh(x) = \sqrt{1-\sinh^2(x)}$, $\sinh'(\operatorname{arsinh} y) = \sqrt{1+y^2}$. Ähnlich liefert cosh eine Bijektion $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$, die inverse Abbildung **Area Cosinus hyperbolicus** $\operatorname{arcosh} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ kann geschrieben werden als $\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ und ist differenzierbar auf $(1,\infty)$ mit der Ableitung

$$\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

Eher selten benutzt man den **Secans hyperbolicus** $x \mapsto 1/\cosh(x)$, den **Cosecans hyperbolicus** $x \mapsto 1/\sinh(x)$ und den **Tangens hyperbolicus** $\tanh : x \mapsto \sinh(x)/\cosh(x)$ sowie seine Umkehrung $\operatorname{artanh} : (-1,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.

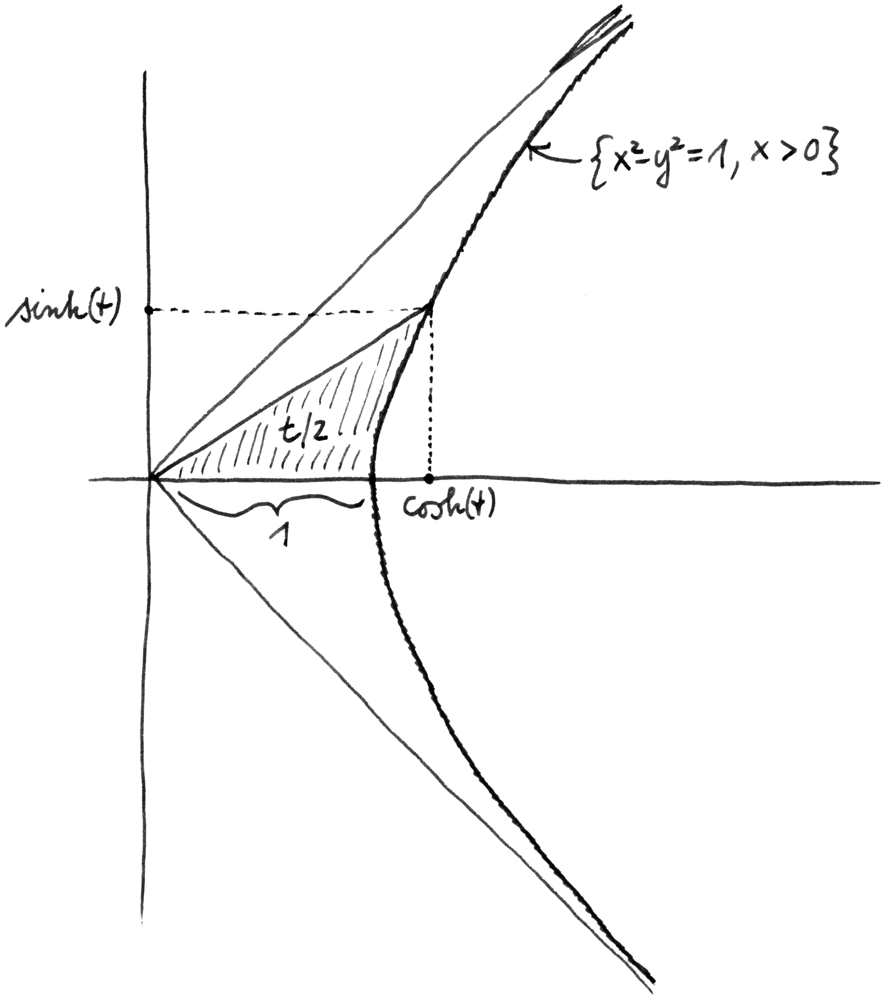
Bemerkung 4.7.4. Die Namen unserer Funktionen haben den folgenden Hintergrund: Für $t \in \mathbb{R}$ durchläuft der Punkt mit Koordinaten $(\cosh t, \sinh t)$ gerade den Hyperbelast

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y)(x-y) = 1, \quad x > 0\}$$

und zwar ist $|t/2|$ gerade die Fläche (lateinisch "area"), die zwischen x-Achse, Hyperbel und dem Geradensegment von $(0,0)$ nach $(\cosh t, \sinh t)$ eingeschlossen ist. Es ist eine ausgezeichnete Übung, diese Behauptung nachzurechnen. Man sieht so die Verwandschaft zu den üblichen trigonometrischen Funktionen, bei denen man nur die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ zu ersetzen hat durch den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$, wie wir später zeigen werden. Die Bezeichnung **Trigonometrie** bedeutet übrigends "Dreiecksmessung", die Wurzel "gon" taucht auch im deutschen Wort "Knie" auf und meint im Griechischen dasselbe sowie im übertragenen Sinne dann "Winkel".

Bemerkung 4.7.5. Die Lösungsmengen im $\mathbb{R}^2$ von Gleichungen der Gestalt $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ mit $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ heißen **ebene Quadriken** oder auch **Kegelschnitte**, da man sie erhalten kann als Schnitte räumlicher Ebenen mit dem **Kegel** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z^2\}$ bei geeigneter orthonormaler Identifikation unserer räumlichen Ebenen mit dem $\mathbb{R}^2$. Jeder Kegelschnitt ist bis auf Drehung und Verschiebung eine **Ellipse** $\alpha x^2+\beta y^2 = 1$ mit $\alpha, \beta > 0$, eine **Hyperbel** $xy = \gamma$ mit $\gamma > 0$, eine **Parabel** $x^2 = \delta y$ mit $\delta > 0$, ein Geradenkreuz, eine Gerade, ein Punkt oder die leere Menge. Die Bezeichnung "Parabel" kommt hier vom griechischen Wort für "Werfen". In der Tat beschreibt ein Wurfgeschoss unter Vernachlässigung des Luftwiderstands stets eine "parabolische" Bahn.

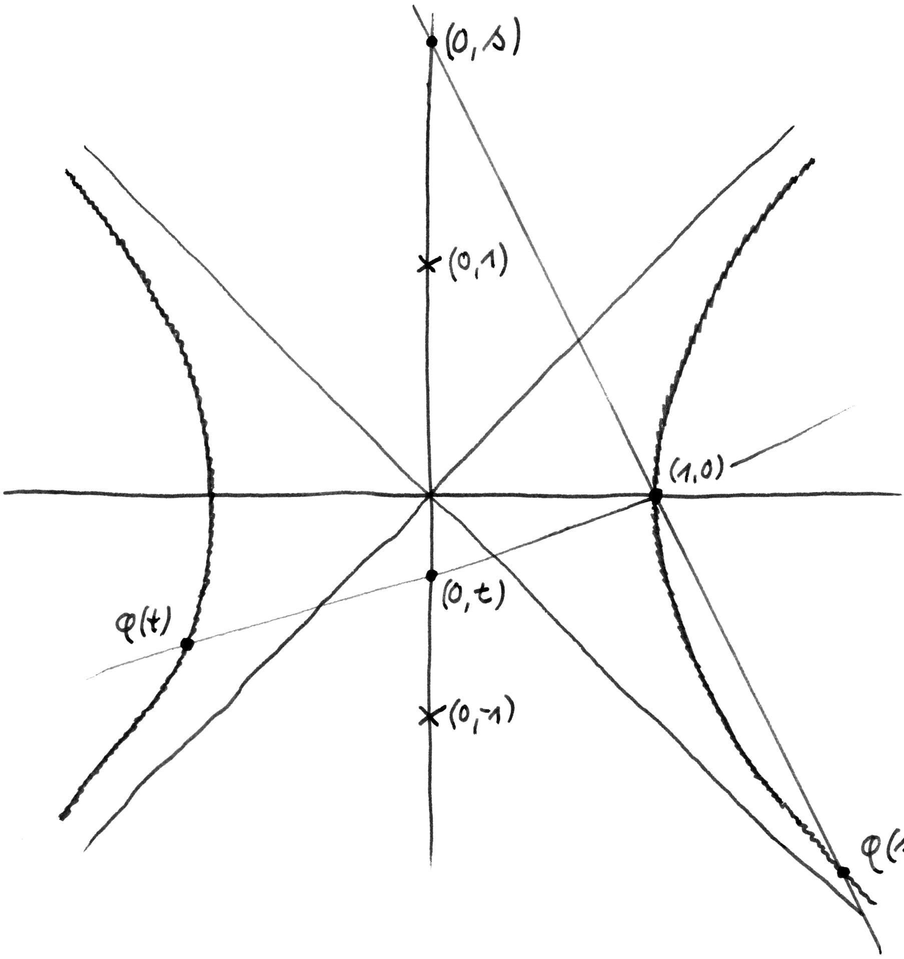
Übung 4.7.6. Sei $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ die Hyperbel. Wir konstruieren eine Bijektion $\psi : \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} H\backslash(1,0)$, indem wir jedem Punkt $t \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ den Schnittpunkt der Geraden durch $(0,t)$ und $(1,0)$ mit $H\backslash(1,0)$



Die geometrische Bedeutung von Sinus und Cosinus hyperbolicus zuordnen. Man prüfe, daß diese Abbildung gegeben wird durch

$$\psi(t) = \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}, \frac{2t}{t^2-1}\right)$$

Eine eng verwandte Parametrisierung des Einheitskreises werden wir in 7.7.15 besprechen.



Die geometrische Bedeutung der Abbildung φ aus 4.7.6

5 Potenzreihen und höhere Ableitungen

5.1 Funktionenfolgen und Potenzreihen

Satz 5.1.1. *Sei $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Konvergiert für ein z die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, so konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ absolut für alle x mit $|x| < |z|$.*

Beweis. Die Glieder einer konvergenten Reihe sind beschränkt, unter unseren Annahmen gibt es also eine endliche Schranke B mit $|a_\nu z^\nu| \leq B$ für alle ν. Aus $|x| < |z|$ folgt mit 2.5.4 dann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x^\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu z^\nu| \, |x/z|^\nu \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} B \, |x/z|^\nu < \infty \qquad \square$$

Definition 5.1.2. Ein Ausdruck der Gestalt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ heißt eine **Potenzreihe**. Eine Potenzreihe anzugeben bedeutet also nichts anderes, als die Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ihrer Koeffizienten anzugeben. Der **Konvergenzradius** $r \in [0, \infty]$ einer Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ wird erklärt durch

$$r = \sup\{\, |z| \;\mid \sum a_\nu z^\nu \text{ konvergiert}\}$$

Die Bezeichnung als Radius wird erst im Kontext komplexer Potenzreihen **??** verständlich werden. Nach 5.1.1 definiert jede Potenzreihe mit Konvergenzradius r vermittels der Abbildungsvorschrift $x \mapsto \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ eine reellwertige Funktion auf dem Intervall $(-r, r)$.

Übung 5.1.3. Ist $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von von Null verschiedenen reellen Zahlen und existiert der Grenzwert $\lim_{\nu\to\infty} |a_\nu/a_{\nu+1}|$ in $[0, \infty]$, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$.

Satz 5.1.4 (über Potenzreihen). *Die durch eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ mit Konvergenzradius $r > 0$ definierte Funktion $s : (-r, r) \to \mathbb{R}$ ist stetig und sogar differenzierbar und ihre Ableitung wird an jeder Stelle $x \in (-r, r)$ gegeben durch die Potenzreihe $s'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}$*

Bemerkung 5.1.5. Der Beweis dieses Satzes wird den größten Teil dieses Abschnitts einnehmen. Wir zeigen in 5.1.10, daß jede durch eine Potenzreihe definierte Funktion stetig ist, und zeigen die weitergehenden Aussagen in 5.1.12. Zunächst jedoch müssen wir einige technische Hilfsmittel bereitstellen.

Definition 5.1.6. Sei D eine Menge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

1. Wir sagen, die Folge f_n **konvergiert punktweise** gegen die Funktion f genau dann, wenn für alle $x \in D$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

2. Wir sagen, die Folge f_n **konvergiert gleichmäßig** gegen die Funktion f und schreiben $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ genau dann, wenn es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

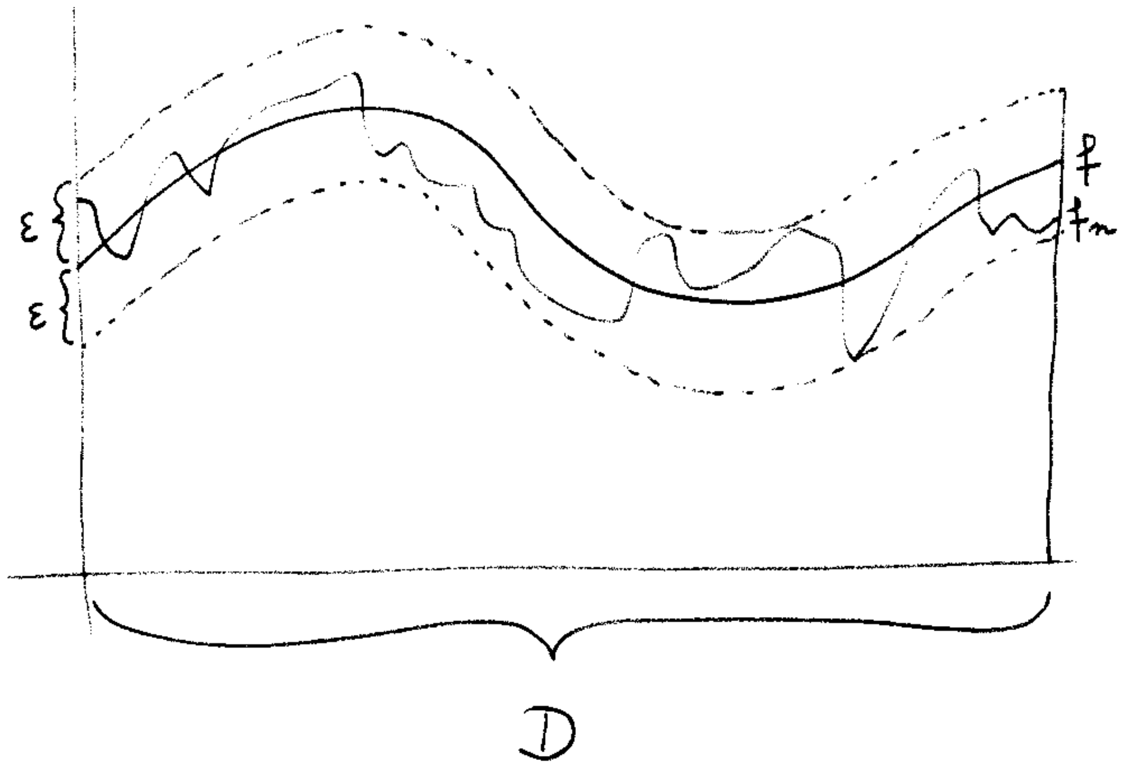
Bemerkung 5.1.7. Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt sicher punktweise Konvergenz. Das Umgekehrte gilt nicht: Die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq 1$ und $f(1) = 1$.

Satz 5.1.8. *Konvergiert eine Folge von stetigen reellwertigen Funktionen gleichmäßig gegen eine reellwertige Grenzfunktion, so ist auch diese Grenzfunktion stetig.*

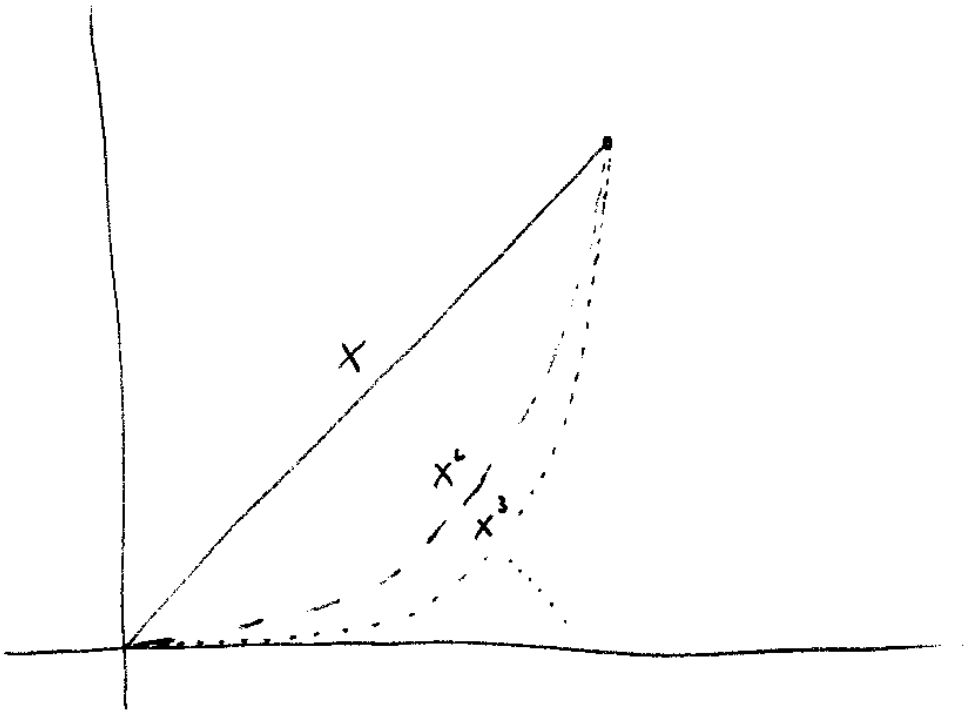
Beweis. Sei $D \subset \mathbb{R}$ der gemeinsame Definitionsbereich und seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ die Funktionen unserer gleichmäßig konvergenten Folge und $f : D \to \mathbb{R}$ ihre Grenzfunktion. Es reicht sicher, die Stetigkeit von f in jedem Punkt $p \in D$ zu zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Sicher finden wir ein n derart, daß für alle $x \in D$ gilt
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
Da f_n stetig ist in p, finden wir weiter $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ gilt
$$|f_n(x) - f_n(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
Es folgt für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$
$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(p)| & \leq & |f(x) - f_n(x)| \\ & & +|f_n(x) - f_n(p)| \\ & & \quad +|f_n(p) - f(p)| \; < \; \varepsilon \end{array}$$
□

Proposition 5.1.9. *Ist* $\sum a_\nu x^\nu$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* r, *so konvergiert die Folge ihrer Partialsummen* $s_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^\nu$ *für alle* $\rho \in [0, r)$ *gleichmäßig auf* $D = [-\rho, \rho]$.

Beweis. Für alle $x \in [-\rho, \rho]$ gilt $|a_\nu x^\nu| \leq |a_\nu \rho^\nu|$ und folglich
$$|s_n(x) - s(x)| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$$



Bei gleichmäßiger Konvergenz müssen für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle f_n auf dem ganzen Definitionsbereich D im "ε-Schlauch um f" bleiben.



Die punktweise aber nicht gleichmäßig konvergente Funktionenfolge aus 5.1.7

Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu|$ konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_\nu \rho^\nu| < \varepsilon.$$

Für $n \geq N$ und beliebiges $x \in [-\rho, \rho]$ gilt dann $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$. □

Korollar 5.1.10. *Die durch eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ auf $(-r, r)$ definierte Funktion ist stetig.*

Beweis. Nach Proposition 5.1.9 und Satz 5.1.8 ist unsere Funktion für alle $\rho \in [0, r)$ stetig auf $[-\rho, \rho]$ als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen. Daraus folgt mühelos, daß sie stetig ist auf ganz $(-r, r)$. □

Satz 5.1.11. Das Integral eines gleichmäßigen Grenzwerts ist der Grenzwert der Integrale. *Sei genauer die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. So gilt*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a, b]$. Es folgt

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq (b - a)\varepsilon$$

für alle $n \geq N$. □

Satz 5.1.12. Potenzreihen dürfen gliedweise integriert und differenziert werden. *Genauer gilt*

1. *Ist die Funktion $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Potenzreihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so konvergiert auch die Potenzreihe*

   $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \tfrac{1}{\nu+1} a_\nu x^{\nu+1}$$

   auf $(-r, r)$, und zwar gegen eine Stammfunktion von f.

2. *Ist die Funktion $g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Potenzreihe $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$, so ist g differenzierbar und die Potenzreihe*

   $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$$

   konvergiert auf $(-r, r)$ gegen die Ableitung g' unserer Funktion g.

Beweis. 1. Man wende den vorhergehenden Satz 5.1.11 auf die Folge $f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ der Partialsummen an.

2. Wir zeigen zunächst, daß die Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$ auch auf $(-r, r)$ konvergiert. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert schon mal die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu z^{\nu-1}$ für $|z| < 1$. Für $|x| < r$ wählen wir nun ein ρ mit $|x| < \rho < r$ und dazu eine Schranke B mit $|b_\nu \rho^{\nu-1}| \leq B$ für alle ν. Dann können wir abschätzen

$$|\nu b_\nu x^{\nu-1}| = \left|\nu b_\nu \rho^{\nu-1}(x/\rho)^{\nu-1}\right| \leq \nu B z^{\nu-1}$$

für $z = |x/\rho| < 1$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$. Dann wissen wir aber nach Teil 1, daß für die Funktion $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu x^{\nu-1}$ unser $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$ eine Stammfunktion ist. □

Definition 5.1.13 (Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten). Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \text{ falls } k \geq 1 \text{ und } \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Proposition 5.1.14 (Binomische Reihe). *Für $|x| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ kennen wir diese Formel schon: Im Fall $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{\alpha}{k} = 0$ falls $k > \alpha$ und wir erhalten einen Spezialfall der binomischen Formel. Im Fall $\alpha = -1$ gilt $\binom{\alpha}{k} = (-1)^k$ und wir erhalten die geometrische Reihe für $-x$. Unter der Annahme $\alpha \notin \mathbb{N}$ sagt uns das Quotientenkriterium, daß die Potenzreihe rechts für $|x| < 1$ konvergiert, sagen wir gegen die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. Ich behaupte $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$. Das prüft man durch gliedweises Differenzieren der binomischen Reihe mithilfe der Beziehung

$$\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} = \binom{\alpha}{k}$$

die durch eine kurze Rechnung gezeigt wird. Aus $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ und $f(0) = 1$ folgt aber bereits $f(x) = (1+x)^\alpha$, denn setzt man $\varphi(x) = f(x)/(1+x)^\alpha$, so gilt $\varphi(0) = 1$ und

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1} f(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = 0$$ □

Beispiel 5.1.15. Wir zeigen

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \forall x \in (-1,1)$$

Das ergibt sich sofort, wenn wir die geometrische Reihe $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots$ gliedweise integrieren. Ähnlich ergibt sich die Entwicklung von $\operatorname{arsinh}(x)$ in eine Potenzreihe, wenn wir die binomische Reihe zu $(1+x^2)^{-1/2}$ gliedweise integrieren.

Definition 5.1.16. Die **n-te Ableitung** einer Funktion f bezeichnen wir (falls sie existiert) mit $f^{(n)}$. Es ist also $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ und allgemein $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Bemerkung 5.1.17. Ist eine Funktion $f : (-r,r) \to \mathbb{R}$ gegeben durch die für $x \in (-r,r)$ konvergente Potenzreihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, so folgt aus 5.1.12 sofort

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n$$

Wenn also in anderen Worten eine fest vorgegebene Funktion f in einer Umgebung des Nullpunkts durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, so muß unsere Funktion dort beliebig oft differenzierbar sein und die fragliche Potenzreihe ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$$

Diese Potenzreihe hinwiederum kann man ganz allgemein für jede in einer Umgebung des Nullpunkts beliebig oft differenzierbare Funktion erklären. Sie heißt dann die **Taylorreihe** besagter Funktion oder genauer ihre **Taylorreihe am Nullpunkt**, muß aber keineswegs positiven Konvergenzradius haben und muß, selbst wenn sie positiven Konvergenzradius hat, keineswegs gegen besagte Funktion konvergieren. Zum Beispiel hat nach 4.2.11 die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt die Ableitungen $f^{(\nu)}(0) = 0 \quad \forall \nu \geq 0$, aber es gilt dennoch $f(x) > 0$ für $x > 0$. Inwiefern die Taylorreihe dennoch unsere Funktion recht gut approximiert, erklären wir in 5.2.

Beispiel 5.1.18. Um die fünfte Ableitung bei $x = 0$ von $(\mathrm{e}^{x^2} \sinh x)$ bestimmen, rechnen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x^2} &= 1 + x^2 + \tfrac{x^4}{2} + \tfrac{x^6}{3!} + \dots \\ \sinh x &= x + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \dots \\ \mathrm{e}^{x^2} \sinh x &= x + x^3(\tfrac{1}{3!} + 1) + x^5\left(\tfrac{1}{5!} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{2}\right) + \dots \end{aligned}$$

wo wir einmal unsere Erkenntnisse über das Produkt absolut konvergenter Reihen verwendet haben, und die gesuchte fünfte Ableitung bei $x = 0$ ergibt sich mit 5.1.17 zu

$$5!\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{2}\right) = 1 + 20 + 60 = 81$$

Bemerkung 5.1.19. Die Formel für die binomische Reihe kann umgeschrieben werden zur nun für alle $y \in (0, 2)$ gültigen Darstellung

$$y^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (y-1)^k$$

Gehört allgemeiner ein Punkt p zum Definitionsbereich einer Funktion f, so bezeichnen wir eine Darstellung von f der Gestalt

$$f(p+h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_\nu h^\nu \qquad \text{alias} \qquad f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_\nu (y-p)^\nu$$

als eine **Entwicklung von f in eine Potenzreihe um den Punkt** p. Mit denselben Argumenten wie zuvor gilt dann $a_\nu = f^{(\nu)}(p)/\nu!$. Ist allgemeiner f beliebig oft differenzierbar bei p, so erklären wir die **Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt** p als die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!} h^\nu$$

Auch wenn die Partialsummen dieser Reihe nicht gegen $f(p+h)$ konvergieren müssen, liefern sie doch die "bestmöglichen" Approximationen von $f(p+h)$ durch Polynome in h von einem vorgegebenen maximalen Grad, wie wir im folgenden Abschnitt 5.2 ausführen werden.

Übung 5.1.20. Eine Funktion, die für jeden Punkt ihres Definitionsbereichs in einer Umgebung besagten Punktes durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, heißt **analytisch**. Wir werden erst sehr viel später zeigen, daß Potenzreihen analytische Funktionen liefern. Man zeige: Stimmen zwei auf demselbem reellen Intervall definierte analytische Funktionen auf der Umgebung eines Punktes aus unserem Intervall überein, so sind sie gleich. Hinweis: Man betrachte das Supremum der Menge aller Punkte, an denen unsere beiden Funktionen übereinstimmen.

Übung 5.1.21. Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{1+x}$? Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{2+x}$? Gemeint ist jeweils die Entwicklung um $x = 0$.

Übung 5.1.22. Wir würfeln mit einem Würfel eine unendlich lange Zahlenreihe. Anschaulich ist klar, daß der durchschnittliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Einsen gerade Sechs sein muß. Man kann allerdings auch leicht argumentieren, daß dieser durchschnittliche Abstand gegeben wird durch die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$$

Die Aufgabe ist nun, zu beweisen, daß diese Reihe auch tatsächlich gegen 6 konvergiert.

5.2 Taylorentwicklung

Bemerkung 5.2.1. Um im Folgenden auch den Fall $n = 0$ zulassen zu dürfen, vereinbaren wir, daß "0-mal differenzierbar bei p" zu verstehen sein soll als "stetig bei p".

Satz 5.2.2 (Taylorentwicklung). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall, $p \in I$ ein Punkt und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ auf ganz I existiert und deren n-te Ableitung $f^{(n)}(p)$ bei p existiert. So gilt:*

1. *Es gibt genau ein Polynom Q vom Grad $\leq n$ mit der Eigenschaft*
$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-p)^n} = 0$$
2. *Dieses Polynom Q kann auch charakterisiert werden als das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $\leq n$ mit $f^{(\nu)}(p) = Q^{(\nu)}(p)$ für $0 \leq \nu \leq n$.*

Bemerkung 5.2.3. Wir nennen Q das **Approximationspolynom bis zur Ordnung n an f bei p.**

Beweis. Sicher gibt es genau ein Polynom Q, das die Bedingung aus Teil 2 erfüllt, nämlich das Polynom

$$Q(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}(x-p)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

das aus den ersten $n+1$ Termen der Taylorreihe von f beim Entwicklungspunkt p besteht. Betrachten wir für dieses Polynom Q die Differenz $r = f - Q$, so verschwinden die ersten n Ableitungen von r bei $x = p$ und wir erhalten durch wiederholte Anwendung der Regeln von de l'Hospital 4.4.1 und die Definition von $r^{(n)}(p)$ in der Tat

$$\lim_{x \to p} \frac{r(x)}{(x-p)^n} = \ldots = \lim_{x \to p} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-p)} = \frac{r^{(n)}(p)}{n!} = 0$$

Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß kein anderes Polynom $\hat{Q}$ die Bedingung aus Teil 1 erfüllen kann. In der Tat folgt aber für zwei Polynome vom Grad $\leq n$ aus

$$\lim_{x \to p} \frac{\hat{Q}(x) - Q(x)}{(x-p)^n} = 0$$

nach 3.3.22 bereits $\hat{Q}(x) = Q(x)$. □

Bemerkung 5.2.4. Wir können die Aussage des Satzes auch dahingehend umformulieren, daß gilt

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}(x-p)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n + (x-p)^n \varphi(x)$$

für eine Funktion φ, die stetig ist bei p mit Funktionswert Null, oder daß gilt

$$f(p+h) = f(p) + f'(p)h + \frac{f^{(2)}(p)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + h^n \varepsilon(h)$$

für eine Funktion ε mit $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Schärfere Abschätzungen für das Restglied unter stärkeren Annahmen an die zu approximierende Funktion liefert die gleich folgende Proposition.

Proposition 5.2.5. *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall, $p \in I$ ein Punkt und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

Lagrange'sche Form des Restglieds: *Ist f auf dem ganzen Intervall I sogar $(n+1)$-mal differenzierbar, so gibt es für alle $x \in I$ ein ξ zwischen p und x mit*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!}(x-p)^\nu + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$$

Integraldarstellung des Restglieds: *Ist $f^{(n+1)}$ zusätzlich auch noch stetig auf ganz I, so gilt für alle $x \in I$ die Formel*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(p)}{\nu!}(x-p)^\nu + \frac{1}{n!}\int_p^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Beweis. Wir kürzen die Summe wie zuvor mit $\sum = Q(x)$ ab. Für den Rest $r(x) = f(x) - Q(x)$ verschwinden, wie wir bereits wissen, die ersten n Ableitungen bei $x = p$, und unter unseren zusätzlichen Voraussetzungen ist r sogar $(n+1)$-mal differenzierbar auf ganz I mit $r^{(n+1)} = f^{(n+1)}$. Um daraus die beiden Darstellungen des Restglieds zu erhalten, brauchen wir nur zwei einfache Rechnungen.

1. Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz und der Erkenntnis, daß Nenner und Zähler bei $x = p$ verschwinden, erhalten wir unter der Annahme $p \neq x$ sofort

$$\frac{r(x)}{(x-p)^{n+1}} = \frac{r'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - p)^n} = \frac{r''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2 - p)^{n-1}} = \ldots = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

2. Durch wiederholtes partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} r(x) = \int_p^x r'(t)\,\mathrm{d}t = \int_p^x (x-t) r''(t)\,\mathrm{d}t & = & \frac{1}{2}\int_p^x (x-t)^2 r'''(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \ldots \\ & = & \frac{1}{n!}\int_p^x (x-t)^n r^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \qquad \square$$

Bemerkung 5.2.6. Diese Abschätzungen liefern umgekehrt auch zwei alternative Beweise für den Satz über die Taylorentwicklung. Allerdings benötigen diese alternativen Beweise wesentlich stärkere Voraussetzungen als unser ursprünglicher Beweis.

Übung 5.2.7. Ist eine Funktion auf einem offenen Intervall n-mal stetig differenzierbar für $n \geq 1$ und verschwinden an einer Stelle p alle ihre höheren Ableitungen unterhalb der n-ten, so hat sie bei p ein isoliertes lokales Maximum bzw. Minimum, falls n gerade ist und die n-te Ableitung bei p negativ bzw. positiv, und kein lokales Extremum, falls n ungerade ist. Wem diese Übung zu einfach ist, der mag dasselbe zeigen unter der schwächeren Annahme, daß $f^{(n-1)}$ zwar bei p aber nicht notwendig auf dem ganzen Intervall differenzierbar ist.

5.3 Rechnen mit Approximationen

Definition 5.3.1. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen. Sei $p \in D$ ein Punkt und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir sagen, f und g **stimmen bei** p **überein bis zur Ordnung** n und schreiben

$$f \sim_p^n g \qquad \text{oder genauer} \qquad f(x) \sim_{x=p}^n g(x)$$

genau dann, wenn gilt $f(p+h) = g(p+h) + h^n \varepsilon(h)$ für eine Funktion ε, die stetig ist bei Null mit Funktionswert $\varepsilon(0) = 0$ oder gleichbedeutend $f(x) = g(x) + (x-p)^n \varphi(x)$ für eine eine Funktion φ, die stetig ist bei p mit Funktionswert $\varphi(p) = 0$.

Bemerkung 5.3.2. Ist $p \in D$ ein Häufungspunkt von D, so können wir das weiter umschreiben zur Forderung, daß gilt $f(p) = g(p)$ und

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - g(x)}{(x-p)^n} = 0$$

Bemerkung 5.3.3. Die Notation $f \sim_p^n g$ scheint mir bequem und suggestiv, sie ist jedoch unüblich. Häufig nennt man eine Funktion, die bei $x = 0$ mit der Nullfunktion übereinstimmt bis zur Ordnung n, auch ein **kleines o von** x^n und bezeichnet so eine Funktion mit $\mathrm{o}(x^n)$. In dieser Notation würde man statt $f \sim_p^n g$ schreiben $f(x) = g(x) + \mathrm{o}((x-p)^n)$.

Bemerkung 5.3.4. Natürlich folgt aus $f \sim_p^n g$ und $g \sim_p^n h$ schon $f \sim_p^n h$. Sind P und Q Polynome vom Grad $\leq n$ und ist p ein Häufungspunkt von D, so folgt aus $P \sim_p^n Q$ schon $P = Q$. Der Satz über die Taylorentwicklung 5.2 liefert uns für eine n-mal stetig differenzierbare Funktion f auf D einem halboffenen Intervall das Polynom Q vom Grad $\leq n$ mit $f \sim_p^n Q$. Genauer besagt dieser Satz, daß dieses Polynom Q charakterisiert wird durch die Bedingungen $Q^{(\nu)}(p) = f^{(\nu)}(p)$ für $0 \leq \nu \leq n$.

Satz 5.3.5 (Rechnen mit Approximationen). *1. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen. Sei $p \in D$ ein Punkt und seien P, Q Polynome mit $f \sim_p^n P$ und $g \sim_p^n Q$. So folgt*

$$f + g \sim_p^n P + Q \qquad \text{und} \qquad fg \sim_p^n PQ$$

2. Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ auf Teilmengen $D, E \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen mit $f(D) \subset E$. Sei $p \in D$ ein Punkt und seien P, Q Polynome mit $f \sim_p^n P$ und $g \sim_{f(p)}^n Q$. So folgt

$$g \circ f \sim_p^n Q \circ P$$

Bemerkung 5.3.6. Im Fall $n = 1$ spezialisiert dieser Satz zur Summenregel, Produktregel und Kettenregel.

Beweis. 1. Das bleibt dem Leser überlassen. Im Fall der Summe gilt das sogar für beliebige Funktionen P und Q, im Fall des Produkts unter der Annahme, daß P und Q in einer Umgebung von p beschränkt sind.

2. Wir zeigen zunächst $g \circ f \sim_p^n Q \circ f$ und dann $Q \circ f \sim_p^n Q \circ P$. Für die erste Ausage schreiben wir $g(y) = Q(y) + (y - f(p))^n \psi(y)$ für ψ stetig bei $f(p)$ mit Funktionswert Null und erhalten durch Einsetzen

$$(g \circ f)(x) = (Q \circ f)(x) + (x-p)^n \left[\left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right)^n \psi(f(x)) \right]$$

für alle $x \neq p$. Im Fall $n \geq 1$ stimmt f bei p bis mindestens zur Ordnung 1 überein mit dem Polynom P, folglich ist f differenzierbar bei p und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \to p$ gegen Null. Im Fall $n = 0$ stimmt f bei p bis zur Ordnung 0 überein mit dem Polynom P, also ist f zumindest stetig in p und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \to p$ wieder gegen Null. Wir müssen also nur noch für jedes Polynom Q zeigen

$$Q \circ f \sim_p^n Q \circ P$$

Das folgt jedoch sofort aus Teil 1. □

Beispiel 5.3.7. Um die sechste Ableitung bei $x = 0$ von $1/\cosh(x)$ zu berechnen, erinnern wir uns an

$$\begin{array}{rcl} \cosh x & = & 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\ (1+y)^{-1} & = & 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^6 \dots \end{array}$$

wo wir Gleichheitszeichen und Pünktchen geschrieben haben statt $\sim^6$ mit entsprechenden Spezifikationen. Mit unserer "höheren Kettenregel" 5.3.5 erhalten wir dann sofort

$$\begin{array}{rcl} 1/\cosh(x) & = & 1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}) \\ & & +(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!})^2 \\ & & -(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!})^3 + \dots \end{array}$$

Als Koeffizient von x^6 ergibt sich

$$-\frac{1}{6!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6!}(-1 + 30 - 90) = -\frac{61}{6!}$$

und die fragliche sechste Ableitung bei $x = 0$ ist mithin -61. Eine andere Möglichkeit wäre, das Approximationspolynom sechsten Grades an $1/\cosh(x)$ in $x = 0$ als $a_0 + a_1 x + \dots + a_6 x^6$ anzusetzen und aus der "höheren Produktregel" die Gleichung

$$\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)\left(a_0 + a_1 x + \dots + a_6 x^6\right) = 1 + bx^8 + \dots$$

zu folgern, die es uns hinwiederum erlaubt, induktiv die a_ν zu bestimmen. Die Rechnung kann im vorliegenden Fall zusätzlich vereinfacht werden durch die Erkenntnis, daß eh gilt $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \dots$, da unsere Funktion nämlich gerade ist.

Übung 5.3.8. Gegeben zwei unendlich oft differenzierbare Funktionen auf einem Intervall ist die Taylorreihe ihrer Summe die Summe der Taylorreihen und die Taylorreihe des Produkts das Produkt der Taylorreihen. Hier verstehen wir Produkt und Summe von Potenzreihen im formalen Sinn, vergleiche **??**.

Übung 5.3.9. Man zeige, daß die Identitäten $\exp(\log(x+1)) = x+1$ und $\log((\mathrm{e}^x - 1) + 1) = x$ auch als formale Identitäten von Potenzreihen gelten, daß also etwa im ersten Fall für $k \geq 2$ gilt

$$\sum_{j(1)+\ldots+j(i)=k} \frac{1}{i!} \left(\frac{-(-1)^{j(1)}}{j(1)} \right) \ldots \left(\frac{-(-1)^{j(i)}}{j(i)} \right) = 0$$

wo die Summe über alle $i \geq 1$ und alle Abbildungen $j : \{1, \ldots, i\} \to \mathbb{N}_{\geq 1}$ läuft, bei denen k die Summe der Werte ist, wohingegen dieselbe Summe für $k = 1$ gerade den Wert Eins ergibt. Allgemeiner führe man aus, inwiefern die Taylorreihe der Verknüpfung zweier unendlich oft differenzierbarer Funktionen gerade die Verknüpfung ihrer Taylorreihen ist.

5.4 Der Abel'sche Grenzwertsatz

Bemerkung 5.4.1. In diesem Abschnitt wollen wir unser Versprechen einlösen und die Formel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log 2$$

zeigen. Wenn wir $x = 1$ in die Reihenentwicklung von $\log(1 + x)$ einsetzen dürften, so folgte das sofort. Das ganze Problem ist, daß wir bisher nur für $|x| < 1$ nachgewiesen haben, daß unsere Potenzreihe aus 5.1.15 gegen $\log(1 + x)$ konvergiert. Der folgende Satz löst dieses Problem, spielt aber davon abgesehen im weiteren Verlauf der Vorlesung keine Rolle.

Satz 5.4.2 (Abel'scher Grenzwertsatz). *Konvergiert eine Potenzreihe auch noch auf einem Randpunkt ihres Konvergenzbereichs, so stellt sie bis in diesen Randpunkt hinein eine stetige Funktion dar.*

Bemerkung 5.4.3. Für diejenigen Leser, die bereits mit komplexen Potenzreihen vertraut sind, sei bemerkt, daß diese Aussage im Komplexen nicht gilt. Mehr dazu finden Sie etwa in **??**.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $x = 1$ der besagte Randpunkt des Konvergenzbereichs ist. Sei also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Wir müssen zeigen, daß die Reihe

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x \in [0,1]$ eine stetige Funktion darstellt. Dazu schreiben wir die Differenzen der Partialsummen in der Form

$$\begin{array}{rcrl} \sum_{k=n}^{m} a_k x^k & = & (x^n - x^{n+1}) & (a_n) \\ & + & (x^{n+1} - x^{n+2}) & (a_n + a_{n+1}) \\ & + & (x^{n+2} - x^{n+3}) & (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\ & & \dots & \dots \\ & + & (x^{m-1} - x^m) & (a_n + \dots\dots\dots + a_{m-1}) \\ & + & x^m & (a_n + \dots\dots\dots + a_{m-1} + a_m) \end{array}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir nun wegen der Konvergenz unserer Reihe ein N derart, daß für alle n, m mit $N \leq n \leq m$ gilt $|a_n + \ldots + a_m| \leq \varepsilon$. Für alle n, m mit $N \leq n \leq m$ und alle $x \in [0,1]$ folgt daraus die Abschätzung

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| \leq (x^n - x^m)\,\varepsilon + x^m \varepsilon \leq \varepsilon$$

Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Partialsummen auf $[0,1]$ und damit die Stetigkeit der Grenzfunktion. □

Bemerkung 5.4.4. Läßt sich die durch eine Potenzreihe im Inneren des Konvergenzintervalls definierte Funktion stetig auf einen Randpunkt fortsetzen, so muß die Potenzreihe an besagtem Randpunkt keineswegs konvergieren. Nehmen wir der Einfachkeit halber an, daß das Konvergenzintervall $(-1,1)$ ist und der fragliche Randpunkt die 1, so folgt die Konvergenz von $\sum a_n$ jedoch aus der stetigen Fortsetzbarkeit der Funktion $\sum a_n r^n$ von $r \in [0,1)$ auf $[0,1]$ zusammen mit der **Tauber-Bedingung**, daß die Folge na_n betragsmäßig beschränkt sein möge. Unter der stärkeren Annahme $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ wurde das bereits von Tauber gezeigt.

6 Stetigkeit in mehreren Veränderlichen

6.1 Vorschläge zur Veranschaulichung

Bemerkung 6.1.1. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ schreiben wir in der Form

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

oder abkürzend $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Man kann sich derartige Abbildungen auf die verschiedensten Arten vorstellen.

1. Den Fall $n = m = 1$ hatten wir schon in 3.1.1 ausführlich behandelt und sogar etwas allgemeiner mögliche Interpretationen einer Abbildung von $\mathbb{R}$ in einen beliebigen Raum bzw. von einem beliebigen Raum nach $\mathbb{R}$ besprochen: Erstere kann man sich veranschaulichen als Beschreibung der Bewegung eines Teilchens in besagtem Raum, Letztere als eine Temperaturverteilung auf besagtem Raum.

2. Im Fall $n + m = 3$ kann man sich die Abbildung f ähnlich wie im Fall $n = m = 1$ gut durch ihren Graphen $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^3$ veranschaulichen. Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist anschaulich eine hügelige Landschaft. Der Graph einer Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sieht aus wie ein Draht im $\mathbb{R}^3$ mit genau einem Punkt für jede vorgegebene x-Koordinate. Zum Beispiel ist der Graph jeder konstanten Abbildung eine Parallele zur x-Achse.

3. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann man auch gut graphisch darstellen, indem man auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ die **Niveaulinien** einzeichnet, die im Bild der Hügellandschaft die Höhenlinien in einer Landkarte für unsere Landschaft wären, in Formeln die Mengen $\{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$ für verschiedene, meist äquidistant gewählte $c \in \mathbb{R}$. Auch eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kann man sich noch gut mithilfe ihrer analog definierten **Niveauflächen** vorstellen, aber mit dem Zeichnen wird es dann schon schwierig.

4. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kann man sich vorstellen als ein Vektorfeld, jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ wird ja in der Tat ein Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet.

5. Es ist auch oft nützlich, sich f wirklich als eine Abbildung vorzustellen. Die Abbildung $x \mapsto (x, x)$ ist in diesem Bild zum Beispiel die diagonale Einbettung der Zahlengerade in die Ebene, und $(x, y) \mapsto (y, x)$ ist die Spiegelung an der Diagonale, d.h. dem Bild unserer diagonalen Einbettung.

Bemerkung 6.1.2. Ich will den Begriff der Stetigkeit nun statt für Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gleich im allgemeineren Rahmen der sogenannten "metrischen Räume" diskutieren, bei dem die bisherige stark von Koordinaten abhängige Sichtweise von einer mehr abstrakt-geometrischen Sichtweise abgelöst wird. Dieser koordinatenfreie Zugang benötigt zwar einen größeren begrifflichen Aufwand, aber ich denke, dieser Aufwand lohnt, und zwar aus den folgenden Gründen: Erstens umfaßt unser Rahmen so auch unendlichdimensionale Räume wie zum Beispiel die für die Quantenmechanik wichtigen Hilberträume. Zweitens treten in meinen Augen auch schon im endlichdimensionalen Kontext die Zusammenhänge bei einer koordinatenfreien Behandlung klarer hervor. Man kennt das aus der Physik: Rechnet man wie üblich mit Einheiten, die ja mathematisch schlicht Basen eindimensionaler Vektorräume sind, so treten auch die Konsistenz und der Sinn von Formeln viel klarer zu Tage, als wenn man mit bloßen Zahlen arbeitet.

6.2 Stetigkeit bei metrischen Räumen

Definition 6.2.1. Eine **Metrik** d auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ derart, daß für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar $X = (X, d)$ bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X.

Beispiel 6.2.2. Der Buchstabe d steht in diesem Zusammenhang wohl für das Wort "Distanz". Auf dem $\mathbb{R}^n$ liefert der übliche **euklidische Abstand** $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2}$ eine Metrik. Die Ungleichung aus der Definition bedeutet in diesem Beispiel anschaulich, daß in einem Dreieck mit Seitenlängen a, b, c stets gilt $a \leq b + c$. Sie heißt deshalb auch ganz allgemein die **Dreiecksungleichung**.

Beispiel 6.2.3. Auf dem $\mathbb{R}^n$ liefert auch der **Betragsabstand**

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

eine Metrik. *Wenn nichts anderes gesagt ist, fassen wir den $\mathbb{R}^n$ stets auf als einen metrischen Raum mit dieser Metrik,* die zwar weniger anschaulich ist als der euklidische Abstand, sich aber einfacher handhaben läßt.

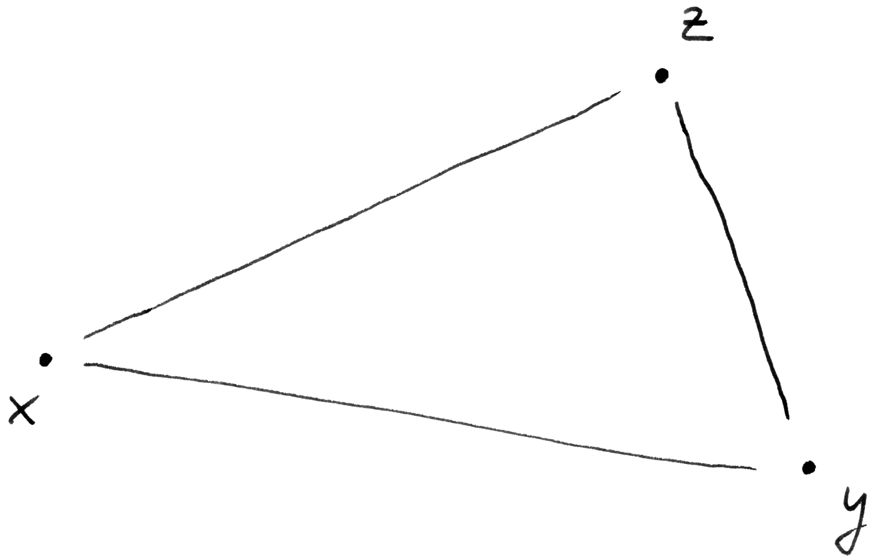


Illustration zur Dreiecksungleichung

Beispiel 6.2.4. Jede Teilmenge eines metrischen Raums ist mit der **induzierten Metrik** selbst ein metrischer Raum.

Definition 6.2.5. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ bezeichne

$$\mathrm{B}(x;\varepsilon) = \{z \in X \mid d(x,z) < \varepsilon\}$$

den **ε-Ball** um x oder auch die **ε-Umgebung** von x.

Beispiel 6.2.6. Für den euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^3$ ist der Ball um x mit Radius ε tatsächlich ein Ball, für den Betragsabstand hat $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ die Gestalt eines Würfels mit Mittelpunkt x und Seitenlänge 2ε.

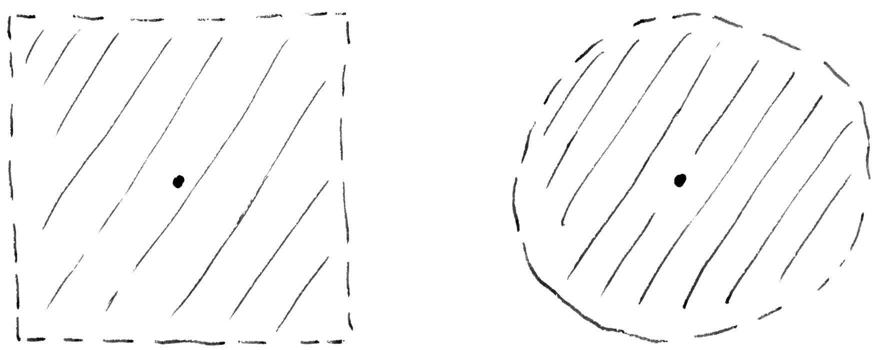
Definition 6.2.7. Unter einer **Umgebung** eines Punktes in einem metrischen Raum versteht man eine Teilmenge von besagtem Raum, die einen ganzen Ball um unseren Punkt umfaßt.

Bemerkung 6.2.8. Die Umgebungen eines Punktes im $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik sind dieselben wie seine Umgebungen bezüglich der Betragsmetrik, was man unschwer explizit prüft und was formal auch aus 6.7.20 folgen wird. Das ist der Grund dafür, daß wir im Folgenden Definitionen nach Möglichkeit mithilfe von Umgebungen formulieren, denn für so definierte Begriffe ist a priori klar, daß im Fall des $\mathbb{R}^n$ ihre Bedeutung nicht davon abhängt, ob wir mit dem euklidischen Abstand oder mit dem Betragsabstand arbeiten.

Bemerkung 6.2.9. Der Schnitt von endlich vielen Umgebungen eines Punktes ist wieder eine Umgebung besagten Punktes. Je zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raums besitzen disjunkte Umgebungen. Genauer sind für x, y mit $d(x,y) = r > 0$ die $(r/2)$-Bälle um x und y disjunkt. In der Tat folgte für z aus dem Schnitt ja mit Hilfe der Dreiecksungleichung $r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < r$, also kann es solch ein z nicht geben.

Definition 6.2.10. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt **stetig im Punkt** $p \in X$ genau dann, wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U') \subset U$. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **stetig** genau dann, wenn sie stetig ist in jedem Punkt.

Bemerkung 6.2.11. Unter einem **Fundamentalsystem** von Umgebungen eines Punktes versteht man eine Menge von Umgebungen von besagtem Punkt derart, daß jede Umgebung mindestens eine Umgebung unseres Systems umfaßt. Zum Beispiel bilden alle ε-Umgebungen eines Punktes ein Fundamentalsystem. Um die Stetigkeit einer Abbildung in einem Punkt p nachzuweisen,



Bälle in der Ebene für den Betragsabstand und den euklidischen Abstand müssen wir offensichtlich nur für alle Umgebungen aus einem Fundamentalsystem von Umgebungen seines Bildes prüfen, daß es jeweils eine Umgebung von p gibt, die dahinein abgebildet wird. Gleichbedeutend zur Stetigkeit einer Abbildung f im Punkt p ist also insbesondere die Forderung, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, daß gilt $f(\mathrm{B}(p;\delta)) \subset \mathrm{B}(f(p);\varepsilon)$.

Beispiel 6.2.12. Einfache Beispiele für stetige Abbildungen sind Einbettungen von einem Teilraum, konstante Abbildungen, oder die Projektion eines $\mathbb{R}^n$ auf eine Koordinate. In diesen Fällen können wir einfach $\delta = \varepsilon$ nehmen.

Beispiel 6.2.13. Als etwas komplizierteres Beispiel bemerken wir, daß **die Addition und die Multiplikation** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$ bzw. $(x,y) \mapsto xy$ **stetig sind.** Das ist im Wesentlichen die Aussage der ersten beiden Teile von Lemma 2.1.32.

Bemerkung 6.2.14. Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, daß sowohl $x \mapsto f(x,b)$ als auch $y \mapsto f(a,y)$ stetig sind für alle b bzw. alle a, daß aber dennoch die Funktion f selbst *nicht* stetig ist. Als Beispiel betrachte man die Funktion mit $(x,y) \mapsto xy/(x^2+y^2)$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $(0,0) \mapsto 0$. Sie ist nicht stetig am Nullpunkt nach dem anschließenden Satz 6.2.15, da nämlich ihre Verknüpfung mit $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t,t)$ nicht stetig ist bei $t = 0$. Die Stetigkeit von $t \mapsto (t,t)$ hinwiederum mag man aus der Komponentenregel 6.2.18 folgern.

Satz 6.2.15. *Jede Verknüpfung stetiger Abbildungen ist stetig.*

Beweis. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen metrischen Räumen und $p \in X$ ein Punkt. Wir zeigen genauer: Ist f stetig bei p und g stetig bei $f(p)$, so ist $(g \circ f)$ stetig bei p. Ist in der Tat g stetig bei $f(p)$, so finden wir für jede Umgebung U von $g(f(p))$ eine Umgebung U' von $f(p)$ mit $g(U') \subset U$. Ist zusätzlich f stetig ist bei p, finden wir für diese Umgebung U' von $f(p)$ weiter eine Umgebung U'' von p mit $f(U'') \subset U'$. Damit haben wir aber auch eine Umgebung U'' von p gefunden mit $(g \circ f)(U'') \subset U$. □

Definition 6.2.16. Gegeben metrische Räume (X_i, d_i) für $1 \leq i \leq n$ machen wir das Produkt $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ zu einem metrischen Raum durch die **Produktmetrik**

$$d(x,y) = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Bemerkung 6.2.17. Der Betragsabstand auf $\mathbb{R}^{n+m}$ ist die Produktmetrik zu den Betragsabständen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

Proposition 6.2.18 (Komponentenregel). *Seien Z und $X_1, \ldots, X_n$ metrische Räume und $f_i : Z \to X_i$ Abbildungen. Genau dann ist die Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) : Z \to X_1 \times \ldots \times X_n$ stetig, wenn alle f_i stetig sind.*

Bemerkung 6.2.19. Wenden wir diese Proposition an mit f der Identität auf einem Produkt, so impliziert die Stetigkeit der Identität, daß alle Projektionsabbildungen $\mathrm{pr}_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ stetig sein müssen.

Beweis. Da die Projektionen pr_i Abstände zwischen Punkten nie vergrößern, können wir ihre Stetigkeit direkt zeigen, "indem wir jeweils $\delta = \varepsilon$ nehmen". Ist f stetig, so sind folglich auch die $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$ stetig als Verknüpfungen stetiger Abbildungen. Sind umgekehrt alle f_i stetig in p, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ gewisse δ_i mit $d(p, z) < \delta_i \Rightarrow d_i(f_i(p), f_i(z)) < \varepsilon$, wo d_i die Metrik auf X_i bezeichnet. Nehmen wir $\delta = \inf \delta_i$, so gilt

$$d(p, z) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(z)) < \varepsilon$$

und das ist gleichbedeutend zu $f(\mathrm{B}(p; \delta)) \subset \mathrm{B}(f(p); \varepsilon)$. □

Korollar 6.2.20. *Ist X ein metrischer Raum und sind f, g stetige Abbildungen $X \to \mathbb{R}$, so sind auch $f + g$ und fg stetige Abbildungen $X \to \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir schreiben $f + g$ bzw. fg als die Verknüpfung der nach 6.2.18 stetigen Abbildung $X \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ mit der nach 6.2.13 stetigen Addition bzw. Multiplikation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. □

Beispiel 6.2.21. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch die Vorschrift

$$(x, y) \mapsto (x \sinh(y), x^2 y^3)$$

ist stetig. In der Tat reicht es nach der Komponentenregel zu zeigen, daß ihre beiden Komponenten f_1 und f_2 stetig sind. Wir zeigen das nur für die erste Komponente und überlassen die Behandlung der zweiten Komponente dem Leser. Warum also ist die Abbildung $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \sinh(y)$ stetig? Nun, $(x, y) \mapsto x$ ist stetig nach 6.2.19 als Projektion auf eine Koordinate, $(x, y) \mapsto y$ desgleichen, $(x, y) \mapsto \sinh(y)$ dann auch als Verknüpfung stetiger Funktionen, und schließlich auch $(x, y) \mapsto x \sinh(y)$ als Produkt stetiger Funktionen.

Übung 6.2.22. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist für alle $z \in X$ die Abbildung $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, z)$ stetig. Ist allgemeiner $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge, so ist auch die Abbildung $d_A : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ stetig.

Übung 6.2.23. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist die Metrik stetig als Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

6.3 Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen

Definition 6.3.1. Sei $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$ eine Folge in einem metrischen Raum X und $x \in X$ ein Punkt. Wir sagen, die Folge x_n **strebt gegen** x oder **konvergiert gegen** x und nennen x den **Grenzwert der Folge** und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

genau dann, wenn jede Umgebung von x fast alle Glieder unserer Folge enthält. Gleichbedeutend können wir natürlich ebensogut auch fordern, daß jeder Ball um x fast alle Glieder unserer Folge enthält.

Bemerkung 6.3.2. Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig, wenn er existiert. Das folgt wie im Beweis von 2.1.19 daraus, daß nach 6.2.9 je zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raums disjunkte Umgebungen haben.

Übung 6.3.3. Sei (x_n, y_n) eine Folge im Produkt $X \times Y$ der metrischen Räume X und Y. Genau dann konvergiert unsere Folge gegen (x, y), wenn x_n gegen x konvergiert und y_n gegen y. Man formuliere und beweise auch die offensichtliche Verallgemeinerung auf beliebige endliche Produkte metrischer Räume.

Definition 6.3.4. Ein metrischer Raum heißt **beschränkt** genau dann, wenn es für die möglichen Abstände zwischen Punkten unseres Raums eine reelle obere Schranke gibt. Eine Abbildung in einen metrischen Raum heißt **beschränkt** genau dann, wenn ihr Bild beschränkt ist.

Beispiel 6.3.5. Sei D eine Menge und X ein metrischer Raum. Auf dem Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, X)$ aller beschränkten Abbildungen $f : D \to X$ kann man eine Metrik erklären durch die Vorschrift

$$d(f, g) = \sup\{d(f(p), g(p)) \mid p \in D\}$$

im Fall $D \neq \emptyset$ und in offensichtlicher Weise im Fall $D = \emptyset$. Sie heißt die **Metrik der gleichmäßigen Konvergenz**. In der Tat ist für f_n, f im Funktionenraum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, \mathbb{R})$ mit dieser Metrik

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

gleichbedeutend dazu, daß die Abbildungen f_n im Sinne unserer Definition 5.1.6 gleichmäßig gegen die Abbildung f konvergieren.

Definition 6.3.6. Sei D eine Menge, X ein metrischer Raum, $f_n : D \to X$ eine Folge von Abbildungen und $f : D \to X$ eine Abbildung.

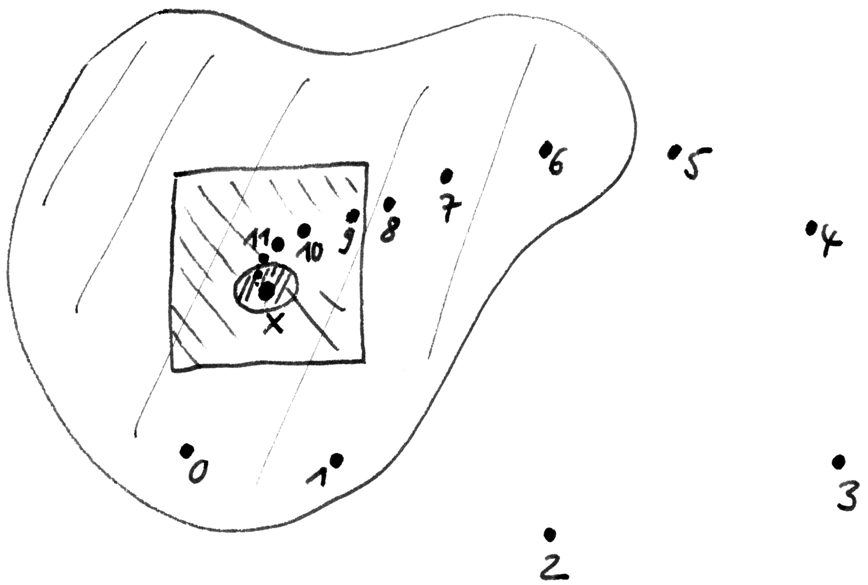


Illustration zur Konvergenz von Folgen. Eingezeichnet sind drei Umgebungen eines Punktes x, in jeder sollen fast alle Folgenglieder liegen.

1. Wir sagen, die Folge der f_n **konvergiere punktweise** gegen f genau dann, wenn gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(p) = f(p)$ für alle Punkte $p \in D$.

2. Wir sagen, die Folge der f_n **konvergiere gleichmäßig** gegen f genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon$ gibt mit

$$n \geq N \Rightarrow (d(f_n(p), f(p)) < \varepsilon \ \forall p \in D)$$

Übung 6.3.7. Für beschränkte Abbildungen ist auch in dieser Allgemeinheit gleichmäßige Konvergenz gleichbedeutend zur Konvergenz im Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, X)$ mit seiner eben erklärten "Metrik der gleichmäßigen Konvergenz".

Übung 6.3.8. Seien $f_n : X \to Y$ stetige Abbildungen metrischer Räume. Konvergiert die Folge der f_n gleichmäßig gegen eine Abbildung $f : X \to Y$, so ist auch f stetig. Hinweis: 5.1.8.

Übung 6.3.9. Für jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist die Menge der Folgenglieder beschränkt.

Übung 6.3.10 ***(Stetigkeit als Folgenstetigkeit)***. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung von metrischen Räumen. Genau dann ist f stetig in p, wenn für jede Folge x_n mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$. Hinweis: 3.3.27.

6.4 Offene und abgeschlossene Teilmengen

Definition 6.4.1. Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in X$ heißt ein **Berührungspunkt** von A genau dann, wenn es eine Folge in A gibt, die gegen x konvergiert. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in** X genau dann, wenn sie alle ihre Berührungspunkte enthält, wenn sie also "abgeschlossen ist unter der Bildung von Grenzwerten". Statt "A ist eine abgeschlossene Teilmenge von X" schreiben wir kurz

$$A \sqsubset X$$

Bemerkung 6.4.2. Der Schnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums ist abgeschlossen. Die leere Menge und der ganze Raum sind abgeschlossen. Jede einpunktige und damit auch jede endliche Teilmenge ist abgeschlossen. Jedes kompakte reelle Intervall ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Übung 6.4.3. Ein Abbildung zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn ihr Graph abgeschlossen ist im kartesischen Produkt unserer beiden Räume. Hinweis: 6.3.10

Übung 6.4.4. Jede abgeschlossene echte Untergruppe der reellen Zahlengeraden ist zyklisch, als da heißt von der Gestalt $\mathbb{Z}\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Hinweis: Ist $G \subset \mathbb{R}$ unsere Untergruppe, so betrachte man $\inf(G \cap \mathbb{R}_{>0})$.

Definition 6.4.5. Eine Teilmenge eines metrischen Raums heißt **offen** oder genauer **offen in unserem metrischen Raum** genau dann, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung ist, d.h. wenn sie mit jedem Punkt auch einen ganzen Ball um besagten Punkt enthält. Statt "U ist eine offene Teilmenge von X" schreiben wir kurz

$$U \overset{\circ}{\subset} X$$

Bemerkung 6.4.6. Der Schnitt von endlich vielen offenen Teilmengen eines metrischen Raums ist offen. Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Teilmengen eines metrischen Raums ist offen. Die leere Menge und der ganze Raum sind offen. In einem endlichen metrischen Raum ist jede Teilmenge offen und abgeschlossen. Die im Sinne unserer hier gegebenen Definition "offenen" Intervalle von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle (a, b) für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, d.h. unsere "offenen reellen Intervalle" aus 2.1.6.

Bemerkung 6.4.7. Wenn wir eine Menge einfach nur "offen" bzw. "abgeschlossen" nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies "offen" bzw. "abgeschlossen" gemeint ist. Ist X ein metrischer Raum und sind $M \subset Y \subset X$ Teilmengen, so meint $M \overset{\mathrm{A}}{\subset} Y$ bzw. $M \overset{\circ}{\subset} Y$, daß M abgeschlossen bzw. offen ist als Teilmenge des Raums Y mit seiner induzierten Metrik.

Bemerkung 6.4.8. Sei X ein metrischer Raum und $A \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$ abgeschlossen. So ist eine Teilmenge $M \subset A$ abgeschlossen in A genau dann, wenn sie abgeschlossen ist in X. In Formeln impliziert $A \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$ also $(M \overset{\mathrm{A}}{\subset} A \Leftrightarrow M \overset{\mathrm{A}}{\subset} X)$. Ebenso impliziert $U \overset{\circ}{\subset} X$ auch $(M \overset{\circ}{\subset} U \Leftrightarrow M \overset{\circ}{\subset} X)$.

Beispiele 6.4.9. Ein Ball $\mathrm{B}(x; r)$ ist stets offen, denn für $z \in \mathrm{B}(x; r)$ gilt $d(x, z) < r$, also gibt es $\varepsilon > 0$ mit $d(x, z) < r - \varepsilon$. Dann haben wir aber $\mathrm{B}(z; \varepsilon) \subset \mathrm{B}(x; r)$ nach der Dreiecksungleichung. Insbesondere umfaßt jede Umgebung eines Punktes eine offene Umgebung desselben Punktes.

Satz 6.4.10. *Eine Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen genau dann, wenn ihr Komplement offen ist.*

Beweis. Sei X unser metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Ist M nicht abgeschlossen, so gibt es einen Punkt $p \in X - M$, der Berührungspunkt von M ist, also $p = \lim_{n\to\infty} x_n$ mit $x_n \in M$. Dann kann es aber kein $\varepsilon > 0$

geben mit $\mathrm{B}(p;\varepsilon) \subset X \setminus M$, also ist $X \setminus M$ nicht offen. Ist $X \setminus M$ nicht offen, so gibt es einen Punkt $p \in X \setminus M$ derart, daß gilt

$$\mathrm{B}(p; 1/n) \cap M \neq \emptyset \quad \forall n \geq 1$$

Wählen wir jeweils einen Punkt $x_n \in \mathrm{B}(p; 1/n) \cap M$, so gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ und M ist nicht abgeschlossen. □

Satz 6.4.11 (Stetigkeit und offene Mengen). *Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.*

Bemerkung 6.4.12. Eine Abbildung ist auch stetig genau dann, wenn das Urbild jeder abgeschlossen Menge abgeschlossen ist. Das folgt aus dem Satz mit 6.4.10, da das Urbild des Komplements einer Menge stets das Komplement ihres Urbilds ist.

Beweis. Sei $f : X \to Y$ unsere Abbildung. Ist f stetig und $U \Subset Y$ offen und $p \in f^{-1}(U)$ ein Punkt, so ist U eine Umgebung von $f(p)$ und damit gibt es eine Umgebung Ball U' von p mit $f(U') \subset U$ alias $U' \subset f^{-1}(U)$. Also ist $f^{-1}(U)$ offen. Ist umgekehrt das Urbild jeder offenen Menge offen, so ist nach 6.4.9 insbesondere auch für alle p das Urbild jedes Balls $\mathrm{B}(f(p);\varepsilon)$ um $f(p)$ offen. Mit p gehört also auch ein ganzer Ball $B(p;\delta)$ um p zu diesem Urbild, als da heißt, für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $f\,\mathrm{B}(p;\delta) \subset \mathrm{B}(f(p);\varepsilon)$. □

Beispiel 6.4.13. Wir geben einen neuen Beweis für die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert 2.1.30, der zwar nur für reelle Folgen mit reellen Grenzwerten funktioniert, der aber dafür viele Möglichkeiten für Verallgemeinerungen aufzeigt. Zunächst ist die Menge $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ nach 6.4.12 als Urbild der abgeschlossenen Menge $[0, \infty) \sqsubseteq \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto y - x$. Ist also (x_n, y_n) eine konvergente Folge in H, so liegt mithin auch ihr Grenzwert in H, und das bedeutet gerade die Erhaltung von Ungleichungen im Grenzwert.

Korollar 6.4.14. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ eine Überdeckung von X durch endlich viele abgeschlossene Teilmengen. Sind alle Restriktionen $f_i = f|_{A_i}$ stetig, so ist auch f selbst stetig.*

Beweis. Nach 6.4.12 muß nur gezeigt werden, daß für jede abgeschlossene Teilmenge $B \sqsubseteq Y$ von Y ihr Urbild $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist in X. Da aber gilt $f^{-1}(B) = f_1^{-1}(B) \cup \ldots \cup f_n^{-1}(B)$ und $f_i^{-1}(B) \sqsubseteq A_i$ nach Annahme folgt das Korollar mit 6.4.2 und 6.4.8. □

Übung 6.4.15. Nimmt man zu einer Teilmenge M eines metrischen Raums X alle ihre Berührungspunkte hinzu, so erhält man eine abgeschlossene Menge, genauer: Die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfaßt. Diese Menge heißt auch der **Abschluß** von M in X und wird mit $\overline{M}$ bezeichnet.

Übung 6.4.16. Sei X ein metrischer Raum und seien $A, B \subset X$ disjunkte, abgeschlossene Teilmengen. So gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Hinweis: Man betrachte d_A wie in Übung 6.2.22 mache den Ansatz $f(z) = g(d_A(z), d_B(z))$ für geeignetes $g : \mathbb{R}^2\backslash 0 \to [0, 1]$.

Übung 6.4.17. Sei X ein metrischer Raum, $z \in X$ ein Punkt, $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. So ist die Menge $\{x \in X \mid d(x, z) \leq r\}$ abgeschlossen.

Übung 6.4.18. Ist X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge, so kann ihr Abschluß $\overline{A}$ in der Notation von 6.2.22 beschrieben werden als die Menge $\overline{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

Bemerkung 6.4.19. Gegeben eine Menge X können wir ja die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X bilden, die sogenannte Potenzmenge von X. Weil es mich verwirrt, über Mengen von Mengen zu reden, nenne ich wie in **??** Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ **Systeme von Teilmengen von** X und spreche von **Teilsystemen**, wenn ich Teilmengen solcher Mengensysteme meine.

Definition 6.4.20. Eine **Topologie** $\mathcal{T}$ auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge mitsamt einer Topologie. Statt $U \in \mathcal{T}$ schreiben wir meist $U \Subset X$ und nennen U eine **offene Teilmenge von** X. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **stetig** genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge unter besagter Abbildung offen ist.

Beispiel 6.4.21. Für jeden metrischen Raum bildet das System seiner offenen Teilmengen eine Topologie. Auf unserer erweiterten reellen Zahlengeraden $\overline{\mathbb{R}}$ erklären wir eine Topologie durch die Vorschrift, daß eine Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen sein möge genau dann, wenn sie für jedes ihrer Elemente eine Umgebung im Sinne von 2.1.7 ist. Für jeden Teilraum eines topologischen Raums erklären wir die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** durch die Vorschrift, daß ihre offenen Mengen gerade die Schnitte der offenen Mengen des ursprünglichen Raums mit unserem Teilraum sein mögen. Es gibt jedoch auch Topologien, die unserer bis hierher entwickelten Anschauung eher ungewohnt sein mögen: Auf jeder Menge können wir etwa etwa die **Klumpentopologie** betrachten, die nur aus der ganzen Menge und der leeren Menge besteht.

Bemerkung 6.4.22. Im Licht von 6.4.11 verallgemeinert die in 6.4.20 gegebene Definition der Stetigkeit unseren Stetigkeitsbegriff für Abbildungen zwischen metrischen Räumen und mit ähnlichen Argumenten auch unseren Stetigkeitsbegriff für Abbildungen zwischen Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$. Man erkennt auch leicht, daß die Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig ist. Um jedoch mit topologischen Räumen wirklich arbeiten zu können, müßten wir erklären, wie wir das Produkt zweier topologischer Räume mit einer Topologie versehen, und allerhand Eigenschaften wie etwa das Analogon der Komponentenregel prüfen. Das alles werde ich vorerst vermeiden, weil ich fürchte, den Sinn dieser Abstraktionen hier noch nicht ausreichend begründen zu können.

Definition 6.4.23. Sei X ein topologischer Raum und $p \in X$ ein Punkt. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine **Umgebung** von p genau dann, wenn es eine offene Menge $V \circledcirc X$ gibt mit $p \in V \subset U$.

Definition 6.4.24. Sei $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$ eine Folge in einem topologischen Raum X und $x \in X$ ein Punkt. Wir sagen, die Folge x_n **strebt gegen** x oder **konvergiert gegen** x und nennen x den **Grenzwert der Folge** und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

genau dann, wenn jede Umgebung von x fast alle Glieder unserer Folge enthält. Gleichbedeutend können wir natürlich ebensogut auch fordern, daß jede offene Menge um x fast alle Glieder unserer Folge enthält.

Bemerkung 6.4.25. In dieser Allgemeinheit ist der Grenzwertbegriff nur noch eingeschränkt sinnvoll, da der Grenzwert einer Folge nicht mehr eindeutig zu sein braucht. Fordern wir jedoch von unserem topologischen Raum die sogenannte **Hausdorff-Eigenschaft**, daß je zwei verschiedene Punkte auch disjunkte Umgebungen besitzen mögen, so ist der Grenzwert einer Folge eindeutig, wenn er existiert.

6.5 Kompakte metrische Räume

Definition 6.5.1. Ein metrischer Raum heißt **kompakt** genau dann, wenn jede Folge in unserem Raum eine konvergente Teilfolge besitzt.

Bemerkung 6.5.2. Eine Teilmenge A eines metrischen Raums nennen wir kompakt oder auch ein **Kompaktum** genau dann, wenn sie kompakt ist als metrischer Raum mit der induzierten Metrik, wenn also jede Folge in A eine Teilfolge besitzt, die *gegen einen Punkt aus* A konvergiert.

Bemerkung 6.5.3. Eine Teilmenge eines kompakten metrischen Raums ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen ist. Endliche Vereinigungen kompakter Teilmengen eines metrischen Raums sind stets wieder kompakt.

Bemerkung 6.5.4. Jeder kompakte metrische Raum ist beschränkt. Ist in der Tat ein Raum nicht beschränkt, so finden wir darin eine Folge x_n mit $d(x_0, x_n) \geq n$, und diese Folge kann nach 6.3.9 keine konvergente Teilfolge haben.

Proposition 6.5.5. *Jedes endliche Produkt von kompakten metrischen Räumen ist kompakt.*

Beweis. Sei $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ mit kompakten X_i. Sei eine Folge in X gegeben. Da X_1 kompakt ist, finden wir eine Teilfolge unserer Folge, die in der ersten Koordinate konvergiert. Da auch X_2 kompakt ist, finden wir von dieser Teilfolge hinwiederum eine Teilfolge, die auch in der zweiten Koordinate konvergiert. Indem wir so weitermachen, finden wir schließlich eine Teilfolge, die in jeder Koordinate konvergiert. Diese Teilfolge konvergiert dann nach 6.3.3 auch in X. □

Lemma 6.5.6. *Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist stets abgeschlossen.*

Beweis. Sei X unser Raum und $A \subset X$ unsere Teilmenge. Ist A nicht abgeschlossen, so gibt es eine Folge in A, die gegen einen Punkt aus $X \backslash A$ konvergiert. Solch eine Folge kann aber unmöglich eine Teilfolge haben, die gegen einen Punkt aus A konvergiert. □

Satz 6.5.7 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Nach 6.5.4 und 6.5.6 ist eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums stets beschränkt und abgeschlossen. In der anderen Richtung wissen wir schon, daß für jedes $k \geq 0$ das Intervall $[-k, k]$ kompakt ist. Falls eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, finden wir ein k mit $A \subset [-k, k]^n$. Nach 6.5.5 ist nun $[-k, k]^n$ kompakt, und als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist nach 6.5.3 dann auch A selbst kompakt. □

Beispiel 6.5.8. Die Menge $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ und beschränkt, ist aber nicht kompakt für die induzierte Metrik.

Proposition 6.5.9. *Unter einer stetigen Abbildung metrischer Räume werden Kompakta stets auf Kompakta abgebildet.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ unsere stetige Abbildung und $A \subset X$ ein Kompaktum. Ist y_n eine Folge in $f(A)$, so finden wir eine Folge x_n in A mit $f(x_n) = y_n$. Falls A kompakt ist, besitzt die Folge x_n eine Teilfolge x_{n_k}, die gegen einen Punkt $x \in A$ konvergiert. Dann ist y_{n_k} nach 6.3.10 eine Teilfolge der Folge y_n, die gegen einen Punkt von $f(A)$ konvergiert, nämlich gegen $f(x)$. □

Korollar 6.5.10. *Jede stetige reellwertige Funktion auf einem nichtleeren kompakten metrischen Raum ist beschränkt und nimmt das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte an.*

Bemerkung 6.5.11. Ist also in Formeln X unser kompakter Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $p, q \in X$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q) \;\; \forall x \in X$.

Beweis. Nach 6.5.9 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen. Aus $X \neq \emptyset$ folgt weiter $f(X) \neq \emptyset$. Damit besitzt $f(X)$ ein Supremum und ein Infimum in $\mathbb{R}$. Da aber $f(X)$ kompakt, also abgeschlossen ist, folgt $\sup f(X) \in f(X)$ und $\inf f(X) \in f(X)$. Es gibt in anderen Worten $p, q \in X$ mit $\sup f(X) = f(p)$ und $\inf f(X) = f(q)$. □

Definition 6.5.12. Eine stetige Abbildung von metrischen Räumen heißt **gleichmäßig stetig** genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß gilt
$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Satz 6.5.13. *Jede stetige Abbildung von einem kompakten metrischen Raum in einen weiteren metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Mutatis mutandis zeigt das der Beweis von Satz 3.4.8. □

Übung 6.5.14. Ist in einem metrischen Raum eine abzählbare Familie kompakter Teilmengen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit leerem Schnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$, so gibt es schon ein N mit $K_0 \cap \ldots \cap K_N = \emptyset$. Das wird verallgemeinert auf den Fall beliebiger Familien in 6.8.7.

Übung 6.5.15. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap K = \emptyset$. So gibt es $\delta > 0$ mit $d(x, y) \geq \delta$ für alle $x \in A$, $y \in K$.

6.6 Affine Räume

Bemerkung 6.6.1. Dieser Abschnitt ist Abschnitt **??** aus der linearen Algebra. Ich habe ihn nur hier eingefügt, um Unklarheiten zu vermeiden, was die in weiteren verwendeten Notationen und Begriffsbildungen angeht.

Definition 6.6.2. Ein **affiner Raum** oder kurz **Raum** über einem Körper k ist ein Tripel
$$E = (E, \vec{E}, a)$$
bestehend aus einer Menge E, einer abelschen Gruppe $\vec{E} \subset \mathrm{Ens}^{\times} E$ von Permutationen von E, von der man fordert, daß für alle $e \in E$ das Anwenden

auf e eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$ liefert, sowie einer Abbildung $a : k \times \vec{E} \to \vec{E}$, die die abelsche Gruppe $\vec{E}$ zu einem k-Vektorraum macht. Die Elemente von $\vec{E}$ heißen die **Translationen** oder **Richtungsvektoren** unseres affinen Raums und den Vektorraum $\vec{E}$ selbst nennen wir den **Richtungsraum** unseres affinen Raums. Die Operation von k auf $\vec{E}$ mag man die **Reskalierung von Translationen** nennen. Unter der **Dimension** unseres affinen Raums verstehen wir die Dimension seines Richtungsraums. Das Resultat der Operation von $\vec{u} \in \vec{E}$ auf $e \in E$ notieren wir $\vec{u} + e$.

Bemerkung 6.6.3. Hier entsteht leider ein Konflikt mit der Notation aus **??**, nach der mit Pfeilen versehene Mannigfaltigkeiten orientierte Mannigfaltigkeiten andeuten sollen. Was jeweils gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

Bemerkung 6.6.4. Ist E ein affiner Raum, so liefert nach Annahme für jedes $e \in E$ die Operation eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$, $\vec{u} \mapsto \vec{u} + e$ und es gilt $\vec{0} + e = e$ sowie $\vec{u} + (\vec{v} + e) = (\vec{u} + \vec{v}) + e$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ und $e \in E$. Flapsig gesprochen ist also ein affiner Raum ein “Vektorraum, bei dem man den Ursprung vergessen hat”. Gegeben $e, e' \in E$ definieren wir $e - e'$ als den Richtungsvektor $\vec{u} \in \vec{E}$ mit $e = \vec{u} + e'$.

Beispiel 6.6.5. Jeder Vektorraum ist in offensichtlicher Weise auch ein affiner Raum. Es scheint mir besonders sinnfällig, den uns umgebenden Raum mathematisch als dreidimensionalen reellen affinen Raum zu modellieren: Hierbei denkt man sich $\vec{E}$ als die Gruppe aller “Parallelverschiebungen”. Ähnlich mag man die Zeit modellieren als einen eindimensionalen reellen affinen Raum. Die leere Menge kann in meinen Konventionen nie ein affiner Raum sein, da darauf keine Gruppe transitiv operieren kann. Es gibt hier jedoch auch andere Konventionen.

Bemerkung 6.6.6. Meist findet man die begriffliche Variante eines **affinen Raums über einem vorgegebenen Vektorraum**: Darunter versteht man dann eine Menge E mit einer freien transitiven Operation des vorgegebenen Vektorraums. Ich ziehe die oben gegebene Variante vor, da sie jeden Bezug auf einen vorgegebenen Vektorraum vermeidet und meines Erachtens den Anschauungsraum besser modelliert.

Definition 6.6.7. Eine Abbildung $\varphi : E \to E'$ zwischen affinen Räumen heißt eine **affine Abbildung** genau dann, wenn es eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Richtungräumen $\vec{\varphi} : \vec{E} \to \vec{E}'$ gibt mit

$$\varphi(\vec{u} + e) = \vec{\varphi}(\vec{u}) + \varphi(e) \;\; \forall\, \vec{u} \in \vec{E},\; e \in E$$

Diese lineare Abbildung $\vec{\varphi}$ ist dann durch φ eindeutig bestimmt und heißt der **lineare Anteil** unserer affinen Abbildung.

Übung 6.6.8. Die Verknüpfung affiner Abbildungen ist affin und der lineare Anteil einer Verknüpfung affiner Abbildungen ist die Verknüpfung ihrer linearen Anteile.

6.7 Normierte Räume

Bemerkung 6.7.1. Unter einem **reellen Vektorraum** verstehen wir einen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Wollen wir einen reellen Vektorraum mit einer Metrik versehen, so reicht es, wenn wir jedem seiner Vektoren in geeigneter Weise eine "Länge" zuordnen. Einen solchen abstrakten Längenbegriff für Vektoren eines Vektorraums nennt man eine "Norm".

Definition 6.7.2. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildlung $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $v \mapsto \|v\|$ derart, daß gilt:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R};$
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V.$

Unter einem **normierten Vektorraum** versteht man ein Paar $(V, \| \ \|)$ bestehend aus einem Vektorraum V und einer Norm $\| \ \|$ auf V.

Bemerkung 6.7.3. Für die Leser, die schon mit komplexen Zahlen und ihrem Absolutbetrag vertraut sind, sei noch erwähnt, daß man von einer Norm auf einem komplexen Vektorraum stärker fordert, daß die erste Bedingung sogar für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten soll.

Bemerkung 6.7.4. Jeder normierte Vektorraum wird ein metrischer Raum vermittels der **durch die Norm induzierten Metrik**

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

Zum Beispiel gehört unser Betragsabstand auf dem $\mathbb{R}^n$ zur Maximumsnorm. Wir dürfen damit in normierten Vektorräumen über Stetigkeit und Konvergenz von Folgen reden. Allgemeiner verstehen wir unter einem **normierten affinen Raum** einen reellen (oder komplexen) affinen Raum im Sinne von 6.6.2, dessen Richtungsraum mit einer Norm versehen ist. Auch jeder normierte affine Raum trägt eine natürliche Metrik, die durch dieselbe Formel beschrieben wird. Reden wir ohne nähere Spezifikation von einem **normierten Raum**, so meinen wir einen normierten affinen Raum, aber der Leser, der mit dem Begriff eines affinen Raums noch nicht vertraut ist, mag sich auch einen normierten Vektorraum denken.

Übung 6.7.5. Für je zwei Vektoren v, w eines normierten Vektorraums gilt $\|v + w\| \geq |\|v\| - \|w\||$.

Beispiel 6.7.6. Mit $v \mapsto \|v\|$ ist auch $v \mapsto \alpha\|v\|$ eine Norm, für jedes $\alpha > 0$. Auf dem Nullraum gibt es nur eine Norm, die eben den Nullvektor auf Null wirft.

Beispiel 6.7.7. Auf dem $\mathbb{R}^n$ für $n > 0$ definiert man die **euklidische Norm** von $v = (v_1, \ldots, v_n)$ durch $\|v\| = \|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$. Wie man formal zeigt, daß das tatsächlich eine Norm ist, diskutieren wir in 10.3.

Beispiel 6.7.8. Auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert man die **Maximumsnorm** von $v = (v_1, \ldots, v_n)$ für $n > 0$ durch $|v| = \|v\|_\infty = \max(|v_1|, \ldots, |v_n|)$. Auf dem Raum $V = \mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, \mathbb{R})$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf einer Menge D haben wir die **Supremumsnorm**, gegeben für $D \neq \emptyset$ durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$$

und im Fall $D = \emptyset$ als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Für eine endliche Menge D mit n Punkten erhalten wir unsere Maximumsnorm auf dem $\mathbb{R}^n$ als Spezialfall der Supremumsnorm. Noch allgemeiner definieren wir für jeden normierten Vektorraum $(W, |\;|)$ auf dem Raum $V = \mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, W)$ aller beschränkten Abbildungen von D nach W die Supremumsnorm durch $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$ im Fall $D \neq \emptyset$ und im Fall $D = \emptyset$ als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Die zu unserer Supremumsnorm gehörige Metrik ist in allen diesen Fällen die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.

Beispiel 6.7.9. Sind $V_1, \ldots, V_n$ normierte Vektorräume, so erklären wir die **Produktnorm** auf ihrem Produkt $V_1 \times \ldots \times V_n$ für $n > 0$ durch die Vorschrift $\|(v_1, \ldots, v_n)\| = \sup \|v_i\|$. Offensichtlich induziert die Produktnorm die Produktmetrik.

Übung 6.7.10. Gegeben ein normierter Vektorraum $(V, \|\;\|)$ sind die folgenden Abbildungen stetig: Die Norm $\|\;\| : V \to \mathbb{R}$, die Addition $V \times V \to V$, und die Multiplikation mit Skalaren $\mathbb{R} \times V \to V$. Ist unsere Norm die euklidische Norm zu einem Skalarprodukt $V \times V \to \mathbb{R}$, so ist auch dies Skalarprodukt stetig. Leser, die bereits mit komplexen Zahlen vertraut sind, zeigen Analoges auch für komplexe Vektorräume.

Übung 6.7.11 ***(Einparameteruntergruppen normierter Vektorräume)***. Die stetigen Gruppenhomomorphismen von der additive Gruppe der reellen Zahlen in einen normierten Vektorraum sind genau die linearen Abbildungen. Hinweis: 3.3.25.

Übung 6.7.12. In einem normierten reellen Vektorraum ist jede nichtleere offene Teilmenge bereits ein Erzeugendensystem.

Satz 6.7.13 (Stetigkeit linearer Abbildungen). *Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen normierten Vektorräumen ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt derart, daß gilt*

$$\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$$

Bemerkung 6.7.14. Sie werden in 6.7.22 zeigen, daß lineare Abbildungen von einem *endlichdimensionalen* normierten Vektorraum in einen beliebigen weiteren normierten Vektorraum immer stetig sind.

Beweis. Ist f stetig, so gibt es $\delta > 0$ mit $\|v - 0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(v) - f(0)\| \leq 1$. Setzen wir $C = 1/\delta$, so folgt $\|f(v)\| \leq C\|v\|$ zunächst für alle Vektoren v der Norm $\|v\| = \delta$ und dann durch Multiplikation mit Skalaren für alle $v \in V$. Gibt es umgekehrt ein $C > 0$ mit $\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$, so finden wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \varepsilon/C > 0$ so daß gilt

$$\|v - w\| \leq \delta \Rightarrow \|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| \leq C\delta = \varepsilon \qquad \square$$

Übung 6.7.15. Die Menge aller stetigen reellwertigen Abbildungen auf einem Raum X notiere ich $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Das $\mathcal{C}$ steht hier für englisch “continous” und französisch “continu”. Man zeige: Versehen wir die Menge $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten reellen Intervall $[a, b]$ mit der Supremumsnorm, so wird das Integral $f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ eine stetige Abbildung $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Übung 6.7.16. Bezeichnet $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ den Teilraum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen, so ist das Ableiten $f \mapsto f'$ **keine** stetige Abbildung $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Übung 6.7.17. Seien U, V, W normierte Vektorräume. Eine bilineare Abbildung $F : U \times V \to W$ ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $\|F(u, v)\| \leq C\|u\|\|v\|$. Man formuliere und beweise die analoge Aussage auch für multilineare Abbildungen.

Übung 6.7.18. Gegeben eine Menge D und ein normierter Vektorraum V erkläre man auf dem Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, V)$ der beschränkten Abbildungen $D \to V$ eine Norm derart, daß die zugehörige Metrik die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz aus 6.3.5 wird.

Definition 6.7.19. Zwei Normen $\|\ \|$, $|\ |$ auf einem reellen Vektorraum V heißen **äquivalent** genau dann, wenn es positive Konstanten $c, C > 0$ gibt derart, daß gilt

$$\|v\| \leq C|v| \text{ und } |v| \leq c\|v\| \quad \forall v \in V$$

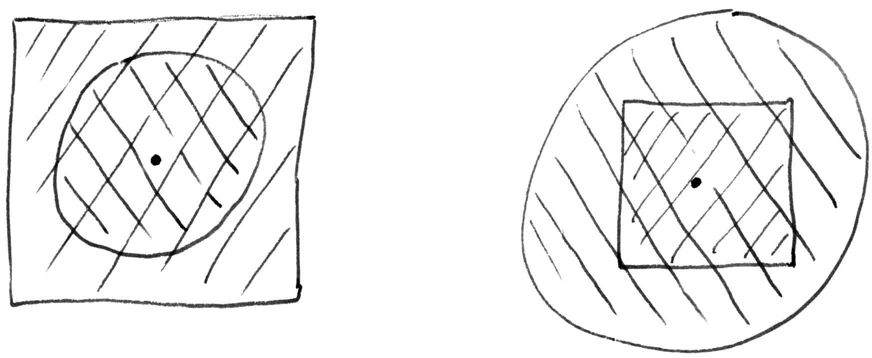


Illustration zur Äquivalenz von Normen am Beispiel der Betragsnorm und der euklidischen Norm auf dem $\mathbb{R}^2$.

Satz 6.7.20. *Auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.*

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß V der $\mathbb{R}^n$ ist mit $n \geq 1$ und daß eine unserer Normen die Maximumsnorm $|v|$ ist. Sei $\| \ \|$ eine zweite Norm. Bezeichnet $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und ist $v = v_1 \,\mathrm{e}_1 + \ldots + v_n \,\mathrm{e}_n$, so haben wir

$$\begin{array}{rcl} \|v\| & = & \|v_1 \,\mathrm{e}_1 + \ldots + v_n \,\mathrm{e}_n \| \\ & \leq & |v_1| \cdot \| \,\mathrm{e}_1 \| + \ldots + |v_n| \cdot \| \,\mathrm{e}_n \| \\ & \leq & |v| \cdot C \end{array}$$

mit $C = \| \,\mathrm{e}_1 \| + \ldots + \| \,\mathrm{e}_n \|$. Insbesondere folgern wir, daß $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist für die durch die Maximumsnorm $| \ |$ gegebene Metrik auf $\mathbb{R}^n$, aus $d(x, y) = |x - y| < \varepsilon/C$ folgt nämlich $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \varepsilon$. Nun ist aber die Oberfläche des Hyperkubus

$$K = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1\}$$

$| \ |$-kompakt nach 6.5.7 und nicht leer falls gilt $n \geq 1$. Nach 6.5.10 nimmt folglich die Funktion $\| \ \|$ auf K ein Minimum a an, und da K nicht den Nullvektor enthält, ist dies Minimum notwendig positiv, $a > 0$. Wir folgern zunächst einmal $a|v| \leq \|v\|$ für alle $v \in K$, dann gilt aber natürlich auch $a|\lambda v| \leq \|\lambda v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in K$, also $a|w| \leq \|w\| \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$. Mit $c = 1/a$ gilt also $|w| \leq c\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$. □

Bemerkung 6.7.21. Wir nennen eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums **offen** bzw. **abgeschlossen** genau dann, wenn sie offen ist für die von irgendeiner Norm auf seinem Richtungsraum induzierte Metrik. Nach unserem Satz ist sie dann notwendig offen für jede von einer Norm induzierte Metrik. Die so erklärten offenen Teilmengen bilden die sogenannte **natürliche Topologie** auf unserem endlichdimensionalen reellen Raum.

Übung 6.7.22. Jede lineare Abbildung von einem endlichdimensionalen Vektorraum in einen normierten Vektorraum W ist stetig. Sind allgemeiner endlichdimensionale Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ gegeben, so ist jede multilineare Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ stetig und zwar in Bezug auf jede Wahl von Normen auf den V_i.

Definition 6.7.23. Ist $f : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung normierter Vektorräume, so heißt die kleinstmögliche Konstante $C \geq 0$ wie in 6.7.13 auch die **Operatornorm** $\|f\|$ von f, in Formeln

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$$

Übung 6.7.24. Sind $f : V \to W$ und $g : W \to X$ stetige Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen, so gilt $\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$.

Bemerkung 6.7.25. Die stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen V, W nennt man auch **beschränkte Operatoren** und notiert die Menge aller solchen Abbildungen $\mathcal{B}(V, W)$. Ich werde jedoch diese Notation benutzen, die Terminologie jedoch vermeiden und nach Möglichkeit von **stetigen Operatoren** reden, da diese ja im Sinne von 6.3.4 keineswegs beschränkte Abbildungen zu sein brauchen.

Übung 6.7.26. Der Raum $\mathcal{B}(V, W)$ aller stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen V, W ist ein Untervektorraum im Raum $\mathrm{Hom}(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W, und die in 6.7.23 eingeführte Abbildung $f \mapsto \|f\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(V, W)$.

6.8 Überdeckungen kompakter metrischer Räume

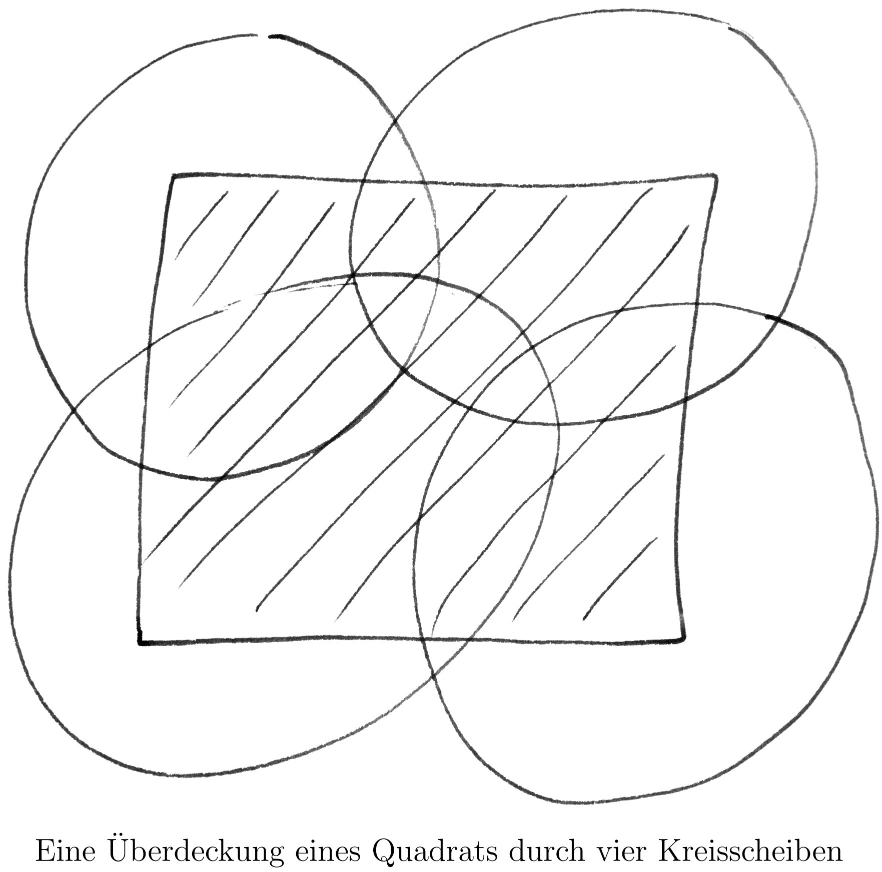
Definition 6.8.1. Sei X eine Menge. Unter einer **Überdeckung** von X versteht man ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X derart, daß X ihre Vereinigung ist, in Formeln ausgedrückt $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Unter einer **Teilüberdeckung** einer Überdeckung $\mathcal{U}$ versteht man ein Teilsystem $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, das auch selbst schon eine Überdeckung ist.

Definition 6.8.2. Unter einer **offenen Überdeckung** eines metrischen Raums versteht man eine Überdeckung, die aus offenen Teilmengen besteht.

Satz 6.8.3 (Kompaktheit und offene Mengen). *Ein metrischer Raum ist kompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Bemerkung 6.8.4. Ich hoffe, daß Sie im weiteren Verlauf dieser Vorlesung noch sehen werden, wie wichtig diese Charakterisierung der Kompaktheit ist. Aus didaktischen Gründen will ich auch noch eine durch unnötiges Beiwerk verunreinigte Version dieses Satzes formulieren. Unter einer **Überdeckung** einer Teilmenge Y einer Menge X durch Teilmengen von X versteht man ein Mengensystem $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $Y \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Eine Teilmenge Y eines metrischen Raums X ist in dieser Terminologie kompakt genau dann, wenn jede Überdeckung von Y durch offene Teilmengen von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Um diese Formulierung aus dem eben gegebenen Satz abzuleiten, muß man nur bemerken, daß gilt $U \Subset X \Rightarrow (U \cap Y) \Subset Y$.

Bemerkung 6.8.5. Im Kontext topologischer Räume wird dieser Satz die Definition der Kompaktheit: Ein topologischer Raum heißt **kompakt** genau



Eine Überdeckung eines Quadrats durch vier Kreisscheiben dann, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt. In der französischen Literatur bezeichnet man diese Eigenschaft eines topologischen Raums meist abweichend als **quasikompakt** und fordert von einem kompakten Raum zusätzlich die Hausdorff-Eigenschaft.

Beweis. Sei X ein metrischer Raum. Ist X nicht kompakt, so finden wir in X eine Folge x_n ohne konvergente Teilfolge. Dann besitzt jeder Punkt von X eine offene Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder trifft, und alle diese offenen Umgebungen bilden eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung. Das zeigt die eine Richtung. Den Beweis der anderen Richtung beginnen wir mit einem Lemma, das auch für sich genommen oft hilfreich ist.

Lemma 6.8.6 (Überdeckungssatz von Lebesgue). *Ist X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle $x \in X$ der ε-Ball $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ um x ganz in einer der offenen Mengen $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.*

Beweis. Wir definieren eine Funktion $r : X \to \mathbb{R}_{>0}$ durch die Vorschrift

$$r(x) = \sup\{\eta \in [0,1] \mid \text{ Es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } \mathrm{B}(x;\eta) \subset U\}$$

Diese Funktion ist stetig, genauer haben wir $r(y) \geq r(x) - d(x,y)$ nach der Dreiecksungleichung und damit $|r(y) - r(x)| \leq d(x,y)$ für alle $x, y \in X$. Der Fall $X = \emptyset$ ist eh unproblematisch, wir dürfen also X nichtleer annehmen. Da wir X auch kompakt angenommen hatten, nimmt r nach 6.5.10 sein Minimum an. Folglich gibt es $\varepsilon > 0$ mit $r(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in X$, und dies ε hat dann die gewünschte Eigenschaft. □

Um die andere Implikation im Satz zu zeigen sei nun X kompakt und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Es gilt zu zeigen, daß sie eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wählen wir zu unserer Überdeckung $\mathcal{U}$ ein ε wie im Überdeckungssatz 6.8.6, so reicht es auch zu zeigen, daß es eine endliche Teilmenge $E \subset X$ gibt mit

$$X = \bigcup_{x \in E} \mathrm{B}(x;\varepsilon)$$

denn der ε-Ball $\mathrm{B}(x;\varepsilon)$ um ein beliebiges $x \in X$ liegt nach Wahl von ε schon in einem der $U \in \mathcal{U}$. Gäbe es aber für ein $\varepsilon > 0$ keine endliche Überdeckung von X durch ε-Bälle, so könnten wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren mit $x_n \notin \bigcup_{0 \leq \nu < n} \mathrm{B}(x_\nu;\varepsilon)$ für alle n, also $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für $n \neq m$, und diese Folge könnte keine konvergente Teilfolge haben, im Widerspruch zur Annahme. □

Übung 6.8.7. Ist in einem metrischen oder topologischen Raum X ein System kompakter Teilmengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ gegeben mit leerem Schnitt $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K = \emptyset$, so gibt es bereits eine endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ mit $\bigcap_{K \in \mathcal{E}} K = \emptyset$.

Übung 6.8.8 *(***Satz von Dini***).* Eine monoton wachsende Folge stetiger reellwertiger Funktionen auf einem kompakten Raum, die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, konvergiert sogar gleichmäßig.

6.9 Integrale mit Parametern

Satz 6.9.1 (über Integrale mit Parametern). *Gegeben ein metrischer Raum X und eine stetige Funktion $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t$ stetig.*

Bemerkung 6.9.2. Wir zeigen diesen Satz in großer Allgemeinheit als Anwendung unserer neuen Charakterisierung der Kompaktheit und als Illustration für die Kraft der allgemeinen Theorie metrischer Räume. Ist X offen oder abgeschlossen in einem $\mathbb{R}^n$, so kann man auch elementarer mit der gleichmäßigen Stetigkeit argumentieren. In dieser Form findet man den Beweis in den meisten Büchern.

Beweis. Versehen wir den Raum $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$ mit der Supremumsnorm, so ist nach dem gleich folgenden Satz 6.9.4 die von f induzierte Abbildung $\tilde{f} : X \to \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $x \mapsto f(x, \ )$ stetig. Nach Übung 6.7.15 ist weiter das Integrieren $\int : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig. Damit ist unsere Abbildung $\int \circ \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ stetig als eine Verknüpfung stetiger Abbildungen. □

Bemerkung 6.9.3. Den Raum aller stetigen Abbildungen von einem metrischen Raum X in einen metrischen Raum Y, versehen mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, notiere ich $\mathcal{C}(X, Y)$.

Satz 6.9.4. *Seien X, Y und K metrische Räume. Ist K kompakt, so ist eine Abbildung $f : X \times K \to Y$ stetig genau dann, wenn die induzierte Abbildung $\tilde{f} : X \to \mathcal{C}(K, Y)$ stetig ist für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{C}(K, Y)$.*

Beweis. Daß aus der Stetigkeit von $\tilde{f}$ die Stetigkeit von f folgt, sieht man ohne weitere Schwierigkeiten. Wir zeigen nun die andere Richtung und müssen die Stetigkeit von $\tilde{f}$ an jeder Stelle $p \in X$ nachweisen. Sei diese Stelle p ab jetzt fest gewählt und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es für jedes $s \in K$ ein $\delta_s > 0$ mit

$$f\,\mathrm{B}((p, s); \delta_s) \subset \mathrm{B}(f(p, s); \varepsilon)$$

Nun gilt für unsere Metrik auf $X \times K$ ja $\mathrm{B}((p,s);\delta) = \mathrm{B}(p;\delta) \times \mathrm{B}(s;\delta)$ und nach 6.8.3 gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{s\in E} \mathrm{B}(s;\delta_s)$. Für $\eta = \min_{s\in E} \delta_s$ behaupten wir dann

$$x \in \mathrm{B}(p;\eta) \;\Rightarrow\; d(f(x,t), f(p,t)) < 2\varepsilon \;\; \forall t \in K$$

In der Tat finden wir für jedes $t \in K$ ein $s \in E$ mit $t \in \mathrm{B}(s;\delta_s)$ und für dies s liegen (p,t) und (x,t) beide in $\mathrm{B}((p,s);\delta_s)$. Damit ist die Stetigkeit von $\tilde{f}$ bei p gezeigt. □

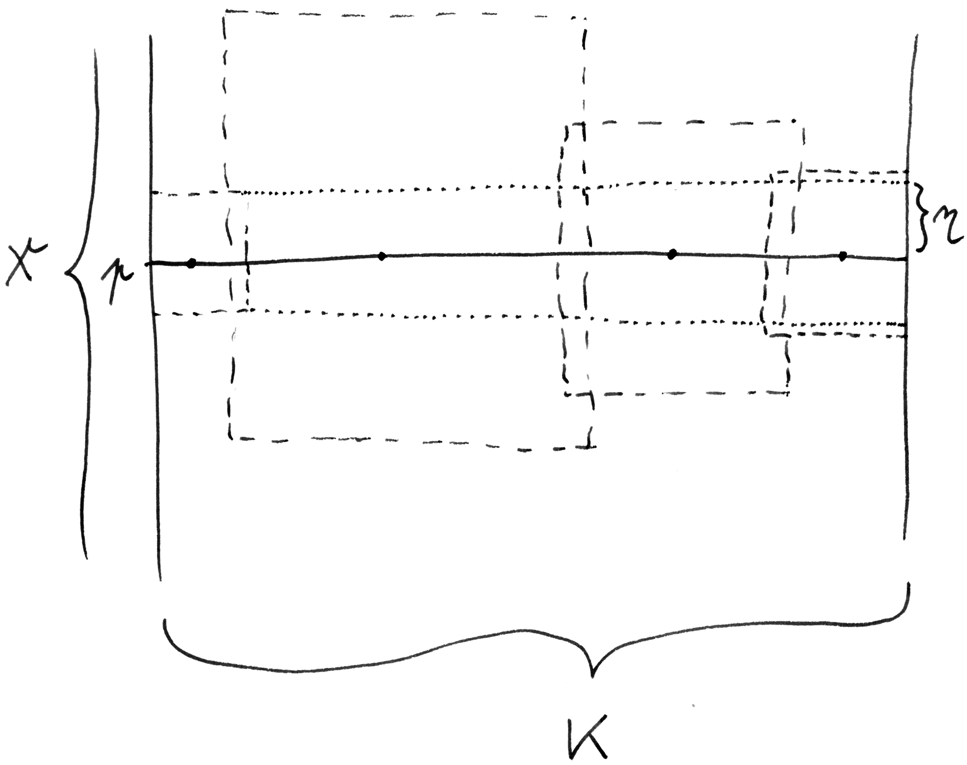


Illustration zum Beweis von Satz 6.9.4. Die Quadrate sind so gewählt, daß unsere Abbildung f auf jedem Quadrat höchstens um den Abstand ε von ihrem Wert im Zentrum des jeweiligen Quadrats abweicht.

7 Vektorwertige Funktionen einer Veränderlichen

7.1 Bogenlänge in metrischen Räumen

Definition 7.1.1. Gegeben ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein metrischer Raum (X, d) und eine Abbildung $\gamma : I \to X$ definieren wir die **Länge** $L(\gamma) \in \overline{\mathbb{R}}$ von γ als das Supremum über "die Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge", in Formeln

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \middle| t_0, \ldots, t_n \in I, t_0 \leq \ldots \leq t_n \right\}$$

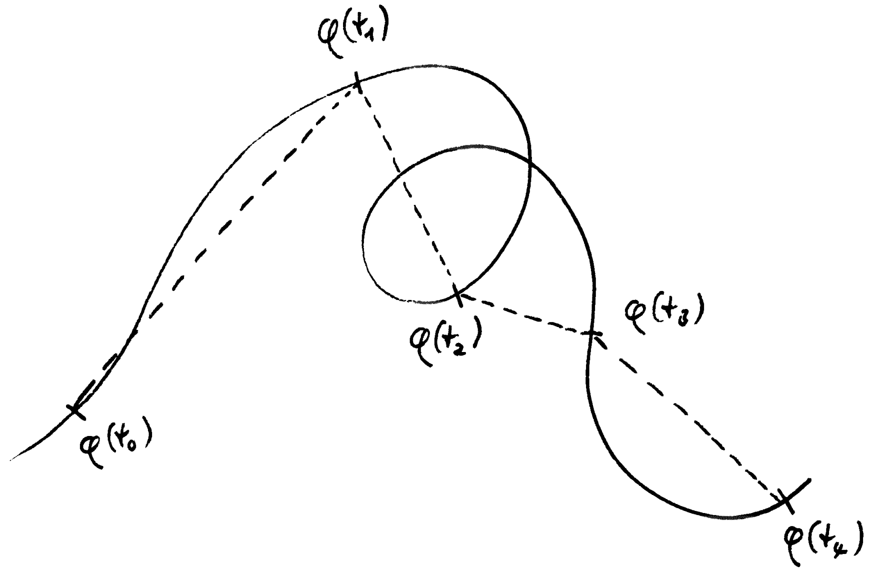
Bemerkung 7.1.2. Diese Definition liefert uns sogar einen Längenbegriff für eine Abbildung von einer beliebigen angeordneten Menge in einen metrischen Raum. Eine stetige Abbildung von einem halboffenen kompakten reellen Intervall in einen metrischen oder auch allgemeiner topologischen Raum nennen wir einen **Weg** in unserem Raum. Wir interessieren uns besonders für die Länge von Wegen im $\mathbb{R}^k$ und verstehen in diesem Zusammenhang die Länge stets in Bezug auf die euklidische Metrik.

Bemerkung 7.1.3. Offensichtlich ist unsere Länge "invariant unter Reparametrisierung", genauer haben wir für jede monotone Surjektion $\psi : J \to I$ notwendig $L(\gamma \circ \psi) = L(\gamma)$. Unsere Definition der Kreiszahl π aus 2.4.1 können wir schreiben als $\pi = L(\gamma)$ für $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, \sqrt{1 - x^2})$.

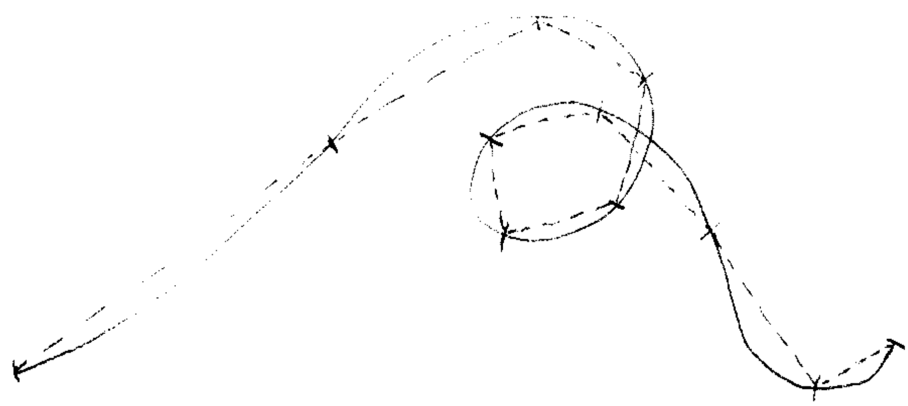
Übung 7.1.4. Gegeben $s \in \mathbb{R}$ bezeichne $(s\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Multiplikation mit s. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung von einem Intervall nach $\mathbb{R}^n$. Man zeige $L((s\cdot) \circ \gamma) = |s| L(\gamma)$ für $s \neq 0$. Ebenso zeige man $L(A \circ \gamma) = L(\gamma)$ für jede orthogonale, d.h. abstandserhaltende Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Übung 7.1.5. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. So gilt $L(\gamma) \geq \|\gamma(a) - \gamma(b)\|$ und Gleichheit haben wir genau dann, wenn γ aus dem Weg $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $t \to t\gamma(a) + (1 - t)\gamma(b)$ "entsteht durch monotone Umparametrisierung", genauer: Wenn es $\psi : [a, b] \to [0, 1]$ monoton gibt mit $0, 1 \in \psi([a, b])$ und $\gamma = \phi \circ \psi$.

Bemerkung 7.1.6. Um Bogenlängen zu berechnen benutzt man meist die Darstellung als Integral 7.4.2. Sie verwendet den Begriff der Geschwindigkeit 7.3.1 und dieser basiert auf dem Begriff des Grenzwerts für Abbildungen metrischer Räume 7.2.4, mit dem wir uns nun beschäftigen werden.



Eine Approximation eines Weges durch einen Polygonzug



Eine bessere Approximation durch einen Polygonzug

7.2 Grenzwerte für Abbildungen metrischer Räume

Definition 7.2.1. Sei $D \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen oder allgemeiner topologischen Raums. Ein Punkt $p \in X$ heißt ein **Häufungspunkt von D in X** genau dann, wenn jede Umgebung von p mit D mindestens einen von p verschiedenen Punkt gemeinsam hat.

Bemerkung 7.2.2. Ein Häufungspunkt von D in X muß also nicht zu D gehören. Mit einem Häufungspunkt eines metrischen Raums X meinen wir einen Häufungspunkt der Teilmenge $X \subset X$. Diejenigen Punkte eines metrischen Raums, die keine Häufungspunkte sind, heißen seine **isolierten Punkte**.

Übung 7.2.3. Genau dann ist p Häufungspunkt des metrischen Raums X, wenn es eine Folge x_n in $X \setminus p$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

Definition 7.2.4. Seien X und Y metrische Räume, $p \in X$ ein Häufungspunkt von X, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $y \in Y$ ein Punkt. Wir sagen, $f(x)$ **strebt gegen den Grenzwert y für $x \to p$** und schreiben

$$\lim_{x\to p} f(x) = y$$

genau dann, wenn es für jede Umgebung U von y eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U' \setminus p) \subset U$.

Bemerkung 7.2.5. Da wir p als Häufungspunkt angenommen hatten, ist mit derselben Argumentation wie in 2.1.19 unser Grenzwert eindeutig, wenn er existiert. Des weiteren folgt sofort aus den Definitionen, daß gilt $\lim_{x\to p} f(x) = y$ genau dann, wenn die Fortsetzung von f zu einer Abbildung $X \to Y$ durch die Vorschrift $f(p) = y$ stetig ist bei p. Wie in 3.3.17 folgert man daraus, daß das Anwenden stetiger Abbildungen mit Grenzwertbildung vertauscht.

Bemerkung 7.2.6. Ganz genauso wie in 7.2.4 erklärt man auch Grenzwerte für Abbildungen zwischen topologischen Räumen, wobei man allerdings um die Eindeutigkeit des Grenzwerts zu sichern zusätzlich fordern muß, daß der Wertebereich Hausdorff ist. Alle drei Grenzwertbegriffe, die wir bisher kennengelernt haben, als da wären (1) für Folgen in den erweiterten reellen Zahlen oder allgemeiner für Abbildungen zwischen Teilmengen der erweiterten reellen Zahlen, (2) für Folgen in metrischen Räumen und (3) für Abbildungen zwischen metrischen Räumen erweisen sich dann als Spezialfälle dieses Grenzwertbegriffs.

Übung 7.2.7. In der Situation der Definition 7.2.4 ist $\lim_{x\to p} f(x) = y$ gleichbedeutend zu $\lim_{x\to p} d(f(x), y) = 0$. Wir hätten uns also im Prinzip auf die Diskussion von Grenzwerten reellwertiger Abbildungen beschränken können.

Übung 7.2.8 (**Quetschlemma**). Sei X ein metrischer oder auch ein topologischer Raum und $p \in X$ ein Häufungspunkt einer Teilmenge $D \subset X$ und seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in D \setminus p$. So folgt aus $\lim_{x \to p} f(x) = b = \lim_{x \to p} h(x)$ schon $\lim_{x \to p} g(x) = b$.

7.3 Ableiten von vektorwertigen Funktionen

Definition 7.3.1. Sei $\gamma : I \to X$ eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ in einen normierten Raum X und sei $p \in I$ ein Punkt von I. Wir nennen γ **differenzierbar bei** p und bezeichnen einen Richtungsvektor als die **Ableitung** von γ an der Stelle p und notieren ihn $\gamma'(p) \in \vec{X}$ genau dann, wenn gilt

$$\gamma'(p) = \lim_{q \to p} \frac{\gamma(q) - \gamma(p)}{q - p} = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma(p + t) - \gamma(p)}{t}$$

im Sinne von 7.2.4. Stellen wir uns I als ein Zeitintervall vor, so nennen wir diese Ableitung auch die **Geschwindigkeit** von γ zum Zeitpunkt p und bezeichnen sie auch mit

$$\dot{\gamma}(p)$$

Ist γ differenzierbar an allen Stellen $p \in I$, so nennen wir γ **differenzierbar** oder genauer **differenzierbar auf** I.

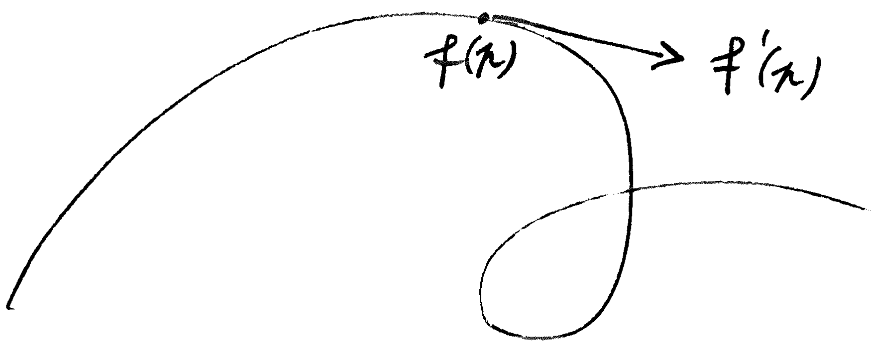
Bemerkung 7.3.2. Wir legen hier die Begrifflichkeit affiner Räume im Sinne von 6.6.2 zugrunde. Der Leser mag sich stattdessen auch Vektorräume vorstellen, aber die gewählte Allgemeinheit modelliert meines Erachtens besser unsere Anschauung bewegter Teilchen etwa im uns umgebenden Raum oder auf der Tafelebene.

Übung 7.3.3. Auch für Abbildungen halboffener Teilmengen von $\mathbb{R}$ in normierte Räume folgt aus der Differenzierbarkeit bereits die Stetigkeit.

Lemma 7.3.4. *Sei $\gamma : I \to X$ eine Abbildung von einer halboffenen Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ in einen normierten Raum X und sei $L : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung in einen weiteren normierten Raum Y. Ist γ differenzierbar an einer Stelle $p \in I$, so ist auch $L \circ \gamma$ differenzierbar bei p und es gilt*

$$(L \circ \gamma)'(p) = L(\gamma'(p))$$

Bemerkung 7.3.5. Dies Lemma zeigt insbesondere, daß unsere Ableitung sich nicht ändert, wenn wir zu einer anderen aber äquivalenten Norm auf X übergehen.



Der Geschwindigkeitsvektor ist stets tangential an die Bahnkurve, seine Länge hängt jedoch von der Geschwindigkeit der Bewegung ab, die in einem Bild schwer darzustellen ist.

Beweis. Dem Leser überlassen. Später wird sich das Lemma eh als Spezialfall der Kettenregel in mehreren Veränderlichen **??** erweisen. □

Bemerkung 7.3.6. Im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ sind unsere Definitionen identisch zu unseren bisherigen Definitionen für reellwertige Funktionen. Was im Fall $X = \mathbb{R}^m$ passiert, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 7.3.7 (Komponentenregel). *Sei $X = X_1 \times \ldots \times X_m$ ein Produkt normierter Räume, $I \subset \mathbb{R}$ eine halboffene Teilmenge, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) : I \to X$ eine Abbildung und $p \in I$ ein Punkt. Genau dann ist γ differenzierbar bei p, wenn alle γ_j differenzierbar sind bei p, und dann gilt*

$$\gamma'(p) = (\gamma_1'(p), \ldots, \gamma_m'(p))$$

Beweis. Dem Leser überlassen. □

Definition 7.3.8. Eine Teilmenge eines reellen Raums heißt **konvex** genau dann, wenn sie mit je zwei Punkten auch das ganze die beiden Punkte verbindende Geradensegment enthält.

Übung 7.3.9. Genau dann ist eine Teilmenge C eines reellen Vektorraums konvex, wenn für beliebige reelle $s, t \geq 0$ gilt $sC + tC = (s + t)C$.

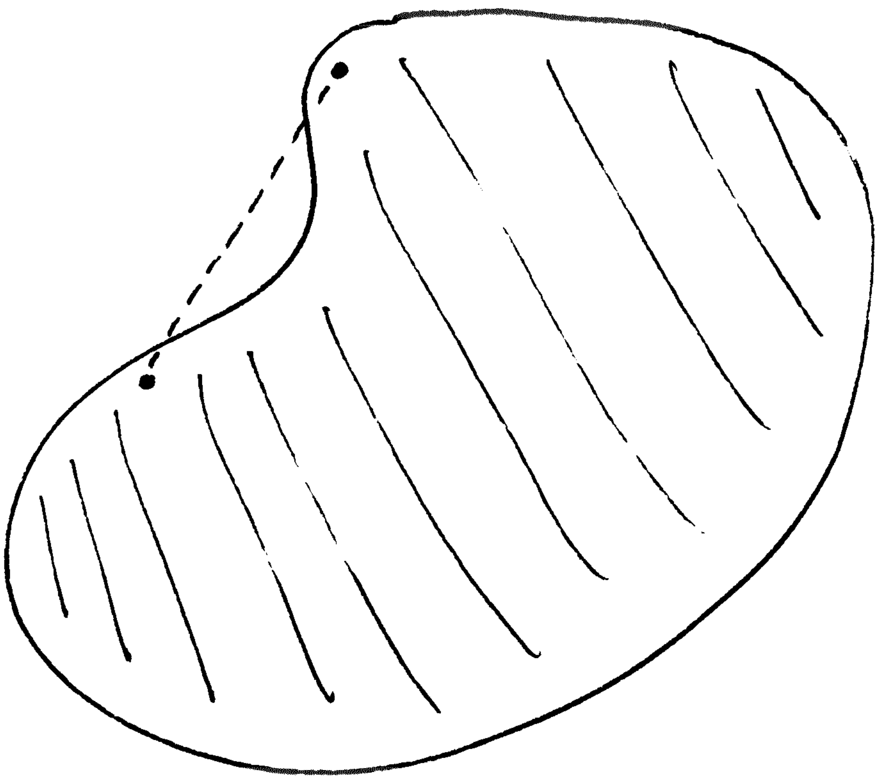
Übung 7.3.10. In einem normierten Raum ist jeder Ball konvex.

Satz 7.3.11 (Mittelwertsatz in mehreren Veränderlichen). *Seien X ein normierter Raum, $a < b$ reelle Zahlen und $\gamma : [a, b] \to X$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $C \subset \vec{X}$ eine offene oder abgeschlossene konvexe Teilmenge und gilt $\gamma'(t) \in C$ für alle $t \in [a, b]$, so folgt*

$$\gamma(b) - \gamma(a) \in (b - a)C$$

Bemerkung 7.3.12. Man folgert leicht eine Variante, die auch $a \geq b$ erlaubt: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall, $\gamma : I \to X$ eine differenzierbare Abbildung und gilt $\gamma'(t) \in C$ für alle $t \in I$, so folgt $\gamma(b) - \gamma(a) \in (b - a)C \quad \forall a, b \in I$.

Beispiel 7.3.13. Ist C eine Kreisscheibe in der Anschauungsebene mit Radius 20km um den Parkplatz eines Geländewagens, so können wir den Inhalt des Satzes interpretieren wie folgt: Fahren wir mit dem Geländewagen um 14:00 bei besagtem Parkplatz los und kurven durch die Gegend und der Tacho zeigt nie mehr als 20km/h an, so sind wir um 17:00 höchstens 60km von unserem ursprünglichen Parkplatz entfernt. Besteht C dahingegen aus einem einzigen Punkt, der sagen wir die Geschwindigkeit von 20km/h in einer festen Richtung bedeutet, so besagt unser Satz: Fahren wir konstant mit 20km/h in diese Richtung, so haben wir um 17:00 genau 60km in besagte Richtung zurückgelegt.



Eine nicht konvexe Teilmenge der Ebene

Bemerkung 7.3.14. Der Satz folgt im Fall $X = \mathbb{R}$ leicht aus unserem bisherigen Mittelwertsatz 4.3.5 und er spielt auch allgemeinen eine ähnliche Rolle, indem er es erlaubt, "den von einem Teilchen in einem Zeitintervall $[a, b]$ gewonnenen Abstand von seinem Ausgangspunkt aus der Kenntnis seiner lokalen Geschwindigkeiten abzuschätzen". Jedoch kann man für höherdimensionales X im allgemeinen keinen Zeitpunkt mehr finden, zu dem das Teilchen "mittlere Geschwindigkeit" hätte, d.h. es gibt für höherdimensionales X im allgemeinen keinen Zeitpunkt $\xi \in [a, b]$ mit $\gamma(b) - \gamma(a) = (b - a)\gamma'(\xi)$. Ich bin deshalb von der allgemein üblichen Bezeichnung als "Mittelwertsatz" nicht vollständig befriedigt. Der Fall, daß C ein offener Ball oder auch ein abgeschlossener Ball um den Ursprung ist, wird manchmal als **Schrankensatz** zitiert.

Erster Beweis. Ist C abgeschlossen, so schreiben wir C als den Schnitt der offenen konvexen Mengen $C + \mathrm{B}(0, \eta)$. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit C offen annehmen. Wir betrachten nun

$$s = \sup\{q \in [a, b] \mid \gamma(x) - \gamma(a) \in (x - a)C \quad \forall x \in [a, q]\}$$

und müssen zeigen $s = b$. Für alle $p \in [a, b]$ finden wir ja eine offene Umgebung $U_p \Subset [a, b]$ mit

$$\frac{\gamma(q) - \gamma(p)}{q - p} \in C \text{ für alle } q \in U_p \backslash p$$

Insbesondere folgern wir $s > a$ und müssen nun noch die Annahme $s < b$ zum Widerspruch führen. Aber wäre $s < b$, so fänden wir $\varepsilon > 0$ mit $[s - \varepsilon, s + \varepsilon] \subset U_s$ und die Aussage des Satzes gälte für die Einschränkung von γ auf die Intervalle $[a, s - \varepsilon], [s - \varepsilon, s]$ und $[s, s + \varepsilon]$. Daraus folgte jedoch die Aussage des Satzes für das Intervall $[a, s + \varepsilon]$ im Widerspruch zur Wahl von s. □

Zweiter Beweis. Wir beginnen wie beim ersten Beweis und finden Umgebungen U_p wie dort, die wir sogar als Schnitte mit $[a, b]$ von offenen Bällen $\mathrm{B}(p, \varepsilon_p)$ annehmen dürfen. Da $[a, b]$ kompakt ist, wird es nach 6.8.3 überdeckt durch endlich viele solcher Umgebungen U_p. Seien nun $a = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_r = b$ die Elemente einer kleinstmöglichen Menge von Punkten, die a und b enthält und für die die zugehörigen Umgebungen $[a, b]$ überdecken. Es ist dann leicht zu sehen, daß wir Zwischenpunkte $q_i \in (p_{i-1}, p_i)$ finden können derart, daß auf jedem Teilintervall der so entstehenden Unterteilung von $[a, b]$ in $2r$ Teilintervalle die Folgerung unseres Mittelwertsatzes gilt. Mithin gilt sie auch für das ganze Intervall $[a, b]$. □

Übung 7.3.15. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien $A : I \to \mathrm{M}(n \times m, \mathbb{R})$ und $B : I \to \mathrm{M}(m \times k, \mathbb{R})$ zwei differenzierbare matrixwertige Funktionen. So ist auch das Produkt $AB : t \mapsto A(t)B(t)$ differenzierbar und die Geschwindigkeit $(AB)'$ der Produktfunktion $AB : I \to \mathrm{M}(n \times k, \mathbb{R})$ wird gegeben durch die Formel

$$(AB)' = A'B + AB'$$

Übung 7.3.16. Man formuliere und zeige die Summenregel für vektorwertige Funktionen.

7.4 Die Bogenlänge als Integral

Definition 7.4.1. Gegeben ein stetig differenzierbarer Weg in einem normierten Raum erklären wir seine **absolute Geschwindigkeit** zu einem gegebenen Zeitpunkt als die Norm des Geschwindigkeitsvektors.

Satz 7.4.2 (Bogenlänge als Integral). *Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to X$ in einem normierten Raum X stimmt überein mit dem Integral über seine absolute Geschwindigkeit, in Formeln*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \ \mathrm{d}t$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\dot{\gamma}$ nach 6.5.13 gleichmäßig stetig ist auf $[a, b]$, finden wir ein $\delta > 0$ mit $\|\dot{\gamma}(x) - \dot{\gamma}(y)\| < \varepsilon$ falls $|x - y| \leq \delta$. Gegeben eine Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r = b$ einer Feinheit $\leq \delta$ folgern wir aus dem Mittelwertsatz 7.3.11 dann

$$\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) \in (a_i - a_{i-1})(\dot{\gamma}(a_i) + \mathrm{B}(0, \varepsilon))$$

und insbesondere $\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| \in (a_i - a_{i-1})\|\dot{\gamma}(a_i)\| + (a_i - a_{i-1})[-\varepsilon, \varepsilon]$. Durch Aufsummieren folgt

$$\left| \sum_{i=1}^{r} \|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| \quad - \sum_{i=1}^{r} \|\dot{\gamma}(a_i)\|(a_i - a_{i-1}) \right| \leq (b - a)\varepsilon$$

für jede Unterteilung der Feinheit $\leq \delta$. Das zeigt schon $L(\gamma) < \infty$. Nach 3.5.11 können wir weiter δ sogar so klein wählen, daß in unserer Differenz die rechte Summe zusätzlich einen Abstand $\leq \varepsilon$ hat vom Integral $\int \|\dot{\gamma}\|$ für jede Unterteilung der Feinheit $\leq \delta$. Da aber die Länge approximierender Polygonzüge beim Hinzufügen von Zwischenpunkten nur größer werden kann, finden wir eine Unterteilung von dieser Feinheit, für die die linke Summe von $L(\gamma)$ einen Abstand $\leq \varepsilon$ hat. Zusammen folgt

$$\left| L(\gamma) - \int \|\dot{\gamma}\| \right| \leq (b - a + 2)\varepsilon$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $L(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}\|$ wie gewünscht. □

Bemerkung 7.4.3. Ein Weg in einem metrischen Raum heißt **rektifizierbar** genau dann, wenn er endliche Länge hat. Ein stetig differenzierbarer Weg in einem normierten Raum ist also stets rektifizierbar.

Übung 7.4.4. Eine Abbildung von einem halboffenen reellen Intervall in einem metrischen Raum heißt **nach der Bogenlänge parametrisierend** genau dann, wenn ihre Restriktion auf jedes halboffene kompakte Teilintervall dieselbe Länge hat wie das Teilintervall selber. Man zeige, daß eine stetig differenzierbarere Abbildung in einen normierten Raum genau dann nach der Bogenlänge parametrisierend ist, wenn die zugehörige absolute Geschwindigkeit konstant Eins ist.

Übung 7.4.5. Man zeige, daß sich jede stetig differenzierbare Abbildung von einem halboffenen reellen Intervall nach $\mathbb{R}^n$ mit nirgends verschwindender Geschwindigkeit "nach der Bogenlänge parametrisieren" läßt, daß es genauer für solch eine Abbildung $\gamma : I \to X$ stets eine stetig differenzierbare Bijektion $\psi : J \xrightarrow{\sim} I$ gibt derart, daß $\gamma \circ \psi$ nach der Bogenlänge parametrisierend ist. (Das gilt auch für Wege in beliebigen normierten Vektorräumen, nur steht uns in dieser Allgemeinheit die Kettenregel noch nicht zur Verfügung.)

Übung 7.4.6. Gegeben ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \to X$ in einem normierten Raum X und eine stetige Funktion $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{R}$ definiert man das **Kurvenintegral** von f längs γ als die reelle Zahl

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Man zeige, daß das Kurvenintegral unabhängig ist von der Parametrisierung und daß es mit denselben Notationen wie oben geschrieben werden kann als der Grenzwert der Riemannsummen

$$S^r_\gamma(f) = \sum_{i=1}^{r} f(\gamma(a_i)) \, \|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\|$$

Als Kür definiere man allgemeiner das Kurvenintegral längs eines beliebigen rektifizierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to X$ in einem metrischen Raum X.

Bemerkung 7.4.7 (***Anschauung zum Kurvenintegral***). Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges ist in dieser Terminologie das Kurvenintegral der konstanten Funktion 1 längs unseres Weges. Der Schwerpunkt eines durch eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ beschriebenen homogenen gebogenen Drahtes hat als Koordinaten die Integrale der Koordinatenfunktionen x, y, z längs γ dividiert durch die Länge unseres Weges. Stellen wir uns allgemeiner eine Erdwärmeanlage vor, bei der kaltes Wasser in einem Rohr durch heißes Gestein gepumpt wird um am Ende immer noch vergleichsweise kalt aber doch etwas wärmer herauszukommen, und beschreibt γ unser Rohr und f die Wärme der Erde an den jeweiligen Stellen, so würde unser Kurvenintegral nach Einfügen der entsprechenden physikalischen Konstanten die Temperaturdifferenz zwischen eintretendem und austretendem Wasser beschreiben.

Bemerkung 7.4.8. Das hier definierte Kurvenintegral wird oft auch als Wegintegral bezeichnet. Ich will den Begriff des Wegintegrals jedoch für eine andere Konstruktion reservieren, die in **??** besprochen werden wird.

Übung 7.4.9. Gegeben eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wird die Länge ihres Graphen, d.h. die Länge des Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$ gegeben durch das Integral $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Bemerkung 7.4.10 (**Gestalt einer hängenden Kette**). Wir gehen hier davon aus, daß die Gestalt einer hängenden Kette durch den Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben wird, und wollen im Folgenden zeigen, daß diese Funktion im Wesentlichen der Cosinus hyperbolicus sein muß. Auf das Kettensegment über einem kompakten Intervall $[a,b]$ wirken die Zugkraft in der Kette von beiden Seiten sowie die Schwerkraft. Bezeichnet L_a^b die Länge des besagten Kettensegments und $v_x = (1, f'(x))$ den Tangentenvektor an unsere Kurve bei $(x, f(x))$ mit 1 als erster Komponente, so bedeutet das Kräftegleichgewicht die vektorielle Gleichung

$$0 = -c_a v_a + c_b v_b - D(0, L_a^b)$$

für geeignete positive Zahlen c_a, c_b und eine positive Konstante D, die von den physikalischen Konstanten unseres Problems abhängen. Durch Betrachtung der ersten Komponenten liefert unsere vektorielle Gleichung für das Kräftegleichgewicht erst einmal $c_a = c_b = c$ und durch Betrachtung der zweiten Komponenten dann

$$cf'(a) - cf'(b) = -DL_a^b = -D \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Folglich erfüllt unsere Funktion eine Differentialgleichung der Gestalt

$$f'(a) - f'(b) = -k \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

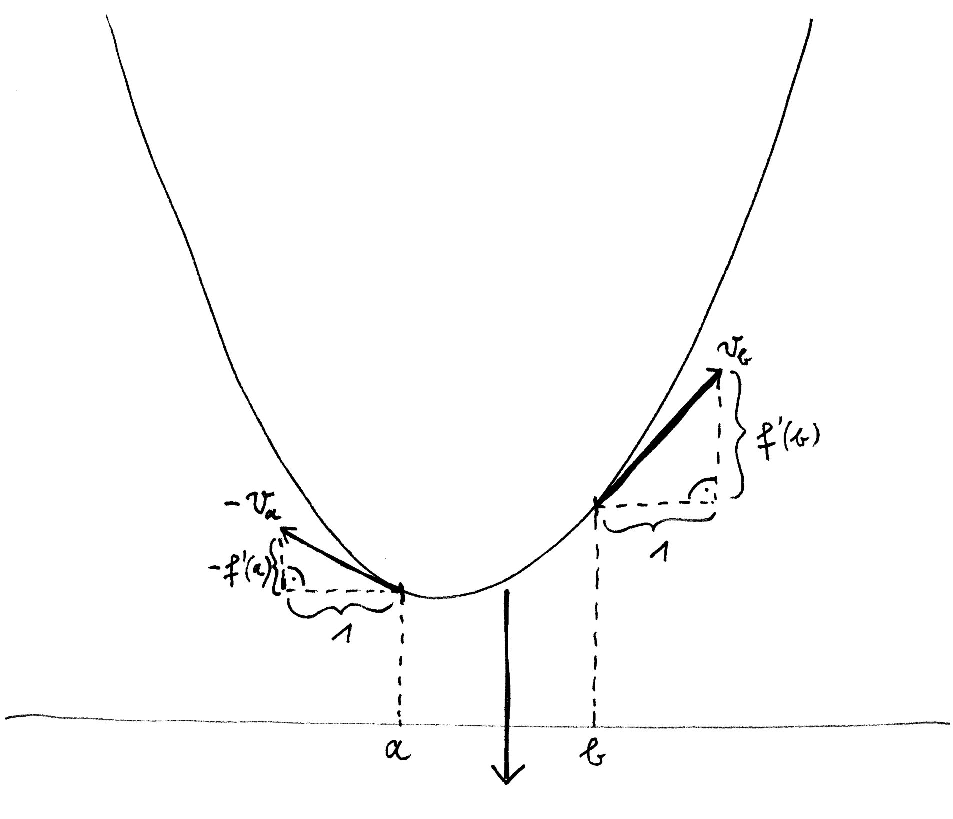


Illustration zur hängenden Kette

für positives $k = D/c$, mithin gilt $f''(x) = k\sqrt{1 + f'(x)^2}$ woraus wir folgern

$$\int_a^b \frac{f''(x)\,\mathrm{d}x}{k\sqrt{1 + f'(x)^2}} = b - a$$

und mit der Substitution $f'(x) = y$, $f''(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ weiter

$$\int_{f'(a)}^{f'(b)} \frac{\mathrm{d}y}{k\sqrt{1 + y^2}} = b - a$$

Dies Integral lösen wir durch die Substitution $y = \sinh t$, $\mathrm{d}y = \cosh t\,\mathrm{d}t$ und erhalten als Stammfunktion für den Integranden $\frac{1}{k}\operatorname{arsinh} y$. Damit ergibt sich $\frac{1}{k}\operatorname{arsinh} f'(b) = b + m$ für eine weitere Konstante m und so $f'(b) = \sinh\left(\frac{b+m}{k}\right)$ und damit schließlich

$$f(b) = k\cosh\left(\frac{b+m}{k}\right) + h$$

für geeignete Konstanten k, m und h. Hier beschreibt k, wie "steil" die Kette hängt, m ist das Negative der x-Koordinate der Stelle kleinster Höhe und h beschreibt, wie hoch unsere Kette hängt.

7.5 Definition von Sinus und Cosinus

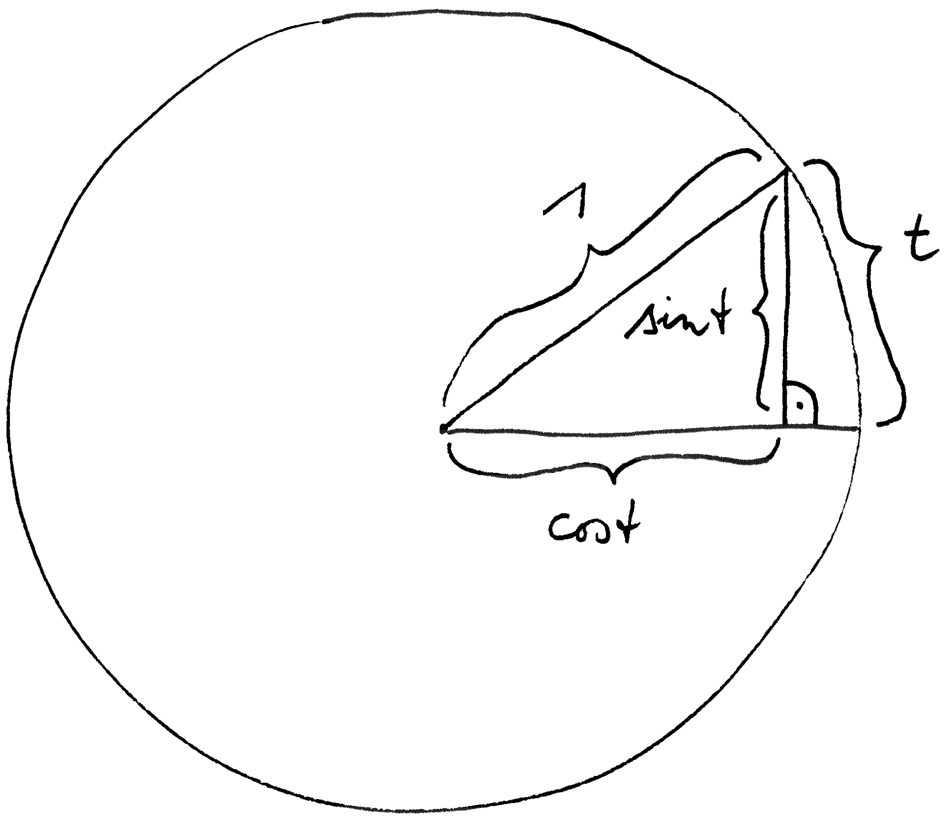
Satz 7.5.1. *Es gibt genau eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\|\gamma(t)\| = \|\dot\gamma(t)\| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $\gamma_2'(0) > 0$ und $\gamma(0) = (1, 0)$.*

Bemerkung 7.5.2. Diese Bedingungen bedeuten anschaulich, daß $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ die Bewegung eines punktförmigen Teilchens in der Ebene $\mathbb{R}^2$ beschreibt, das auf dem **Einheitskreis** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit konstanter absoluter Geschwindigkeit 1 im Gegenuhrzeigersinn umläuft und sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $(1, 0)$ befindet.

Definition 7.5.3. Wir nennen die beiden Komponenten der Abbildung γ aus dem vorhergehenden Satz 7.5.1 den **Cosinus** und den **Sinus** und notieren sie

$$\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

In Formeln sind die Funktionen Sinus und Cosinus also definiert durch die Gleichung $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit γ der eindeutig bestimmten Abbildung aus 7.5.1.



Sinus und Cosinus

Bemerkung 7.5.4. Auf Taschenrechnern muß man, um die hier definierten Funktionen sin und cos zu erhalten, meist noch spezifizieren, daß die Eingabe im Bogenmaß, auf englisch “Radians” oder abgekürzt “rad”, zu verstehen sein soll. Auf lateinisch bedeutet Sinus übrigends “Bodenwelle” und “Busen”, wortverwandt ist französisch “sein”.

Bemerkung 7.5.5. Im Vorgriff auf 10.3 erkläre ich bereits hier für $v, w \in \mathbb{R}^n$ ihr **Skalarprodukt** $\langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ durch $\langle v, w\rangle = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n$ für $v = (v_1, \ldots, v_n)$ und $w = (w_1, \ldots, w_n)$. Die anschauliche Bedeutung wird in 10.3 erläutert. Offensichtlich gilt $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$ und jedenfalls im $\mathbb{R}^2$ gilt $\langle v, w\rangle = 0$ genau dann, wenn v und w anschaulich aufeinander senkrecht stehen oder einer der beiden Vektoren Null ist.

Beweis von 7.5.1. Wir zeigen hier nur, daß eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Bedingungen des Satzes erfüllt genau dann, wenn gilt

$$\gamma(0) = (1, 0),\ \gamma_1' = -\gamma_2 \text{ und } \gamma_2' = \gamma_1.$$

Damit folgt unser Satz 7.5.1 dann aus dem allgemeinen Satz 7.5.9, den wir im Anschluß beweisen. Zunächst ist für eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Länge $\|\gamma(t)\|$ des Ortsvektors konstant genau dann, wenn ihr Quadrat $\langle\gamma(t), \gamma(t)\rangle$ konstant ist genau dann, wenn dessen Ableitung $2\langle\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle$ verschwindet genau dann, wenn zu jedem Zeitpunkt t der Geschwindigkeitsvektor $\dot\gamma(t)$ senkrecht steht auf dem Ortsvektor $\gamma(t)$. Die einzigen auf $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ senkrechten Vektoren derselben Länge wie (a, b) sind nun aber $(-b, a)$ und $(b, -a)$. Für eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sind also $\|\gamma(t)\|$ und $\|\dot\gamma(t)\|$ konstant von derselben Länge genau dann, wenn zu jedem Zeitpunkt t gilt $\dot\gamma(t) = \pm(-\gamma_2(t), \gamma_1(t))$, wobei das Vorzeichen im Prinzip noch von t abhängen kann. Fordern wir allerdings die Stetigkeit der Ableitung, so muß dieses Vorzeichen konstant sein, und unter der zusätzlichen Bedingung $\gamma(0) = (1, 0)$ ist unser Vorzeichen ein $+$ genau dann, wenn gilt $\gamma_2'(0) > 0$. □

Bemerkung 7.5.6. Man kann die Bedingungen $\gamma_1' = -\gamma_2$ und $\gamma_2' = \gamma_1$ zusammenfassen zur Matrix-Gleichung

$$\begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen nun ganz allgemein, wie man Systeme von Differentialgleichungen dieser Art löst. Genauer bestimmen wir für eine gegebene quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ alle differenzierbaren Abbildungen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\gamma'(t) = A\gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Bei dieser Schreibweise fassen wir implizit die Elemente des $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren auf, also $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$, wo der obere Index $\top$ unsere Zeilenmatrix in eine Spaltenmatrix transponiert. Man nennt so eine Gleichung auch ein **homogenes System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**. Die Spezifikation "mit konstanten Koeffizienten" grenzt unsere Gleichung ab von dem noch allgemeineren Fall, bei dem auch die Matrix A noch von t abhängt. Die Spezifikation "homogen" grenzt es ab vom allgemeineren Fall einer Gleichung der Gestalt $\gamma'(t) = A\gamma(t) + f(t)$ für eine zusätzlich gegebene vektorwertige Funktion f, den wir in 9.4.1 diskutieren. Anschaulich gesprochen geben wir uns auf dem $\mathbb{R}^n$ das sehr spezielle Vektorfeld $x \mapsto Ax$ vor und interessieren uns für die Bahnen solcher Teilchen, die bei $x \in \mathbb{R}^n$ jeweils die Geschwindigkeit Ax haben.

Bemerkung 7.5.7. Im Fall $n = 1$ hat A genau einen Eintrag $a \in \mathbb{R}$, und wir hatten schon in 4.3.8 gesehen, daß alle Lösungen der Differentialgleichung $\gamma' = a\gamma$ die Form $\gamma(t) = c\exp(at)$ haben. Im Allgemeinen definieren wir die **Exponentialfunktion auf Matrizen** durch die Vorschrift

$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots \end{array}$$

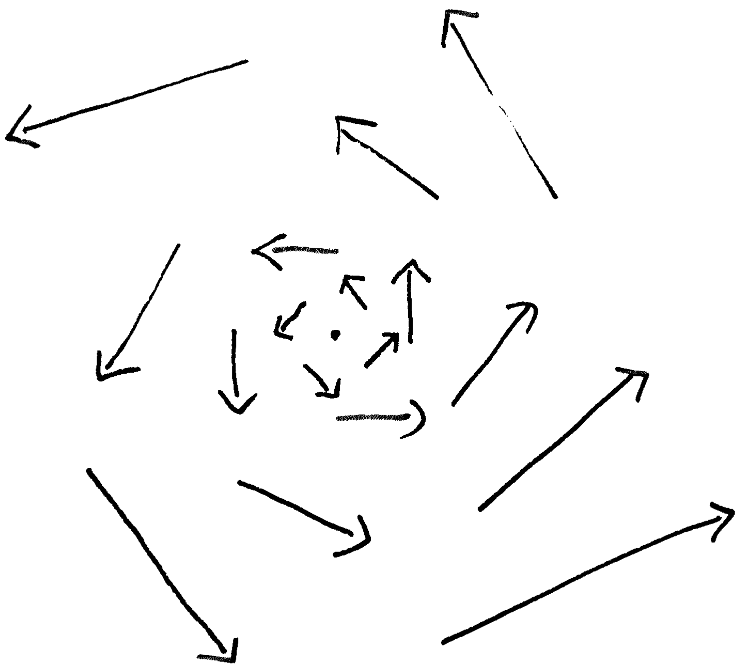
Hier bedeutet $A^0 = I$ nach unserer Konvention I.3.1.12 die Einheitsmatrix und unsere unendliche Reihe ist zu verstehen als der Grenzwert der Folge ihrer Partialsummen. Es ist nur noch zu zeigen, daß diese Grenzwerte existieren. Bezeichnen wir dazu für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $|A|$ das Maximum der Absolutbeträge ihrer Einträge, so gilt offensichtlich $|AB| \leq n|A||B|$, also $|A^k| \leq (n|A|)^k$, und dann zeigt die Konvergenz der Exponentialreihe zu $(n|A|)$ schon die absolute Konvergenz aller Reihen von Matrixeinträgen in der Exponentialreihe zu A.

Bemerkung 7.5.8. Die Stetigkeit von $\exp : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ dürfen Sie in größerer Allgemeinheit als Übung 7.6.22 selbst beweisen.

Satz 7.5.9 (Lineare Differentialgleichungen). *Ist $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix und $c \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit Anfangswert $\gamma(0) = c$ derart, daß gilt $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und diese Abbildung wird gegeben durch die Vorschrift*

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

Bemerkung 7.5.10. Es ist durchaus möglich, mithilfe dieses Satzes auch ganz konkrete Differentialgleichungen ganz konkret zu lösen. Wir gehen darauf in Abschnitt 9 näher ein.



Das ebene Vektorfeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Beweis. Wir behaupten zunächst, daß die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$, $t \mapsto \exp(tA)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $g'(t) = A \exp(tA)$. In der Tat wissen wir nach 5.1.12, daß man Potenzreihen gliedweise differenzieren darf, und unsere Formel ergibt sich, wenn wir diese Erkenntnis anwenden auf alle Einträge unserer Matrix. Nach Lemma 7.3.4 ist nun auch die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \exp(tA)c$ differenzierbar mit Ableitung $\gamma'(t) = A \exp(tA)c = A\gamma(t)$, und die Bedingung $\gamma(0) = c$ ist offensichtlich. Unsere Funktion ist damit eine Lösung der Differentialgleichung mit dem vorgegebenen Anfangswert. Ist umgekehrt $\gamma(t)$ eine beliebige Lösung unserer Differentialgleichung $\gamma' = A\gamma$, so berechnen wir die Ableitung der Funktion $t \mapsto h(t) = \exp(-tA)\gamma(t)$ mithilfe der matrixwertigen Produktregel 7.3.15 und erhalten

$$h'(t) = -A \exp(-tA)\gamma(t) + \exp(-tA)\gamma'(t) = 0$$

Die Funktion $h(t) = \exp(-tA)\gamma(t)$ ist also konstant mit Wert $\gamma(0)$ und mit dem anschließenden Lemma 7.5.11 folgt $\gamma(t) = \exp(tA)\gamma(0)$. □

Lemma 7.5.11. *Die Exponentialabbildung wirft die Null auf die Identität, und sind A, B zwei kommutierende quadratische Matrizen, in Formeln $AB = BA$, so gilt*

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$$

Bemerkung 7.5.12. Insbesondere folgt $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$, die Exponentialabbildung ist mithin eine Abbildung von der Menge aller quadratischen Matrizen in die Menge aller invertierbaren quadratischen Matrizen

$$\exp : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

Für den Beweis des Lemmas geben wir zunächst nur eine Skizze, die dann im anschließenden Abschnitt ausgemalt wird.

Beweisskizze. Genau wie bei der Diskussion des Produkts absolut konvergenter Reihen in 2.6.10 zeigt man

$$(\exp A)(\exp B) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{A^i B^j}{i!j!}$$

Dann faßt man mithilfe von 7.6.15 die Terme mit $i + j = k$ zusammen und landet wegen $AB = BA$ wie beim Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion bei der Reihe für $\exp(A + B)$. Um das alles formal zu rechtfertigen, kann man mit den einzelnen Matrixeinträgen argumentieren und sich so auf unsere Resultate über Reihen reeller Zahlen zurückziehen.

Ich will aber stattdessen diese Schwierigkeit als Motivation nutzen und gleich im nächsten Abschnitt 7.6 eine allgemeine Begrifflichkeit entwickeln, in der dieser Beweis einfach und natürlich wird und die auch darüber hinaus von Nutzen ist. □

Übung 7.5.13. Ist $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine quadratische Matrix, so bildet die Menge aller differenzierbaren Abbildungen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ einen Untervektorraum L im Vektorraum $\mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ aller Abbildungen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, den **Lösungsraum** unserer Differentialgleichung, und das Auswerten bei $t = 0$ definiert einen Vektorraumisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$, $\gamma \mapsto \gamma(0)$, den **Anfangswertisomorphismus**. Man zeige darüber hinaus, daß auch das Auswerten an jeder anderen Stelle einen Isomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ liefert.

Übung 7.5.14. Gegeben eine Diagonalmatrix $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ haben wir $\exp(A) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{a_1}, \ldots, \mathrm{e}^{a_n})$. Analoges gilt allgemeiner auch für blockdiagonale Matrizen.

7.6 Vollständigkeit und Exponential von Matrizen

Definition 7.6.1. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum heißt eine **Cauchy-Folge** genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein N gibt derart, daß gilt

$$n, m > N \;\Rightarrow\; d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Ein metrischer Raum X heißt **vollständig** genau dann, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Beispiel 7.6.2. Zum Beispiel ist $\mathbb{R}$ vollständig nach 2.2.11. Weiter ist offensichtlich jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raums vollständig. Darüber hinaus ist auch jedes endliche Produkt vollständiger metrischer Räume vollständig. Insbesondere ist der $\mathbb{R}^n$ vollständig für den Betragsabstand im Sinne von 6.2.3. Dahingegen ist $X = \mathbb{Q}$ mit dem Betragsabstand kein vollständiger metrischer Raum.

Übung 7.6.3. Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig. Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen.

Übung 7.6.4. Gegeben $b > 0$ kann jede gleichmäßig stetige Abbildung des Intervalls $[0, b)$ in einen vollständigen metrischen Raum stetig auf $[0, b]$ fortgesetzt werden.

Definition 7.6.5. Unter einem **Banach-Raum** oder genauer einem **reellen Banach-Raum** versteht man einen vollständigen normierten reellen Vektorraum. Sobald wir die komplexen Zahlen kennengelernt haben, werden wir auch und sogar überwiegend mit komplexen Banachräumen arbeiten.

Lemma 7.6.6. *Jeder endlichdimensionale normierte Vektorraum ist vollständig, in anderen Worten also ein Banachraum.*

Beweis. Wir wählen irgendeinen Vektorraumisomorphismus mit dem $\mathbb{R}^n$. Die so induzierte Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ ist äquivalent zur Maximumsnorm und liefert also dieselben Cauchyfolgen und dieselben Grenzwerte von Folgen. Die Maximumsnorm auf dem $\mathbb{R}^n$ hinwiederum führt zum Betragsabstand, und für diese Metrik wissen wir seit 7.6.3, daß sie den $\mathbb{R}^n$ zu einem vollständigen metrischen Raum macht. □

Übung 7.6.7. Seien V, W normierte Vektorräume. Ist W vollständig, so ist auch der Raum $\mathcal{B}(V, W)$ der stetigen linearen Abbildungen von V nach W aus 6.7.26 vollständig.

Definition 7.6.8. Gegeben ein normierter Vektorraum V und eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V sagt man, die Familie der v_i sei **summierbar** mit Summe $s \in V$ und schreibt

$$\sum_{i\in I} v_i = s$$

als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt

$$\sum_{i\in J} v_i \in U$$

Bemerkung 7.6.9. Man sieht leicht, daß die Summe einer summierbaren Familie stets eindeutig bestimmt ist. Dieselbe Definition trifft man allgemeiner für Hausdorff'sche topologische Vektorräume oder noch allgemeiner für abelsche Hausdorff'sche topologische Gruppen.

Übung 7.6.10. Eine abzählbare Familie ist summierbar genau dann, wenn für jede Abzählung die Folge der Partialsummen konvergiert und für je zwei Abzählungen die entsprechenden Grenzwerte übereinstimmen.

Übung 7.6.11. Gegeben ein normierter Vektorraum V und eine summierbare Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren von V und eine stetige lineare Abbildung L von V in einen weiteren normierten Vektorraum ist auch die Bildfamilie summierbar und es gilt

$$\sum_{i\in I} L(v_i) = L\left(\sum_{i\in I} v_i\right)$$

Dasselbe gilt im Übrigen für abelsche Hausdorff'sche topologische Gruppen.

Definition 7.6.12. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren in einem normierten Vektorraum heißt **absolut summierbar** genau dann, wenn die Familie ihrer Normen $(\|v_i\|)_{i \in I}$ summierbar ist.

Lemma 7.6.13. *In einem Banachraum ist jede absolut summierbare Familie summierbar und die Norm der Summe kann nach oben abgeschätzt werden durch die Summe der Normen.*

Beweis. Nach 2.5.24 sind bei einer absolut summierbaren Familie höchstens abzählbar viele Vektoren von Null verschieden, so daß wir uns auf Familien beschränken dürfen, die durch $\mathbb{N}$ indiziert sind. Sei also $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unsere Familie. Die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ bilden eine Cauchy-Folge, da für $m \geq n$ ja gilt

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} v_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|v_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|v_k\|$$

und das wird für hinreichend großes n beliebig klein. Mithin konvergiert die Folge der Partialsummen gegen einen Grenzwert s. Den Nachweis, daß dieser Grenzwert auch die Summe im Sinne der Definition 7.6.8 sein muß, überlasse ich dem Leser. □

Bemerkung 7.6.14. In 2.5.24 hatten wir gesehen, daß jede summierbare Familie reeller Zahlen absolut summierbar ist. Dasselbe gilt für summierbare Familien in endlichdimensionalen normierten Räumen. In beliebigen normierten Räumen gilt es jedoch nicht mehr, ein typisches Gegenbeispiel ist etwa 10.4.4 oder allgemeiner **??**.

Übung 7.6.15. Gegeben eine absolut summierbare Familie $(v_i)_{i \in I}$ in einem Banachraum zeige man, daß für eine beliebige Zerlegung $I = \coprod_{k \in K} I(k)$ von I in eine Vereinigung von paarweise disjunkten Teilmengen $I(k)$ gilt

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I(k)} v_i \right)$$

Definition 7.6.16. Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $A : V \to V$ eine lineare Abbildung, so definieren wir eine weitere lineare Abbildung $\exp(A) : V \to V$ als die Summe

$$\exp(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$$

Bemerkung 7.6.17. Wählen wir eine Norm auf V und versehen den Raum $\operatorname{End} V$ aller Endomorphismen von V mit der Operatornorm, so gilt offensichtlich $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ und unsere Familie ist summierbar nach 7.6.13, da sie nämlich absolut summierbar ist bezüglich dieser und dann bezüglich jeder Norm. Für eine Operatornorm wie eben erhält man zusätzlich die Abschätzung $\|\exp A\| \leq \exp \|A\|$.

Bemerkung 7.6.18. Ist allgemeiner V ein Banachraum und $A : V \to V$ eine stetige lineare Abbildung, so kann man in derselben Weise eine stetige lineare Abbildung $\exp(A) : V \to V$ erklären. Der Grenzwert ist in diesem Fall im Banachraum $\mathcal{B}(V)$ aller stetigen linearen Abbildungen von V in sich selbst aus 7.6.7 zu bilden. Die im Folgenden bewiesenen Aussagen verallgemeinern sich ohne Schwierigkeiten auf diesen Fall. Er ist für die Quantenmechanik fundamental, denn die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Systems mit Hamiltonoperator H wird beschrieben durch $\exp(\mathrm{i}\, tH)$.

Lemma 7.6.19. *Die Exponentialabbildung wirft die Null auf die Identität, und sind A, B zwei kommutierende Endomorphismen eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums, gilt also in Formeln $AB = BA$, so folgt*

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$$

Bemerkung 7.6.20. Insbesondere folgt $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$, die Exponentialabbildung ist mithin eine Abbildung von der Menge der Endomorphismen in die Menge der Automorphismen

$$\exp : \operatorname{End} V \to \operatorname{Aut} V$$

Analoges gilt mit demselben Beweis auch allgemeiner für stetige Endomorphismen von Banachräumen.

Beweis. Genau wie bei der Diskussion des Produkts absolut konvergenter Reihen in 2.6.10 zeigt man zunächst

$$(\exp A)(\exp B) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{A^i B^j}{i! j!}$$

Dann faßt man mithilfe von 7.6.15 die Terme mit $i + j = k$ zusammen und landet wegen $AB = BA$ wie beim Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion bei der Reihe für $\exp(A + B)$. □

Bemerkung 7.6.21. Es gilt auch eine koordinatenfreie Variante von 7.5.9. Ist genauer V ein Banachraum und $A : V \to V$ eine stetige lineare Abbildung und $c \in V$ ein Vektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung γ :

$\mathbb{R} \to V$ mit $\gamma(0) = c$ und $\gamma'(t) = A\gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, und diese Abbildung wird gegeben durch die Formel

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von 7.5.9. Problematisch ist nur, daß die Produktregel erst in **??** in der benötigten Allgemeinheit zur Verfügung gestellt wird.

Übung 7.6.22. Für jeden Banachraum V ist $\exp : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(V)$ stetig. Hinweis: 6.3.8.

Übung 7.6.23. Sind A, B stetige Endomorphismen von Banachräumen V, W und ist $P : W \to V$ stetig linear mit $AP = PB$, so gilt $(\exp A)P = P(\exp B)$. Ist insbesondere P invertierbar, so gilt $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$.

Übung 7.6.24. Gegeben eine Menge D und ein vollständiger metrischer Raum Y ist auch der Raum $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(D, Y)$ aller beschränkten Abbildungen von D nach Y vollständig für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz 6.3.5.

Übung 7.6.25. Gegeben ein metrischer Raum D und ein vollständiger metrischer Raum Y ist auch der Raum $\mathcal{C}^{\mathrm{b}}(D, Y)$ aller stetigen beschränkten Abbildungen von D nach Y vollständig für die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz 6.3.5. Hinweis: Man verwende 6.3.8.

Übung 7.6.26. Gegeben ein halboffenes kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ein Banachraum Y ist auch der Raum $\mathcal{C}^1(I, Y)$ aller einmal stetig differenzierbaren Abbildungen von I nach Y vollständig für die Norm $\|\gamma\|_1 = \|\gamma\| + \|\dot{\gamma}\|$ der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen und ihrer Ableitungen. Hinweis: Man verallgemeinere 6.3.8.

Übung 7.6.27. Es gibt eine **stetige Surjektion vom Einheitsintervall** $[0, 1]$ **auf das Einheitsquadrat** $[0, 1]^2$. Um diese auf den ersten Blick verblüffende Tatsache einzusehen, unterteile man das Einheitsintervall in neun gleiche Abschnitte und das Einheitsquadrat in vier gleiche Quadrate und wähle irgendeinen Weg $[0, 1] \to [0, 1]^2$, der den $2i$-ten Abschnitt in das i-te Quadrat abbildet, für irgendeine Nummerierung der vier Quadrate. Dann unterteile man die $2i$-ten Abschnitte von eben jeweils in neun gleiche Unterabschnitte und die vier Quadrate von eben jeweils in vier gleiche Unterquadrate und ändere den Weg von eben auf den $2i$-ten Abschnitten von eben so ab, daß sie immer noch im i-ten Quadrat landen und zusätzlich die $2j$-ten Unterabschnitte des $2i$-ten Abschnitts im j-ten Unterquadrat des i-ten Quadrats landen, für irgendeine Nummerierung dieser Unterquadrate. Indem man immer so weitermacht, erhält man eine gleichmäßig konvergente Folge von Abbildungen. Der Grenzwert dieser Folge ist die gesuchte Surjektion.

7.7 Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Bemerkung 7.7.1. Aus der Definition und der nachfolgenden Diskussion wissen wir bereits, daß sin und cos differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind mit $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$. Wir wissen weiter, daß gilt $\sin^2 + \cos^2 = 1$, wo wir $(\sin t)^2 = \sin^2 t$ und $(\cos t)^2 = \cos^2 t$ abgekürzt haben. Diese Abkürzungen sind auch üblich für alle anderen trigonometrischen bzw. hyperbolischen trigonometrischen Funktionen, denn das spart Klammern und die alternative mögliche Bedeutung $\sin^2 t = \sin(\sin t)$ etc. kommt nie vor.

Satz 7.7.2 (Reihenentwicklung von Sinus und Cosinus). *Unsere Funktionen* cos *und* sin *werden dargestellt durch die absolut konvergenten Reihen*

$$\begin{array}{rcl} \cos t & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} & = & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \\ \sin t & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & = & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \end{array}$$

und für alle $t \in \mathbb{R}$ *gilt* $\cos(-t) = \cos t$ *sowie* $\sin(-t) = -\sin t$.

Beweis. Die Reihen ergeben sich aus der Darstellung

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der zweite Punkt folgt aus den Reihendarstellungen. □

Lemma 7.7.3. *Für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Beweis. Wir müssen nur noch die Gleichheit der zweiten Spalten zeigen, also

$$\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das folgt aber mit 7.5.9 daraus, daß das Paar von Funktionen $(-\sin t, \cos t)$ auch unserem System von Differentialgleichungen 7.5.6 genügt und darüber hinaus den richtigen Anfangswert hat. □

Proposition 7.7.4 (Additionsformeln). *Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\begin{array}{rcccl} \cos(a+b) & = & \cos a \cos b & - & \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \cos a \sin b & + & \sin a \cos b \end{array}$$

Beweis. Das folgt mit 7.7.3 aus der Matrixgleichung

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -(a+b) \\ (a+b) & 0 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

die wir ihrerseits aus 7.6.19 folgern. □

Satz 7.7.5 (Nullstellen von Sinus und Cosinus). *1. Die Nullstellen des Sinus sind genau die ganzzahligen Vielfachen von π, in Formeln $\{t \in \mathbb{R} \mid \sin t = 0\} = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.*

2. Die Nullstellen des Cosinus sind genau die halbzahligen Vielfachen von π, in Formeln $\{t \in \mathbb{R} \mid \cos t = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis. Zunächst einmal zeigen wir durch Widerspruch, daß der Cosinus überhaupt positive Nullstellen hat. Sicher gilt $\cos(0) = 1 > 0$. Hätte der Cosinus keine positive Nullstelle, so müßte $\cos t$ positiv bleiben für alle $t \geq 0$. Dann müßte nach 4.3.6 also der Sinus streng monoton wachsen auf $[0, \infty)$ und damit müßte

$$\int_0^x \sin t \;\, \mathrm{d}t = \cos 0 - \cos x$$

für $x \to \infty$ über alle Grenzen wachsen. Das ist aber unmöglich, denn es gilt $\cos^2 \leq \cos^2 + \sin^2 = 1$. Folglich hat der Cosinus eine kleinste positive Nullstelle

$$a = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \cos t = 0\}$$

und wir zeigen als nächstes, daß gilt $a = \pi/2$. Der Cosinus ist natürlich positiv auf $(-a, a)$, folglich ist der Sinus streng monoton auf $[-a, a]$ und aus $\cos^2 + \sin^2 = 1$ und $\sin'(0) > 0$ folgt $\sin(-a) = -1$, $\sin(a) = 1$. Der Sinus definiert also eine Bijektion

$$\sin : [-a, a] \xrightarrow{\sim} [-1, 1]$$

Da sich die Länge eines Weges nach 7.1.3 unter surjektiver monotoner Umparametrisierung nicht ändert, ist nun unser in 2.4.1 definiertes π auch die Länge des Weges

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [-a, a] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\sin t, \cos t) \end{array}$$

und wir erhalten

$$\pi = L(\gamma) = \int_{-a}^{a} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \;\, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} 1 \, \mathrm{d}t = 2a$$

Damit ist in der Tat $\pi/2$ die kleinste positive Nullstelle des Cosinus und wir erhalten gleichzeitig $\sin(\pi/2) = 1$. Mit den Additionstheoremen folgern wir

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$, insbesondere ergibt sich $\sin(x+\pi) = -\sin x$ und $\cos(x + \pi) = -\cos x$ und damit $\sin(n\pi) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Hätte der Sinus noch eine weitere Nullstelle, so fänden wir mithilfe der Formel $\sin(x + \pi) = -\sin x$ auch eine Nullstelle des Sinus in $(0, \pi)$ und damit eine Nullstelle des Cosinus in $(-\pi/2, \pi/2)$. Da gilt $\cos t = \cos(-t)$ hätten wir dann sogar eine Nullstelle des Cosinus in $[0, \pi/2)$, und das ist unmöglich. Also haben der Sinus und dann auch der Cosinus genau die im Satz behaupteten Nullstellen. □

Satz 7.7.6. *Die Kreiszahl π ist nicht rational, in Formeln $\pi \notin \mathbb{Q}$.*

Bemerkung 7.7.7. Das wurde bereits 1766 von Johann Heinrich Lambert gezeigt. Der Beweis der Transzendenz von π ist schwieriger. Der hier gegebene Beweis der Irrationalität wirkt auf mich wie Zauberei. Ich folge der Darstellung von Stewart [Ste89].

Beweis. Man betrachte für reelles $\alpha \neq 0$ und natürliches n das Integral

$$I_n = I_n(\alpha) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \cos(\alpha x) dx$$

Partielles Integrieren liefert $\alpha^2 I_n = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}$ für $n \geq 2$. Vollständige Induktion zeigt dann

$$\alpha^{2n+1} I_n = n!(P_n(\alpha) \sin \alpha + Q_n(\alpha) \cos \alpha)$$

für $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ Polynome vom Grad $\leq 2n$. Wäre nun $\pi = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und setzen wir oben $\alpha = \pi$ ein, so ergäbe sich, daß

$$\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n(\pi)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl sein muß im Widerspruch dazu, daß dieser Ausdruck für alle n von Null verschieden ist und für $n \to \infty$ gegen Null strebt. □

Übung 7.7.8. Man führe die partiellen Integrationen des vorhergehenden Beweises aus und prüfe die Induktionsbasis, als da heißt die Fälle $n = 0, 1$.

Satz 7.7.9 (Fläche des Einheitskreises). *Es gilt $\pi/2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\ \mathrm{d}t$, anschaulich gesprochen ist also π die Fläche des Einheitskreises.*

Beweis. Wir substituieren $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x \ \mathrm{d}x$ und erhalten

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \ \mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \ \mathrm{d}x$$

Mithilfe der Formel $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, die ihrerseits aus den Additionsformel folgt, ergibt sich unser Integral mühelos zu

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \qquad \square$$

Definition 7.7.10. Der Sinus wächst streng monoton auf $[-\pi/2, \pi/2]$ und definiert folglich eine Bijektion $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, deren Umkehrabbildung man auch den **Arcussinus** nennt und notiert als

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

Bemerkung 7.7.11. Die Bezeichnung "arcussinus" kommt von lateinisch "arcus" für "Bogen". In der Tat bedeutet $\arcsin b$ für $b \in [0, 1]$ die Länge des Kreisbogens, der vom Punkt $(1, 0)$ bis zum Punkt $(\sqrt{1-b^2}, b)$ der Höhe b auf dem Einheitskreis reicht, wie der Leser zur Übung nachrechnen mag. Der Arcussinus ist nach 4.2.9 differenzierbar auf $(-1, 1)$ und seine Ableitung ergibt sich mit unserer Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion zu

$$\begin{array}{rcl} \arcsin'(x) & = & 1/(\cos(\arcsin x)) \\ & = & 1/\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} \\ & = & 1/\sqrt{1-x^2} \end{array}$$

Damit ergibt sich die Reihenentwicklung

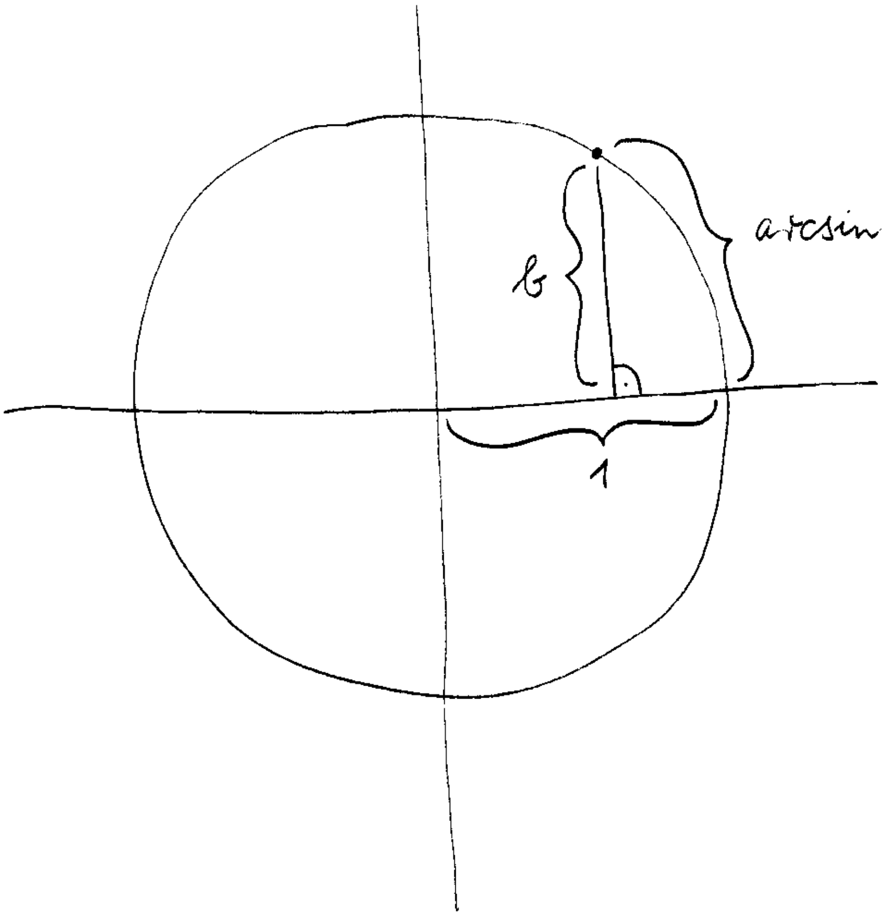
$$\arcsin(x) = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

In der Tat gilt $\arcsin(x) = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} \ \mathrm{d}t$, und nach der binomischen Reihe haben wir

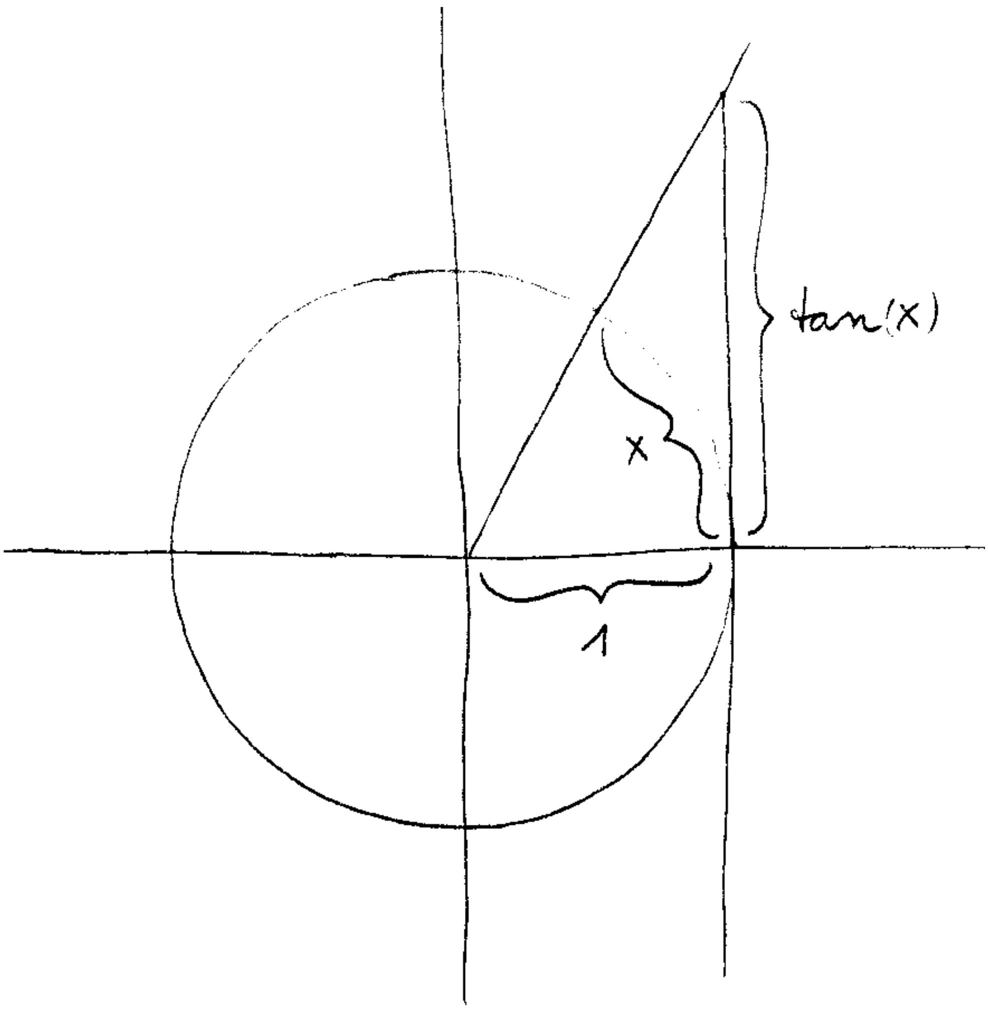
$$(1-t^2)^{-(1/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-t^2)^k = 1 + \frac{1}{2}\, t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\, t^4 + \dots$$

Definition 7.7.12. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ definieren wir den **Tangens** von x durch

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



Der Arcussinus



Der Tangens

Bemerkung 7.7.13. Anschaulich bedeutet $\tan(x)$ für $x \in (0, \pi/2)$ die Höhe, in der der Strahl durch den Nullpunkt und den Punkt des Einheitskreises, der mit dem Punkt $(1, 0)$ ein Kreissegment der Länge x begrenzt, die Tangente an unseren Einheitskreis im Punkt $(1, 0)$ trifft. Man benutzt auch den **Cotangens** $\cot(x) = \cos(x)/\sin(x)$ und eher selten den **Secans** $\sec(x) = 1/\cos(x)$ und **Cosecans** $\operatorname{cosec}(x) = 1/\sin(x)$.

Bemerkung 7.7.14. Die Ableitung des Tangens ist $\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$, insbesondere ist der Tangens streng monoton wachsend auf $(-\pi/2, \pi/2)$. Da er an den Grenzen sogar gegen $\pm\infty$ strebt, liefert der Tangens eine Bijektion $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, und wir können die Umkehrfunktion **Arcustangens**

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

betrachten. Die Ableitung von arctan ergibt sich mit 4.2.9 zu

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$

Damit erhalten wir durch gliedweises Integrieren der geometrischen Reihe für den Arcustangens für $|t| < 1$ die Reihenentwicklung

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \dots$$

und mit dem Abel'schen Grenzwertsatz ergibt sich

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

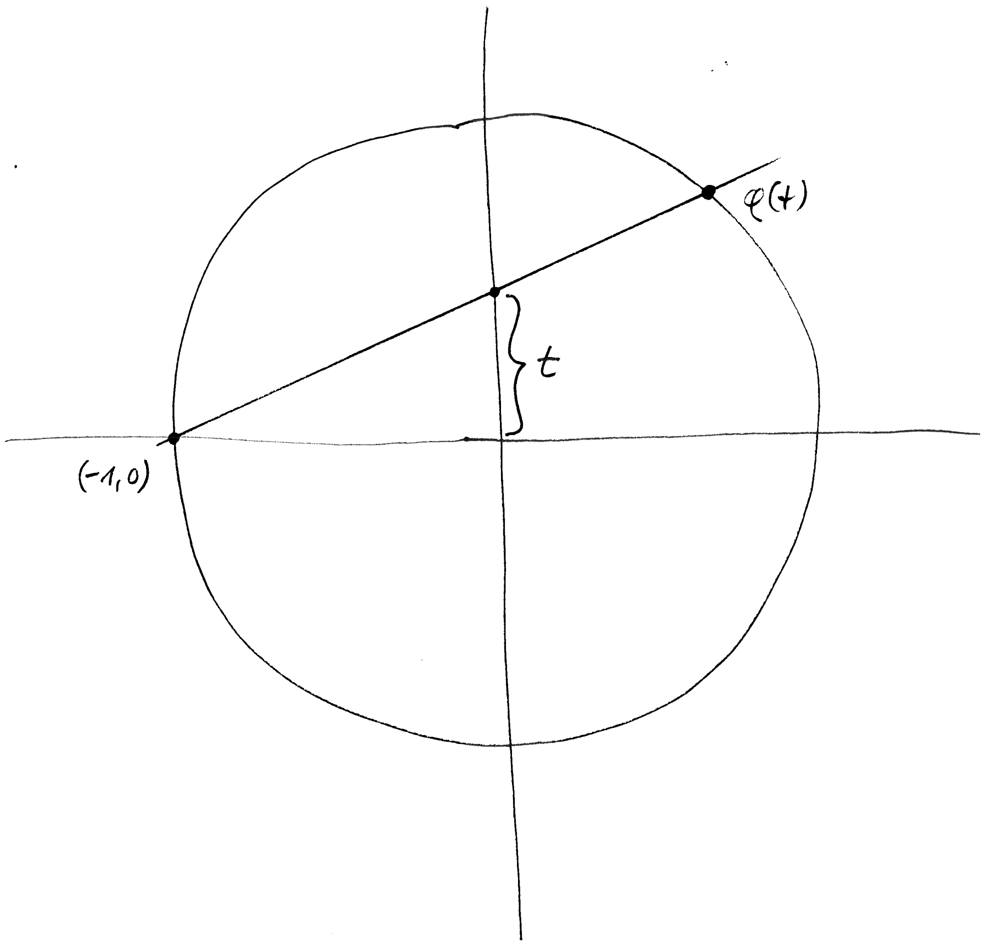
Außerdem erhalten wir so auch die bemerkenswerte Formel

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} \frac{1}{1 + t^2} \, \mathrm{d}t = \pi$$

Übung 7.7.15. Sei $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis. Wir konstruieren eine Bijektion $\gamma : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus (-1, 0)$, indem wir jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt der Gerade durch $(-1, 0)$ und $(0, t)$ mit $S^1 \setminus (-1, 0)$ zuordnen. Man prüfe, daß diese Abbildung gegeben wird durch

$$\gamma(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

Man prüfe $\|\dot{\gamma}(t)\| = 2/(1 + t^2)$ und interpretiere die vorstehende bemerkenswerte Formel. Der Punkt $(\cos\tau, \sin\tau)$ für $\tau \in (-\pi, \pi)$ wird hierbei übrigends parametrisiert durch $t = \tan(\tau/2)$, wie man durch Rechnung oder elementargeometrische Überlegungen prüft. Man beachte auch die Ähnlichkeit zur Parametrisierung der Hyperbel 4.7.6.



Die Abbildung γ aus 7.7.15

Bemerkung 7.7.16. Die Abbildung γ aus der vorstehenden Übung liefert im Übrigen auch eine Bijektion von $\mathbb{Q}$ auf die Punkte von $S^1\backslash(-1,0)$ mit rationalen Koordinaten. Diese Bijektion ist äußerst hilfreich bei der Bestimmung aller **phythagoreischen Zahlentripel**, d.h. aller Tripel a, b, c von natürlichen Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$. Die Abbildung γ aus der vorstehenden Übung liefert allgemeiner sogar für jeden Körper k einer von Zwei verschiedenen Charakteristik eine Bijektion von k auf das Komplement des Punktes $(-1, 0)$ in der Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ in der Ebene $k^2 = k \times k$. In der algebraischen Geometrie können Sie dann lernen, wie man das zu einer Bijektion von $\mathbb{P}^1 k$ mit der Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^2 k$ erweitert, die durch die homogenisierte Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ definiert wird.

Übung 7.7.17. Mithilfe der Relation $\tan(\pi/6) = 1/2$ berechne man π auf drei sichere Stellen hinter dem Komma. (Es gibt wesentlich effizientere Verfahren zur Berechnung von π, vergleiche [Cou71].)

Übung 7.7.18. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber ihre Ableitung ist nicht stetig beim Nullpunkt.

Übung 7.7.19. Man finde Stammfunktionen zu den Kehrwerten quadratischer Polynome, also zu Funktionen der Gestalt $x \mapsto (x^2 + ax + b)^{-1}$. Hinweis: Hat das fragliche quadratische Polynom zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda \neq \mu$, so kann man unsere Funktion in der Gestalt $\alpha/(x - \lambda) + \beta/(x - \mu)$ schreiben. Sonst kann man sie in die Form $((x + a/2)^2 + d)^{-1}$ bringen mit $d \geq 0$ und erinnere sich an $\arctan'(t) = 1/(1 + t^2)$.

Übung 7.7.20. Man finde eine Stammfunktion für den Arcustangens. Hinweis: Man wende auf das Produkt $1 \cdot \arctan$ partielle Integration an.

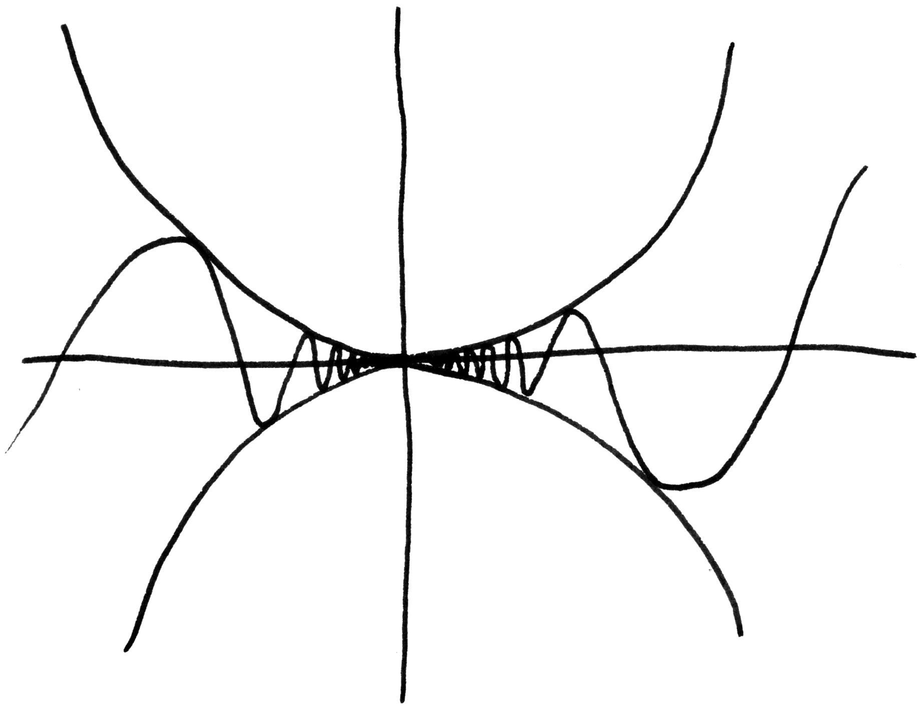


Illustration zu 7.7.18. Der Graph der Funktion ist zwischen zwei parabolischen Backen eingezwängt und hat deshalb am Ursprung Null Grenzwert der Sekantensteigungen, wird aber nah vom Ursprung beliebig steil.

8 Komplexe Zahlen mit Anwendungen

Manche Probleme der Analysis werden einfacher, wenn man sie im Rahmen der komplexen Zahlen behandelt. Die abschreckenden Bezeichnungen "komplexe Zahlen" oder auch "imaginäre Zahlen" für diesen ebenso einfachen wie konkreten Körper haben historische Gründe: Als man in Italien bemerkte, daß man polynomiale Gleichungen der Ordnungen drei und vier lösen kann, wenn man so tut, als ob man aus -1 die Wurzel ziehen könnte, gab es noch keine Mengenlehre und erst recht nicht den abstrakten Begriff eines Körpers I.3.3.1. Das Rechnen mit Zahlen, die keine konkreten Interpretationen als Länge oder Guthaben oder zumindest als Schulden hatten, schien eine "imaginäre" Angelegenheit, ein bloßer Trick, um zu reellen Lösungen reeller Gleichungen zu kommen. In diesem Abschnitt werden wir zunächst die komplexen Zahlen einführen und sie dann benutzen, um gebrochen rationale Funktionen zu integrieren und lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Die zweite Anwendung braucht zusätzliche Hilfsmittel aus der linearen Algebra, die wir als gegeben hinnehmen werden.

8.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Definition 8.1.1. Bezeichne $\mathbb{C}$ die Menge aller reellen 2×2-Matrizen der Gestalt

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$$

Das sind genau die Matrizen zu Drehstreckungen der Ebene. Die Addition und Multiplikation von Matrizen induziert offensichtlich eine Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$, man prüft mühelos die Körperaxiome I.3.3.1 und erhält so den Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen**. Früher schrieb man "complex", deshalb die Bezeichnung $\mathbb{C}$.

Bemerkung 8.1.2. Ich hoffe, Sie werden bald merken, daß viele Fragestellungen sich bei Verwendung dieser sogenannt komplexen Zahlen sehr viel einfacher lösen lassen, und daß sie auch der Anschauung ebenso zugänglich sind wie die reellen Zahlen. Als $\mathbb{R}$-Vektorraum hat $\mathbb{C}$ eine Basis bestehend aus den zwei Vektoren

$$1_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathrm{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix i ist die Matrix einer Drehung um einen rechten Winkel und man prüft sofort $\mathrm{i}^2 = -1_{\mathbb{C}}$. Unser i ist also eine "Wurzel aus -1", und weil es so eine Wurzel in den reellen Zahlen nicht geben kann, notiert man sie i wie "imaginär". Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ läßt sich eindeutig schreiben in der Form $z = a1_{\mathbb{C}} + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wir kürzen ab zu $z = a + b\,\mathrm{i}$ und fassen jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ auf als die komplexe Zahl $a = a + 0\mathrm{i}$. Die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ erhalten in dieser Notation die Gestalt

$$\begin{array}{rcl} (a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) & = & (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i} \\ (a + b\,\mathrm{i})(c + d\,\mathrm{i}) & = & (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i} \end{array}$$

Natürlich kann man den Körper der komplexen Zahlen auch direkt durch diese Rechenregeln einführen. So gewinnt man an Unabhängigkeit von der linearen Algebra, verliert aber an Anschauung und muß die Körperaxiome ohne Einsicht nachrechnen.

Bemerkung 8.1.3. Es ist üblich, komplexe Zahlen mit z zu bezeichnen und als $z = x + y\,\mathrm{i}$ zu schreiben mit $x, y \in \mathbb{R}$. Man kann sich die komplexe Zahl $z = x + y\,\mathrm{i}$ vorstellen als den Punkt (x, y) der Ebene $\mathbb{R}^2$. Unter dieser Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ bedeutet für $w \in \mathbb{C}$ die Additionsabbildung $(w+) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto w + z$ geometrisch die Verschiebung um den Vektor w, und die Multiplikationsabbildung $(w\cdot) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto wz$ bedeutet diejenige Drehstreckung, die $(1, 0)$ in w überführt.

Definition 8.1.4. Für eine komplexe Zahl $z = x + y\,\mathrm{i}$ nennt man x ihren **Realteil** $x = \operatorname{Re} z$ und y ihren **Imaginärteil** $y = \operatorname{Im} z$. Wir haben damit zwei Funktionen

$$\operatorname{Re}, \operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

definiert und es gilt $z = \operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man definiert weiter die **Norm** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Bemerkung 8.1.5. Offensichtlich gilt

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

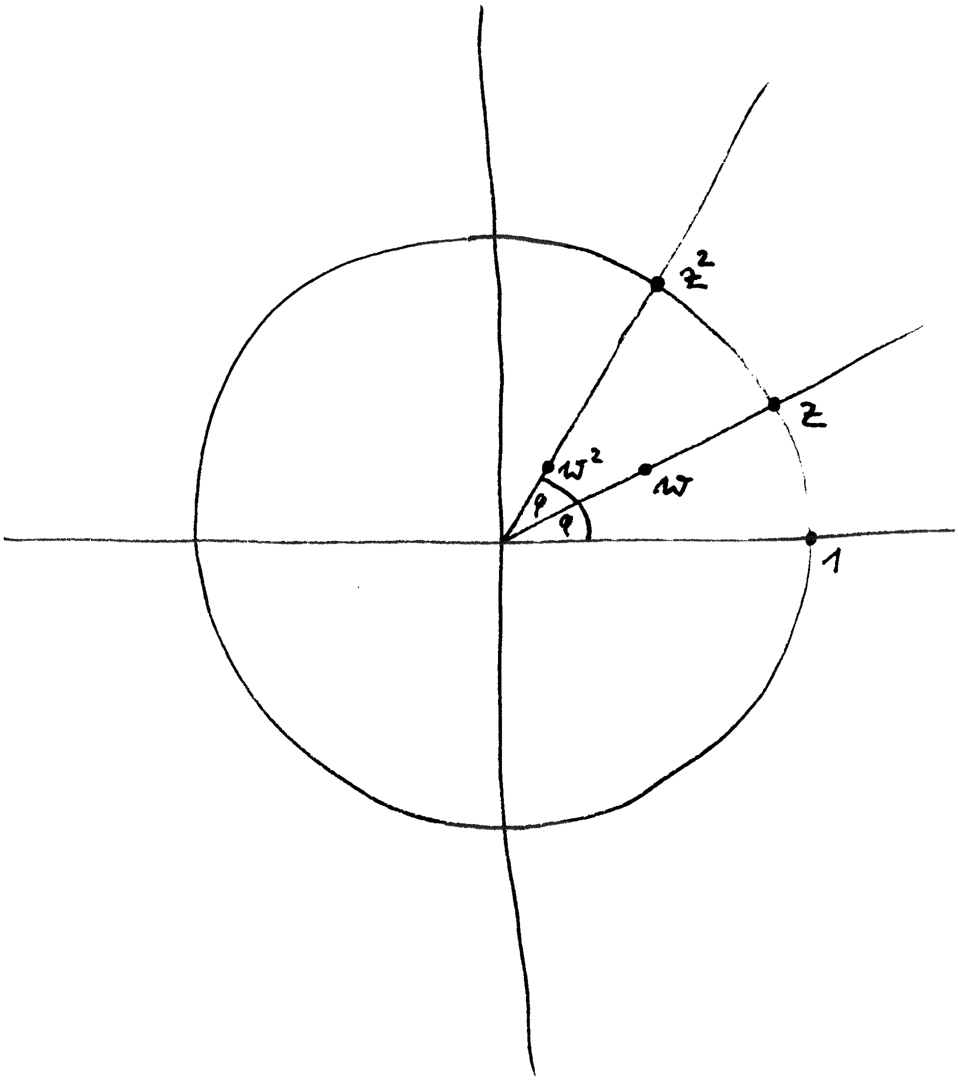
Da in einem Dreieck eine einzelne Seite nicht länger sein kann als die beiden anderen zusammengenommen, gilt weiter die **Dreiecksungleichung**

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Da offensichtlich auch gilt $|\lambda z| = |\lambda||z|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist unsere Norm $z \mapsto |z|$ im Sinne von 6.7.2 eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$. Die durch diese Norm definierte Metrik nehmen wir als unsere Standardmetrik auf $\mathbb{C}$.

Bemerkung 8.1.6. Stellen wir uns $|z|$ vor als den Streckfaktor der Drehstreckung $(z\cdot)$, so wird anschaulich klar, daß sogar für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten muß

$$|zw| = |z||w|$$



Anschauung für das Quadrieren komplexer Zahlen

Besonders bequem rechnet man diese Formel nach, indem man zunächst für $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die **konjugierte komplexe Zahl** $\bar{z} = x - y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ einführt und die Formeln

$$\begin{array}{rcl} \overline{z+w} & = & \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z \cdot w} & = & \bar{z} \cdot \bar{w} \\ |z|^2 & = & z\bar{z} \end{array}$$

prüft. Dann rechnet man einfach

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$

In der Terminologie aus I.3.3.8 ist $z \mapsto \bar{z}$ ein Körperisomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und es gilt offensichtlich $\bar{\bar{z}} = z$.

Bemerkung 8.1.7. Wir können den Realteil und den Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ mithilfe der konjugierten komplexen Zahl ausdrücken als

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2\,\mathrm{i}}$$

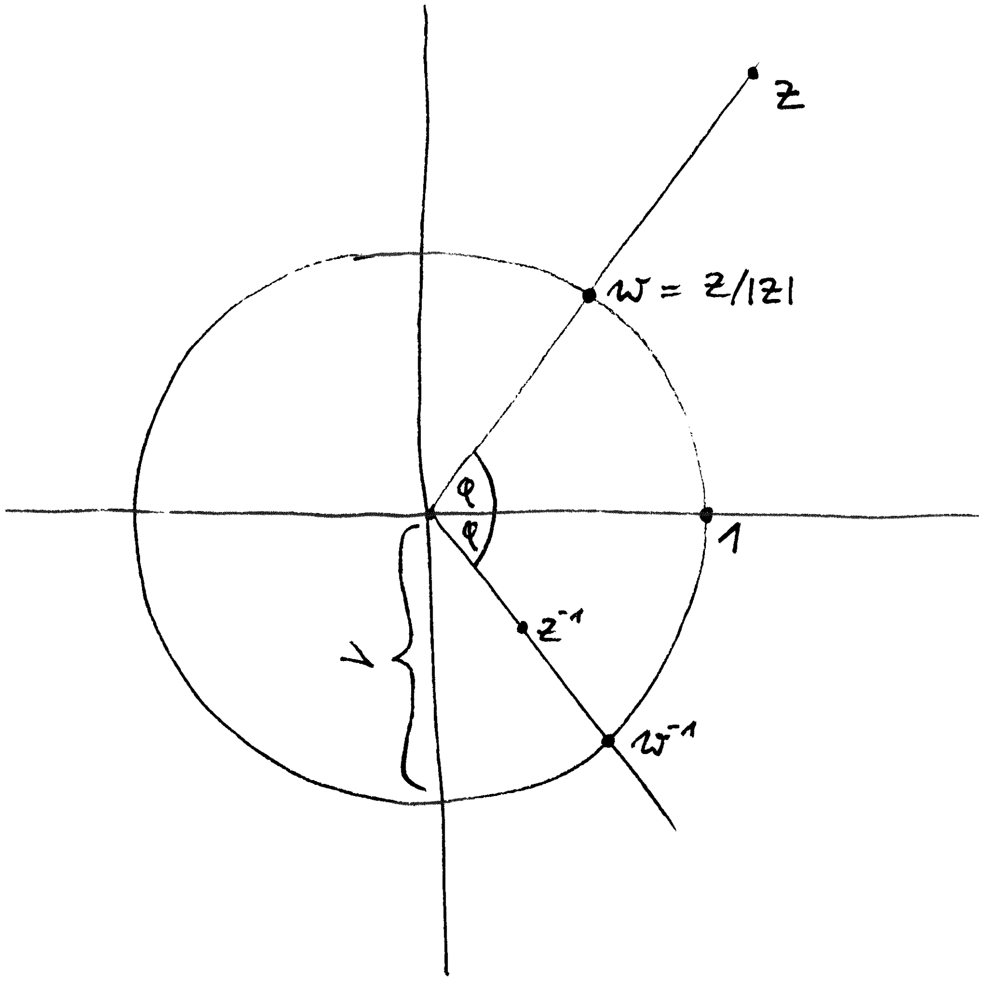
Weiter gilt offensichtlich $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, und für komplexe Zahlen z der Norm $|z| = 1$ ist die konjugierte komplexe Zahl genau das Inverse, in Formeln $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = z^{-1}$. Anschaulich kann man das Bilden des Inversen interpretieren als die "Spiegelung" oder präziser **Inversion** am Einheitskreis $z \mapsto z/|z|^2$ gefolgt von der Spiegelung an der reellen Achse $z \mapsto \bar{z}$.

Übung 8.1.8. Man beschreibe die Abbildung $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ anschaulich als Produkt einer Inversion an einem geeigneten Kreis gefolgt von einer Spiegelung an einer geeigneten Geraden.

Übung 8.1.9. Wir versehen $\mathbb{C}$ mit der Metrik $d(z, w) = |z - w|$. Man zeige, daß dann die Addition und die Multiplikation stetige Abbildungen $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind und das Bilden des Inversen eine stetige Abbildung $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Übung 8.1.10. Man zeige für komplexwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen die Summenregel $(f+g)' = f'+g'$, die Produktregel $(fg)' = f'g+fg'$ und die Regel für die Ableitung des Kehrwerts $(1/f)' = -f'/f^2$. In 8.6.7 und 8.6.13 werden wir das sogar für komplexwertige Funktionen einer komplexen Veränderlichen zeigen.

Übung 8.1.11. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}\backslash\lambda \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (t - \lambda)^m$ differenzierbar mit Ableitung $t \mapsto m(t - \lambda)^{m-1}$. Später wird das mit 8.6.10 und 8.6.12 ganz schnell gehen.



Anschauung für das Invertieren komplexer Zahlen

8.2 Die Exponentialfunktion im Komplexen

Definition 8.2.1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ definieren wir eine komplexe Zahl $\exp(z) \in \mathbb{C}$ durch die Vorschrift

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

In der Tat gilt $\mathrm{Re}(z^k), \mathrm{Im}(z^k) \leq |z^k| = |z|^k$, mithin konvergiert diese Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut in Real- und Imaginärteil und wir erhalten folglich eine Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die **komplexe Exponentialfunktion**.

Bemerkung 8.2.2. Man prüft genau wie in 7.6.19 die Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = (\exp z)(\exp w)$$

und erhält insbesondere $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. In der Sprache der Algebra ausgedrückt ist die Exponentialabbildung also ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der komplexen Zahlen in die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen komplexen Zahlen. Wie im Reellen 3.1.13 zeigt man auch die Stetigkeit von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zunächst im Nullpunkt über die Reihenentwicklung und dann an jeder Stelle $z \in \mathbb{C}$ mithilfe der Funktionalgleichung. Zusätzlich folgern wir aus der Vertauschbarkeit der komplexen Konjugation mit Summe, Produkt und Grenzwertbildung auch noch

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Für den Betrag von $\exp z$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |\exp z|^2 &= \exp z \, \overline{\exp z} \\ &= \exp z \, \exp \overline{z} \\ &= \exp(z + \overline{z}) \\ &= \exp(2 \, \mathrm{Re} \, z), \end{aligned}$$

folglich gilt $|\exp z| = \exp(\mathrm{Re}\, z)$ und speziell $|\exp(\mathrm{i}\, t)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

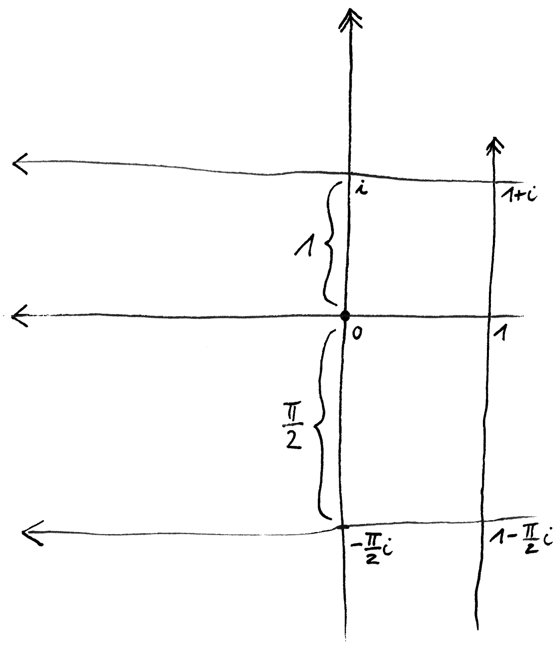
Bemerkung 8.2.3. Für eine reelle Zahl $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir wieder

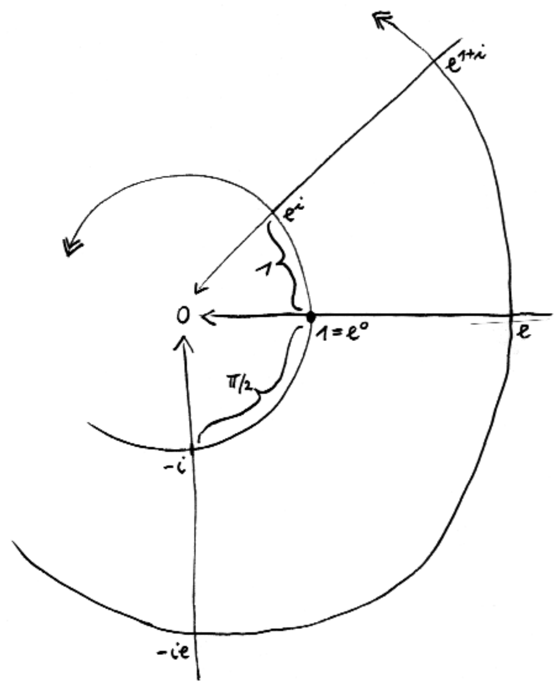
$$a^z = \exp(z \log a)$$

und schreiben insbesondere auch $\exp z = \mathrm{e}^z$ für $z \in \mathbb{C}$. Aus der Beschreibung von sin, cos und exp durch Potenzreihen oder auch aus 7.7.3 folgt die **Euler'sche Formel**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$$

Anschaulich beschreibt die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(\mathrm{i}\, t)$ also das Auf-





Die Bilder ausgewählter Teile der komplexen Zahlenebene unter der komplexen Exponentialfunktion wickeln der reellen Zahlengerade auf den Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Insbesondere erfüllen unsere Hauptdarsteller die bemerkenswerte Identität

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$$

Aus $\exp(-\mathrm{i}\,t) = \overline{\exp(\mathrm{i}\,t)}$ folgern wir umgekehrt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Formeln

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2\,\mathrm{i}}$$

Benutzen wir diese Formeln, um den Sinus und Cosinus zu Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auszudehnen, und dehnen wir ihre hyperbolischen Analoga in derselben Weise zu Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aus, so können wir die formale Analogie zwischen diesen Funktionen präzisieren zu den Formeln $\cos z = \cosh \mathrm{i}\,z$ und $\sin z = -\mathrm{i} \sinh \mathrm{i}\,z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 8.2.4. Nach 8.2.3 induziert die Exponentialfunktion eine Surjektion der imaginären Geraden $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ auf den Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Daß die Exponentialfunktion eine Bijektion $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$ induziert wissen wir bereits aus 3.2.10. Da nun jede von Null verschiedene komplexe Zahl w sich schreiben läßt als Produkt $w = (w/|w|)|w|$ mit $w/|w|$ auf dem Einheitskreis und $|w|$ positiv, ist die Exponentialfunktion nach der Funktionalgleichung sogar ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times$. Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus, als da heißt das Urbild des neutralen Elements $1 \in \mathbb{C}^\times$ besteht aufgrund unserer Gleichungen $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$ genau aus allen ganzzahligen Vielfachen von $2\pi\,\mathrm{i}$, in Formeln

$$\ker(\exp) = 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$$

Bemerkung 8.2.5. Wir bestimmen mit dieser Erkenntnis die **n-ten Einheitswurzeln**, als da heißt die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Nach 8.2.4 hat jede Lösung die Gestalt $z = \mathrm{e}^b$ für geeignetes $b \in \mathbb{C}$ und so ein z löst unsere Gleichung genau dann, wenn gilt $z^n = \mathrm{e}^{nb} = 1$ alias $nb \in 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$. Wir erhalten so die Lösungen $\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,\nu/n)$ für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ und erkennen auch, daß sie paarweise verschieden sind und es keine anderen Lösungen geben kann. In der komplexen Zahlenebene kann man sich die n-ten Einheitswurzeln veranschaulichen als die Ecken desjenigen in den Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, das als eine Ecke die 1 hat.

Bemerkung 8.2.6. Der Satz von **Hermite-Lindemann** sagt, daß für eine von Null verschiedene im Sinne von 2.4.2 algebraische komplexe Zahl α der Wert der Exponentialfunktion $\exp(\alpha)$ stets transzendent ist. Daraus folgt sowohl, daß die Euler'sche Zahl $\mathrm{e} = \exp(1)$ transzendent ist, als auch, daß $2\pi\,\mathrm{i}$ und damit natürlich auch π transzendent sind, da nämlich $\exp(2\pi\,\mathrm{i}) = 1$ nicht transzendent ist. Mehr dazu findet man etwa in [Lan74].

Übung 8.2.7. In einem regelmäßigen Fünfeck stehen die Längen der Diagonalen zu den Längen der Seiten im Verhältnis des goldenen Schnitts. Man prüfe diese elementargeometrisch leicht einzusehende Behauptung durch algebraische Rechnung. (Hinweis: Der goldene Schnitt ist die positive Lösung der Gleichung $a/1 = (1+a)/a$ alias $a^2 - a - 1 = 0$. Es gilt zu zeigen, daß für $\zeta = \exp(2\pi\,\mathrm{i}/5)$ der Ausdruck $a = |1-\zeta^2|/|1-\zeta| = |1+\zeta|$ die fragliche Gleichung löst. Man verwende $\zeta^4 = \bar{\zeta}$.)

Übung 8.2.8. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede komplexe Zahl $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $z^n = a$ genau n Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Übung 8.2.9. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ hat die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ die Ableitung $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. Später kann das auch mit 8.6.12 und 8.6.17 sehr schnell erlegigt werden.

Übung 8.2.10. Die Nullstellen des komplexen Sinus liegen alle auf der reellen Achse.

Übung 8.2.11. Man zeige $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ und $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

Übung 8.2.12. Man zeige, daß es nicht möglich ist, in stetiger Weise zu jeder komplexen Zahl eine Wurzel zu wählen, daß es also keine stetigen Abbildungen $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit $w(z)^2 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Hinweis: Man prüfe, daß $w(\exp(z))\exp(-z/2)$ einerseits konstant sein müßte, aber andererseits nicht denselben Wert bei 0 und $2\pi\,\mathrm{i}$ annehmen könnte.

8.3 Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz 8.3.1 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Bemerkung 8.3.2. Die Nullstellen eines Polynoms nennt man auch seine **Wurzeln**.

Beweis. Sei P unser Polynom. Wir zeigen zunächst, daß die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |P(z)|$ an einer Stelle $p \in \mathbb{C}$ ihr Minimum annimmt. In der Tat, nehmen wir irgendein $u \in \mathbb{C}$ her, so gibt es offensichtlich $R \in \mathbb{R}$ derart, daß aus $|z| \geq R$ folgt $|P(z)| \geq |P(u)|$. Als stetige Funktion nimmt aber die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ auf der kompakten Kreisscheibe $\{z \mid |z| \leq R\}$ ein Minimum an, sagen wir an der Stelle p, und das muß dann auch das Minimum von $|P(z)|$ auf ganz $\mathbb{C}$ sein. Wir zeigen nun $P(p) = 0$ durch Widerspruch und müssen dazu nachweisen: Ist $p \in \mathbb{C}$ gegeben mit $P(p) \neq 0$, so nimmt die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ bei p nicht ihr Minimum an. Sei dazu erst einmal $p \in \mathbb{C}$ beliebig. Entwickeln wir $P(p+w)$ nach Potenzen von w, so erhalten wir

$$P(p+w) = P(p) + bw^m + w^{m+1}Q(w)$$

mit $b \neq 0$, $m \geq 1$ (da P nicht konstant ist) und einem geeigneten Polynom Q. Nach 8.2.8 finden wir $q \in \mathbb{C}$ mit $P(p) + bq^m = 0$ und sind fertig, sobald wir zeigen können, daß unter der Annahme $P(p) \neq 0$ für hinreichend kleine $t > 0$ gilt

$$|P(p + tq)| < |P(p)|$$

Das ist klar unter der Annahme $Q = 0$ und wir müssen nur noch erklären, warum die Terme der Ordung $> m$ diese Ungleichung für kleines t nicht zerstören können. Wir betrachten dazu die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto P(p+tq)$ und erhalten

$$P(p + tq) = P(p) - t^m P(p) + t^{m+1}\tilde{Q}(t)$$

für ein geeignetes Polynom $\tilde{Q}$, also

$$|P(p + tq)| \leq (1 - t^m)|P(p)| + t^m|t\tilde{Q}(t)| \quad \text{für } t \in [0, 1]$$

Gilt nun $P(p) \neq 0$ und wählen wir $t \in (0, 1)$ hinreichend klein für die Ungleichung $|t\tilde{Q}(t)| < |P(p)|$, so folgt $|P(p + tq)| < |P(p)|$ und wir sind fertig. □

Korollar 8.3.3 (Faktorisierung von Polynomen). *Jedes komplexe Polynom der Gestalt* $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ *mit* $n \geq 0$ *und* $a_n \neq 0$ *besitzt eine Zerlegung in Linearfaktoren der Gestalt*

$$P(z) = c(z - \lambda_1) \ldots (z - \lambda_n)$$

mit $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, *und diese Zerlegung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren* $(z - \lambda_i)$.

Bemerkung 8.3.4. Natürlich haben wir $c = a_n$ und die komplexen Nullstellen von P sind genau die λ_i, in Formeln $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid P(\lambda) = 0\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Gegeben eine Nullstelle μ von P heißt die Zahl der Indizes i mit $\lambda_i = \mu$ die **Vielfachheit der Nullstelle** μ.

Beweis. Ist P ein konstantes Polynom, so ist nichts zu zeigen. Ist P nicht konstant, so gibt es nach 8.3.1 eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ von P. Wir behaupten, daß es dann genau ein Polynom $\tilde{P}$ gibt mit $P(z) = (z - \lambda)\tilde{P}(z)$. Das ist in der Tat offensichtlich im Fall $\lambda = 0$ und mit der Substitution $u = z - \lambda$ dann auch für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$. Das Korollar folgt durch vollständige Induktion über den Grad n von P. □

Bemerkung 8.3.5. In diesem Zusammenhang sollte vielleicht diskutiert werden, warum zwei polynomiale Ausdrücke in einer Veränderlichen mit Koeffizienten in einem unendlichen Körper k nur dann dieselbe Abbildung $k \to k$ liefern, wenn sie als formale Ausdrücke übereinstimmen: Weil nämlich ein von Null verschiedener polynomialer Ausdruck höchstens so viele Nullstellen haben kann, wie sein Grad erlaubt. In **??** wird ausführlicher besprochen, was mit einem "polynomialen Ausdruck" nun eigentlich ganz genau gemeint ist, und in **??** diskutieren wir den Zusammenhang zwischen polynomialen Ausdrücken und Funktionen in voller Allgemeinheit.

Korollar 8.3.6 (Faktorisierung reeller Polynome). *Jedes Polynom P mit reellen Koeffizienten der Gestalt $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $n \geq 0$ und $a_n \neq 0$ besitzt eine Zerlegung in Faktoren der Gestalt*

$$P(x) = c(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_r)(x^2 + \mu_1 x + \nu_1) \ldots (x^2 + \mu_s x + \nu_s)$$

mit $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s, \nu_1, \ldots, \nu_s \in \mathbb{R}$ derart, daß die quadratischen Faktoren keine reellen Nullstellen haben. Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren.

Beweis. Da unser Polynom stabil ist unter der komplexen Konjugation, müssen sich seine (mit ihren Vielfachheiten genommenen) komplexen Nullstellen so durchnummerieren lassen, daß $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ reell sind und daß eine gerade Zahl nicht reeller Nullstellen übrigbleibt mit $\lambda_{r+2i} = \bar{\lambda}_{r+2i+1}$. Die Produkte $(x - \lambda_{r+2i})(x - \lambda_{r+2i+1})$ haben dann reelle Koeffizienten, da sie ja stabil sind unter der komplexen Konjugation, haben jedoch keine reellen Nullstellen. □

Übung 8.3.7. Ein reelles Polynom hat bei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn auch seine Ableitung bei λ verschwindet.

Übung 8.3.8. Gegeben ein reelles Polynom, dessen komplexe Nullstellen bereits sämtlich reell sind, ist jede Nullstelle seiner Ableitung, die keine Nullstelle der Funktion selbst ist, eine einfache Nullstelle der Ableitung. Hinweis: Zwischen je zwei Nullstellen unserer Funktion muß mindestens eine Nullstelle ihrer Ableitung liegen.

8.4 Integration von vektorwertigen Funktionen

Bemerkung 8.4.1. Die Aufgabe, Funktionen wie zum Beispiel $(x+x^5)/(x^7-1)$ zu integrieren, wird uns im anschließenden Abschnitt in natürlicher Weise zur Integration komplexwertiger Funktionen führen. Anstatt einen solchen Integralbegriff ad hoc einzuführen, zimmern wir in diesem Abschnitt gleich einen größeren begrifflichen Rahmen, der nicht nur das Integrieren komplexwertiger Funktionen als Spezialfall umfaßt, sondern auch in natürlicher Weise unsere Überlegungen zum Differenzieren vektorwertiger Funktionen ergänzt und der uns in Zukunft noch in mancherlei Weise die Arbeit erleichtern wird.

Definition 8.4.2. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes Intervall, V ein reeller Vektorraum und $f : [a, b] \to V$ eine Abbildung. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistante Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_r = b$ und definieren die r-te **Riemannsumme** $S^r(f) \in V$ durch

$$S^r(f) = \sum_{i=1}^{r}(t_i - t_{i-1})f(t_i) = \left(\frac{b-a}{r}\right)\sum_{i=1}^{r} f(t_i)$$

Satz 8.4.3 (Integration vektorwertiger Funktionen). *Sei $f : [a, b] \to V$ eine stetige Abbildung von einem nichtleeren kompakten Intervall in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V. So existiert der Grenzwert der Riemannsummen, wir können das* **Integral** $(\int f) \in V$ *von f definieren als diesen Grenzwert*

$$\int f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty} S^r(f)$$

und das so erklärte Integral hat die folgenden Eigenschaften:

1. *Für alle $c \in [a, b]$ gilt $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*
2. *Ist $f = v$ konstant mit $v \in V$, so gilt $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b v\ \mathrm{d}t = (b-a)v$.*
3. *Ist W ein weiterer endlichdimensionaler Vektorraum und $\Lambda : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt*

$$\int(\Lambda \circ f) = \Lambda\left(\int f\right)$$

4. *Ist $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ eine Norm, so gilt $\|\int f\| \leq \int \|f\|$.*

Bemerkung 8.4.4. Sie mögen in diesem Satz die Regeln $\int \lambda f = \lambda \int f$ sowie $\int(f + g) = \int f + \int g$ für stetige vektorwertige Funktionen f, g und $\lambda \in \mathbb{R}$ vermißt haben. Sie folgen jedoch formal aus Teil 3. In der Tat dürfen wir dort $\Lambda = (\lambda\cdot) : V \to V$ nehmen und auch $\Lambda : V \times V \to V$ die Addition sowie die beiden Projektionen. So ergibt sich für die $V \times V$-wertige Funktion (f, g) dann $\mathrm{pr}_1 \int(f, g) = \int f$ und $\mathrm{pr}_2 \int(f, g) = \int g$ und damit $\int(f, g) = (\int f, \int g)$ und durch Anwenden der Addition dann $\int(f + g) = \int f + \int g$.

Beweis. Um die Existenz des Grenzwerts der Riemannsummen zu zeigen, dürfen wir nach 6.7.20 ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V = \mathbb{R}^n$ annehmen. Dann schreiben wir $f = (f_1, \ldots, f_n)$ und folgern die Existenz ebenso wie die erste Eigenschaft sofort aus dem Fall $n = 1$. Zusätzlich ergibt sich so für $V = \mathbb{R}^n$ auch die Formel

$$\int f = \left(\int f_1, \ldots, \int f_n\right) \in \mathbb{R}^n$$

Die drei anderen Eigenschaften erhält man, indem man die analogen Eigenschaften für die Riemannsummen hinschreibt und zum Grenzwert übergeht. Die beiden mittleren Eigenschaften kann man alternativ auch durch Indentifikation der fraglichen Vektorräume mit irgendwelchen $\mathbb{R}^n$ zeigen, bei der letzten Eigenschaft geht das jedoch nicht mehr. □

Bemerkung 8.4.5. Wie im Fall reellwertiger Funktionen verwenden wir auch im Fall vektorwertiger Funktionen die Konvention $\int_b^a f = -\int_a^b f$ und ist $f : I \to V$ eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so gilt dann für beliebige $a, b, c \in I$ die Formel $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Satz 8.4.6 (Vektorwertige Variante des Hauptsatzes). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $f : I \to V$ stetig und $a \in I$ ein Punkt. So ist die Funktion*

$$\begin{array}{rccl} F : & I & \to & V \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array}$$

die einzige differenzierbare Funktion $F : I \to V$ mit $F' = f$ und $F(a) = 0$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $V = \mathbb{R}^n$ annehmen. Die Behauptung folgt dann sofort aus der komponentenweisen Darstellung des Integrals. □

Korollar 8.4.7 (Integrieren mit Stammfunktionen). *Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $f : [a, b] \to V$ stetig. Ist $G : [a, b] \to V$ eine* **Stammfunktion** *von f, d.h. eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $G'(t) = f(t)$, so gilt*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz 8.4.6. □

Übung 8.4.8. Man formuliere und beweise eine Variante für vektorwertige Funktionen des Satzes 6.9.1 über Integrale mit Parametern.

Übung 8.4.9. Gegeben ein halboffenes kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ein Banachraum Y ist auch der Raum $\mathcal{C}^1(I, Y)$ aller stetig differenzierbaren Abbildungen von I nach Y vollständig für die Norm $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\| + \|\dot{\varphi}\|$ der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen und ihrer ersten Ableitung. Hinweis: Man verwende 7.6.25 und verallgemeinere 5.1.11.

8.5 Integration gebrochen rationaler Funktionen

Bemerkung 8.5.1. Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und seien P und Q zwei Polynome mit $Q(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$. So können wir eine stetige Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}$$

definieren durch die Vorschrift $f(x) = P(x)/Q(x)$. In diesem Abschnitt will ich erklären, wie man zu einer derartigen gebrochen rationalen Funktion eine Stammfunktion finden kann. Nach 8.3.3 besitzt der Nenner Q eine Zerlegung in Linearfaktoren

$$Q(x) = c(x - \mu_1)^{m_1} \dots (x - \mu_r)^{m_r}$$

mit $c \in \mathbb{C}^\times$, den $\mu_i \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $m_i \geq 1$. Es gibt zwar keine Formel von der Art, wie wir sie bei quadratischen Polynomen kennen, um die Nullstellen und damit diese Zerlegung bei Polynomen vom Grad ≥ 5 zu bestimmen, vergleiche **??**. Nehmen wir aber an, daß unser Nenner schon zerlegt sei, so können wir stets eine für die Bestimmung des Integrals geeignete Darstellung von f berechnen.

Lemma 8.5.2 (Partialbruchzerlegung). *Seien P und Q Polynome mit komplexen Koeffizienten und es zerfalle Q in Linearfaktoren wie oben. So gibt es ein Polynom mit komplexen Koeffizienten A und komplexe Zahlen $c_{ij} \in \mathbb{C}$ für $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq m_i$ derart, daß gilt*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \sum_{i,j} \frac{c_{ij}}{(x - \mu_i)^j}$$

Bemerkungen 8.5.3. Wir verstehen diese Gleichung als eine Gleichung von Abbildungen $\mathbb{C}\backslash\{\mu_1, \dots, \mu_r\} \to \mathbb{C}$. Man kann sie auch verstehen in einem formaleren Sinn, genauer als Gleichung im "Funktionenkörper" von $\mathbb{C}(X)$ von $\mathbb{C}$. Das können Sie in der Algebra lernen, vergleiche **??**. Der Beweis zeigt im übrigen sogar die Eindeutigkeit von A und den c_{ij}, in anderen Worten bilden also die X^n und die $(X - \lambda)^{-n}$ für $n \geq 1$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ zusammen mit 1 eine $\mathbb{C}$-Basis des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(X)$. In Büchern zur Analysis findet man oft eine Variante dieses Satzes, die den Übergang zu den komplexen Zahlen vermeidet und die wir in **??** für beliebige Körper ausformulieren. Für explizite Rechnungen ist das vermutlich praktischer, dafür verlieren aber die Aussage und der Beweis an Transparenz.

Bemerkung 8.5.4. Will man konkret eine Partialbruchzerlegung bestimmen, so rate ich dazu, mit einer Polynomdivision zu beginnen und $P = AQ + R$

zu schreiben mit Polynomen A und R derart, daß der Grad von R echt kleiner ist als der Grad von Q. Das ist stets möglich und wird in **??** in großer Allgemeinheit diskutiert. Wir erhalten $P/Q = A + R/Q$ und in der Partialbruchzerlegung von R/Q tritt nun kein polynomialer Summand mehr auf, da das für $x \to \infty$ gegen Null strebt. Wir zerlegen nun Q in Linearfaktoren und setzen die c_{ij} als Unbestimmte an, für die wir dann ein lineares Gleichungssystem erhalten, das wir mit den üblichen Verfahren lösen.

Beweis. Zur Vereinfachung setzen wir $\mu_1 = \mu$, $m_1 = m$ und schreiben $Q(x) = (x-\mu)^m \tilde{Q}(x)$ mit $\tilde{Q}(\mu) \neq 0$. Dann nehmen wir $c = P(\mu)/\tilde{Q}(\mu)$ und betrachten die Funktion

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{c}{(x-\mu)^m} = \frac{P(x) - c\tilde{Q}(x)}{(x-\mu)^m \tilde{Q}(x)}$$

Aufgrund unserer Wahl von c hat der Zähler auf der rechten Seite eine Nullstelle bei $x = \mu$, wir können im Bruch also $(x-\mu)$ kürzen, und eine offensichtliche Induktion über dem Grad des Polynoms Q beendet den Beweis. □

Bemerkung 8.5.5. Wenn wir nun einen Moment vergessen, daß wir uns in die komplexe Zahlenebene vorgewagt haben, so wird das Integrieren gebrochen rationaler Funktionen sehr einfach: Wir haben ja in der Partialbruchzerlegung unsere gebrochen rationale Funktion geschrieben als eine Linearkombination von Funktionen der Gestalt $x \mapsto (x-\mu)^m$ mit $m \in \mathbb{Z}$, und Stammfunktionen für diese Funktionen sind

$$\frac{1}{m+1}(x-\mu)^{m+1} \text{ für } m \neq -1 \text{ bzw. } \log(x-\mu) \text{ für } m = -1 \text{ und } x > \mu.$$

Und nun ist es eben so, daß diese Formeln für $\mu \in \mathbb{C}$ ganz genauso gelten, wenn wir sie nur richtig interpretieren. Unter einer **Stammfunktion** einer Abbildung f von einem halboffenen reellen Intervall nach $\mathbb{C}$ oder allgemeiner in einen beliebigen normierten reellen Vektorraum verstehen wir eine differenzierbare Abbildung F von demselben Intervall in denselben Vektorraum mit $F' = f$. Im Fall $m \neq 1$ ist das nun der Inhalt der Übung 8.1.11 und folgt auch sofort aus den Resultaten des anschließenden Abschnitts 8.6. Im Fall $m = -1$ wird es im Folgenden ausgeführt.

Bemerkung 8.5.6. Um zu $\mathbb{R} \setminus \mu \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x-\mu)^{-1}$ für beliebiges $\mu \in \mathbb{C}$ eine Stammfunktion anzugeben, überlegt man sich zunächst, daß die komplexe Exponentialfunktion eine Bijektion

$$\exp : \mathbb{R} + (-\pi, \pi]\,\mathrm{i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times$$

definiert. Die Umkehrfunktion

$$\log : \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} + (-\pi, \pi]\,\mathrm{i}$$

wird auf der positiven reellen Achse gegeben durch unseren üblichen Logarithmus $u \mapsto \log u$, auf der oberen bzw. unteren komplexen Halbebene durch die Vorschrift

$$\log(u + \mathrm{i}\, v) = \log \sqrt{u^2 + v^2} \ \pm \mathrm{i}\, \frac{\pi}{2} - \mathrm{i} \arctan \frac{u}{v} \quad \text{für } \pm v > 0$$

und auf der negativen reellen Achse durch $u \mapsto \log(-u) + \mathrm{i}\,\pi/2$. Mit diesen Formeln ist es nun eine elementare Übung, für alle $\mu \in \mathbb{C}$ zu prüfen, daß die Funktion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \mu & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \log(x - \mu) \end{array}$$

die Ableitung $1/(x - \mu)$ hat. Weniger elementar aber dafür konzeptioneller folgt es auch aus der komplexen Kettenregel 8.6.12 mitsamt der Regel für die komplexe Ableitung von Zweigen des komplexen Logarithmus 8.6.18 aus dem anschließenden Abschnitt. In jedem Fall sehen wir, wie sich im Prinzip die Stammfunktion einer beliebigen gebrochen rationalen Funktion wieder als eine gebrochen rationale Funktion mitsamt einigen Ausdrücken im Arcustangens und im (reellen) Logarithmus schreiben läßt.

Bemerkung 8.5.7. Setzt man auch im Komplexen $a^b = \exp(b \log a)$ mit dem eben definierten komplexen Logarithmus, so ergibt sich $\mathrm{i}^\mathrm{i} = \exp(-\pi/2)$. Insbesondere ist in diesem Sinne also i^i reell.

Beispiel 8.5.8. Wir bestimmen eine Stammfunktion zu $1/(1 + x^2)$ mithilfe unserer Partialbruchzerlegung. Die Nullstellen des Nenners sind $\pm\,\mathrm{i}$ und der Grad des Zählers ist echt kleiner als der Grad des Nenners, wir dürfen also ansetzen

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{a}{x + \mathrm{i}} + \frac{b}{x - \mathrm{i}}$$

und finden sofort $(a + b)x - \mathrm{i}\, a + \mathrm{i}\, b = 1$, also $a = b = 0$ und $a - b = \mathrm{i}$ und damit $a = \mathrm{i}/2$ und $b = -\mathrm{i}/2$. Eine Stammfunktion ist mithin

$$\frac{\mathrm{i}}{2} \log(x + \mathrm{i}) - \frac{\mathrm{i}}{2} \log(x - \mathrm{i})$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen beachten wir, daß unsere Stammfunktion bis auf eine Konstante eh eine reellwertige Funktion sein muß, wir dürfen also bereits vor dem Addieren die Realteile nehmen und erhalten als Stammfunktion sofort

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan(-x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{2}$$

in Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen aus 7.7.14.

Beispiel 8.5.9. Wir bestimmen eine Stammfunktion zu $(x^4+2x^2)/(x^2+2x+1)$ und berechnen zunächst die Partialbruchzerlegung. Polynomdivision liefert

$$\begin{aligned} x^4+2x^2 &= x^2(x^2+2x+1)-2x^3+x^2 \\ &= x^2(x^2+2x+1)-2x(x^2+2x+1)+5x^2+2x \\ &= (x^2-2x+5)(x^2+2x+1)-8x-5 \end{aligned}$$

und unser Bruch vereinfacht sich zu

$$\frac{x^4+2x^2}{x^2+2x+1} = x^2-2x+5-\frac{8x+5}{x^2+2x+1}$$

Jetzt zerlegen wir den Nenner in Linearfaktoren $x^2+2x+1=(x+1)^2$ und dürfen nach unserem Satz über die Partialbruchzerlegung

$$\frac{8x+5}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

ansetzen, woraus sich ergibt $8x+5 = ax+a+b$ und damit $a=8$ und $b=-3$. Die Partialbruchzerlegung unserer ursprünglichen Funktion hat also die Gestalt

$$\frac{x^4+2x^2}{x^2+2x+1} = x^2-2x+5-\frac{8}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$$

und als Stammfunktion finden wir damit sofort

$$\frac{x^3}{3}-x^2+5x-8\log|x+1|-\frac{3}{(x+1)}$$

Bemerkung 8.5.10. Gegeben eine rationale Funktion $R=P/Q$ betrachten wir die Funktion $D\to\mathbb{R}$, $t\mapsto R(\mathrm{e}^t)$ mit dem Definitionsbereich $D=\{t\in\mathbb{R}\mid Q(\mathrm{e}^t)\neq 0\}$. Das Integral eines solchen gebrochen rationalen Ausdrucks in e^t kann man auf das Integral einer gebrochen rationalen Funktion zurückführen durch die Substitution $x=\mathrm{e}^t$, $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}t$. Zum Beispiel berechnen wir

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} = \int\frac{2\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\frac{1}{\mathrm{e}^t}} = \int\frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\arctan x = 2\arctan(\mathrm{e}^t)$$

Das Integral eines gebrochen rationalen Ausdrucks in $\sqrt[n]{t}$ für eine natürliche Zahl $n\geq 1$ kann man ähnlich durch die Substitution $\sqrt[n]{t}=x$, $\mathrm{d}t = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$ auf das Integral einer gebrochen rationalen Funktion in x zurückführen.

Bemerkung 8.5.11. Das Integral eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar $(\sin, \cos)$ wie zum Beispiel

$$\frac{\sin^3(\tau) + \cos(\tau)}{\cos(\tau) + \cos^2(\tau)}$$

kann man auffassen als Kurvenintegral im Sinne von 7.4.6 einer rationalen Funktion in zwei Veränderlichen, in unserem Beispiel der Funktion

$$R(x, y) = \frac{y^3 + x}{x + x^2}$$

über ein Stück der Kreislinie und dann mittels der Umparametrisierung aus 7.7.15, d.h. mithilfe der Substitution $t = \tan(\tau/2)$ und folglich $\sin(\tau) = 2t/(1+t^2)$, $\cos(\tau) = (1-t^2)/(1+t^2)$, $\mathrm{d}\tau = 2/(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ umwandeln in ein Integral einer rationalen Funktion einer Veränderlichen. Integrale über rationale Ausdrücke im Funktionenpaar $(\sqrt{1-x^2}, x)$ kann man in ähnlicher Weise als Kurvenintegral auffassen und lösen, im Gegensatz zu eben hat nur $x \mapsto (\sqrt{1-x^2}, x)$ nicht konstante absolute Geschwindigkeit 1, sondern vielmehr die absolute Geschwindigkeit $1/\sqrt{1-x^2}$. Formal mag man auch $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ substituieren und sich so auf den bereits behandelten Fall eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar $(\sin, \cos)$ zurückziehen.

Bemerkung 8.5.12. Integrale rationaler Ausdrücke in den Funktionenpaaren $(\sqrt{x^2+1}, x)$ bzw. $(\sqrt{x^2-1}, x)$ kann man auf die bereits in 8.5.10 behandelten Integrale gebrochen rationaler Funktionen in e^t zurückführen durch die Substitution $x = \sinh t$, $\mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t$ bzw. $x = \cosh t$, $\mathrm{d}x = \sinh t\,\mathrm{d}t$. Die geometrische Bedeutung dieses Tricks wird in **??** erklärt.

Übung 8.5.13. Man finde eine Stammfunktion zu $1/(1+x^4)$.

8.6 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 8.6.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $p \in U$ ein Punkt. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **komplex differenzierbar bei p mit Ableitung** $b \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn p ein Häufungspunkt von U ist und es gilt

$$\lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} = b$$

Wir kürzen diese Aussage ab durch $f'(p) = b$.

Bemerkung 8.6.2. Der Grenzwert ist hier im Sinne von 7.2.4 zu verstehen. Diese Definition ist identisch zu unserer alten Definition 4.1.2 bis auf das

Detail, daß wir überall statt reeller Zahlen komplexe Zahlen betrachten und, wie im Komplexen üblich, die Variable mit z bezeichnen. Den Definitionsbereich unserer Funktionen haben wir weiter U statt I genannt, weil der meistgebrauchte Fall nicht mehr der eines Intervalls sondern vielmehr der einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene ist. Der Fall $U \subset \mathbb{R}$ wird jedoch auch oft vorkommen. In diesem Fall stimmt die hier definierte Ableitung überein mit der Geschwindigkeit im Sinne von 7.3.1. Der Rest dieses Abschnitts besteht darin, unsere Resultate zur reellen Differenzierbarkeit mitsamt ihren Beweisen im Komplexen zu wiederholen.

Bemerkung 8.6.3. Ich gebe noch einige alternative Formulierungen an. Ist $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und p ein Häufungspunkt von U, so ist nach 7.2.5 eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p mit Ableitung $b \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn es eine Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ gibt, die stetig ist bei p mit Funktionswert $\varphi(p) = b$ derart, daß für alle $z \in U$ gilt

$$f(z) = f(p) + (z - p)\varphi(z)$$

In anderen nochmals anderen Formeln ist unsere Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p mit Ableitung b genau dann, wenn gilt

$$f(p + h) = f(p) + bh + \varepsilon(h)h$$

für eine Funktion ε, die stetig ist bei Null und die dort den Wert Null annimmt. Hier ist zu verstehen, daß die Funktion ε definiert sein soll auf der Menge aller h mit $h + p \in U$. Diese Formulierung hat den Vorteil, daß besonders gut zum Ausdruck kommt, inwiefern für festes p und kleines h der Ausdruck $f(p) + f'(p)h$ eine gute Approximation von $f(p + h)$ ist. Anschaulich wirkt f lokal um einen gegebenen Punkt p in erster Approximation wie eine Drehstreckung mit Zentrum in besagtem Punkt gefolgt von einer Verschiebung um $f(p)$, und $f'(p)$ bedeutet die komplexe Zahl derart, daß die Multiplikation damit die fragliche Drehstreckung beschreibt.

Beispiele 8.6.4. Eine konstante Funktion auf einer Menge von komplexen Zahlen ist an jedem nicht isolierten Punkt besagter Menge komplex differenzierbar mit Ableitung Null. Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ hat in jedem Punkt p die Ableitung $\mathrm{id}'(p) = 1$.

Lemma 8.6.5. *Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist komplex differenzierbar in jedem Punkt von $\mathbb{C}^\times$ und ihre Ableitung bei einer Stelle $p \in \mathbb{C}^\times$ ist $-\frac{1}{p^2}$.*

Beweis. Wir rechnen $\lim_{z \to p} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{p}}{z - p} = \lim_{z \to p} \frac{-1}{zp} = -\frac{1}{p^2}$. $\square$

Lemma 8.6.6. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Ist eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei $p \in U$, so ist f stetig bei p.*

Beweis. Das folgt sofort aus der vorhergehenden Bemerkung 8.6.3. □

Proposition 8.6.7. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei einem Punkt $p \in U$. So sind auch die Funktionen $f + g$ und fg komplex differenzierbar bei p und es gilt*

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p) \quad \textit{und} \quad (fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

Beweis. Identisch zum Beweis im Reellen nach 4.2.1. □

Definition 8.6.8. Ist eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ definiert auf einer Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ und differenzierbar an jedem Punkt von U, so nennen wir f **komplex differenzierbar auf** U und nennen die Funktion $f' : U \to \mathbb{C}$, $p \mapsto f'(p)$ ihre **Ableitung**. Aus unseren Definitionen folgt natürlich insbesondere, daß dann die Menge U keine isolierten Punkte haben darf.

Bemerkung 8.6.9. Für die Ableitungen komplex differenzierbarer Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich gelten mithin die **Summenregel** und die **Produktregel** oder **Leibniz-Regel**

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Korollar 8.6.10 (Ableiten ganzzahliger Potenzen). *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und unter der Voraussetzung $z \neq 0$ im Fall $n \leq 0$ ist die Ableitung der Funktion $z \mapsto z^n$ die Funktion $z \mapsto nz^{n-1}$.*

Beweis. Man zeigt das durch vollständige Induktion über n separat für $n \geq 0$ und $n \leq -1$. □

Übung 8.6.11. Ein komplexes Polynom hat bei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn auch seine Ableitung bei λ verschwindet.

Satz 8.6.12 (Kettenregel). *Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ Teilmengen und $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{C}$ Funktionen und es gelte $f(U) \subset V$. Sei f komplex differenzierbar in p und g komplex differenzierbar in $f(p)$. So ist $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in p mit Ableitung*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$$

Beweis. Identisch zum Beweis im Reellen nach 4.2.5. □

Proposition 8.6.13 (Quotientenregel). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion ohne Nullstelle und $p \in U$ ein Punkt.*

1. *Ist f komplex differenzierbar bei p, so ist auch $z \mapsto 1/f(z)$ komplex differenzierbar bei p und hat dort die Ableitung $-f'(p)/f(p)^2$.*

2. *Ist zusätzlich $g : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei p, so ist auch g/f komplex differenzierbar bei p mit Ableitung*

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(p) = \frac{g'(p)f(p) - g(p)f'(p)}{f(p)^2}$$

Beweis. 1 folgt sofort aus 8.6.5 mit der Kettenregel 8.6.12. 2 folgt aus 1 mit der Produktregel 8.6.7. □

Satz 8.6.14 (Ableitung von Umkehrfunktionen). *Sei $U \Subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Injektion mit offenem Bild und stetiger Umkehrung $f^{-1} : f(U) \to U$. Ist dann f komplex differenzierbar im Punkt $p \in U$ mit Ableitung $f'(p) \neq 0$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $q = f(p)$ mit Ableitung*

$$(f^{-1})'(q) = 1/f'(f^{-1}(q))$$

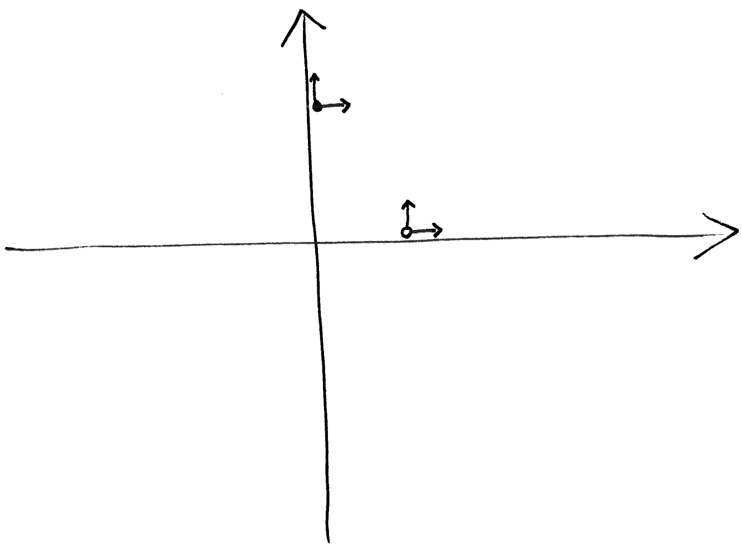
Bemerkung 8.6.15. In **??** werden wir zeigen, daß eine injektive komplex differenzierbare Funktion mit offenem Definitionsbereich stets offenes Bild und eine stetige Umkehrung hat. Ein Teil der Bedingungen an unsere Funktion sind also eigentlich überflüssig und dienen nur dazu, den Beweis zu vereinfachen.

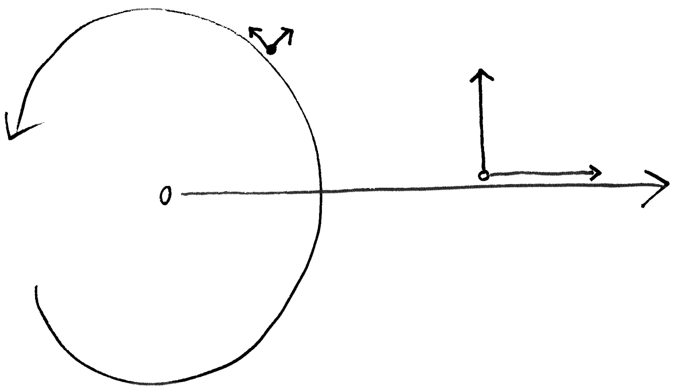
Beweis. Nach unseren Annahmen gibt es eine stetige Funktion ohne Nullstelle $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) - f(p) = (z - p)\varphi(z)$ und $\varphi(p) = f'(p)$. Setzen wir hier $z = f^{-1}(w)$, so ist $\psi = 1/(\varphi \circ f^{-1}) : f(U) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $(w - q)\psi(w) = f^{-1}(w) - f^{-1}(q)$ und $\psi(q) = 1/f'(p)$. □

Beispiel 8.6.16. Das Quadrieren liefert eine Bijektion zwischen der Halbebene aller komplexen Zahlen mit positivem Realteil und der "geschlitzten Zahlenebene" $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Die Umkehrfunktion zu dieser Bijektion ist also eine komplex differenzierbare Funktion auf der geschlitzten Zahlenebene, die wir $\sqrt{z}$ notieren und die nach 8.6.14 differenzierbar ist mit Ableitung $1/(2\sqrt{z})$.

Lemma 8.6.17. *Die komplexe Exponentialfunktion ist komplex differenzierbar und stimmt auf der ganzen komplexen Zahlenebene mit ihrer eigenen Ableitung überein.*

Beweis. Der Beweis des reellen Analogons 4.2.8 kann wortwörtlich übernommen werden. □





Anschauliche Bedeutung der Ableitung der komplexen Exponentialfunktion

Beispiel 8.6.18. Ist $U \Subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge derart, daß die Exponentialfunktion eine Injektion mit offenem Bild und stetiger Umkehrfunktion $\log : \exp(U) \to \mathbb{C}$ liefert, so nennt man log einen **Zweig des Logarithmus**. Nach 8.6.14 ist jeder solche Zweig des Logarithmus komplex differenzierbar mit Ableitung

$$\log'(q) = \frac{1}{\exp(\log q)} = \frac{1}{q}$$

Bemerkung 8.6.19. Eine komplex differenzierbare komplexwertige Funktion, die auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene definiert ist, heißt eine **holomorphe Funktion**. Die Theorie der holomorphen Funktionen, die sogenannte **Funktionentheorie**, ist grundlegend verschieden von der Theorie der differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf einer offenen Teilmenge der reellen Zahlengerade, die wir in dieser Vorlesung ausführlich studiert haben. Zum Beispiel ist jede holomorphe Funktion, d.h. jede auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene definierte einmal komplex differenzierbare Funktion dort bereits beliebig oft komplex differenzierbar.

9 Lösung einiger Schwingungsgleichungen

9.1 Gedämpfte Schwingungen

Bemerkung 9.1.1. Wir interessieren uns für die Bewegung eines Massepunktes, der an einer Feder aufgehängt ist und dessen Bewegung durch eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibung gedämpft wird. Mißt die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$ seine Auslenkung von der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt t, so muß unsere Funktion aus physikalischen Gründen eine Differentialgleichung zweiten Grades der Gestalt

$$\ddot{x} = -a\dot{x} - bx$$

erfüllen, wobei die Konstanten a und b die Stärke der Feder und der Dämpfung ausdrücken und in physikalisch relevanten Fällen nichtnegativ sind. Wir lösen diese Differentialgleichung hier erst einmal ad hoc und erheben danach in 9.2.2 diesen Zugang zur Methode.

Proposition 9.1.2 (zur Lösung der Schwingungsgleichung). *Seien reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben.*

1. *Die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ bildet einen Untervektorraum des Raums* $\mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, den* **Lösungsraum** *$L$ unserer Differentialgleichung.*

2. *Die Abbildung $x \mapsto (x(0), \dot{x}(0))$ definiert einen Vektorraumisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ dieses Lösungsraums mit dem $\mathbb{R}^2$, den* **Anfangswertisomorphismus**.

3. *Hat das Polynom $X^2 + aX + b$ zwei verschiedene reelle Nullstellen λ und μ, so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $x_2(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ eine Basis des Lösungsraums. Hat es dahingegen eine doppelte reelle Nullstelle λ, so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $x_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Basis des Lösungsraums.*

Bemerkung 9.1.3. Um den Fall, daß unser Polynom keine reellen Nullstellen hat, werden wir uns gleich noch gesondert kümmern.

Beweis. Teil 1 scheint mir offensichtlich. Um Teil 2 zu zeigen beachten wir, daß die Vorschrift $x \mapsto (x, \dot{x})$ offensichtlich einen Isomorphismus zwischen unserem Lösungsraum L und dem Lösungsraum des Systems $\dot{\gamma}_1 = \gamma_2$, $\dot{\gamma}_2 =$

$-b\gamma_1 - a\gamma_2$ induziert, das in Matrixschreibweise die Gestalt $\dot\gamma = A\gamma$ annimmt mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Teil 2 folgt damit aus 7.5.13. Für Teil 3 müssen wir folglich nur prüfen, daß die beiden angegebenen Funktionen in der Tat linear unabhängige Lösungen sind. Das kann dem Leser überlassen bleiben. □

Bemerkung 9.1.4. Statt in Teil 3 mögliche Lösungen einfach zu erraten, hätten wir uns auch daran erinnern können, daß ja nach 7.5.9 jede Lösung von der Form

$$x(t) = \gamma_1(t) = \mathrm{pr}_1(\exp(tA)c)$$

sein muß für $c = (x(0), \dot x(0))$. Das charakteristische Polynom unserer Matrix A ist aber nun gerade $X^2 + aX + b$. Hat es zwei verschiedene reelle Nullstellen λ, μ und bilden wir eine Matrix P mit Eigenvektoren zu λ und μ als Spalten, so gilt $A = P\,\mathrm{diag}(\lambda,\mu)P^{-1}$ und $\exp(tA) = P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda t}, \mathrm{e}^{\mu t})P^{-1}$ und wir erkennen auf Anhieb, daß jede Lösung

$$x(t) = \gamma_1(t) = \mathrm{pr}_1(\exp(tA)c)$$

eine Linearkombination der Gestalt $x(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \beta\,\mathrm{e}^{\mu t}$ sein muß. Im Fall einer doppelten reellen Nullstelle finden wir ähnlich ein P mit

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

und 7.6.19 liefert

$$\exp\begin{pmatrix} u & t \\ 0 & u \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^u & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^u & t\,\mathrm{e}^u \\ 0 & \mathrm{e}^u \end{pmatrix}$$

womit sich die allgemeine Lösung $x(t) = \gamma_1(t) = \mathrm{pr}_1(\exp(tA)c)$ ergibt als eine Linearkombination der Gestalt $\alpha\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \beta t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$.

Bemerkung 9.1.5. Im Fall der gedämpften Schwingung hat unser Polynom $X^2 + aX + b$ die beiden Nullstellen

$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Bei hinreichend großer Dämpfung $a^2/4 \geq b$ erhalten wir reelle nichtpositive Lösungen und unser Massepunkt kehrt mit höchstens einmaligem Überschwingen zum Ruhezustand zurück. Im Fall kleiner Dämpfung $a^2/4 < b$ hat unser Polynom dahingegen keine reellen Nullstellen mehr und stattdessen die beiden komplexen Nullstellen $\pm\mathrm{i}\,\omega - a/2$ mit $\omega = \sqrt{b - a^2/4} > 0$. Um hier weiterzukommen verallgemeinern wir zunächst einmal alles bisher Gesagte ins Komplexe.

Proposition 9.1.6 (Lösung der Schwingungsgleichung). *Seien komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ gegeben.*

1. *Die Menge aller zweimal differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ bildet einen komplexen Untervektorraum des Raums* $\operatorname{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, den* **Lösungsraum** *$L$ unserer Differentialgleichung.*

2. *Die Abbildung $x \mapsto (x(0), \dot{x}(0))$ definiert einen Vektorraumisomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2$, den* **Anfangswertisomorphismus**.

3. *Hat das Polynom $X^2 + aX + b$ zwei verschiedene Nullstellen λ und μ, so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $x_2(t) = \mathrm{e}^{\mu t}$ eine Basis des Lösungsraums L. Hat es eine doppelte Nullstelle λ, so bilden die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $x_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Basis des Lösungsraums.*

Beweis. Der Beweis ist identisch zum Beweis der reellen Version 9.1.6, sobald man die dabei benötigten Hilfsmittel ins Komplexe verallgemeinert hat, was wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts und insbesondere in 9.1.10 tun werden. □

Bemerkung 9.1.7. Sind in der Situation aus 9.1.6 die Koeffizienten a, b beide reell, so bilden die reellwertigen Lösungen unseres Systems nach 9.1.2 einen zweidimensionalen reellen Untervektorraum $L_{\mathbb{R}} \subset \operatorname{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und seine komplexwertigen Lösungen bilden nach 9.1.6 einen zweidimensionalen komplexen Untervektorraum $L_{\mathbb{C}} \subset \operatorname{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, der stabil ist unter dem Übergang zum komplex Konjugierten, in Formeln $f \in L_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{f} \in L_{\mathbb{C}}$. Per definitionem gilt weiter $L_{\mathbb{R}} = L_{\mathbb{C}} \cap \operatorname{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Haben wir nun Erzeuger $f_1, \ldots, f_r$ für den $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexwertigen Lösungen gefunden, so erzeugen deren Realteile zusammen mit ihren Imaginärteilen den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Lösungen: In der Tat schreibt sich ja jede reellwertige Lösung f als $f = c_1 f_1 + \ldots + c_r f_r$ mit $c_\nu \in \mathbb{C}$, und bilden wir hier auf beiden Seiten den Realteil, so ergibt sich für f die Darstellung

$$f = \operatorname{Re}(c_1)\operatorname{Re}(f_1) - \operatorname{Im}(c_1)\operatorname{Im}(f_1) + \ldots + \operatorname{Re}(c_r)\operatorname{Re}(f_r) - \operatorname{Im}(c_r)\operatorname{Im}(f_r)$$

Bemerkung 9.1.8. Im Fall der gedämpften Schwingungen 9.1.1 mit kleiner Dämpfung und folglich komplexen Nullstellen $\pm\mathrm{i}\,\omega - a/2$ erhalten wir die komplexen Lösungen $x_\pm(t) = \mathrm{e}^{-at/2}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\omega t}$ und die Euler-Formel liefert, daß die Funktionen

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-at/2}\cos\omega t \quad \text{und} \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{-at/2}\sin\omega t$$

den Raum der reellwertigen Lösungen aufspannen. Die Größe ω wird in diesem Zusammenhang auch als **Winkelgeschwindigkeit** bezeichnet. Die Additionstheoreme zeigen, daß sich jede reelle Linearkombination $\alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t)$ der Funktionen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ als Sinuswelle mit **Amplitude** k und **Phase** ϕ in der Form

$$\alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t) = k\sin(\omega t + \phi)$$

schreiben läßt, für $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und ϕ einer Lösung des Gleichungssystems $k\cos\phi = \alpha$ und $k\sin\phi = \beta$. Im Fall kleiner Dämpfung kann die allgemeine Lösung also geschrieben werden als $x(t) = k\,\mathrm{e}^{-at/2}\sin(\omega t + \phi)$ und beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude bei positiver Dämpfung $a > 0$ exponentiell abfällt.

Bemerkung 9.1.9. Man kann ohne Schwierigkeiten die Exponentialabbildung auf quadratischen Matrizen ins Komplexe erweitern zu

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C}) & \to & \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C}) \\ & A & \mapsto & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k \end{array}$$

Satz 9.1.10 (Lineare Differentialgleichungen). *Ist $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ eine quadratische Matrix und $c \in \mathbb{C}^n$ ein Spaltenvektor, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit Anfangswert $\gamma(0) = c$ derart, daß gilt $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und diese Abbildung wird gegeben durch die Vorschrift*

$$\gamma(t) = \exp(tA)c$$

Beweis. Mutatis mutandis, als da heißt nach Verändern des zu Verändernden identisch zum Beweis von 7.5.9. □

Korollar 9.1.11 (Anfangswertisomorphismus). *Ist $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ eine quadratische Matrix, so bilden die differenzierbaren Abbildungen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)\ \ \forall t \in \mathbb{R}$ einen komplexen Untervektorraum $L \subset \mathrm{Ens}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ und das Auswerten bei $t = 0$ definiert einen Isomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$.*

Beweis. Dem Leser überlassen. Im Reellen war das Übung 7.5.13. □

Bemerkung 9.1.12. Die Regel $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$ aus 7.6.23 gilt genauso für komplexe Matrizen. Die Berechnung des Exponentials einer beliebigen quadratischen Matrix wird Ihnen auf dieser Grundlage leicht gelingen, sobald sie in der linearen Algebra die Theorie der “Jordan’schen Normalform” kennengelernt haben.

Übung 9.1.13. Ist $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine reelle Matrix und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine komplexe Lösung der Differentialgleichung $\dot{\gamma}(t) = A\gamma(t)$, so sind ihr koordinatenweise gebildeter Real- und Imaginärteil $\operatorname{Re}\gamma$ und $\operatorname{Im}\gamma$ reelle Lösungen. Erzeugt eine Menge $\mathbb{C}^n$-wertiger Funktionen den $\mathbb{C}$-Vektorraum der $\mathbb{C}^n$-wertigen Lösungen unserer Differentialgleichung, so erzeugen ihre Real- und Imaginärteile zusammen den $\mathbb{R}$-Vektorraum der $\mathbb{R}^n$-wertigen Lösungen.

9.2 Differentialgleichungen höheren Grades

Bemerkung 9.2.1. Die Erfahrungen, die wir bei der Behandlung gedämpfter Schwingungen gemacht haben, fassen wir nun noch etwas allgemeiner.

Satz 9.2.2. *Seien komplexe Zahlen $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ gegeben.*

1. *Die komplexwertigen n-mal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \ldots + a_0 f = 0$ bilden einen Untervektorraum im Raum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, den* **Lösungsraum** *unserer Differentialgleichung.*

2. *Die Abbildung $f \mapsto (f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0))$ ist ein Isomorphismus dieses Lösungsraums mit dem $\mathbb{C}^n$, der* **Anfangswertisomorphismus***.*

3. *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ der Vielfachheit r, so sind die Funktionen $\mathrm{e}^{\lambda t}, t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ Lösungen unserer Differentialgleichung, und durchläuft λ alle Nullstellen unseres Polynoms, so bilden diese Lösungen eine Basis des Lösungsraums.*

Beweis. 1 ist offensichtlich. Um die in 2 behauptete Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen beachten wir zunächst, daß unsere Überlegungen aus 7.5.9 ohne Änderungen auch im Komplexen gültig sind. Für eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{C})$ mit komplexen Einträgen haben also die differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, die die Differentialgleichung $g' = Ag$ lösen, die Form $g(t) = (\exp tA)g(0)$ wo wir den Anfangswert $g(0) \in \mathbb{C}^n$ frei wählen dürfen. Insbesondere definiert die Abbildung $g \mapsto g(0)$ einen Isomorphismus vom Lösungsraum der Differentialgleichung $g' = Ag$ mit dem $\mathbb{C}^n$. Jetzt beachten wir, daß die Vorschrift $f \mapsto g = (f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)})^\top$ eine Bijektion induziert zwischen der Menge aller n-mal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die die Differentialgleichung aus dem Satz erfüllen, und der Menge aller differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, die das System von Differentialgleichungen

$$\begin{array}{rcl} g_0' & = & g_1 \\ g_1' & = & g_2 \\ & \vdots & \\ g_{n-1}' & = & a_{n-1}g_{n-1} + \ldots a_1 g_1 + a_0 g_0 \end{array}$$

lösen, wo wir etwas ungewöhnlich $g = (g_0, \ldots, g_{n-1})$ indiziert haben der besseren Übersichtlichkeit halber. Damit ist auch Teil 2 bewiesen.

3. Motiviert durch unsere Erkenntnisse bei der Lösung von 9.1.6 beginnen wir mit dem Ansatz $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Mögliche λ sind dann genau die Nullstellen des Polynoms $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$. Ist λ eine Nullstelle der Vielfachheit r, so sind sogar, wieder in Verallgemeinerung unserer Erkenntnisse bei der Lösung von 9.1.6, auch $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ noch Lösungen unserer Gleichung. Um das einzusehen, betrachten wir den Vektorraum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und fassen das Ableiten auf als eine lineare Abbildung

$$D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

Zerfällt unser Polynom in Linearfaktoren

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = (X - \lambda_1)^{n_1} \ldots (X - \lambda_r)^{n_r}$$

so können wir den Operator $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0 : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ auch schreiben als Verknüpfung der Operatoren $(D - \lambda_i)^{n_i}$, und es reicht folglich $(D - \lambda)^r t^{r-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$ nachzuweisen. Nun gilt aber offensichtlich

$$(D - \lambda)t^m\,\mathrm{e}^{\lambda t} = m t^{m-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

und die Behauptung folgt per Induktion. Um zu zeigen, daß die $t^j\,\mathrm{e}^{t\lambda_i}$ für $0 \leq j < n_i$ eine Basis des Lösungsraums bilden, reicht es die lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Beherrscht man die zugehörige lineare Algebra, so erkennt man leicht, daß die $t^m\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ jeweils zum Hauptraum $\operatorname{Hau}(D; \lambda)$ gehören und muß wegen **??** nur noch die lineare Unabhängigkeit der $t^m\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ für festes λ und variables m zeigen, die hinwiederum sofort aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen t^m folgt.

Beherrscht man die zugehörige lineare Algebra noch nicht, so muß man mehr arbeiten. Man setzt dann etwa eine Linearkombination $\sum c_{ji} t^j\,\mathrm{e}^{\lambda_i t} = 0$ an und muß zeigen, daß alle c_{ji} verschwinden. Sonst könnten wir aber nach eventueller Umnummerierung der Nullstellen ein k finden mit $c_{k1} \neq 0$ aber $c_{j1} = 0$ für $j > k$. Wenden wir dann auf unsere Summe den Differentialoperator $(D - \lambda_1)^k (D - \lambda_2)^N \ldots (D - \lambda_r)^N$ an für hinreichend grosses N, so ergibt sich $c_{k1}\,\mathrm{e}^{t\lambda_1} = 0$ im Widerspruch zu unserer Annahme $c_{k1} \neq 0$. □

Übung 9.2.3. Man bestimme eine Basis des komplexen sowie des reellen Lösungsraums der Differentialgleichung $f''' = f$.

9.3 Gekoppelte Schwingungen

Beispiel 9.3.1. An gegenüberliegenden Wänden eines Zimmers ist jeweils ein Wägelchen mit einer Feder befestigt und die beiden Wägelchen sind auch untereinander durch eine Feder verbunden. Bezeichnen $x(t)$ bzw. $y(t)$ die Position des ersten bzw. zweiten Wägelchens auf einer Skala, auf der $x = y = 0$ den Gleichgewichtszustand bedeuten und größere x bzw. y einen größeren Abstand eines Wägelchens von "seiner" Wand, so genügt unser System einer Differentialgleichung

$$\begin{array}{rcl} \ddot{x} & = & -ax - b(x+y) \\ \ddot{y} & = & -cy - d(y+x) \end{array}$$

für Konstanten $a, b, c, d > 0$, in die die Stärke der Federn und die Massen der Wägelchen eingehen. Erklären wir $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto v(t) = (x(t), y(t))$ und betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -(a+b) & -b \\ -d & -(c+d) \end{pmatrix}$$

so können wir unser System schreiben als

$$\ddot{v}(t) = Av(t)$$

Der Leser mag als Übung zeigen, daß der Lösungsraum vierdimensional sein muß. Unsere Matrix A hat, wie man dem charakteristischen Polynom ansieht, negative reelle Eigenwerte λ_1, λ_2. Also hat bereits der $\mathbb{R}^2$ eine Basis v_1, v_2 aus Eigenvektoren von A. Dann sind die vier Funktionen

$$t \mapsto \exp(t \pm\sqrt{\lambda_i}\,)v_i \quad \text{mit } i = 1, 2$$

offensichtlich Lösungen, und ähnliche Argumente wie im vorhergehenden Beispiel zeigen, daß sie sogar eine Basis Lösungsraums bilden. Setzen wir $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$, so erhalten wir eine alternative Basis des Lösungsraums durch die vier Funktionen

$$\cos(t\omega_i)v_i \quad \text{und} \quad \sin(t\omega_i)v_i \quad \text{mit } i = 1, 2.$$

Ist noch spezieller unsere Situation symmetrisch unter der Vertauschung der beiden Wägelchen, haben sie also dieselbe Masse und sind durch dieselben Federn mit den Wänden verbunden, so folgt $b = d$ und $a = c$ und wir erhalten $v_1 = (1, 1)$ mit $\lambda_1 = -a - 2b$ sowie $v_2 = (1, -1)$ mit $\lambda_2 = -a$. Diese Eigenvektoren entsprechen den zwei **Eigenschwingungen** des Systems, bei denen beide Wägelchen zu allen Zeiten in derselben bzw. in entgegengesetzten

Richtungen fahren. Die Bewegung der einzelnen Wägelchen $x(t) = x_+(t)$ und $y(t) = x_-(t)$ wird dann beschrieben durch

$$\operatorname{Re}\left(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_1 t} \pm c_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_2 t}\right) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)t/2}\left(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t/2} \pm c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)t/2}\right)\right)$$

mit komplexen c_i. Nimmt man hier zum Beispiel $c_1 = c_2 = 1$, so ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos((\omega_1-\omega_2)t/2)\cos((\omega_1+\omega_2)t/2) \\ y(t) &= 2\sin((\omega_1-\omega_2)t/2)\sin((\omega_1+\omega_2)t/2) \end{aligned}$$

Ist die verbindende Feder schwach im Verhältnis zu den Federn gegen die Wände, in Formeln $a \gg b$, so liegen die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 und damit auch die Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 verhältnismäßig nah beieinander. Im Versuch kann man in diesem Fall schön sehen, wie die beiden Wägelchen mit der Winkelgeschwindigkeit $(\omega_1 - \omega_2)/2$ ihre Energie untereinander austauschen.

Bemerkung 9.3.2. Im Übrigen ist es auch a priori klar, daß in der symmetrischen Situation die zweielementige Symmetriegruppe unserer Gleichung, die der Vertauschung der beiden Wägelchen entspricht, auf dem Lösungsraum operieren muß, daß wir also uns schon von Anfang an hätten darauf beschränken dürfen, nur die symmetrischen und die antisymmetrischen Lösungen zu bestimmen und die allgemeine Lösung als Linearkombination solcher speziellen Lösungen zu erhalten.

9.4 Angeregte Schwingungen

Bemerkung 9.4.1. Ist wieder A eine komplexe $(n \times n)$-Matrix und ist zusätzlich eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ vorgegeben und man sucht alle differenzierbaren $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, die das "inhomogene" System von Differentialgleichungen

$$\gamma'(t) = A\gamma(t) + f(t)$$

lösen, so rät einem die Methode der **Variation der Konstanten** zum Ansatz

$$\gamma(t) = \exp(tA)c(t)$$

Man erkennt leicht, daß dieser Ansatz eine Lösung liefert, wenn $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ differenzierbar ist und die Gleichung $f(t) = \exp(tA)c'(t)$ erfüllt, als da heißt für

$$c(t) = \int^t \exp(-\tau A)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

wobei $c(t)$ als unbestimmes Integral natürlich nur bis auf eine additive Konstante aus dem $\mathbb{C}^n$ wohldefiniert ist. Daß wir mit diesem Verfahren tatsächlich auch alle Lösungen $\gamma(t)$ unseres inhomogenen Systems von Differentialgleichungen erhalten ergibt sich daraus, daß ja ganz offensichtlich die Differenz von je zwei Lösungen unserer inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung $\gamma' = A\gamma(t)$ sein muß. In der Sprache der linearen Algebra bilden die Lösungen der inhomogenen Gleichung also einen affinen Teilraum des Raums aller Funktionen, dessen Raum von Richtungsvektoren der Lösungsraum der homogenen Gleichung ist.

Beispiel 9.4.2 *(***Angeregte Schwingungen***).* Eine Lampe ist mit einer Feder an einer vibrierenden Decke aufgehängt. Sei $h(t)$ die Auslenkung der Decke zur Zeit t und $x(t)$ die Höhe der Lampe zur Zeit t, beide gemessen auf einer gegen den Boden festen Skala, auf der $h = x = 0$ einen Zustand beschreibt, in dem sich die Federkraft, die die Lampe zur Decke zieht, und die Schwerkraft der Lampe die Waage halten. So genügt $x(t)$ einer Differentialgleichung der Gestalt

$$\ddot{x}(t) = -a(x(t) - h(t))$$

wobei a positiv ist und von der Masse der Lampe und der Federkonstante abhängt. Wie im Beweis von 9.2.2 schreiben wir das um zu einem System erster Ordnung

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0' & = & \gamma_1 \\ \gamma_1' & = & -a\gamma_0 + ah \end{array}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\gamma' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} 0 \\ ah \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom unserer Matrix A ist $X^2 + a$, die Eigenwerte ergeben sich zu $\pm\,\mathrm{i}\,\eta$ für $\eta = \sqrt{a}$ und als zugehörige Eigenvektoren finden wir $(1, \pm\,\mathrm{i}\,\eta)^\top$. Nehmen wir diese Eigenvektoren als Spalten einer Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i}\,\eta & \mathrm{i}\,\eta \end{pmatrix}, \quad \text{so gilt} \quad P^{-1} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\eta} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\,\eta & -1 \\ \mathrm{i}\,\eta & 1 \end{pmatrix}$$

und wir haben offensichtlich $AP = P\,\mathrm{diag}(-\mathrm{i}\,\eta, \mathrm{i}\,\eta)$ alias $A = PBP^{-1}$ für die Diagonalmatrix $B = \mathrm{diag}(-\mathrm{i}\,\eta, \mathrm{i}\,\eta)$ und $\psi = P^{-1}\gamma$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\psi'(t) = B\psi(t) + f(t) \quad \text{mit} \quad f(t) = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ ah(t) \end{pmatrix} = \frac{ah(t)}{2\,\mathrm{i}\,\eta} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ich betrachte von nun an diese Gleichung, da es mit übersichtlicher scheint, mit $\exp tB$ anstelle von $\exp tA = P(\exp tB)P^{-1}$ zu hantieren. Nach unseren Überlegungen lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$\psi(t) = \exp(tB)c(t) \quad \text{mit} \quad c(t) = \int^t \exp(-\tau B) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Nehmen wir zum Beispiel an, daß unsere Decke vibriert mit $h(t) = k\sin(\omega t)$ für $\omega > 0$, so ergibt sich die erste Komponente $c_1(t)$ von $c(t)$ zu

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\tfrac{ka}{2\,\mathrm{i}\,\eta} \int^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau\eta} \left(\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau\omega} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\tau\omega}}{2\,\mathrm{i}} \right) \mathrm{d}\tau \\ &= \tfrac{ka}{4\eta} \int^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau(\eta+\omega)}\, \mathrm{d}\tau - \tfrac{ka}{4\eta} \int^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau(\eta-\omega)}\, \mathrm{d}\tau \\ &= \text{konst} + \tfrac{ka}{4\,\mathrm{i}\,\eta(\eta+\omega)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t(\eta+\omega)} - \begin{cases} \tfrac{ka}{4\,\mathrm{i}\,\eta(\eta-\omega)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t(\eta-\omega)} & \text{falls} \quad \eta \neq \omega; \\ \tfrac{ka}{4\eta} t & \text{falls} \quad \eta = \omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Ähnlich berechnen wir $c_2(t)$ und erkennen, daß in dem Fall, daß die Eigenfrequenz der Lampe nahe an der Frequenz der Decke ist, d.h. für $|\eta - \omega|$ klein die Schwingung sehr groß werden kann und im Fall $\eta = \omega$ die Auslenkung eventuell sogar gegen Unendlich strebt. In der Physik spricht man in diesen Fällen von **Resonanz** bzw. von einer **Resonanzkatastrophe**.

10 Grundlegendes zu Fourierreihen

10.1 Eindeutigkeit der Fourierreihe

Definition 10.1.1. Sei M eine Menge und $p > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir sagen, eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to M$ habe die **Periode** p genau dann, wenn gilt $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Satz 10.1.2 (Entwicklung in eine Fourier-Reihe, reelle Form). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der Periode 2π. So gibt es eindeutig bestimmte $a_\nu, b_\nu, c \in \mathbb{R}$ derart, daß gilt*

$$f(x) = c + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin(\nu x) + b_\nu \cos(\nu x)$$

in dem Sinne, daß die Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen unsere Funktion f konvergiert.

Satz 10.1.3 (Entwicklung in eine Fourier-Reihe, komplexe Form). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der Periode 2π. So gibt es eindeutig bestimmte $c_\nu \in \mathbb{C}$ derart, daß im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} = f(x)$$

Bemerkung 10.1.4. Natürlich können wir in der ersten Formulierung 10.1.2 unseres Satzes auch komplexwertige Funktionen erlauben, wenn wir $a_\nu, b_\nu, c \in \mathbb{C}$ zulassen. Die beiden Sätze sind dann äquivalent, da ja nach der Euler'schen Formel gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} & = & \cos \nu x + \mathrm{i} \sin \nu x \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x} & = & \cos \nu x - \mathrm{i} \sin \nu x \end{array}$$

Gegeben eine Darstellung wie in Satz 10.1.3 erhalten wir also eine Darstellung wie in Satz 10.1.2 mit $c = c_0$, $b_\nu = c_\nu + c_{-\nu}$, $a_\nu = \mathrm{i}\, c_{-\nu} - \mathrm{i}\, c_\nu$, und diese Gleichungen sind erfüllt genau dann, wenn gilt

$$c_0 = c,\ c_\nu = \frac{1}{2}(b_\nu - \mathrm{i}\, a_\nu),\ \text{und } c_{-\nu} = \frac{1}{2}(b_\nu + \mathrm{i}\, a_\nu)$$

Beweis. Wir zeigen vorerst nur die Eindeutigkeit, der Beweis der Existenz wird in 10.4.6 nachgeholt. Aus 8.6.17 oder auch aus der Euler'schen Formel folgt, daß die Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} = \cos \nu x + \mathrm{i} \sin \nu x$ gegeben wird durch $f'(x) = -\nu \sin \nu x + \mathrm{i}\, \nu \cos \nu x = \mathrm{i}\, \nu\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$. Mit 8.2.9 und der vektorwertigen Variante des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung 8.4.7

erhalten wir $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}\,\nu}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}\,|_0^{2\pi} = 0$ falls $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu \neq 0$, und für $\nu = 0$ ergibt sich $\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi$. Wir folgern

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mu x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \nu = \mu; \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

und indem wir die gleichmäßige Konvergenz mit dem Integral vertauschen und uns überlegen, daß das auch für komplexwertige Funktionen erlaubt ist, erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x}\,\mathrm{d}x = 2\pi c_\nu$$

Das zeigt die Eindeutigkeit der c_ν. Der Beweis der Existenz wird in 10.4.6 nachgeholt. □

Satz 10.1.5 (Variante zur Fourier-Reihe). *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der Periode 2π, so gibt es eindeutig bestimmte $c_\nu \in \mathbb{C}$ derart, daß bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf* $\mathrm{Ens}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *im Sinne von 7.6.8 gilt*

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} = f(x)$$

Bemerkung 10.1.6. Natürlich müssen hier die c_ν dieselben sein wie in der schwächeren aber einfacher zu formulierenden Version 10.1.3. Der Beweis ihrer Existenz wird in 10.4.6 gegeben. Ich habe etwas gezögert, auf der rechten Seite $f(x)$ zu schreiben wo doch schlicht die Funktion f gemeint ist, aber auf der linken Seite steht ja auch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$ für die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$.

10.2 Der Satz von Stone-Weierstraß

Definition 10.2.1. Eine Teilmenge eines metrischen Raums heißt **dicht** genau dann, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist.

Definition 10.2.2. Gegeben ein kompakter Raum X bezeichne $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ den reellen Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X mit seiner Supremumsnorm. Ein unter Produkten stabiler Untervektorraum $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ heißt eine **Unteralgebra** von $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Enthält unsere Unteralgebra darüber hinaus die Funktion 1, die jedem Punkt aus X den Wert 1 zuordnet, so nennen wir sie eine **unitäre** Unteralgebra. Schließlich sagen wir, eine Teilmenge $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ **trenne die Punkte** von X genau dann, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $a \in A$ gibt mit $a(x) \neq a(y)$.

Satz 10.2.3 (Stone-Weierstraß). *In der Algebra aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum liegt jede unitäre Unteralgebra, die die Punkte unseres Raums trennt, bereits dicht in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

Bemerkung 10.2.4. Unter einem kompakten Raum darf man hier und im folgenden je nach Wissensstand einen kompakten metrischen oder allgemeiner einen kompakten topologischen Raum verstehen.

Korollar 10.2.5 (Approximationssatz von Weierstraß). *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. So gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Polynomfunktion $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit*

$$|p(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weierstraß 10.2.3. □

Beweis des Satzes von Stone-Weierstraß. Sei X unser kompakter Raum und $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ unsere unitäre Unteralgebra. Wir ziehen uns zunächst auf den Fall zurück, daß A in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ abgeschlossen ist, und zeigen dazu:

Lemma 10.2.6. *Sei X kompakt und $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra. So ist auch der Abschluß $\bar{A}$ von A eine Unteralgebra.*

Beweis. Nach 6.4.15 ist $\bar{A}$ genau die Menge aller stetigen Funktionen $a : X \to \mathbb{R}$ derart, daß es eine Folge a_n aus A gibt, die gleichmäßig gegen a konvergiert. Sei b ein anderes Element von $\bar{A}$ und b_n eine Folge aus A, die gleichmäßig gegen b konvergiert. Wir behaupten, daß dann auch $a_n + b_n$ gleichmäßig gegen $a + b$ konvergiert und $a_n b_n$ gleichmäßig gegen ab. Die erste Aussage überlassen wir dem Leser. Für die zweite benutze man die Abschätzung

$$\begin{array}{rcl} \|ab - a_n b_n\| & \leq & \|a - a_n\| \, \|b_n\| + \|a\| \, \|b - b_n\| \\ & \leq & \varepsilon(\|b\| + 1 + \|a\|) \end{array}$$

falls gilt $\|a - a_n\| < \varepsilon$, $\|b - b_n\| < \varepsilon$ und $\varepsilon < 1$. □

Erfüllt also eine Unteralgebra $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ die Bedingungen im Satz, so auch ihr Abschluß $\bar{A}$. Um den Satz von Stone-Weierstraß zu beweisen reicht es demnach aus, wenn wir unter der zusätzlichen Annahme A abgeschlossen zeigen $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Um weiterzukommen brauchen wir:

Lemma 10.2.7. *Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es stets ein Polynom $p = p_\varepsilon$ mit $|\sqrt{x} - p(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$.*

Erster Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist auf $[0,2]$, finden wir $\eta \in (0,1)$ mit

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x+\eta}| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [0,1]$$

Da die Taylorreihe von $\sqrt{z}$ um den Entwicklungspunkt 1 nach 5.1.14 auf dem Intervall $[\eta, 1+\eta]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{z}$ konvergiert, finden wir weiter ein Polynom p mit

$$|\sqrt{x+\eta} - p(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [0,1]$$ □

Zweiter Beweis. Bei der folgenden Alternative muß man etwas mehr denken, aber nichts wissen über die Konvergenz von Taylorreihen. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Polynomen durch $p_0(x) = 0$, $p_{n+1}(x) = p_n(x) + (1/2)(x - p_n(x)^2)$ und behaupten, daß diese Folge auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ konvergiert. In der Tat gilt ja

$$p_{n+1} = p_n + (\sqrt{x} - p_n)(\sqrt{x} + p_n)/2$$

und dieser Gleichung sehen wir an, daß für $x \in [0,1]$ gilt

$$p_0 \leq p_1 \leq \ldots \leq \sqrt{x}$$

denn es folgt induktiv $(\sqrt{x} - p_n) \geq 0$ und $(\sqrt{x} + p_n)/2 \leq 1$. Andererseits folgt aus unserer Gleichung auch

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt{x} - p_{n+1}) & = & (\sqrt{x} - p_n)(2 - \sqrt{x} - p_n)/2 \\ & \leq & (\sqrt{x} - p_n)(2 - \sqrt{x})/2 \end{array}$$

und somit konvergiert unsere Folge p_n auf jedem Intervall $[a,1]$ mit $0 < a < 1$ gleichmässig gegen $\sqrt{x}$. Dann muß (mit etwas Nachdenken) unsere Folge aber auf ganz $[0,1]$ gleichmässig gegen $\sqrt{x}$ konvergieren. □

Nun zeigen wir den Satz von Stone-Weierstraß für abgeschlossenes A in fünf Schritten.

1. $a \in A \Rightarrow |a| \in A$. Um das zu zeigen, schreiben wir $a = \lambda b$ mit $\lambda \in (0,\infty)$ und $\|b\| \leq 1$ und erhalten $|a| = \lambda\sqrt{b^2}$. Nach Lemma 10.2.7 gibt es eine Folge p_n von Polynomen, die auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ strebt, und dann strebt $\lambda p_n(b^2)$ auf X gleichmäßig gegen $|a|$. Da A eine Unteralgebra ist, liegen alle $\lambda p_n(b^2)$ auch in A, und da A abgeschlossen ist unter gleichmäßiger Konvergenz, folgt $|a| \in A$.

2. $a, b \in A \Rightarrow \sup(a,b) \in A$, $\inf(a,b) \in A$. In der Tat gilt

$$\begin{array}{rcl} \sup(a,b) & = & 1/2(a + b + |a-b|) \\ \inf(a,b) & = & 1/2(a + b - |a-b|) \end{array}$$

3. Für $x \neq y$ zwei verschiedene Punkte aus X und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es $a \in A$ mit $a(x) = \alpha$, $a(y) = \beta$. In der Tat betrachte man die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R}^2 \\ a & \mapsto & (a(x), a(y)) \end{array}$$

Da A Punkte trennt, gibt es $a \in A$ mit $a(x) \neq a(y)$. Da die Konstanten zu A gehören, liegt jedoch auch $(1,1)$ im Bild unserer linearen Abbildung. Damit enthält das Bild unserer linearen Abbildung zwei linear unabhängige Vektoren und ist folglich ganz $\mathbb{R}^2$.

4. Für beliebige $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $a_x \in A$ mit $a_x(x) = f(x)$ und

$$a_x(y) < f(y) + \varepsilon \quad \forall y \in X$$

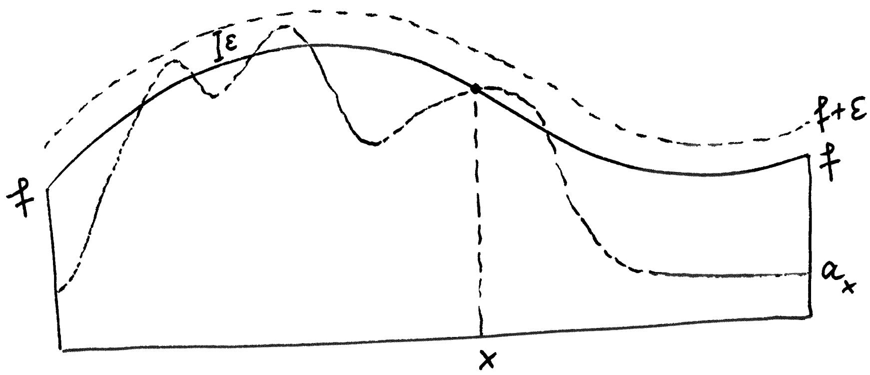
In der Tat, für alle $y \in X$ finden wir $a_{x,y} \in A$ mit $a_{x,y}(x) = f(x)$ und $a_{x,y}(y) = f(y)$. Auf einer geeigneten offenen Umgebung U_y von y gilt dann $a_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall z \in U_y$. Da X kompakt ist, gibt es nun $E \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{y \in E} U_y$. Dann nehmen wir $a_x = \inf_{y \in E} a_{x,y}$ und haben unser a_x gefunden.

5. Für beliebiges $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $a \in A$ mit $\|a - f\| < \varepsilon$. Sei in der Tat für jedes $x \in X$ ein a_x wie eben gewählt. Dann hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung V_x mit $f(z) - \varepsilon < a_x(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall z \in V_x$ wobei die zweite Ungleichung sogar gilt für alle $z \in X$. Da X kompakt ist, gibt es wieder $F \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{x \in F} V_x$. Ist X nicht leer, so nehmen wir nun $a = \sup_{x \in F} a_x$ und haben unser a gefunden. Der Fall $X = \emptyset$ ist eh unproblematisch. □

Definition 10.2.8. Wir betrachten nun den Raum $\mathcal{C}(X)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm und nennen einen komplexen Untervektorraum $B \subset \mathcal{C}(X)$, der stabil ist unter Produkten, eine **komplexe Unteralgebra** von $\mathcal{C}(X)$.

Korollar 10.2.9 (Komplexer Stone-Weierstraß). *Sei X kompakt und $B \subset \mathcal{C}(X)$ eine unitäre komplexe Unteralgebra, die die Punkte von X trennt. Ist B zusätzlich stabil unter Konjugation, in Formeln $b \in B \Rightarrow \bar{b} \in B$, so liegt B dicht in $\mathcal{C}(X)$.*

Beweis. Man wendet den Stone-Weierstraß 10.2.3 an auf $A = B \cap \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Aus $b \in B$ folgt $\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b \in A$, denn es gilt $\operatorname{Re} b = (b + \bar{b})/2$ und $\operatorname{Im} b = (b - \bar{b})/2\,\mathrm{i}$. Also trennt auch unser A die Punkte von X. Für $f \in \mathcal{C}(X)$ finden wir $u, v \in A$ mit $|\operatorname{Re} f(x) - u(x)| < \varepsilon/2$ und $|\operatorname{Im} f(x) - v(x)| < \varepsilon/2$ für alle $x \in X$, setzen $b = u + \mathrm{i}\, v$ und folgern $\|f - b\| < \varepsilon$. □



Zum Beweis von 10.2.3, Schritt 4

Definition 10.2.10. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Gestalt $t \mapsto \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} d_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu t}$ mit $d_\nu \in \mathbb{C}$ heißt ein **trigonometrisches Polynom**.

Satz 10.2.11 (Dichtheit trigonometrischer Polynome). *Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ stetig mit $f(0) = f(2\pi)$. So gibt es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom $g = g_\varepsilon$ mit*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

Beweis. Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Wir betrachten die Abbildung $E : [0, 2\pi] \to S^1$, $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$. Aus dem anschließenden Lemma 10.2.12 folgt, daß das Vorschalten von E eine Bijektion

$$(\circ\, E) : \, \mathcal{C}(S^1) \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$$

liefert. Unter unserer Bijektion entsprechen nun aber die trigonometrischen Polynome auf $[0, 2\pi]$ genau den Funktionen der Form $\sum_{\nu=-n}^{n} d_\nu z^\nu$ auf der Kreislinie S^1. Da gilt $\overline{z} = z^{-1}$ für alle $z \in S^1$ dürfen wir den Satz von Stone-Weierstraß für komplexwertige Funktionen 10.2.9 anwenden und folgern, daß das $\mathbb{C}$-Erzeugnis der z^ν dicht liegt in $\mathcal{C}(S^1)$. Damit folgt der Satz. □

Lemma 10.2.12. *Ist $f : X \twoheadrightarrow Y$ eine stetige Surjektion von kompakten Räumen, so ist eine Abbildung $g : Y \to Z$ in einen weiteren metrischen Raum Z stetig genau dann, wenn $g \circ f$ stetig ist.*

Beweis. Das Problem ist hier, die Stetigkeit von g aus der Stetigkeit von $g \circ f$ zu folgern. Da f surjektiv ist, gilt für jede Teilmenge $A \subset Z$ offensichtlich

$$g^{-1}(A) = f((g \circ f)^{-1}(A))$$

Ist A abgeschlossen in Z, so ist $(g \circ f)^{-1}(A)$ abgeschlossen in X wegen der Stetigkeit von $g \circ f$, also kompakt. Dann ist $f((g \circ f)^{-1}(A))$ kompakt als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung, mithin abgeschlossen. Zusammenfassend haben wir also gezeigt, daß das Urbild $g^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subset Z$ abgeschlossen ist in Y, und daraus folgt mit 6.4.12 die Stetigkeit von g. □

10.3 Geometrie in euklidischen Vektorräumen

Definition 10.3.1. Ein **Skalarprodukt** auf einem reellen Vektorraum V ist eine bilineare Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ derart, daß gilt $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ für alle $v, w \in V$ und $\langle v, v\rangle \leq 0 \Rightarrow v = 0$.

Bemerkung 10.3.2. Ich stelle mir meist $V = \mathbb{R}^n$, eigentlich sogar $V = \mathbb{R}^3$ vor mit dem Skalarprodukt $\langle v, w\rangle = v_1w_1 + \ldots + v_nw_n$ für $v = (v_1, \ldots, v_n)$ und $w = (w_1, \ldots, w_n)$. Anschaulich mißt $\langle v, w\rangle$ im Fall $v \neq 0$ das Produkt der Länge von v mit der Länge der orthogonalen Projektion von w auf die Gerade $\mathbb{R}v$, wobei die Länge dieser Projektion negativ zu rechnen ist, falls die Projektion ein negatives Vielfaches von v ist. Man prüft diese Anschauung am leichtesten im Fall $v = (a, 0, \ldots, 0)$. Um sie im allgemeinen einzusehen beachte man, daß unser anschaulich erklärtes Skalarprodukt zunächst für Vektoren gleicher Länge aber dann durch Reskalieren auch im allgemeinen gleich bleibt beim Vertauschen der beiden Vektoren, daß es offensichtlich in der zweiten und dann auch in der ersten Variablen linear sein muß, und daß es auf Vektoren der Standardbasis dieselben Werte liefert wie unsere Formel.

Definition 10.3.3. Ein **Skalarprodukt** auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ derart, daß für alle $v, w, v', w' \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$, $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.
2. $\langle v, w + w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle$, $\langle v, \mu w\rangle = \bar{\mu}\langle v, w\rangle$.
3. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$, insbesondere $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$.
4. $\langle v, v\rangle \leq 0 \Rightarrow v = 0$.

Bemerkung 10.3.4. Nebenbei bemerkt folgt hier 2 schon aus 1 und 3, aber es kann auch nicht schaden, diese Formeln nochmal explizit hinzuschreiben. Das Standardbeispiel ist $V = \mathbb{C}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle v, w\rangle = v_1\bar{w}_1 + \ldots v_n\bar{w}_n$ für $v = (v_1, \ldots, v_n)$ und $w = (w_1, \ldots, w_n)$. Viele Autoren verwenden auch die abweichende Konvention, nach der im komplexen Fall ein Skalarprodukt schieflinear im ersten und linear im zweiten Eintrag sein soll.

Definition 10.3.5. Einen reellen bzw. komplexen Vektorraum mit Skalarprodukt nennt man auch einen reellen bzw. komplexen **euklidischen Vektorraum**. In einem euklidischen Vektorraum definiert man die **Länge** oder **(euklidische) Norm** $\|v\| \in \mathbb{R}$ eines Vektors v durch $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Daß das tatsächlich auch im Sinne von 6.7.2 eine Norm ist, werden wir gleich als 10.3.9 zeigen. Vektoren der Länge 1 heißen auch **normal**. Zwei Vektoren v, w heißen **orthogonal** und man schreibt $v \perp w$ genau dann, wenn gilt $\langle v, w\rangle = 0$. Man sagt dann auch, v und w **stehen senkrecht aufeinander**.

Bemerkung 10.3.6. Stehen zwei Vektoren v, w eines euklidischen Vektorraums senkrecht aufeinander, so gilt der **Satz des Pythagoras**

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

In der Tat folgt ja aus $v \perp w$ schon

$$\langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle$$

Definition 10.3.7. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren eines euklidischen Vektorraums heißt ein **Orthonormalsystem** genau dann, wenn die Vektoren v_i alle die Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, in Formeln

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j; \\ 0 & i\neq j. \end{cases}$$

Lemma 10.3.8 (Orthogonale Projektion). *Ist V ein euklidischer Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ ein* endliches *Orthonormalsystem, so kann man jeden Vektor $v \in V$ in eindeutiger Weise schreiben als*

$$v = p + r$$

mit p in dem von den v_i erzeugten Teilraum und r orthogonal zu allen v_i.

Beweis. Machen wir den Ansatz $p = \sum \lambda_i v_i$, so folgt $\langle v, v_i\rangle = \langle p, v_i\rangle = \lambda_i$ und damit die Eindeutigkeit von p. Andererseits steht aber mit diesen λ_i der Vektor $r = v - \sum \lambda_i v_i$ auch tatsächlich senkrecht auf allen v_i. □

Bemerkung 10.3.9. Besteht unser Orthonormalsystem aus einem einzigen Vektor v_1, so erhalten wir $p = \langle v, v_1\rangle v_1$ und $\|v\|^2 = \|p\|^2 + \|r\|^2 \geq \|p\|^2 = |\langle v, v_1\rangle|^2$ und damit $\|v\|\|v_1\| \geq |\langle v, v_1\rangle|$. Diese Ungleichung muß aber offensichtlich erhalten bleiben, wenn wir darin v_1 durch ein Vielfaches ersetzen, und so erhalten wir für beliebige Vektoren v, w eines beliebigen euklidischen Vektorraums die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$\|v\|\|w\| \geq |\langle v, w\rangle|$$

Daraus hinwiederum ergibt sich sofort die **Dreiecksungleichung**

$$\|v+w\| = \|v\| + \|w\|$$

indem man beide Seiten quadriert und die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung anwendet. Insbesondere ist unsere euklidische Norm wirklich eine Norm im Sinne von 6.7.2.

Bemerkung 10.3.10. Die Abbildung $v \mapsto p$ heißt die **orthogonale Projektion** auf den von den v_i aufgespannten Teilraum. Man beachte, daß die orthogonale Projektion von v genau derjenige Punkt p unseres Teilraums ist, der den kleinsten Abstand zu v hat: Für jeden Vektor $w \neq 0$ aus unserem Teilraum gilt nämlich nach Pythagoras

$$\|(p+w) - v\|^2 = \|p-v\|^2 + \|w\|^2 > \|p-v\|^2$$

10.4 Konvergenz der Fourierreihe

Definition 10.4.1. Wir versehen den komplexen Vektorraum $V = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ aller stetigen Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g}$$

Die zugehörige Norm notiert man in diesem Fall mit $\sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2$.

Bemerkung 10.4.2. Unsere Formeln aus dem Beweis von 10.1.3 besagen genau, daß die $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$ in diesem Raum ein Orthonormalsystem bilden,

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mu x} \rangle = \begin{cases} 1 & \nu = \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fourier-Koeffizienten schreiben sich nun kürzer $c_\nu = \langle f, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} \rangle$ und wir erhalten allgemeiner eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0, 2\pi]) & \to & \operatorname{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

indem wir jeder stetigen Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die Familie ihrer Fourierkoeffizienten im Sinne von 10.4.3 zuordnen. Im folgenden werden wir diese Abbildung erweitern zu einer Bijektion zwischen geeigneten Räumen quadratintegrierbarer Funktionen.

Satz 10.4.3 (Konvergenz im quadratischen Mittel). *Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und seien $c_\nu = \langle f, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} \rangle$ ihre Fourierkoeffizienten. So gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} \right\|_2 = 0$$

Bemerkung 10.4.4. Gegeben eine Folge f_n stetiger Funktionen von einem kompakten Intervall $[a, b]$ nach $\mathbb{C}$ und eine weitere stetige Funktion f sagt man, die Folge der f_n **konvergiere im quadratischen Mittel gegen** f genau dann, wenn gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f - f_n|^2 = 0$$

Unser Satz sagt also in dieser Terminologie, daß die Fourierreihe einer stetigen Funktion im quadratischen Mittel gegen besagte Funktion konvergiert. Wir werden den vorhergehenden Satz in **??** verallgemeinern von stetigen auf alle "quadratintegrierbaren" Funktionen. Mit der Terminologie aus 7.6.8 können wir im normierten Vektorraum $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ aus 10.4.1 die Aussage des Satzes auch schreiben in der Gestalt

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$$

Beweis. Für alle n können wir f nach 10.3.8 zerlegen in seine Projektion auf den von allen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$ mit $-n \leq \nu \leq n$ aufgespannten Teilraum von $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ und einen auf diesem Teilraum senkrechten Anteil,

$$f = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} + \left(f - \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} \right)$$

Wir nehmen nun zunächst zusätzlich $f(0) = f(2\pi)$ an. Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir dann nach dem Korollar 10.2.11 des Satzes von Stone-Weierstraß ein trigonometrisches Polynom $g = \sum_{\nu=-n}^{n} d_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$ mit

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x$$

Es folgt sofort $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Da in einem euklidischen Vektorraum nach 10.3.10 die orthogonale Projektion eines Vektors auf einen endlichdimensionalen Teilraum stets die bestmögliche Approximation durch Vektoren dieses Teilraums ist, folgt für alle $m \geq n$ erst recht

$$\left\| f - \sum_{\nu=-m}^{m} c_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x} \right\|_2 < \varepsilon$$

Das zeigt die Behauptung im Fall $f(0) = f(2\pi)$. Im Fall $f(0) \neq f(2\pi)$ müssen wir noch eine extra Verrenkung machen und zunächst eine stetige Funktion $\tilde{f}$ finden mit $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi)$ sowie $\|\tilde{f} - f\|_2 < \varepsilon$. Dann gibt es wieder ein trigonometrisches Polynom g mit $\|\tilde{f} - g\|_2 < \varepsilon$, also $\|f - g\|_2 < 2\varepsilon$, und der Beweis kann wie zuvor zu Ende geführt werden. □

Korollar 10.4.5. *Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ stetig und seien $c_\nu = \langle f, e^{i\nu x} \rangle$ die Fourierkoeffizienten. So gilt $\|f\|_2^2 = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_\nu|^2$.*

Beweis. Die Differenz $\|f\|_2^2 - \sum_{\nu=-n}^{n} |c_\nu|^2$ ist das Quadrat des Ausdrucks, von dem wir gerade gezeigt haben, daß er gegen Null strebt. □

Satz 10.4.6 (über die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe). *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit der Periode 2π, so konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.*

Bemerkung 10.4.7. Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch noch, wenn wir unsere Funktion stetig und stückweise stetig differenzierbar ist in dem Sinne, daß es Punkte $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = 2\pi$ gibt derart, daß die Einschränkung von f auf jedes der Intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ stetig differenzierbar ist. Die Details mag der Leser zur Übung ausarbeiten.

Beweis. Die Fourier-Koeffizienten $c_\nu = \langle f, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}\rangle$ von f ergeben sich für $\nu \neq 0$ aus den Fourier-Koeffizienten $c'_\nu = \langle f', \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}\rangle$ von f' durch partielles Integrieren zu

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\nu x}}{-\mathrm{i}\,\nu}\,\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{i}\,c'_\nu}{\nu}$$

Jetzt gilt jedoch $2|\alpha\beta| \leq (|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und es folgt

$$\sum_\nu |c_\nu| \leq |c_0| + \sum_{\nu\neq 0}\left(\frac{1}{\nu^2} + |c'_\nu|^2\right) < \infty$$

Also konvergiert die Funktionenfolge $\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu x}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion g. Natürlich konvergiert unsere Reihe erst recht im quadratischen Mittel gegen diese Funktion g, aus 10.4.3 folgt also $g = f$ und wir sind fertig. □

Bemerkung 10.4.8. Fassen wir unsere stetig differenzierbare 2π-periodische Funktion f als eine Funktion auf dem Einheitskreis auf und nehmen sie reellwertig an, so gilt für ihre Fourier-Koeffizienten offensichtlich $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$. Sie können zum Beispiel in **??** lernen, warum die Formel

$$P(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu + c_{-\nu}\bar{z}^\nu$$

diejenige stabile Wärmeverteilung auf der Einheitskreisscheibe beschreibt, die sich bei der vorgegebenen Randverteilung f einstellt. In diesem Zusammenhang hat Fourier, von dem erzählt wird, daß er häufig fröstelte, ursprünglich die heute nach ihm benannten Reihenentwicklungen gefunden.

Literaturverzeichnis

[Brö95] Theodor Bröcker, *Analysis 1 und 2*, Spektrum, 1995.

[Cou71] Richard Courant, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Springer, 1971.

[For92] Otto Forster, *Analysis 1-3*, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, 1992.

[Heu02] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis 2*, 12 ed., Teubner, 2002.

[Heu03] ———, *Lehrbuch der Analysis 1*, 15 ed., Teubner, 2003.

[Kön97] Königsberger, *Analysis 1 und 2*, Springer, 1997.

[Lan68] Serge Lang, *Analysis 1*, Addison-Wesley, 1968.

[Lan74] ———, *Algebra*, Addison-Wesley, 1974.

[Rud76] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[Spi65] Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, Benjamin, 1965.

[Ste89] Ian Steward, *Galois theory*, second ed., Chapman and Hall, 1989.

Index

Abbildung, 31
  identische Abbildung, 31
  inverse Abbildung, 35
  Umkehrabbildung, 35
Abel'scher Grenzwertsatz, 171
abgeschlossen
  in metrischem Raum, 182
  in reellem Vektorraum, 194
Ableitung, 130
  n-te Ableitung, 164
  der allgemeinen Potenzen, 137
  der Exponentialfunktion, 135
  des Logarithmus, 135
  von Brüchen, 134
  komplexe, 253
  linksseitig , 132
  rechtsseitig, 132
  reelle, 133
  Umkehrfunktion, reell, 135
  vektorwertiger Funktion, 204
  von Brüchen, komplex, 253
  von Umkehrfunktion, komplex, 254
Abschluß, 185
absolut summierbar, 221
Absolutbetrag, 67
abzählbar, 87
abzählbar unendlich, 87
Additionsformeln
  für sin und cos, 224
äquidistant, 124
äquivalent, 192
affine Abbildung, 189
affiner Raum, 188
  normiert, 190
  über Vektorraum, 189
algebraisch, 91
allgemeine Potenzen, 114
Allgemeiner Mittelwertsatz, 146
alternierende harmonische Reihe, 96
Amplitude, 260
analytisch
  auf $\mathbb{R}$, 165
Anfangswertisomorphismus, 219, 261
  bei reeller Schwingungsgleichung, 257
  bei Schwingungsgleichung, 259
Anordnung, 63
Antisymmetrie
  für Relation, 63
Approximationspolynom, 166
archimedisch angeordnet, 72
Arcussinus, 227
Arcustangens, 230
Area Cosinus hyperbolicus, 154
Area Sinus hyperbolicus, 152
assoziativ, 40

Ball, 176
Banach-Raum, 219
Berührungspunkt, 182
Bernoulli-Ungleichung, 67
beschränkt
  Abbildung, 180
  Menge reeller Zahlen, 83
  metrischer Raum, 180
bestimmte Divergenz, 78

Betragsabstand, 174
Bijektion, 34
bijektiv, 34
Bild, 31, 33
Bildmenge, 33
binären Logarithmus, 114
Binomialkoeffizienten, 14
binomische Formel, 15
Binomische Reihe, 163
Bolzano-Weierstraß, 84
Brechungsgesetz, 139
Bruchzahlen, 23

$\mathcal{C}$, 198
Cantor'sche Diagonalverfahren, 89
Cauchy-Folge, 84, 219
Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, 275
continous, 107
continue, 107
corps, 47
Cosecans, 230
Cosecans hyperbolicus, 154
Cosinus, 213
Cosinus hyperbolicus, 152
Cotangens, 230

Dedekind'scher Schnitt, 68
Definition, 11
Definitionsbereich, 31
dicht, 268
Differenz
    von Mengen, 24
differenzierbar, 204
    in einer Veränderlichen, 130
    vektorwertige Funktion, 204
Dimension
    von affinem Raum, 189
Dini
    Satz von, 198
disjunkt, 23
Distributivgesetz, 47
Dreiecksungleichung, 67, 174, 235, 275

ebene Quadriken, 154
echt
    Teilmenge, 23
Eigenschwingungen, 263
Einbettung, 34
Einheitskreis, 213
Einheitswurzeln, 241
Einparameteruntergruppen
    von $\mathbb{R}$, 119
    von $\mathbb{R}^\times$, 119
    von normierten Vektorräumen, 191
Einschränkung, 34
Element, 22
Ellipse, 154
Ens, 31
$\mathrm{Ens}^\times$, 43
Ens^b, 180
ensemble, 31
erweiterte reelle Zahlen, 75
euklidische Norm, 191, 274
euklidischer Abstand, 174
euklidischer Vektorraum, 274
Euler, 94
Euler'sche Formel, 239
Euler'sche Zahl, 99
Exponentialfunktion, 98

Faktoren, 13
Faktorisierung von Polynomen, 243
Fakultät, 13
fast alle
    Menge, 77
Fibonacci-Folge, 16
field, 47
Folge, 77
Fundamentalsystem, 78, 176

Funktion, 105
    Umkehrfunktion, 35
Funktionen
    gebrochen rationale, 109
Funktionentheorie, 256

Gedämpfte Schwingungen, 257
Geometrische Reihe, 93
gerade
    Funktion, 129
Geschwindigkeit, 204
    absolute, 209
gleichmaessig stetig, 121, 188
Graphen, 31
Grenzwert, 203
    rechtsseitiger Grenzwert, 119
    von Folgen, 77
größtes Element, 63
Gruppe, 43
Gruppenhomomorphismus, 49

Häufungspunkt, 115, 203
halboffen
    für reelles Intervall, 76
harmonische Reihe, 94
Hausdorff-Raum, 186
Heine-Borel, 187
Hermite-Lindemann, 241
Hilbert'sche Probleme, 89
    achtes, 94
    erstes, 89
holomorph, 256
Homomorphismus, 49
Hyperbel, 154

id, 31
Identität, 31
Imaginärteil, 235
Induktion, 10
induzierte Metrik, 176
induzierte Topologie, 185
inf, 65
Infimum, 65
Injektion, 34
injektiv, 34
Inklusion, 34
Integral, 122, 245
Integrallogarithmus, 150
Intervall, 75
Intervallschachtelungsprinzip, 85
invers, 43
Inversion, 237
isolierter Punkt, 115
isoliertes lokales Maximum, 143
isoliertes lokales Minimum, 142
Isomorphismus, 49

Kardinalität, 23
kartesisches Produkt, 24
Kegel, 154
Kegelschnitt, 154
Kettenlinie, 152
Kettenregel, 134, 253
kleines o von x^n, 169
kleinstes
    Element, 63
Klumpentopologie, 185
Körper, 47
    angeordneter Körper, 65
Körperhomomorphismus, 49
Körperisomorphismus, 49
kommutativ, 40
kompakt, 76, 120, 186, 195
Kompaktum, 120, 186
Komplement, 24
komplex differenzierbar, 251
komplexe Exponentialfunktion, 239
komplexe Unteralgebra, 271
komplexe Zahlen, 234
Komponentenregel, 206
konjugierte komplexe Zahl, 237
konkave Funktion, 143
konstante Abbildung, 33

Kontinuumshypothese, 89
konvergent, 93
Konvergenz
  gleichmaessige, 182
  gleichmäßige, 159
  im quadratischen Mittel, 276
  Konvergenzradius, 158
  punktweise, 159, 182
  von Folgen, 77
konvergiert gegen, 93
konvex
  Funktion, 143
  in affinem Raum, 206
Kurvenintegral, 210

Länge
  eines Vektors, 274
  eines Weges, 201
Laufindex, 11
lb, 114
Leibniz'sches Konvergenzkriterium, 96
Leibniz-Regel, 133, 253
Lemma, 42
lg, 113
Limes
  von Folgen, 77
lineare Anteil, 189
ln, 113
Lösungsraum, 219, 257, 259, 261
log, 113
Logarithmus, 113
  komplex, 256

Mächtigkeit, 23
Majorante, 97
Majorantenkriterium, 97
max, 63
Maxima und Minima, 142
maximal
  Element, 63
Maximumsnorm, 191
Menge, 22
  leere Menge, 22
  Potenzmenge, 24
  Teilmenge, 23
Metrik, 174
  zu Norm, 190
metrischer Raum, 174
min, 40, 63
minimales
  Element, 63
Mittelwertsatz, 139, 206
Mittelwertsatz der Integralrechnung, 129
Monoid, 42
monoton, 83, 110
Multinomialkoeffizient, 35

natürliche Topologie, 194
negativ, 65
Negatives, 45
neutrales Element, 42
Newton-Verfahren, 87
nichtnegativ, 65
nichtpositiv, 65
Niveauflächen, 173
Niveaulinien, 173
Norm, 190, 235
normal
  Vektor, 274
normierter Raum, 190
normierter Vektorraum, 190
Nullfolge, 77

Obersumme, 126
offen
  in ℝ, 137
  in reellem Vektorraum, 194
  in topologischem Raum, 185
  metrisch, 183
  reelles Intervall, 76

offene Überdeckung, 195
offener Punkt, 203
Operator
  beschränkter, 195
  stetiger, 195
Operatornorm, 194
Ordnung, 61
  partielle, 61
Ordnungsrelation, 61
orthogonal, 274
orthogonale Projektion, 275
Orthonormalsystem, 275

Parabel, 154
Partialbruchzerlegung, 247
Partialsumme, 91
Partielle Integration, 151
partielle Ordnung, 61
Pascal'sches Dreieck, 16
Periode, 267
Permutation, 43
Phase, 260
phytagoreische Zahlentripel, 232
Poisson-Verteilung, 103
Polynomfunktion, 109
poset, 63
positiv, 65
Potenzmenge, 24
Potenzreihe, 158
Produkt von Reihen, 101
Produktmetrik, 178
Produktnorm, 191
Produktregel, 133, 253
Punkt, 22
Pythagoras, Satz von, 274

Quadratwurzel, 85
quasikompakt, 197
Quetschlemma, 80, 117, 204
Quotientenkriterium, 97
Quotientenregel
  im Komplexen, 253

Raum, 22
  affiner, 188
Realteil, 235
reell
  Vektorraum, 190
reell konvergent, 78
reelle Zahl, 71
reeller Vektorraum, 21
Reflexivität
  für Relation, 63
Regeln von de l'Hospital, 146
Reihenglieder, 93
rektifizierbar, 210
Relation, 61
Reskalierung von Translationen, 189
Resonanz, 266
Resonanzkatastrophe, 266
Richtungsraum, 189
Richtungsvektoren, 189
Riemann'sche ζ-Funktion, 94
Riemann'sche Vermutung, 94
Riemannsumme, 124, 128, 245
Rolle, 139

Schnitt
  zweier Mengen, 24
Schranke, 63
Schrankensatz, 208
Secans, 230
Secans hyperbolicus, 154
Sekante, 130
Sinus, 213
Sinus hyperbolicus, 152
Skalarprodukt
  auf dem $\mathbb{R}^n$, 215
  auf komplexem Vektorraum, 274
  auf reellem Vektorraum, 273
Spurtopologie, 185
Stammfunktion, 148, 246, 248

Steigung, 130
stetig
 für Funktion auf $D \subset \overline{\mathbb{R}}$, 107
 für metrische Räume, 176
 topologisch, 185
stimmen ueberein bis zur Ordnung n, 168
Stone-Weierstrass, 269
Substitutionsregel, 150
Summanden, 11
Summenregel, 133, 253
summierbar, 98, 220
sup, 65
Supremum, 65
Supremumsnorm, 191
Surjektion, 34
System von Teilmengen, 185

Tangens, 227
Tangens hyperbolicus, 154
Tangente, 130
Tauber-Bedingung, 172
Taylorentwicklung, 166
Taylorreihe, 164, 165
Teilfolge, 83
Teilmenge, 23
 echte, 23
Teilsystem, 185
Teilüberdeckung, 195
Topologie, 185
 induzierte, 185
 natürliche, 194
topologischer Raum, 185
totale Ordnung, 63
Totalität
 für Relation, 63
Transitivität
 für Relation, 63
Translationen, 189
transzendent, 91
trennt die Punkte, 268
Trigonometrie, 154
trigonometrisches Polynom, 273

überabzählbar, 87
Überdeckung, 195
Umgebung, 76
 ε-Umgebung, 176
 in $\overline{\mathbb{R}}$, 76
 in metrischem Raum, 176
 in topologischem Raum, 186
Umkehrfunktion, 35
Umordnungssatz, 96
unbestimmt divergent, 79
unendlicher Dezimalbruch, 72
ungerade
 Funktion, 129
Unteralgebra, 268
Untersumme, 126
Unterteilung, 128
Urbild, 33

van-de-Ven-Diagramme, 25
Variation der Konstanten, 264
Vektorraum
 reeller, 190
Vereinigung, 24
Verknüpfung, 33
Verknüpfung auf einer Menge, 39
Verknüpfungstafel, 41
Vielfachheit, 243
vollständig, 85, 219

Weg, 201
Weierstraß Approximationssatz, 269
Wert, 31
Wertebereich, 31
Winkelgeschwindigkeit, 260
Wurzel, 85
 q-te Wurzel, 113
 von Polynom, 242
Wurzelkriterium, 113

$\times$, 24

Zahlen, 22
Zweig des Logarithmus, 256
Zwischenwertsatz, 112
zyklische Anordnung, 36