Kleine unipotente affine algebraische Gruppen

Felix Nolte

6. Juli 2025

Einleitung

Affine algebraische Gruppen sind affine Varietäten mit einer verträglichen Gruppenstruktur. Über sie kann man deutlich stärkere Aussagen treffen als über allgemeine Varietäten.

In dieser Arbeit geht es speziell um unipotente affine algebraische Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. In gewisser Weise sind diese ein Teil der "Bausteine" allgemeiner affiner algebraischer Gruppen, wie wir in Kapitel 1 bei den Jordanzerlegungen sehen werden. Das Ziel der Arbeit ist es kleine unipotente affine algebraische Gruppen zu klassifizieren, also bis auf Isomorphie zu bestimmen. Dies ist der Inhalt von Kapitel 5. Das Adjektiv "klein" meint hier "von geringer Dimension". In den ersten vier Kapiteln bauen wir im Wesentlichen die nötige Theorie für diese Klassifikation auf. Wir beginnen in Kapitel 1 mit allgemeinen Resultaten über affine algebraische Gruppen, welche für die ganze weitere Theorie notwendig sind. Insbesondere führen wir unipotente Elemente ein und behandeln die Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen. In Kapitel 2 versuchen wir, nur mit der zuvor eingeführten grundlegenden Theorie, Aussagen über unipotente Gruppen zu treffen und erhalten erste Resultate. Da an diesem Punkt jedoch noch lange keine Klassifikation in Reichweite ist, bauen wir in Kapitel 3 weitere Theorie auf, welche insbesondere auf die Klassifikation unipotenter Gruppen in Charakteristik Null abzielt. Jene Klassifikation wird durch Kapitel 4 möglich gemacht, wo wir mithilfe der Exponentialabbildung für affine algebraische Gruppen eine Äquivalenz von Kategorien zeigen. Mithilfe dieser Äquivalenz ist dann in Kapitel 5 eine Klassifikation der unipotenten Gruppen niedriger Dimension in Charakteristik Null möglich. Der Fall in positiver Charakteristik ist deutlich komplexer und wird in dieser Arbeit weniger genau behandelt.

Der Anspruch dieser Arbeit ist es, für Leser mit guten Vorkenntnissen über affine Varietäten, gut verständlich zu sein, ohne dass besondere Kenntnisse über algebraische Gruppen und algebraische Differentialrechnung vorausgesetzt werden. Aus diesem Grund sind die Kapitel 1 und 3 länger, als sie es unbedingt sein müssten.

Terminologie und Notation

In der folgenden Arbeit nehmen wir den Körper k stets als algebraisch abgeschlossen an. Alle Varietäten sind affin und über k.

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen, inklusive 0
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$\subset$	Beliebige Teilmenge
$\subsetneq$	Echte Teilmenge
$A \setminus B$	$= \{a \in A \mid a \notin B\}$
$f^{-1}(A)$	Für $f\colon X \to Y$ und $A \subset Y$, Urbild von A unter f
$\overline{A}$	Für $A \subset X$ ein topologischer Raum, Abschluss von A in X
$\hookrightarrow$	Injektionen
$\twoheadrightarrow$	Surjektionen
$\mathrm{Ens}(X, Y)$	Für Mengen X und Y, die Menge der Abbildungen von X nach Y

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Affine algebraische Gruppen

In diesem ersten Abschnitt des Kapitels wird eine knappe Einführung in die Begrifflichkeiten der affinen algebraischen Gruppen gegeben wie wir sie hier verwenden und es werden ausgewählte Beispiele und Aussagen dargestellt. Wir orientieren uns hierbei an der Darstellung in [Hum75], Abschnitt 7.1. Für eine genauere Einführung in den Begriff affiner algebraischer Gruppen siehe z.B. [?] oder [?].

Definition 1.1. Eine *affine algebraische Gruppe* ist eine Varietät G mit Gruppenstruktur, wobei die Multiplikation $G \times G \to G$ und die Inversenabbildung $G \to G$ Morphismen von Varietäten sind. Ist die zugrundeliegende Varietät affin, so bezeichnen wir G als eine affine algebraische Gruppe. Man beachte, dass $G \times G$ hier mit der Zariski Topologie betrachtet wird und nicht mit der Produkttopologie.

Definition 1.2. Seien G und G' affine algebraische Gruppen. Eine Abbildung $\phi\colon G \to G'$ ist ein *Morphismus affiner algebraischer Gruppen*, wenn sie ein Morphismus von Varietäten und gleichzeitig ein Gruppenhomomorphismus ist. Ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen ist ein Isomorphismus, wenn er ein Isomorphismus von Varietäten und gleichzeitig ein Isomorphismus von Gruppen ist. Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus einer affinen algebraischen Gruppe auf sich selbst.

Beispiel 1.3. Die *additive Gruppe* ist die affine algebraische Gruppe $\mathbb{G}_a = \mathbb{A}^1$ zusammen mit der Verknüpfung $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a\colon \mu(x, y) = x + y$. Dann ist die Inversenbildung $\iota(x) = -x$ und das neutrale Element $e = 0$. Allgemeiner ist der n-dimensionale affine Raum $\mathbb{A}^n$ zusammen mit der Addition eine affine algebraische Gruppe.

Beispiel 1.4. Die *multiplikative Gruppe* ist die affine algebraische Gruppe $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ zusammen mit der Verknüpfung $\mu\colon \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m, \mu(x, y) = x \cdot y$. Dann ist die Inversenbildung $\iota(x) = x^{-1}$ und das neutrale Element $e = 1$.

Beispiel 1.5 ([Hum75], 7.1)**.** Die Gruppe $\mathrm{GL}(n; k)$ ist die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über dem Körper k zusammen mit der Matrixmultiplikation. Dies ist eine affine algebraische Gruppe. Insbesondere $\mathrm{GL}(1; k) = \mathbb{G}_m$.

Beweis. Die Menge $\mathrm{Mat}(n; k)$ aller $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in k kann mit dem affinen Raum $\mathbb{A}^{n^2}$ identifiziert werden. Dann hat $\mathrm{GL}(n; k)$ die Struktur einer affinen Varietät als Nichtnullstellenmenge der regulären Funktion $\det \in \mathcal{O}(\mathrm{Mat}(n; k))$. Somit wird ihr Ring der regulären Funktionen als k-Algebra erzeugt von den Koordinatenfunktionen T_{ij} und $\det^{-1}$. Aus Definition der Matrixmultiplikation sowie der Cramer'schen Regel für das Invertieren von Matrizen folgt, dass beides Morphismen von Varietäten sind. □

Beispiel 1.6. Die Bildung der Determinante $\det : \mathrm{GL}(n;k) \to \mathrm{GL}(1;k) = \mathbb{G}_m$ ist ein Morphismus algebraischer Gruppen.

Lemma 1.7. *Sei G eine affine algebraische Gruppe und $h \in G$. Dann ist die Linkstranslation*

$$L_h\colon G \to G, \quad g \mapsto hg$$

ein Morphismus von affinen Varietäten. Da jeder Morphismus stetig ist (bezüglich der Zariski Topologie), ist die Linkstranslation mit einem gegebenen Element insbesondere stetig.

Beweis. Da die Gruppenmultiplikation $\mu\colon G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ ein Morphismus von Varietäten ist, ist auch die Komposition mit der Einbettung $(h, \cdot)\colon g \mapsto (h, g)$ ein Morphismus:

$$L_h = \mu \circ (h, \cdot).$$

Somit ist L_h ein Morphismus. □

Korollar 1.8. *Die Rechtstranslation R_h mit einem gegebenen Gruppenelement h ist ein Morphismus algebraischer Gruppen und insbesondere stetig.*

Bemerkung 1.9. Eine abgeschlossene Untergruppe einer affinen algebraischen Gruppe ist selbst eine affine algebraische Gruppe. Dies folgt direkt aus dem Fakt, dass die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge ein Morphismus von Varietäten ist. Somit erhalten wir eine Vielzahl an weiteren Beispielen affiner algebraischer Gruppen.

Noch allgemeiner gilt:

Proposition 1.10 ([Soe25], 1.1.32)**.** *Der Abschluss jeder Untergruppe einer affinen algebraischen Gruppe ist wieder eine Untergruppe und somit selbst eine affine algebraische Gruppe.*

> Wir folgen der Beweisidee in [Soe25], 1.1.32. Zentral ist hierbei der Fakt, dass für $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, gilt, dass das Bild des Abschlusses im Abschluss des Bildes enthalten ist. In Formeln $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Beweis. Sei G eine affine algebraische Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Für alle $h \in H$ ist die Linkstranslation mit h stetig. Somit folgt aus $hH \subset$ zunächst $h\overline{H} \subset \overline{H}$ und da dies für alle $h \in H$ gilt auch $H\overline{H} \subset \overline{H}$. Somit gilt für alle $g \in \overline{H}$, $Hg \subset \overline{H}$. Da die Rechtstranslation mit g stetig ist folgt $\overline{H}g \subset \overline{H}$ und da dies für alle $g \in \overline{H}$ gilt auch $\overline{H}\,\overline{H} \subset \overline{H}$. Also ist $\overline{H}$ abgeschlossen unter der Verknüpfung. Da die Inversenbildung ι ein Morphismus ist, ist sie stetig und somit folgt aus $\iota(H) \subset H$ bereits $\iota(\overline{H}) \subset \overline{H}$. Also ist $\overline{H}$ auch abgeschlossen unter der Inversenbildung. Weiter gilt $e \in H \subset \overline{H}$, was den Beweis beendet, dass $\overline{H}$ eine Untergruppe ist. □

Beispiel 1.11. Die Menge

$$\mathbb{U}(n;k) \coloneqq \{(a_{ij}) \in \mathrm{GL}(n;k) \mid a_{ii} = 1 \text{ für alle } i,\ a_{ij} = 0 \text{ für alle } i > j\}$$

der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n;k)$ und somit selbst eine affine algebraische Gruppe. Sie hat die Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Beispiel 1.12. Die Gruppe $\mathbb{U}(2;k)$ ist auf natürliche Weise isomorph zur additiven Gruppe $\mathbb{G}_a$. Hierfür bemerke man, dass gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit liefert die Abbildung

$$\mathbb{G}_a \to \mathbb{U}(2;k) \quad ; \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einen Gruppenisomorphismus und dann auch einen Isomorphismus affiner algebraischer Gruppen.

Satz 1.13 ([Spr98], Theorem 2.3.7)**.** *Jede affine algebraische Gruppe über k ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von* $\mathrm{GL}(n;k)$.

Beweis. Siehe [Spr98] Theorem 2.3.7 oder [Soe25] 1.3.1. □

Bemerkung 1.14. In anderen Worten haben wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Affine algebraische} \\ \text{Gruppen über } k \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\sim} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \begin{matrix} \text{Abgeschlossene Unter-} \\ \text{gruppen von } \mathrm{GL}(n;k) \end{matrix} \right\}.$$

1.2 Irreduzible Komponenten

Wir folgen [Hum75] 7.3. Nach [Har77] §1, Proposition 1.5 kann jede affine Varietät als endliche Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten geschrieben werden. Diese müssen im Allgemeinen nicht disjunkt sein. Sei nun G eine affine algebraische Gruppe. Wir zeigen, dass nur eine der irreduziblen Komponenten von G das neutrale Element e enthält. Seien dafür $X_1, \ldots, X_m$ die Komponenten die e enthalten. Dann ist $X_1 \times \cdots \times X_m$ eine irreduzible affine Varietät und somit ist auch Bild unter dem Produktmorphismus $X_1 \cdots X_m$ eine irreduzible Teilmenge von G und enthält e. Also liegt $X_1 \cdots X_m$ in einem der X_i, sagen wir in X_{i_0}. Andererseits gilt für alle X_i, dass $X_i \subset X_1 \cdots X_m$, woraus folgt, dass es nur eine irreduzible Komponente gibt, die e enthält, nämlich X_{i_0}. Diese notieren wir als G° und nennen sie die *Einskomponente* von G.

Proposition 1.15. *Sei G eine affine algebraische Gruppe. Dann ist G° eine abgeschlossene normale Untergruppe von endlichem Index in G und ihre Nebenklassen sind gleichzeitig die zusammenhängenden als auch irreduziblen Komponenten von G.*

Beweis. Da die Gruppenmultiplikation stetig ist, muss $G^\circ G^\circ$ irreduzibel sein, liegt also in einer irreduziblen Komponente und weil e enthalten ist muss diese Komponente G° sein. Analog folgt $(G^\circ)^{-1} \subset G^\circ$. Somit ist G° eine abgeschlossene Untergruppe von G. Für jedes $x \in G$ ist $xG^\circ x^{-1}$ wieder eine irreduzible Komponente von G die e enthält, also $xG^\circ x^{-1} = G^\circ$ und G° ist sogar eine normale Untergruppe. Die Nebenklassen von G° sind, da Linksmultiplikation stetig ist, irreduzible Komponenten von

G und da sie G überdecken sind es bereits alle. Da sie als Nebenklassen disjunkt sind, müssen es bereits die Zusammenhangskomponenten sein. Jede affine Varietät ist ein notherscher Raum, also hat G nur endlich viele irreduzible Komponenten, was bedeutet, dass G° endlichen Index hat. $\square$

Anders ausgedrückt: In affinen algebraischen Gruppen stimmen die Konzepte "zusammenhängend" und "irreduzibel" überein.

1.3 Algebraische Darstellungen

In dieser Arbeit ist ausschließlich von linearen Darstellungen von Gruppen die Rede, also Gruppenhomomorphismen einer affinen algebraischen Gruppe G über k in die Automorphismengruppe $\mathrm{GL}(V)$ eines k-Vektorraums V. Es ist äquivalent zu fordern, dass $G \to \mathrm{End}(V)$ ein Monoidhomomorphismus ist. Da G nämlich eine Gruppe ist, landet das Bild bereits in $\mathrm{GL}(V)$ und induziert einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{GL}(V)$.
Ist (V, ϱ) eine Darstellung einer Gruppe G und $g \in G, v \in V$, so benutzen wir auch die Schreibweise $g \cdot_\varrho v$ für den Ausdruck $\varrho(g)(v)$.

Definition 1.16 ([Soe25], 1.4.3)**.** Sei G eine affine algebraische Gruppe über k. Eine Darstellung (V, ρ) von G über k ist eine *algebraische Darstellung*, wenn jeder Vektor $v \in V$ in einer endlichdimensionalen Unterdarstellung $W \subset V$ liegt derart, dass die induzierte Abbildung $G \to \mathrm{GL}(W)$ ein Morphismus von affinen Varietäten ist.

Bemerkung 1.17. Ist V unendlichdimensional, so ist $\mathrm{GL}(V)$ ebenfalls unendlichdimensional und somit keine affine Varietät, was die obige Definition motiviert.

Beispiel 1.18. Sei G eine affine algebraische Gruppe mit Koordinatenring $\mathcal{O}(G)$. Die *rechtsreguläre Darstellung* ist die Darstellung $(\mathcal{O}(G), \rho)$ gegeben durch

$$\rho \colon G \to \mathrm{Aut}_k(\mathcal{O}(G)), \quad g \mapsto \rho(g),$$

wobei $\rho(g)(f) := f \circ R_g = f(\,\cdot\, g)$ für alle $f \in \mathcal{O}(G)$ definiert ist. Dabei bezeichnet $f(\,\cdot\, g)$ die Funktion $x \mapsto f(xg)$. Die rechtsreguläre Darstellung ist eine algebraische Darstellung.

Beweis. Adaption des Beweises von 1.3.1 in [Soe25]. Es sei Δ die Komposition von k-Ringalgebrenhomomorphismen

$$\Delta \colon \mathcal{O}(G) \xrightarrow{\mathrm{mult}^\sharp} \mathcal{O}(G \times G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$$

Es sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Per Definition gilt $\Delta(f) = \sum_{i=1}^n g_i \otimes h_i$ genau dann, wenn für alle $x, y \in G$ gilt, dass $f(xy) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y)$. Für $y \in G$ gilt

$$\rho(y) \colon \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G) \quad ; \quad (\rho(y)(f))(x) = f(xy)$$

Dann liegen alle Rechtsverschiebungen $\{\rho(y) f \mid y \in G\}$ im von den g_i aufgespannten Untervektorraum $W := \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$, da ja $f(xy) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y)$ und somit

$\rho(y)f = \sum_{i=1}^n h_i(y)g_i \in \mathcal{O}(G)$. Die $h_i(y)$ sind hierbei die Skalare der Linearkombination. Somit folgt $V := \langle \rho(y)f \mid y \in G \rangle \subset W$ und V ist endlichdimensional, da W es ist. Weiterhin ist V invariant unter Rechtsverschiebungen und somit eine Unterdarstellung der rechtsregulären Darstellung. Es gilt nämlich

$$(\rho(z)(\rho(y)(f)))(x) = f(xyz) = f(x(yz)) \text{ wobei } yz \in G$$

also $(\rho(z)(\rho(y)f)) = \rho(yz)f \in V$. Da $f \in \mathcal{O}(G)$ beliebig war liegt also jeder Vektor $f \in \mathcal{O}(G)$ in einer endlichdimensionalen Unterdarstellung der rechtsregulären Darstellung.

Die Operation durch Rechtsverschiebung liefert auf jeder solchen endlichdimensionalen Unterdarstellung V für jeden Vektor $f \in V$ einen Morphismus von Varietäten $G \to V, y \mapsto \rho(y)f = \sum h_i(y)g_i$. Zunächst ist diese Abbildung zwar nur ein Morphismus nach $W := \langle g_1, \cdots, g_n \rangle$, da sie aber in $W \cap V$ landet und jede injektive lineare Abbildung endlichdimensionaler Vektorräume eine abgeschlossene Einbettung ist, folgt durch Komposition mit dem Einbettungsmorphismus, dass wir einen Morphismus nach V erhalten. Ganz allgemein gilt: Sind X, Y, Z affine Varietäten und haben wir Morphismen $X \to Y$ und $X \to Z$, so erhalten wir auch einen Morphismus $X \to Y \times Z$. Identifizieren wir nun in unserem Fall $V \cong k^m$, so erhalten wir durch Wahl einer Basis $f_1, \ldots, f_m$ von V einen Morphismus von Varietäten

$$G \to k^m \times \cdots \times k^m \cong \mathrm{End}(V) \quad ; \quad y \mapsto (\rho(y)f_1, \ldots, \rho(y)f_m)$$

□

Nun folgen noch zwei simple Lemmas, welche wir später in der Arbeit benutzen werden und welche ein erstes Gefühl für Darstellungen und insbesondere algebraische Darstellungen geben können.

Lemma 1.19 ([Soe25] Übung 1.4.16). *Seien (V, ρ_V) und (W, ρ_W) zwei Darstellungen einer affinen algebraischen Gruppe G. Ist $\varphi\colon V \twoheadrightarrow W$ ein surjektiver Homomorphismus von Darstellungen und ist die Darstellung V algebraisch, so ist auch die Darstellung W algebraisch.*

Beweis. Sei $w \in W$. Da φ surjektiv ist, existiert ein $v \in V$, sodass $\varphi(v) = w$. Da V eine algebraische Darstellung ist, existiert eine endlichdimensionale Unterdarstellung $V' \subset V$ mit $v \in V'$ und $\rho_V|_{V'}\colon G \to \mathrm{End}(V')$ ein Morphismus von Varietäten.
Betrachte den Untervektorraum $W' := \varphi(V') \subset W$. Mit $v \in V'$ gilt $w = \varphi(v) \in \varphi(V')$ und da V' endlichdimensional ist, ist auch W' endlichdimensional. Weiter ist W' eine Unterdarstellung von W: Seien $g \in G$ und $w' \in W'$ beliebig. Sei $v' \in V'$, sodass $\varphi(v') = w'$. Dann gilt

$$\rho_W(g)(w') = \rho_W(g)(\varphi(v')) = \varphi(\rho_V(g)(v')) \in \varphi(V') = W'$$

Hierbei gilt die zweite Gleichheit, weil φ ein Homomorphismus von Darstellungen ist. Da V' eine Unterdarstellung von V ist gilt $\rho_V(g)(v') \in V'$. Somit haben wir gezeigt, dass W' tatsächlich eine Unterdarstellung von W ist. Nun gilt es noch zu zeigen, dass $\rho_W|_{W'}\colon G \to \mathrm{End}(W')$ ein Morphismus von Varietäten ist. Die Abbildung

$\varphi|_{V'}\colon V' \to W'$ ist ein surjektiver Homomorphismus zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen, also existiert eine lineare Abbildung $s\colon W' \to V'$ mit $\varphi \circ s = \mathrm{id}_{W'}$. Für jedes $g \in G$ und $w' \in W'$ gilt dann:

$$\rho_W(g)(w') = \rho_W(g)(\varphi(s(w'))) = \varphi(\rho_V(g)(s(w'))),$$

wobei die zweite Gleichheit daraus folgt, dass φ ein Homomorphismus von Darstellungen ist. Somit gilt

$$\rho_W|_{W'}(g) = \varphi \circ \rho_V|_{V'}(g) \circ s \in \mathrm{End}(W').$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi\colon \mathrm{End}(V') &\to \mathrm{End}(W') \\ f &\mapsto \varphi \circ f \circ s \end{aligned}$$

ist linear und damit ein Morphismus von Varietäten (da $\mathrm{End}(V')$ und $\mathrm{End}(W')$ endlichdimensionale Vektorräume sind). Es gilt

$$\rho_W|_{W'} = \Psi \circ \rho_V|_{V'}$$

und dies ist ein Morphismus von Varietäten, als Verknüpfung zweier Morphismen. $\square$

Lemma 1.20 ([Soe25] Übung 1.4.17). *Ist (V, ϱ) eine Darstellung einer Gruppe G und $W \subset V$ eine Unterdarstellung, so gibt es genau eine Struktur einer G-Darstellung auf V/W derart, dass die kanonische Projektion $V \twoheadrightarrow V/W$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist. Wir nennen V/W mit dieser Struktur die* Quotientendarstellung.

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $\rho_1, \rho_2\colon G \to \mathrm{End}(V/W)$ zwei Darstellungen von G, sodass die kanonische Projektion $\pi\colon V \twoheadrightarrow V/W; v \mapsto v+W$ ein Homomorphismus von Darstellungen ist, also $\pi(g \cdot_\varrho v) = \rho_1(g)(\pi(v))$ und $\pi(g \cdot_\varrho v) = \rho_2(g)(\pi(v))$ für alle $g \in G, v \in V$. Dann gilt aber $\rho_1(g)(v+W) = \pi(g \cdot_\varrho v) = \rho_2(g)(v+W)$ für alle $g \in G, v \in V$, also stimmen $\rho_1(g)$ und $\rho_2(g)$ auf allen Elementen von V/W überein, also $\rho_1(g) = \rho_2(g) \in \mathrm{End}(V/W)$. Da dies für alle $g \in G$ gilt folgt $\rho_1 = \rho_2$.

Existenz: Wir definieren eine Abbildung $\rho\colon G \to \mathrm{End}(V/W)$ durch $\rho(g)(v+W) := (g \cdot_\varrho v) + W$. Sei $g \in G$ beliebig. Dann ist die Abbildung $\rho(g)$ wohldefiniert: Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 + W = v_2 + W$. Dann ist $v_1 - v_2 \in W$. Dann folgt aus der Linearität von ϱ und dem Fakt, dass W eine Unterdarstellung ist aber bereits

$$g \cdot_\varrho v_1 - g \cdot_\varrho v_2 = g \cdot_\varrho (v_1 - v_2) \in W$$

Dies bedeutet aber gerade $\rho(g)(v_1+W) = (g \cdot_\varrho v_1)+W = (g \cdot_\varrho v_2)+W = \rho(g)(v_2+W)$ und somit ist $\rho(g)$ wohldefiniert. Weiter ist ρ eine Darstellung, also ein Monoidhomomorphismus: Für alle $g, h \in G, v \in V$ gilt nämlich

$$\rho(gh)(v+W) = (gh \cdot_\varrho v)+W = (g \cdot_\varrho (h \cdot_\varrho v))+W = \rho(g)((h \cdot_\varrho v)+W) = (\rho(g) \circ \rho(h))(v+W)$$

Also $\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$. Nun gilt es nur noch zu zeigen, dass die kanonische Projektion π einen Homomorphismus von Darstellungen $V \to V/W$ liefert. Für alle $g \in G, v \in V$ gilt per Konstruktion

$$\pi(g \cdot_\varrho v) = (g \cdot_\varrho v) + W = \rho(g)(\pi(v))$$

Somit hat ρ die gesuchten Eigenschaften. □

Korollar 1.21. *Ist V eine algebraische Darstellung einer Gruppe G und $W \subset V$ eine Unterdarstellung, so ist auch die Quotientendarstellung V/W algebraisch.*

1.4 Unipotenz und Jordanzerlegung in der Linearen Algebra

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Wir sagen f ist ...

- ... nilpotent, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt $f^N = 0 \in \mathrm{End}(V)$.
- ... unipotent, wenn $f - \mathrm{id}$ nilpotent ist.
- ... diagonalisierbar, wenn eine Basis von V aus Eigenvektoren von f existiert

Im diesem Fall der endlichdimensionalen Vektorräume, ist aus der Linearen Algebra bekannt, dass die Jordanzerlegung existiert.

Satz 1.22 ([Spr98], 2.4.5)**.** *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f \in \mathrm{GL}(V)$. Es gibt eindeutig bestimmte Elemente $f_\mathrm{s}, f_\mathrm{u} \in \mathrm{GL}(V)$, sodass f_s diagonalisierbar ist, f_u unipotent ist und $f = f_\mathrm{u} f_\mathrm{s} = f_\mathrm{s} f_\mathrm{u}$. Dies nennen wir die multiplikative Jordan-Zerlegung von f.*

Etwas allgemeiner können wir V auch unendlichdimensional zulassen.

Definition 1.23 ([Soe25], 1.5.1)**.** Ein Endomorphismus eines Vektorraums V heißt *lokal endlich*, wenn jeder Vektor in einem endlichdimensionalen, unter dem Endomorphismus stabilen Untervektorraum liegt. Ein Endomorphismus f eines Vektorraums V heißt *lokal nilpotent*, wenn für jedes $v \in V$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $f^N(v) = 0$, wenn also V die Vereinigung der Kerne der Potenzen von f ist, in Formeln $V = \bigcup_{n \geq 0} \ker(f^n)$. Ein Endomorphismus g eines Vektorraums V heißt *lokal unipotent*, wenn $g - \mathrm{id}$ lokal nilpotent ist.

Beispiel 1.24. Sei G eine affine algebraische Gruppe und (V, ϱ) eine algebraische Darstellung von G. Dann ist für jedes $g \in G$ das Bild $\varrho(g)$ ein lokal endlicher Endomorphismus von V.

Satz 1.25 ([Soe25], 1.5.2)**.** *1. Ein lokal endlicher Automorphismus f eines (womöglich unendlichdimensionalen) Vektorraums V lässt sich auf genau eine Weise darstellen als ein Produkt $f = f_\mathrm{u} f_\mathrm{s}$ mit f_u lokal unipotent und f_s diagonalisierbar und $f_\mathrm{u} f_\mathrm{s} = f_\mathrm{s} f_\mathrm{u}$.*

2. *Sei*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Vektorräumen, wobei f, g lokal endliche Automorphismen sind. Seien $f = f_{\mathrm{u}} f_{\mathrm{s}}$ und $g = g_{\mathrm{u}} g_{\mathrm{s}}$ die zugehörigen multiplikativen Jordan-Zerlegungen. Dann kommutieren auch die Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_{\mathrm{s}}"] & W \arrow[d, "g_{\mathrm{s}}"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_{\mathrm{u}}"] & W \arrow[d, "g_{\mathrm{u}}"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$

Jeder Automorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums ist natürlich im obigen Sinne lokal endlich. Die beiden Jordanzerlegungen stimmen in diesem Fall überein.

1.5 Unipotente Elemente und Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen

Definition 1.26 ([Soe25], 1.5.4)**.** Ein Element einer affinen algebraischen Gruppe heißt *halbeinfach* beziehungsweise *unipotent*, wenn sein Bild unter jeder algebraischen Darstellung der Gruppe ein halbeinfacher beziehungsweise unipotenter Endomorphismus ist.

Wir erinnern, dass für jedes $g \in G$ das Bild unter der rechtsregulären Darstellung $\rho(g) \colon \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ ein lokal endlicher Endomorphismus ist.

Lemma 1.27. *Ein Element einer affinen algebraischen Gruppe ist genau dann halbeinfach beziehungsweise unipotent, wenn sein Bild unter der rechtsregulären Darstellung ein halbeinfacher beziehungsweise unipotenter Endomorphismus ist.*

Beweis. (Adaption des Beweises von [Soe25], 1.5.5)
Wir haben bereits gesehen, dass die rechtsreguläre Darstellung algebraisch ist, was die Hinrichtung zeigt. Nun zur Rückrichtung: Sei G eine affine algebraische Gruppe und ρ wie zuvor die rechtsreguläre Darstellung von G. Sei $g \in G$, sodass $\rho(g) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}(G))$ ein unipotenter bzw. halbeinfacher Endomorphismus ist. Sei (V, ϱ) eine beliebige algebraische Darstellung von G. Wir wollen zeigen, dass $\varrho(g) \in \mathrm{Aut}(V)$ ein unipotenter bzw. halbeinfacher Endomorphismus ist. Wir dürfen hierbei V als endlichdimensional annehmen. Operiert g nämlich auf allen endlichdimensionalen algebraischen Darstellungen unipotent bzw. halbeinfach, so bereits auch auf allen algebraischen Darstellungen, da jeder Vektor in einer endlichdimensionalen Unterdarstellung liegt (die somit auch algebraisch ist) und g auf dieser bereits unipotent bzw. halbeinfach operiert. Sei also $\psi_1, \dots, \psi_n$ eine Basis von V^*. Betrachte die Abbildung

$$\varphi \colon V \to \mathcal{O}(G)^n \quad ; \quad v \mapsto (x \mapsto \psi_i(x \cdot_\varrho v))_{i=1}^n$$

Dies ist ein Homomorphismus von Darstellungen von G: Für $s \in G$ und alle i haben wir für die i-te Komponente von $\varphi(v)$:

$$\varphi(v)_i \colon x \mapsto \psi_i(x \cdot_\varrho v)$$

Dann ist für alle $x \in G$:

$$\varphi(s \cdot_\varrho v)_i(x) = \psi_i(x(s \cdot_\varrho v)) = \psi_i((xs) \cdot_\varrho v) = \varphi(v)_i(xs) = (s \cdot_\rho \varphi(v)_i)(x)$$

Da dies für alle i gilt, gilt insgesamt also $\varphi(s \cdot_\varrho v) = s \cdot_{\rho \times \ldots \times \rho} \varphi(v)$. Dies bedeutet $(\rho(s) \times \ldots \times \rho(s)) \circ \varphi = \varphi \circ \varrho(s)$. In anderen Worten erhalten wir für alle $s \in G$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varrho(s)"] & \mathcal{O}(G)^n \arrow[d, "\rho(s) \times \ldots \times \rho(s)"] \\ V \arrow[r, hook] & \mathcal{O}(G)^n \end{tikzcd}$$

Hierbei sind die vertikalen Pfeile lokal endliche Automorphismen. Allgemein gelten für lokal endliche Automorphismen $x \colon U \to U$ und $y \colon W \to W$ die Identitäten $(x \times y)_\mathrm{u} = x_\mathrm{u} \times y_\mathrm{u}$, sowie $(x \times y)_\mathrm{s} = x_\mathrm{s} \times y_\mathrm{s}$. Dies folgt aus der Rechnung $(x_\mathrm{u} \times y_\mathrm{u})(x_\mathrm{s} \times y_\mathrm{s}) = x_\mathrm{u} x_\mathrm{s} \times y_\mathrm{u} y_\mathrm{s} = x \times y \in \mathrm{Aut}(U \times W)$, der Beobachtung, dass $x_\mathrm{u} \times y_\mathrm{u}$ unipotent und $x_\mathrm{s} \times y_\mathrm{s}$ halbeinfach in $\mathrm{Aut}(U \times W)$ ist, sowie der Eindeutigkeit der Jordanzerlegung 1.25. Insbesondere ist $(x \times y)$ ebenfalls ein lokal endlicher Automorphismus von $U \times W$. Da nun $\rho(g)$ nach Voraussetzung ein unipotenter bzw. halbeinfacher Automorphismus von $\mathcal{O}(G)$ ist, folgt somit, dass auch $\rho(g) \times \ldots \times \rho(g)$ ein unipotenter bzw. halbeinfacher Automorphismus von $\mathcal{O}(G)^n$ ist. Wenden wir auf unser Diagramm mit $s = g$ die Funktorialität der Jordanzerlegung 1.25 an, so folgt, dass $\varrho(g)$ ein unipotenter bzw. halbeinfacher Automorphismus von V ist. □

Satz 1.28 (Jordan-Zerlegung in affinen algebraischen Gruppen). *1. Für jedes Element g einer affinen algebraischen Gruppe G gibt es eindeutig bestimmte Elemente $g_\mathrm{s}, g_\mathrm{u} \in G$ mit g_s halbeinfach, g_u unipotent und $g = g_\mathrm{s} g_\mathrm{u} = g_\mathrm{u} g_\mathrm{s}$. Wir nennen g_s den halbeinfachen Anteil von g und g_u den unipotenten Anteil von g.*

2. *Sei $\varphi \colon G \to G'$ ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen. Für alle $g \in G$ gilt $\varphi(g_\mathrm{s}) = \varphi(g)_\mathrm{s}$ und $\varphi(g_\mathrm{u}) = \varphi(g)_\mathrm{u}$.*

3. *Ist $G = \mathrm{GL}(n; k)$, dann stimmt für alle $g \in G$ die Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen mit der Jordanzerlegung 1.22 für endlichdimensionale Vektorräume überein.*

Die Teile 1 und 2 entsprechen [Soe25] Satz 1.5.5. Teil 3 entspricht [Spr98] 2.4.8 (iii). Wir folgen auch den jeweils gegebenen Beweisen. Im Beweis notieren wir die Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen als $g = g_s g_u$ mit anderen Indizes als die Jordanzerlegung $g = g_\mathrm{s} g_\mathrm{u}$ von lokal endlichen Automorphismen. Ist der dritte Teil des Satzes bewiesen, so behalten wir diese Unterscheidung nicht mehr bei.

Beweis. Teil 1. Sei $g \in G$. Wir betrachten erneut die rechtsreguläre Darstellung $(\mathcal{O}(G), \rho)$. $\rho(g)$ ist ein Algebrenautomorphismus, der mit den Linksmultiplikationen mit allen Gruppenelementen $s \in G$ vertauscht. Definieren wir die Abbildung $\lambda(s)\colon \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ gegeben durch $(\lambda(s)f)(x) = f(sx)$, so bedeutet dies gerade, dass die beiden folgenden Diagramme kommutieren, das rechte für alle $s \in G$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\text{mult}} & \mathcal{O}(G) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho(g)\otimes\rho(g)} & & \downarrow{\scriptstyle \rho(g)} \\ \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\text{mult}} & \mathcal{O}(G) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\lambda(s)} & \mathcal{O}(G) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho(g)} & & \downarrow{\scriptstyle \rho(g)} \\ \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\lambda(s)} & \mathcal{O}(G) \end{array}$$

Allgemein gelten für lokal endliche Automorphismen $x\colon U \to U$ und $y\colon W \to W$ die Identitäten $(x \otimes y)_{\mathrm{u}} = x_{\mathrm{u}} \otimes y_{\mathrm{u}}$, sowie $(x \otimes y)_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} \otimes y_{\mathrm{s}}$. Dies folgt aus der Rechnung $(x_{\mathrm{u}} \otimes y_{\mathrm{u}})(x_{\mathrm{s}} \otimes y_{\mathrm{s}}) = x_{\mathrm{u}}x_{\mathrm{s}} \otimes y_{\mathrm{u}}y_{\mathrm{s}} = x \otimes y \in \mathrm{Aut}(U \otimes W)$, der Beobachtung, dass $x_{\mathrm{u}} \otimes y_{\mathrm{u}}$ unipotent und $x_{\mathrm{s}} \otimes y_{\mathrm{s}}$ halbeinfach in $\mathrm{Aut}(U \otimes W)$ ist, sowie der Eindeutigkeit der Jordanzerlegung 1.25. Insbesondere ist $x \otimes y$ ebenfalls ein lokal endlicher Automorphismus von $U \otimes W$. Man beachte somit, dass alle Vertikalen lokal endliche Automorphismen sind. Dann kommutieren die Diagramme nach 1.25 auch dann noch, wenn wir in den Vertikalen den halbeinfachen bzw. unipotenten Anteil nehmen.
Nun stellen wir ein paar allgemeine Überlegungen an: Eine lineare Abbildung $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ kommt her von einem Morphismus affiner Varietäten genau dann, wenn sie ein Homomorphismus von Ringalgebren ist. Eine bijektive lineare Abbildung $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ kommt also her von einem Isomorphismus affiner Varietäten genau dann, wenn sie ein Isomorphismus von Algebren ist. Ein Morphismus affiner Varietäten $G \to G$ ist die Rechtsmultiplikation mit einem Gruppenelement genau dann, wenn er mit den Linksmultiplikationen mit allen Gruppenelementen vertauscht. Dies bedeutet, dass ein Isomorphismus von Vektorräumen $\phi\colon \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ genau dann eine Rechtsmultiplikation $\rho(z)$ ist, wenn die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\text{mult}} & \mathcal{O}(G) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi\otimes\phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\text{mult}} & \mathcal{O}(G) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\lambda(s)} & \mathcal{O}(G) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\lambda(s)} & \mathcal{O}(G) \end{array}$$

kommutieren. In unserem Fall bringen die Vektorraumisomorphismen $\rho(g)_{\mathrm{s}}$ bzw. $\rho(g)_{\mathrm{u}}$ die Diagramme zum kommutieren, was bedeutet, dass es Elemente $g_s, g_u \in G$ gibt, sodass gilt $\rho(g)_{\mathrm{s}} = \rho(g_s)$ und $\rho(g)_{\mathrm{u}} = \rho(g_u)$. Wir möchten zeigen, dass diese beiden Elemente die gesuchte Zerlegung von g liefern. Da die rechtsreguläre Darstellung ρ eine injektive Abbildung ist, folgt aus $\rho(g) = \rho(g_s g_u) = \rho(g_s)\rho(g_u) = \rho(g_u)\rho(g_s) = \rho(g_u g_s)$, dass $g = g_s g_u = g_u g_s$. Somit bleibt nur zu zeigen, dass g_s, g_u auch im Sinne von 1.26 halbeinfach bzw. unipotent sind. Nach 1.27 genügt es hierfür zu zeigen, dass sie unter der rechtsregulären Darstellung halbeinfach bzw. unipotent operieren. Dies gilt aber bereits nach Konstruktion. Somit existiert die multiplikative Jordanzerlegung. Sie ist eindeutig, da die Jordanzerlegung von $\rho(g)$ als lokal endlicher Automorphismus 1.25 eindeutig ist und die Abbildung ρ injektiv ist.

Teil 2: Das folgende Diagramm kommutiert, da φ ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g"] & G' \arrow[d, "\cdot \varphi(g)"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & G' \end{tikzcd}$$

Da das Bilden des Rings der regulären Funktionen eine Äquivalenz von Kategorien ist, kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(G) & \mathcal{O}(G) \arrow[l, "\circ\varphi"'] \\ \mathcal{O}(G) \arrow[u, "\rho(g)"] & \mathcal{O}(G) \arrow[l, "\circ\varphi"'] \arrow[u, "\rho(\varphi(g))"] \end{tikzcd}$$

Wieder sind die Vertikalen lokal endliche Automorphismen und somit bleibt das Diagramm nach 1.25 kommutativ, wenn wir in den Vertikalen den unipotenten bzw. halbeinfachen Anteil nehmen. So erhalten wir über die Äquivalenz von Kategorien auf Ebene der Varietäten die beiden kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g_u"] & G' \arrow[d, "\cdot \varphi(g)_u"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & G' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cdot g_s"] & G' \arrow[d, "\cdot \varphi(g)_s"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & G' \end{tikzcd}$$

Setzen wir oben links das neutrale Element $e \in G$ ein, so ergeben sich die Gleichheiten $\varphi(e)\varphi(g)_u = \varphi(g_u)$ und $\varphi(e)\varphi(g)_s = \varphi(g_s)$. Da φ ein Gruppenhomomorphismus ist, muss $\varphi(e) = e' \in G'$ das neutrale Element in G' sein, woraus die gewünschten Gleichheiten folgen.

Teil 3: Sei nun also $G = \mathrm{GL}(V)$ mit $V := k^n$. Es sei $\varrho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ die natürliche Darstellung gegeben durch $g \cdot_\varrho v = g(v)$. Sei $f \neq 0$ ein Element des Dualraums V^*. Für $v \in V$ definieren wir $\tilde{f}(v) \in \mathcal{O}(G)$ durch

$$\tilde{f}(v)(g) = f(g \cdot_\varrho v)$$

$\tilde{f}$ ist eine injektive lineare Abbildung $\tilde{f} \colon V \to \mathcal{O}(G)$. Die Injektivität folgt aus der Forderung $f \neq 0$. Ist $v \neq 0$, so gibt es ein $g \in G$, sodass $f(g \cdot_\varrho v) \neq 0$, also $\tilde{f}(v) \neq 0$. Für alle $g \in G, v \in V$ gilt

$$\tilde{f}(g \cdot_\varrho v) = \rho(g)\tilde{f}(v)$$

In der Tat gilt für $s \in G$, dass $\tilde{f}(g \cdot_\varrho v)(s) = f(s \cdot_\varrho (g \cdot_\varrho v) = (\rho(g)\tilde{f}(v))(s)$. Wir haben also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{O}(G) \arrow[d, "\rho(g)"] \\ V \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathcal{O}(G) \end{tikzcd}$$

Da V endlichdimensional ist, sind die Vertikalen insbesondere lokal endlich und das Diagramm kommutiert nach 1.25 auch dann noch, wenn wir auf den Vertikalen den halbeinfachen bzw. unipotenten Anteil nehmen. Dies führt zu den Gleichungen

$$\tilde{f}(g_{\mathrm{s}} \cdot_{\varrho} v) = \rho(g)_{\mathrm{s}}\tilde{f}(v) = \rho(g_s)\tilde{f}(v) = \tilde{f}(g_s \cdot_{\varrho} v)$$

und

$$\tilde{f}(g_{\mathrm{u}} \cdot_{\varrho} v) = \rho(g)_{\mathrm{u}}\tilde{f}(v) = \rho(g_u)\tilde{f}(v) = \tilde{f}(g_u \cdot_{\varrho} v)$$

Da diese Gleichungen für alle $v \in V$ gelten und $\tilde{f}$ injektiv ist, folgt somit $g_{\mathrm{s}} = g_s$ und $g_{\mathrm{u}} = g_u$. □

Korollar 1.29 ([Spr98] 2.4.9)**.** *Ein Element $g \in G$ ist halbeinfach bzw. unipotent genau dann, wenn für jede Einbettung $\phi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n;k)$ im Sinne von 1.13 gilt, dass $\phi(g)$ halbeinfach bzw. unipotent ist.*

Bemerkung 1.30. Das vorherige Korollar stimmt auch dann noch, wenn wir "jede Einbettung" durch "eine Einbettung" ersetzen.

Im folgenden bezeichne $\mathbb{T}(n;k)$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen und $\mathbb{D}(n;k)$ die Menge der Diagonalmatrizen.

Proposition 1.31 ([Hum75] 15.4)**.** *Ist $M \subset \mathrm{GL}(n;k)$ eine Menge von kommutierenden Automorphismen, dann ist M simultan triagonalisierbar. Ist jedes Element von M diagonalisierbar, so ist M simultan diagonalisierbar.*

Satz 1.32 (Jordan-Zerlegung in kommutativen Gruppen, [Soe25] 1.5.10)**.** *Sei G eine kommutative affine algebraische Gruppe. Dann bilden die Teilmengen der halbeinfachen bzw. unipotenten Elemente jeweils abgeschlossene Untergruppen $G_{\mathrm{s}}, G_{\mathrm{u}} \subset G$ und die Multiplikation liefert einen Isomorphismus von affinen algebraischen Gruppen*

$$\pi\colon G_{\mathrm{s}} \times G_{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} G$$

Beweis. Wir vermischen die Beweise von [Bor91] 4.7 und [Soe25] 1.5.10. Aus der Existenz und Eindeutigkeit der Jordanzerlegung 1.28 folgt zunächst, dass die Abbildung π eine Bijektion von Mengen sein muss. Weiter ist sie ein Gruppenhomomorphismus, da gilt

$$\pi((s,u)(s',u')) = \pi((ss',uu')) = ss'uu' = sus'u' = \pi((s,u))\pi((s',u'))$$

zusammen also ein Gruppenisomorphismus. Wähle nun eine abgeschlossene Einbettung von G in ein $\mathrm{GL}(n;k)$. Nach 1.31 können wir annehmen, dass $G_{\mathrm{s}} \subset \mathbb{D}(n;k)$. Schreibe $k^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ wobei die V_i die verschiedenen simultanen Eigenräume von G_{s} sind. Die V_i sind G-invariant: Seien $s \in G_{\mathrm{s}}$ und $g \in G$. Sei V_λ der Eigenraum von s zum Eigenwert λ und $v \in V_\lambda$. Dann gilt

$$s(g(v)) = g(s(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v) \quad \text{also} \quad g(v) \in V_\lambda$$

Somit sind die V_i tatsächlich G-invariant und wir können die Operation von G auf jedem einzelnen V_i betrachten. Nach 1.31 können wir für jedes V_i eine Basis wählen, bezüglich derer jedes Element von G eine obere Dreiecksmatrix ist. Die Vereinigung dieser Basen ist eine Basis von k^n bezüglich derer alle $g \in G$ oberer Dreiecksmatrizen sind und, da es schließlich eine Basis aus simultanen Eigenvektoren aller $s \in G_\mathrm{s}$ ist, alle $s \in G_\mathrm{s}$ Diagonalmatrizen sind. Insgesamt können wir also annehmen, dass $G \subset \mathbb{T}(n;k)$ und dabei $G_\mathrm{s} \subset \mathbb{D}(n;k)$. In dieser Einbettung $G \subset \mathrm{GL}(n;k)$ ist der halbeinfache Anteil von $g \in G$ per Konstruktion gerade sein diagonaler Anteil. Dann ist es offensichtlich, dass G_s und G_u abgeschlossene Untergruppen sind. Da die Multiplikation in G ein Morphismus ist, folgt aus der universellen Eigenschaft von abgeschlossenen Untergruppen, dass auch π ein Morphismus von Varietäten ist. Das Bilden des halbeinfachen Anteils $g \mapsto g_\mathrm{s}$ ist weiter ein Morphismus von Varietäten, da eine Matrix auf eine Teilmenge seiner Einträge abgebildet wird. Dann können wir die inverse Abbildung zu π explizit angeben als $\pi^{-1} \colon g \mapsto (g_\mathrm{s}, g g_\mathrm{s}^{-1})$. Dies ist ein Morphismus von Varietäten, da Multiplikation und Invertieren Morphismen sind. $\square$

Bemerkung 1.33. Diese beiden Sätze über die Jordanzerlegung motivieren das Studium der unipotenten Elemente und der unipotenten affinen algebraischen Gruppen. In gewisser Weise sind diese nämlich ein Teil der “Bausteine” aller (kommutativen) affinen algebraischen Gruppen.

2 Allgemeines über unipotente affine algebraische Gruppen

Lemma 2.1 (Eigenschaften der Menge der unipotenten Elemente, [Soe25] 1.5.8)**.** *Sei G eine affine algebraische Gruppe und G_{u} die Teilmenge der unipotenten Elemente von G.*

1. *G_{u} ist stets eine abgeschlossene Teilmenge von G.*
2. *G_{u} ist im Allgemeinen keine Untergruppe von G.*
3. *Die Abbildung $g \mapsto g_{\mathrm{u}}$ ist im Allgemeinen kein Morphismus von Varietäten.*

Beweis. Teil 1: Wähle eine Einbettung $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n;k)$. Nach 1.29 sind die unipotenten Elemente von G dann gerade die Matrizen, welche unipotent im Sinne der linearen Algebra sind, also unipotent als Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass ein solcher Endomorphismus genau dann unipotent ist, wenn sein charakteristisches Polynom von der Form $(T-1)^n$ ist. Dies ist eine (in den Matrixeinträgen) polynomielle Bedingung, also ist

$$G_{\mathrm{u}} = \{A \in G \mid \det(TI - A) = (T-1)^n\}$$

abgeschlossen.

Teil 2: Betrachte die affine algebraische Gruppe $G = \mathrm{GL}(2;k)$. Wie bereits festgestellt, sind die unipotenten Elemente in $\mathrm{GL}(2;k)$ gerade die Matrizen, deren charakteristisches Polynom $(T-1)^2$ ist. Die beiden Elemente

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erfüllen diese Bedingung. Aber

$$u_1 u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(TI - u_1 u_2) = \det \begin{pmatrix} T-2 & -1 \\ -1 & T-1 \end{pmatrix} = (T-2)(T-1) - 1 = T^2 - 3T + 1 \neq (T-1)^2$$

Also ist das Produkt $u_1 u_2$ nicht unipotent, $u_1 u_2 \notin G_{\mathrm{u}}$ und G_{u} ist somit keine Untergruppe.

Teil 3: Sei wieder $G = \mathrm{GL}(n;k)$. Betrachte die abgeschlossene Untergruppe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \neq 0 \right\} \subset \mathrm{GL}(n;k)$$

Nun lassen wir λ und μ gegeneinander laufen. Für $\lambda \neq \mu$ hat $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ das charakteristische Polynom $(T-\lambda)(T-\mu)$, ist also diagonalisierbar und der unipotente Anteil ist trivial, $A_{\mathrm{u}} = I$. Für $\alpha := \lambda = \mu$ hat A die Zerlegung

$$A = \alpha I \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist der unipotente Anteil nichttrivial. Dies zeigt, dass die Abbildung $h \mapsto h_{\mathrm{u}}$ nicht stetig ist und somit kein Morphismus sein kann. Konkret betrachte man die in H_{u} abgeschlossene Teilmenge $\{I\}$. Ihr Urbild unter dem Bilden des unipotenten Anteils ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in H \mid \lambda \neq \mu \right\}$$

Dies ist keine abgeschlossene Teilmenge von H. □

Definition 2.2. Eine affine algebraische Gruppe heißt unipotent, wenn jedes ihrer Elemente unipotent ist.

Im folgenden Satz 2.4 wird der Satz von Burnside im Beweis verwendet. Dieser lautet:

Satz 2.3 (Satz von Burnside, [Lan02] XVII §3)**.** *Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Sei R eine Unteralgebra von $\mathrm{End}_k(E)$. Ist E ein einfacher R-Modul, so gilt bereits $R = \mathrm{End}_k(E)$.*

Satz 2.4 (Charakterisierung von unipotenten affinen algebraischen Gruppen)**.** *Sei U eine affine algebraische Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *U ist unipotent.*

2. *Die einzige irreduzible algebraische Darstellung von U ist die Einsdarstellung.*

3. *Für jede nichttriviale algebraische Darstellung von U existiert ein nichttrivialer Fixvektor. Genauer: Sei (V, ρ) eine von Null verschiedene algebraische Darstellung von U. Dann existiert ein $v \in V \setminus \{0\}$, sodass für alle $g \in U$ gilt $\rho(g)(v) = g \cdot_\rho v = v$.*

4. *Gegeben ein endlichdimensionaler Vektorraum V und eine abgeschlossene Einbettung $U \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ gibt es stets eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von U obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale sind.*

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2.) (Wir folgen [Soe25] 1.6.2)
Sei $\varrho\colon U \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible algebraische Darstellung. Dann ist V endlichdimensional - jede algebraische Darstellung hat nämlich stets endlichdimensionale Unterdarstellungen. Per Definition ist $\varrho(g)$ ein unipotenter Endomorphismus für alle $g \in G$. Sei $\dim(V) = n$. Ein unipotenter Endomorphismus in $\mathrm{End}(V)$ hat den

Eigenwert Eins mit Vielfachheit n. Per Definition der Spur also gerade $\mathrm{tr}(\varrho(g)) = n$. Für alle $g, h \in U$ gilt somit $\mathrm{tr}(\varrho(gh)) = \mathrm{tr}(\varrho(g))$. Mit der Additivität der Spur folgt für alle $g, h \in U$

$$0 = \mathrm{tr}(\varrho(gh)) - \mathrm{tr}(\varrho(g)) = \mathrm{tr}((\varrho(g) \circ \varrho(h)) - \varrho(g)) = \mathrm{tr}(\varrho(g) \circ (\varrho(h) - \mathrm{id}))$$

Betrachte nun $R := \langle \varrho(g) \mid g \in U \rangle_k$. Die Darstellung (V, ϱ) ist irreduzibel, was gerade bedeutet, dass V einfach ist als R-Modul. Somit muss nach dem Satz von Burnside bereits gelten $R = \mathrm{End}_k(V)$. Dann gilt sogar für alle $A \in \mathrm{End}_k(V)$, dass $\mathrm{tr}(A \circ (\varrho(h) - \mathrm{id}))$, da die Gleichung auch dann noch erhalten bleibt, wenn wir $\varrho(g)$ durch Linearkombinationen der $\varrho(g)$ ersetzen. Dann folgt $\varrho(h) = \mathrm{id}$ für alle $h \in U$, da die Bilinearform $\mathrm{tr}\colon \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to k; (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A \circ B)$ nicht ausgeartet ist.

Ist der Beweis 2 nach 3 in Ordnung

(2. $\Rightarrow$ 3.) Sei (V, ρ) eine algebraische Darstellung von U. Wir können V als endlichdimensional annehmen. Jede algebraische Darstellung enthält endlichdimensionale Unterdarstellungen die wieder algebraisch sind. Haben diese nun einen nichhtrivialen Fixvektor, so auch die ursprüngliche algebraische Darstellung. Jede endlichdimensionale Darstellung enthält aber eine irreduzible Unterdarstellung, welche wir hier W nennen. Nach Voraussetzung ist dies die Einsdarstellung, also $\rho|_W : w \mapsto \mathrm{id}_W$ und W ist eindimensional. Das heißt, dass jeder Vektor $w \in W$ ein Fixvektor von $\rho|_W$ ist. Da dies eine Unterdarstellung ist, sind alle $w \in W$ dann aber bereits Fixvektoren von ρ.

(3. $\Rightarrow$ 4.) (Adaption von [Soe25] 1.6.4)
Betrachte die Darstellung $U \to \mathrm{GL}(V); g \mapsto g$. Dies ist eine algebraische Darstellung. Sei v_1 ein nichttrivialer Fixvektor. Setze $V_1 := \langle v_1 \rangle$. Sei nun $v_2 + V_1$ ein nichttrivialer Fixvektor der Quotientendarstellung V/V_1. Dieser existiert, da nach 1.21 V/V_1 wieder eine algebraische Darstellung ist. Setze $V_2 := \langle v_1, v_2 \rangle$. Führe dies so fort: Angenommen, $V_{k-1} = \langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle$ ist bereits konstruiert. Dann existiert ein Fixvektor $v_k + V_{k-1}$ der Quotientendarstellung V/V_{k-1}. Setze $V_k := \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Dies ist eine Unterdarstellung von V. Da V endlichdimensional ist, ergibt sich nach endlich vielen Schritten eine vollständige Fahne von Unterdarstellungen

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V,$$

wobei $n = \dim V$ Bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V operieren alle $g \in U$ durch obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale.

(4. $\Rightarrow$ 1.) Alle $g \in U$ operieren in der Einbettung $U \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ als unipotente Endomorphismen, was nach 1.29 heißt, dass U unipotent ist. □

Bemerkung 2.5. Dies zeigt, dass eine affine algebraische Gruppe genau dann unipotent ist, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass sie isomorph ist zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbb{U}(n; k)$. Ist insbesondere $U \subset \mathrm{GL}(V)$ eine abgeschlossene unipotente Untergruppe, so gibt es eine Basis von V, bezüglich derer alle Elemente von U obere Dreiecksmatrizen sind mit Einsen auf der Diagonale.

Beispiel 2.6. $\mathbb{U}(n;k)$ ist eine unipotente affine algebraische Gruppe für alle $n \geq 1$. Insbesondere ist die additive Gruppe $\mathbb{G}_a$ unipotent, da sie isomorph ist zu $\mathbb{U}(2;k)$.

Proposition 2.7.
1. *Jede abgeschlossene Untergruppe einer unipotenten affinen algebraischen Gruppe ist unipotent.*
2. *Endliche direkte Produkte von unipotenten affinen algebraischen Gruppen sind unipotent.*

Beweis. 1.) Sei U eine unipotente affine algebraische Gruppe und $H \subset U$ eine abgeschlossene Untergruppe. Da U unipotent ist existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und eine abgeschlossene Einbettung $U \to \mathbb{U}(n;k)$. Dann ist $H \hookrightarrow U \hookrightarrow \mathbb{U}(n;k)$ auch eine abgeschlossene Einbettung, H also unipotent.

2.) Seien U_1 und U_2 unipotente algebraische Gruppen. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $U_1 \subset \mathbb{U}(n;k)$ und $U_2 \subset \mathbb{U}(m;k)$. Wir definieren eine Einbettung

$$\varphi\colon \mathbb{U}(n;k) \times \mathbb{U}(m;k) \to \mathbb{U}(n+m;k) \quad ; \quad \varphi(A,B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Da sowohl A als auch B obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale sind, ist auch $\varphi(A,B)$ eine solche Matrix in $\mathbb{U}(n+m;k)$. Weiter ist das Bild abgeschlossen, es handelt sich also tatsächlich um eine abgeschlossene Einbettung. Insbesondere erhalten wir eine abgeschlossene Einbettung

$$U_1 \times U_2 \hookrightarrow \mathbb{U}(n;k) \times \mathbb{U}(m;k) \hookrightarrow \mathbb{U}(n+m;k)$$

also ist $U_1 \times U_2$ unipotent. □

Definition 2.8 (Auflösbare Gruppe, [Hum75] 17.3)**.** Sei G eine abstrakte Gruppe. Die abgeleitete Reihe von G ist induktiv definiert durch:

$$\mathcal{D}^0(G) := G, \quad \mathcal{D}^{i+1}(G) := [\mathcal{D}^i(G), \mathcal{D}^i(G)] \text{ für } i \geq 0$$

Hierbei ist mit den eckigen Klammern die Kommutatorgruppe gemeint, also für Untergruppen H, H' ist $[H,H']$ die von der Menge $\{hh'h^{-1}h'^{-1} \mid h \in H,\ h' \in H'\}$ erzeugte Untergruppe. G heißt auflösbar, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\mathcal{D}^m(G) = \{e\}$.

Definition 2.9 (Nilpotente Gruppe, [Hum75] 17.4)**.** Sei G eine abstrakte Gruppe. Die absteigende Zentralreihe von G ist induktiv definiert durch:

$$\mathcal{C}^0(G) := G, \quad \mathcal{C}^{i+1}(G) := [G, \mathcal{C}^i(G)] \text{ für } i \geq 0$$

Wie oben stehen die eckigen Klammern für die Kommutatorgruppe. G heißt nilpotent, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\mathcal{C}^m(G) = \{e\}$.

Bemerkung 2.10. Jede nilpotente Gruppe ist auflösbar. Es gilt nämlich stets $\mathcal{D}^i(G) \subset \mathcal{C}^i(G)$.

Lemma 2.11 ([Hum75] 17.4 Lemma)**.** *Jede Untergruppe einer nilpotenten Gruppe ist nilpotent. Ist $G \to G'$ ein Gruppenisomorphismus und ist G nilpotent, so ist auch G' nilpotent.*

Proposition 2.12. *Jede unipotente affine algebraische Gruppe ist nilpotent.*

Beweis. Wir folgen [Bor91] 4.8. Nach 2.11 reicht es zu zeigen, dass $\mathbb{U}(n;k)$ nilpotent ist. Schreibe abkürzend $U := \mathbb{U}(n;k)$. Es gilt $U = I + N$, wobei N die Menge der strikten oberen $(n \times n)$-Matrizen ist. Betrachte die Untergruppen $U_i := I + N^i$. Eine Rechnung zeigt, dass $[U_i, U_j] \subset U_{i+j}$ für alle $i, j \geq 1$. Somit folgt $[U, U_j] \subset U_{1+j}$ für alle $j \geq 1$. Durch Induktion folgt $\mathcal{C}^i(U) \subset U_i$ für alle $i \geq 1$. Es gilt jedoch $N^n = 0$, also $U_n = I$ und somit $\mathcal{C}^n(U) = I$. □

Zum Abschluss des Kapitels betrachten wir noch die Bahnen der Wirkung einer unipotenten Gruppe.

Definition 2.13 ([Soe25] 2.3.1)**.** Sei G eine affine algebraische Gruppe und X eine affine Varietät. Wir sagen G *operiert algebraisch auf* X, wenn eine Gruppenwirkung $G \times X \to X; (g, x) \mapsto gx$ gegeben ist, welche ein Morphismus von Varietäten ist.

Bemerkung 2.14. Gegeben eine algebraische Operation $G \times X \to X$, so liefert die Verschiebung von Funktionen mit denselben Argumenten wie in 1.18 eine algebraische Darstellung $G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}(X))$.

Lemma 2.15. *Gegeben eine affine algebraische Gruppe G und eine affine Varietät X, sodass G algebraisch auf X operiert, so ist jede Bahn Gx offen in ihrem Abschluss.*

Beweis. Siehe [Spr98] Lemma 2.3.3 oder [Soe25] Satz 2.3.7. □

Wird im Beweis implizit verwendet, dass die Bahn offen in ihrem Abschluss ist, oder, dass die Bahn zusammenhängend ist? Ich bin mir nicht sicher, ob wir das im letzten Argument benutzen

Proposition 2.16 ([Soe25] 2.3.9)**.** *Sei U eine unipotente affine algebraische Gruppe die algebraisch auf einer affinen Varietät X operiert. Dann ist jede Bahn Ux abgeschlossen.*

Beweis. Sei Ux eine beliebige Bahn. Betrachte den Raum F aller regulären Funktionen auf $\overline{Ux}$, welche auf dem Komplement von Ux verschwinden, in Formeln

$$F := \{f \in \mathcal{O}(\overline{Ux}) \mid f|_{\overline{Ux} \setminus Ux} = 0\}$$

Angenommen Ux ist nicht abgeschlossen. Dann ist F nicht Null. Betrachte die algebraische Darstellung durch Verschiebung von Funktionen $G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}(\overline{Ux}))$. Der Raum F ist stabil unter Translation mit U, was bedeutet, dass F eine Unterdarstellung ist. Nach 2.4 existiert ein nichttrivialer Fixvektor, also müsste es eine von Null verschiedene Funktion in F geben, welche invariant unter U ist. Dies führt zu einem Widerspruch, da jede U-invariante Funktion konstant ist auf $\overline{Ux}$, also Null. □

3 Aufbau von weiterem Werkzeug

In diesem Kapitel führen wir weitere Konzepte ein, welche uns später erlauben werden, die Theorie der unipotenten Gruppen weiter auszubauen. Wir halten notwendige Konzepte aus der algebraischen Differentialrechnung fest, behandeln knapp die Konstruktion von Quotienten affiner algebraischer Gruppen und führen nilpotente Liealgebren ein, wo wir später sehen werden, dass sie eng mit unipotenten Gruppen verwandt sind. In allen diesen Abschnitten versuchen wir gerade so viel Theorie aufzubauen, wie für die späteren Kapitel notwendig ist und haben nicht den Anspruch, eine umfangreiche und lehrbuchartige Einführung in die Themen zu geben.

3.1 Der Tangentialraum einer affinen algebraischen Gruppe

Wir definieren im Folgenden den Tangentialraum einer affinen Varietät, geben erste Beispiele und halten standardmäßige Aussagen fest. Hierbei führen wir nicht immer die Beweise, da dies den Rahmen sprengen würde. Für eine bessere, vollständige Einführung siehe z.B. [Spr98] Kapitel 4 und [Soe25] Abschnitt 3.1. Wir folgen grob dem Letzteren, betrachten aber nur den affinen Fall.

Definition 3.1 ([Soe25] 3.1.1)**.** Sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und M ein A-Modul. Eine *R-lineare Derivation von A in M* ist eine R-lineare Abbildung $D\colon A \to M$, sodass für alle $a, b \in A$ gilt

$$D(ab) = aD(b) + bD(a)$$

Bemerkung 3.2. Es folgt direkt, dass $D(1) = 0$ und somit auch $D(\lambda 1) = 0$ für alle $\lambda \in R$. Die Menge $\mathrm{Der}_R(A, M)$ dieser Derivationen ist ein A-Modul mit den Operationen $(D + D')(a) = D(a) + D'(a)$ und $(bD)(a) = b(D(a))$ für $D, D' \in \mathrm{Der}_R(A, M), a, b \in A$.

Definition 3.3 (Vgl. [Soe25] 3.1.14, 3.1.16)**.** Gegeben eine affine Varietät X über k und ein Punkt $x \in X$ liefert das Auswerten bei x einen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(X) \to k$. Wenn wir k mit der durch diesen Homomorphismus gegebenen Struktur eines $\mathcal{O}(X)$-Moduls versehen, dann verwenden wir die Notation k_x und nennen k_x den *Auswertungsmodul zu x*. Wir erklären den *Tangentialraum von X bei x* als den k-Vektorraum

$$\mathrm{T}_x X := \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(X), k_x)$$

Gegeben ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ von affinen Varietäten wird das *Differential* $\mathrm{d}_x\varphi$ *von φ an der Stelle x* definiert als die durch das Vorschalten von $\varphi^\sharp\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ erklärte k-lineare Abbildung

$$\mathrm{d}_x\varphi\colon \mathrm{T}_x X \to \mathrm{T}_{\varphi(x)} Y$$

Bemerkung 3.4. Gegeben Morphismen von Varietäten $\varphi\colon X \to Y$ und $\psi\colon Y \to Z$, sowie ein Punkt $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$ und $\psi(y) = z$ haben wir

$$\mathrm{d}_y\psi \circ \mathrm{d}_x\varphi = \mathrm{d}_x(\psi \circ \varphi)\colon \mathrm{T}_xX \to \mathrm{T}_zZ$$

Weiter gilt auch $\mathrm{d}_x\mathrm{id}_X = \mathrm{id}\colon \mathrm{T}_xX \to \mathrm{T}_xX$. In anderen Worten liefert das Bilden des Tangentialraums einen Funktor von der Kategorie der bepunkteten affinen Varietäten über k in die Kategorie der k-Vektorräume.

Proposition 3.5 ([Soe25] 3.1.7, 3.1.23). *Für affine Varietäten X, Y über k und Punkte $x \in X, y \in Y$ gilt $\mathrm{T}_{(x,y)}(X \times Y) \cong \mathrm{T}_xX \times \mathrm{T}_yY$.*

Beweis. Gegeben ein kommutativer Ring R, zwei kommutative R-Algebren A und B und ein Modul M über $A \otimes_R B$ liefern die Restriktionen längs $a \mapsto a \otimes 1$ und $b \mapsto 1 \otimes b$ eine Bijektion

$$\mathrm{Der}_R(A \otimes_R B, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_R(A, M) \oplus \mathrm{Der}_R(B, M)$$

Die Umkehrabbildung wird gegeben durch $(D_1, D_2) \mapsto D$, wobei $D\colon a \otimes b \mapsto (1 \otimes b)D_1(a) + (a \otimes 1)D_2(b)$.

Wenden wir diese Erkenntnis auf $A = \mathcal{O}(X), B = \mathcal{O}(Y), R = k$ und $M = k_x$ an, so erhalten wir die gewünschte Aussage. □

Bemerkung 3.6 ([Soe25] 3.1.13). Gegeben ein kommutativer R, so notieren wir die formale Ableitung auf $R[T]$ im Folgenden als $\partial\colon R[T] \to R[T]$. Ist $R = k$ und $U \subset k$ offen, so gibt es genau eine Möglichkeit, unsere über den Isomorphismus $k[T] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(k)$ erhaltene formale Ableitung $\partial\colon k[T] \to k[T]$ zu einer formalen Ableitung $\partial\colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U)$ fortzusetzen, derart, dass die Summenregel und die Produktregel weiter gelten. Diese formale Ableitung notieren wir auch $f \mapsto f'$. Die formale Ableitung ausgewertet an der Stelle x notieren wir als $\partial_{(x)}\colon f \to f'(x)$

Beispiel 3.7 ([Soe25] 3.1.5, 3.1.17, 3.1.125). Gegeben R ein kommutativer Ring und M ein Modul über $R[T]$, so erhalten wir eine Bijektion

$$\mathrm{Der}_R(R[T], M) \xrightarrow{\sim} M$$

durch die Vorschrift $D \mapsto D(T)$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $m \mapsto D_m$, wobei $D_m\colon P \mapsto P'm$. Beim Nachrechnen, dass sie invers zueinander sind benutzt man den Fakt, dass für $D \in \mathrm{Der}_R(R[T], M)$ und $P \in R[T]$ gilt $D(P) = P'D(T)$. Insbesondere ist $\mathrm{Der}_R(R[T], R[T])$ ein freier $R[T]$-Modul, mit der Derivation

$$\partial\colon P \mapsto P'$$

als $R[T]$-Basis. Ist weiter $x \in R$ ein Punkt und R_x der Auswertungsmodul, so ist $\mathrm{Der}_R(R[T], R_x)$ ein freier R-Modul, mit der Derivation

$$\partial_{(x)}\colon P \mapsto P'(x)$$

als R-Basis.

Wenden wir diese Erkenntnis auf $R = k$ an, so folgt mit der Identifikation $\mathcal{O}(k) \cong k[T]$, dass für $x \in k$, die bei x ausgewertete formale Ableitung $\partial_{(x)} \colon f \mapsto f'(x)$ eine k-Basis des Tangentialraums $\mathrm{T}_x k \cong \mathrm{Der}_k(k[T], k_x)$ der Varietät k liefert.

Aus der Verträglichkeit des Tangentialraumfunktors mit endlichen Produkten 3.5 folgt dann, dass für $x \in k^n$ die bei x ausgewerteten formalen partiellen Ableitungen $\partial_{1,(x)}, \dots, \partial_{n,(x)}$ eine k-Basis des Tangentialraums $\mathrm{T}_x k^n$ der Varietät k^n liefern.

Proposition 3.8. *Der Tangentialraum von $\mathbb{U}(n;k)$ am neutralen Element I ist isomorph zum Vektorraum der oberen Dreiecksmatrizen, in Formeln*

$$\mathrm{T}_I \mathbb{U}(n;k) \cong \{A \in \mathrm{Mat}(n;k) \mid A_{ij} = 0 \textit{ für alle } i \geq j\} \subset \mathrm{Mat}(n;k)$$

Beweis. Wir haben einen Isomorphismus $\mathbb{U}(n;k) \cong k^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Die regulären Funktionen auf $\mathbb{U}(n;k)$ sind somit die Polynome in Variablen T_{ij} mit $i < j$, denn nur diese Einträge sind frei wählbar. In Formeln haben wir für den Ring der regulären Funktionen also $\mathcal{O}(\mathbb{U}(n;k)) \cong k[(T_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}]$. Aus dem vorherigen Beispiel folgt, dass die bei $I \in \mathbb{U}(n;k) \cong k^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ausgewerteten formellen partiellen Ableitungen

$$\partial_{ij,(I)} : P \mapsto (\partial_i P)(I)$$

mit $1 \leq i < j \leq n$ eine k-Basis des Tangentialraums am neutralen Element bilden. Über die Identifikation von $\partial_{ij,(I)}$ mit der Basismatrix e_{ij} lässt sich dieser auffassen als der Vektorraum der strikten oberen Dreiecksmatrizen, $\mathrm{T}_I \mathbb{U}(n;k) \cong \{A \in \mathrm{Mat}_n(k) \mid A_{ij} = 0 \text{ für alle } i \geq j\} \subset \mathrm{Mat}(n;k)$. Wir sehen, dass diese Isomorphie allgemeiner sogar für alle $M \in \mathbb{U}(n;k)$ gilt. □

Bemerkung 3.9. Sei E ein endlichdimensionaler affiner Raum über k und $p \in E$ ein Punkt. Dann erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{D}_p \colon \vec{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_p E$$

durch die Vorschrift, dass wir zu einem Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{E}$ den Morphismus $k \to E, t \mapsto p + t\vec{v}$ bilden und unserem Richtungsvektor $\vec{v}$ das Bild des Basisvektors $\partial_{(0)} \in \mathrm{T}_0 k$ unter dem Differential dieses Morphismus zuordnen. Die Umkehrabbildung notieren wir als

$$\mathrm{richt} = \mathrm{richt}_p \colon \mathrm{T}_p E \xrightarrow{\sim} \vec{E}$$

Für eine genauere Diskussion dieser Identifikation siehe [Soe25] 3.1.26.

Proposition 3.10. *Das Bilden des Tangentialraums erhält die Dimension. Genauer: Sei G eine affine algebraische Gruppe der Dimension n. Dann ist* $\mathrm{Lie}(G)$ *eine Liealgebra der Dimension n.*

Dieses Resultat ist für uns unumgänglich, sein Beweis benötigt aber eine Menge Theorie, welche wir im Rahmen dieser Arbeit nicht aufbauen wollen. Für einen Beweis siehe z.B. **??**.

3.2 Die Liealgebra einer affinen algebraischen Gruppe

Wir folgen der Darstellung in [Soe25] 3.2 für allgemeine Varietäten und vereinfachen bei Bedarf, da wir nur den affinen Fall betrachten.

Definition 3.11 ([Soe25] 3.2.6)**.** Ein *Vektorfeld auf einer Varietät* X ist eine Vorschrift ξ, welche jedem Punkt $x \in X$ einen Tangentialvektor $\xi_x \in \mathrm{T}_x X$ zuordnet. Das Vektorfeld induziert auf jeder offenen Teilmenge $U \subset X$ eine Abbildung

$$\xi \colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathrm{Ens}(U, k); \quad (\xi f)(x) := \xi_x(f)$$

Das Vektorfeld ξ heißt *algebraisch*, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ gilt $f \in \mathcal{O}_X(U) \Rightarrow \xi f \in \mathcal{O}_X(U)$. Die Menge der algebraischen Vektorfelder auf X notieren wir als

$$\mathcal{T}(X)$$

Bemerkung 3.12 ([Soe25] 3.2.7)**.** Für eine affine Varietät X über k haben wir einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(X)$$

gegeben durch die Abbildungsvorschrift $D \mapsto (x \mapsto \delta_x \circ D)$, wobei $\delta_x \colon \mathcal{O}(X) \to k_x$ das Auswerten bei x ist. Sprachlich werden wir im Folgenden nicht mehr zwischen einer Derivation auf $\mathcal{O}(X)$ und einem algebraischen Vektorfeld auf X unterscheiden.

Bemerkung 3.13 ([Soe25] 3.2.9)**.** Gegeben eine affine Varietät X und algebraische Vektorfelder $\xi, \zeta \in \mathcal{T}(X)$ liefert für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ das Bilden des Kommutators eine Abbildung $[\xi, \zeta]_U \colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)$, also $[\xi, \zeta] \in \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(X))$ und der Vektorraum $\mathcal{T}(X)$ der algebraischen Vektorfelder auf X wird mit dieser Lieklammer zu einer Liealgebra.

Definition 3.14 ([Soe25] 3.2.10)**.** Sei $\varphi \colon X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten, ξ ein Vektorfeld auf X und ζ ein Vektorfeld auf Y. Wir sagen ξ und ζ sind *φ-verwandt* und schreiben dafür $\varphi \colon \xi \rightsquigarrow \zeta$, wenn für alle $x \in X$ gilt

$$\mathrm{d}_x\varphi \colon \xi_x \to \zeta_{\varphi(x)}$$

Proposition 3.15 ([Soe25] 3.2.12)**.** *Verwandte algebraische Vektorfelder haben verwandte Lieklammern.*

Beweis. Sei $\varphi \colon X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten, $\xi, \xi' \in \mathcal{T}(X)$ und $\zeta, \zeta' \in \mathcal{T}(Y)$, sodass ξ und ζ φ-verwandt sind und ebenfalls ξ' und ζ' φ-verwandt sind. Es gilt zu zeigen, dass $[\xi, \xi']$ und $[\zeta, \zeta']$ φ-verwandt sind. Genau dann sind ξ und ζ φ-verwandet, wenn für alle $g \in \mathcal{O}(Y)$ gilt $\xi(g \circ \varphi) = (\zeta g) \circ \varphi$. In anderen Worten also genau dann, wenn das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{\zeta} & \mathcal{O}(Y) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \circ\varphi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \circ\varphi} \\
\mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\xi} & \mathcal{O}(X)
\end{array}$$

Wir berechnen nun für die Lieklammern:

$$\begin{aligned}
[\xi,\xi'](g\circ\varphi) &= \xi\big(\xi'(g\circ\varphi)\big)-\xi'\big(\xi(g\circ\varphi)\big)\\
&= \xi\left((\zeta'(g))\circ\varphi\right)-\xi'\left((\zeta(g))\circ\varphi\right)\\
&= (\zeta(\zeta'(g)))\circ\varphi-(\zeta'(\zeta(g)))\circ\varphi\\
&= ([\zeta,\zeta'](g))\circ\varphi.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass das Diagramm auch dann noch kommutiert, wenn wir auf den Horizontalen $[\xi,\xi']$ und $[\zeta,\zeta']$ einsetzen, also sind die Lieklammern φ-verwandt. □

Definition 3.16 ([Soe25] 3.2.13)**.** Gegeben eine affine algebraische Gruppe G erklären wir die *Liealgebra der linksinvarianten Vektorfelder* durch die Vorschrift

$$\mathrm{L\grave{\imath}e}(G) := \{\xi\in\mathcal{T}(G)\mid (g\cdot)\colon \xi\rightsquigarrow\xi \text{ für alle } g\in G\}$$

Proposition 3.15 zeigt, dass dies tatsächlich eine Lieunteralgebra von $\mathcal{T}(G)$ ist. Analog wird die *Liealgebra der rechtsinvarianten Vektorfelder* erklärt, welche wir als $\mathrm{L\acute{\imath}e}(G)$ notieren.

Bemerkung 3.17 ([Soe25] 3.2.14)**.** Gegeben eine affine algebraische Gruppe G liefert 3.12 einen Isomorphismus von Liealgebren

$$\mathrm{L\grave{\imath}e}(G)\xrightarrow{\sim}\{D\in\mathrm{Der}_k\mathcal{O}(G)\mid D\circ\lambda_g=\lambda_g\circ D \text{ für alle } g\in G\}$$

Hierbei ist $\lambda_g(f):=f\circ(g\cdot)$ die Linksverschiebung einer regulären Funktion $f\in\mathcal{O}(G)$.

Satz 3.18 ([Soe25] 3.2.15)**.** *Sei G eine affine algebraische Gruppe. Das Auswerten $\xi\mapsto\xi_e$ eines linksinvarianten Vektorfelds am neutralen Element liefert einen Isomorphismus von Vektorräumen*

$$\mathrm{L\grave{\imath}e}\xrightarrow{\sim}\mathrm{T}_eG$$

Die Umkehrabbildung notieren wir als $v\mapsto\grave{v}$.

Beweis. Siehe [Soe25] 3.2.15. □

Definition 3.19 ([Soe25] 3.2.17)**.** Sei G eine affine algebraische Gruppe. Wir definieren die *Liealgebra von G* als den Tangentialraum beim neutralen Element

$$\mathrm{Lie}(G):=\mathrm{T}_eG$$

mit derjenigen Struktur einer Liealgebra, für die der Vektorraumisomorphismus mit der Liealgebra der linksinvarianten Vektorfelder 3.18 ein Isomorphismus von Liealgebren ist. Ist $X\in\mathrm{Lie}(G)$, so schreiben wir $\grave{X}$ für seine Fortsetzung zu einem linksinvarianten Vektorfeld.

Satz 3.20 ([Soe25] 3.2.19)**.** *Sei $\varphi\colon G\to H$ ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen. Dann ist sein Differential beim neutralen Element ein Morphismus von Liealgebren*

$$\mathrm{d}\varphi:=\mathrm{d}_e\varphi\colon \mathrm{Lie}(G)\to\mathrm{Lie}(H)$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass $\mathrm{d}_e\varphi$ ein Homomorphismus von Vektorräumen ist, also gilt es nur noch die Verträglichkeit mit der Lieklammer zu zeigen. Gegeben linksinvariante Vektorfelder ξ auf G und ζ auf H mit $\mathrm{d}_e\varphi\colon \xi_e \to \zeta_{\varphi(e)}$, so sind diese aufgrund der Linksinvarianz bereits φ-verwandt. Dann folgt die Verträglichkeit der Lieklammern aus 3.15. $\square$

Beispiel 3.21. Wir haben in 3.7 bereits gesehen, dass $\mathrm{T}_0\mathbb{G}_a$ aus den Vielfachen von $X := \partial_{(0)}$ besteht. Somit ist $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a)$ eindimensional. Jede eindimensionale Liealgebra ist abelsch, wie wir in Kapitel 5 sehen werden, also $[X, X] = 0$.

Beispiel 3.22. Die Algebra $\mathrm{Mat}(n; k)$ wird mit dem Bilden des Kommutators als Lieklammer $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ eine Liealgebra. Wir notieren sie als $\mathfrak{gl}_n$. Ist V allgemeiner ein k-Vektorraum, so definieren wir analog die Struktur einer Liealgebra auf $\mathrm{End}(V)$ und notieren sie als $\mathfrak{gl}(V)$.

Beispiel 3.23 ([Spr98] 4.4.10)**.** Es gilt $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(n; k)) \cong \mathfrak{gl}_n$.

Für die Einführung von Ad und ad orientieren wir uns an [Hum75] §3.

Definition 3.24 ([Hum75] 9.1)**.** Sei G eine affine algebraische Gruppe. Betrachte die Konjugation mit $g \in G$

$$\mathrm{int}_g\colon G \to G \quad ; \quad (\mathrm{int}_g)(x) = gxg^{-1}$$

Dies ist ein Automorphismus affiner algebraischer Gruppen. Das Differential dieser Abbildung notieren wir als

$$\mathrm{Ad}_g := \mathrm{d}_e(\mathrm{int}_g)\colon \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$$

Passen hier die Definitionen von Ad und ad mit den Definitionen aus dem Skript AAG zusammen?

Dies ist ein Automorphismus von $\mathrm{Lie}(G)$. Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}(G)) \quad ; \quad g \mapsto \mathrm{Ad}_g$$

Diese Abbildung nennen wir die *adjungierte Darstellung von G*

Proposition 3.25 ([Hum75] 10.3)**.** *Sei G eine affine algebraische Gruppe. Dann ist $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$ ein Morphismus affiner algebraischer Gruppen. Ist G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n; k)$, so ist Ad_g die Konjugation mit der Matrix $x \in \mathrm{GL}(n; k)$.*

Beweis. Siehe [Hum75] 10.3. $\square$

Definition 3.26. Sei G eine affine algebraische Gruppe. Das Differential von $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$ notieren wir als

$$\mathrm{ad}\colon \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{gl}(\mathrm{Lie}(G))$$

Satz 3.27 ([Hum75] 10.4)**.** *Sei G eine affine algebraische Gruppe. Für $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ gilt $(\mathrm{ad}\, X)(Y) = [X, Y]$.*

Beweis. Siehe [Hum75] Theorem 10.4. $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnitts über Liealgebren halten wir noch die Jordanzerlegung in der Liealgebra einer algebraischen Gruppe fest:

Satz 3.28 ([Spr98] 4.4.19, 4.4.20). *1. Gegeben eine affine algebraische Gruppe G besitzt jedes Element $X \in \mathrm{Lie}(G)$ genau eine Zerlegung $X = X_\mathrm{s} + X_\mathrm{n}$ mit $X_\mathrm{s}, X_\mathrm{u} \in \mathrm{Lie}(G)$ und $\grave{X}_\mathrm{s} \in \mathrm{End}_k(\mathcal{O}(G))$ diagonalisierbar, $\grave{X}_\mathrm{n} \in \mathrm{End}_k(\mathcal{O}(G))$ lokal nilpotent und $[X_\mathrm{s}, X_\mathrm{n}] = 0$.*

2. Gegeben ein Homomorphismus $\varphi\colon G \to H$ von affinen algebraischen Gruppen gilt $\mathrm{d}\varphi(X_\mathrm{s}) = (\mathrm{d}\varphi(X))_\mathrm{s}$ und $\mathrm{d}\varphi(X_\mathrm{n}) = (\mathrm{d}\varphi(X))_\mathrm{n}$.

3. Für die Gruppe $G = \mathrm{GL}(n;k)$ entsprechen X_s und X_n dem halbeinfachen beziehungsweise nilpotenten Anteil der Matrix $X \in \mathrm{Mat}(n;k)$.

Beweis. Siehe [Spr98] 4.4.19, 4.4.20 oder [Soe25] 3.3.8. □

Bemerkung 3.29. Wir nennen ein Element $X \in \mathrm{Lie}(G)$ nilpotent, wenn im Sinne von 3.28 gilt $X_\mathrm{s} = 0$ und wir nennen es halbeinfach, wenn gilt $X_\mathrm{n} = 0$.

Proposition 3.30. *Sei U eine unipotente affine algebraische Gruppe. Dann sind alle Elemente von $\mathrm{Lie}(U)$ nilpotent.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Elemente von $\mathrm{Lie}(\mathbb{U}(n;k))$ nilpotent sind. Wir wissen bereits, dass der Tangentialraum am neutralen Element aus den strikten oberen Dreiecksmatrizen besteht. Da $\mathbb{U}(n;k) \subset \mathrm{GL}(n;k)$ folgt, dass $\mathrm{Lie}(\mathbb{U}(n;k))$ eine Lieunteralgebra von $\mathfrak{gl}_n$ ist. Wir verwenden die Notation

$$\mathfrak{u}_n := \mathrm{Lie}(\mathbb{U}(n;k)) \subset \mathfrak{gl}_n$$

für diese Liealgebra. Aus Teil 3 von 3.28 folgt nun, dass jedes Element von $\mathfrak{u}_n$, da es als Matrix nilpotent ist, bereits als Derivation nilpotent ist.

Sei nun U eine beliebige unipotente affine algebraische Gruppe. Nach 2.4 ist U isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbb{U}(n;k)$ und somit existiert eine Einbettung $\varphi\colon U \to \mathbb{U}(n;k)$. Aus dem ersten Teil dieses Beweises folgt für $X \in \mathrm{Lie}(U)$, dass $(\mathrm{d}\varphi(X))_\mathrm{s} = 0$ und mit 3.28 Teil 2 somit auch $\mathrm{d}\varphi(X_\mathrm{s}) = 0$. Da das Differential der Einbettung injektiv ist folgt somit bereits $X_\mathrm{s} = 0$, was bedeutet, dass X nilpotent ist. □

3.3 Quotienten von unipotenten Gruppen

Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass in Charakteristik Null jede unipotente affine algebraische Gruppe zusammenhängend ist. Im Beweis betrachtet man den Quotienten der Gruppe nach der Einskomponente, weshalb wir zuvor die Konstruktion von Quotienten betrachten. Hierbei gehen wir nur auf den für uns relevanten Fall ein und führen nicht die allgemeine Konstruktion durch, da dies deutlich komplizierter ist.

Lemma 3.31. *Sei G eine affine algebraische Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler, sodass die Menge G/N endlich ist. Dann ist die Menge G/N mit dem Ring der regulären Funktionen*

$$\mathcal{O}(G/N) := \{f\colon G/N \to k \mid f \circ \pi \in \mathcal{O}(G)\}$$

eine affine Varietät. Mit dieser Struktur auf G/N ist die Projektion $G \to G/N$ ein Morphismus von Varietäten und G/N sogar eine affine algebraische Gruppe.

Beweis. Basierend auf einer Erklärung von Professor Soergel. Wir zeigen zunächst, dass die oben erklärte Struktur G/N zu einer affinen Varietät macht. Hierfür reicht es zu zeigen, dass gilt $\mathcal{O}(G) = \{f\colon G/N \to k\}$. Jede endliche Menge X wird nämlich mit $\mathcal{O}(X) := \{g\colon X \to k\}$ eine affine Varietät. Sei $f\colon G/N \to k$ beliebig. Dann ist $f \circ \pi\colon G \to k$ eine Funktion, die auf den Nebenklassen konstant ist. Nach Voraussetzung gibt es nur endlich viele Nebenklassen $g_1N, \dots g_nN$. Per Konstruktion ist jede Nebenklasse abgeschlossen und sie sind paarweise disjunkt. Dann ist $G/N = \coprod_{i=1}^n g_iN$ und $\mathcal{O}(G/N) = \prod_{i=1}^n \mathcal{O}(g_iN)$ nach der Konstruktion des Koprodukts affiner Varietäten. Somit reicht es zu zeigen, dass jedes $\mathcal{O}(g_iN)$ alle konstanten Funktionen auf g_iN enthält. Dies ist aber generell bei jeder nichtleeren affinen Varietät der Fall: Für eine affine Varietät Y gilt nämlich $\mathcal{O}(Y) \cong k[T_1, \dots T_n]/I(Y)$ (siehe z.B. [Har77] §1, Theorem 3.2 (a)), wobei $I(Y)$ das Verschwindungsideal von Y bezeichnet. Liegt ein konstantes Polynom ungleich Null in $I(Y)$, so ist das Verschwindungsideal bereits der ganze Polynomring und wir erhalten $Y = \emptyset$.

Nach der Konstruktion von $\mathcal{O}(G/N)$ ist es klar, dass die Projektion $G \to G/N$ ein Morphismus von Varietäten ist.

Nun gilt es noch zu zeigen, dass die Gruppenoperationen Morphismen von Varietäten sind. Wir verwenden die Definition von Morphismen affiner Varietäten nach [Har77] §1, p. 15. Das Produkt $G/N \times G/N$ ist wieder eine endliche affine Varietät mit dem Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}(G/N \times G/N) \cong \mathcal{O}(G/N) \otimes \mathcal{O}(G/N) \cong k^n \otimes k^n \cong k^{n^2} \cong \{h\colon G/N \times G/N \to k\}$. Auf jeder endlichen affinen Varietät stimmt die Zariski-Topologie mit der diskreten Topologie überein. Somit sind die Gruppenmultiplikation $\mu\colon G/N \times G/N \to G/N$ und die Inversenbildung $\iota\colon G/N \to G/N$ stetige Abbildungen. Sei $f \in \mathcal{O}(G/N)$ beliebig. Dann gilt trivialerweise $f \circ \mu \in \mathcal{O}(G/N \times G/N) = \{h\colon G/N \times G/N \to k\}$ und $f \circ \iota \in \mathcal{O}(G/N) = \{g\colon G/N \to k\}$. Dies beendet den Beweis. Da die Projektion π ein Gruppenhomomorphismus ist beobachten wir, dass sie insgesamt ein Morphismus affiner algebraischer Gruppen ist. □

Lemma 3.32. *Ist G in der Situation des vorherigen Lemmas unipotent, so ist auch der Quotient G/N unipotent.*

Beweis. Wir haben im vorhergehenden Lemma gesehen, dass die Projektion $\pi\colon G \to G/N$ ein Morphismus affiner algebraischer Gruppen ist. Somit bildet sie nach Teil 2 von 1.28 unipotente Elemente in G auf unipotente Elemente in G/N ab. Da jedes Element in G unipotent ist und π surjektiv, ist auch jedes Element in G/N unipotent. □

Proposition 3.33. *Jede endliche unipotente affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null ist trivial.*

Beweis. Sei zunächst H eine beliebige endliche Gruppe der Ordnung m. Sei $h \in H$ beliebig. Auch alle Potenzen $h^1, h^2, \dots$ liegen in H. Da H endlich ist können dies nicht alles verschiedene Elemente sein, es existieren also $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 < n_2$, sodass gilt $h^{n_1} = h^{n_2}$. Dann haben wir $h^{n_2 - n_1} = e$, h hat also endliche Ordnung. Allgemeiner ist es ein Standardresultat, dass die Ordnung jedes Elements sogar ein Teiler von m sein muss, dies benötigen wir hier jedoch nicht (Satz von Lagrange).

Sei nun G eine endliche unipotente affine algebraische Gruppe über k. Ohne Einschränkung sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{U}(n;k)$. Sei $A \in G$ beliebig. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$, sodass $A^r = I$. Schreibe $A = I + N$, wobei I die Einheitsmatrix ist und N eine strikte obere Dreiecksmatrix vom Nilpotenzgrad j. Es muss gelten $r \geq j$. Die Matrizen I und N kommutieren, also gilt:

$$I = A^r = (I+N)^r = I + \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} N^i = I + \sum_{i=1}^{j-1} \binom{r}{i} N^i \text{ und somit } \sum_{i=1}^{j-1} \binom{r}{i} N^i = 0$$

Für $i < j$ sind die Matrizen N^i linear unabhängig, also insbesondere $\binom{r}{1} N = 0$ und, da wir über einem Körper der Charakteristik Null arbeiten, ist $\binom{r}{1} \neq 0$ woraus folgt $N = 0$. $\square$

Bemerkung 3.34. Hierbei haben wir benutzt: Ist N eine Matrix vom Nilpotenzgrad j, so ist die Menge $\{I, N, N^2, \dots N^{j-1}\}$ linear unabhängig. Sei dafür

$$\sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i N^i = 0$$

Durch Multiplikation mit N^{j-1} erhalten wir die Gleichung $\lambda_0 N^{j-1} = 0$, also $\lambda_0 = 0$, da wir über Charakteristik Null arbeiten. Es bleibt die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i N^i = 0$$

Durch Multiplikation mit N^{j-2} erhalten wir die Gleichung $\lambda_1 N^{j-1} = 0$, also $\lambda_1 = 0$. Induktiv also $\lambda_i = 0$ für alle $0 \leq i \leq j-1$.

Angenommen im Beweis der Proposition gilt $r < j$. Nach vorheriger Überlegung ist dann die Menge $\{N, N^2, \dots N^r\}$ linear unabhängig und die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} N^i = 0$$

liefert $N = 0$, weil die Skalare nicht Null sind und wir sind fertig.

Satz 3.35. *Sei G eine unipotente affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Dann ist G zusammenhängend.*

Beweis. Nach 1.15 ist die Einskomponente G° von G eine abgeschlossene normale Untergruppe von endlichem Index. Dies bedeutet, dass der Quotient G/G° eine endliche affine algebraische Gruppe ist. Nach 3.32 ist sie unipotent. Jede endliche unipotente Gruppe ist aber nach 3.33 trivial, also $G/G^\circ = 0$, was $G = G^\circ$ impliziert. Da G° zusammenhängend ist beendet dies den Beweis. □

3.4 Nilpotente Liealgebren

Definition 3.36 ([Hum72] 3.2)**.** Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k. Die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{g}$ ist induktiv definiert durch:

$$\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^0] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}^{i+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i] \text{ für } i \geq 0$$

Für Lieunteralgebren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ist $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ die von der Menge $\{[a, b] \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$ erzeugte Lieunteralgebra.
$\mathfrak{g}$ heißt nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\mathfrak{g}^n = 0$.

Beispiel 3.37. Jede abelsche Liealgebra ist nilpotent. Die Lieklammer ist stets Null und somit verschwindet die absteigende Zentralreihe im ersten Schritt.

Proposition 3.38.

1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k und $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra. Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so ist auch $\mathfrak{h}$ nilpotent.*

2. *Ist $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Isomorphismus von Liealgebren und $\mathfrak{g}$ nilpotent, so ist auch $\mathfrak{g}'$ nilpotent.*

Beweis. (1): Per Konstruktion gilt $\mathfrak{h}^i \subset \mathfrak{g}^i$ für alle $i \geq 0$, wenn also $\mathfrak{g}^n = 0$, dann auch $\mathfrak{h} = 0$.
(2): Wir haben $\phi(\mathfrak{g}^0) = \mathfrak{g}'^0$. Angenommen es gilt $\phi(\mathfrak{g}^i) = \mathfrak{g}'^i$. Dann folgt

$$\phi(\mathfrak{g}^{i+1}) = \phi([\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^i]) = [\phi(\mathfrak{g}^i), \phi(\mathfrak{g}^i)] = [\mathfrak{g}'^i, \mathfrak{g}'^i] = \mathfrak{g}'^{i+1}$$

also induktiv $\phi(\mathfrak{g}^i) = \mathfrak{g}'^i$ für alle $i \geq 0$. Ist $\mathfrak{g}^n = 0$, so folgt

$$\mathfrak{g}'^n = \phi(\mathfrak{g}^n) = \phi(0) = 0$$

Wir sehen, dass es hier sogar reicht zu fordern, dass ϕ ein surjektiver Homomorphismus ist. □

Lemma 3.39. *Kann eine endlichdimensionale Liealgebra $\mathfrak{g}$ über k als Unteralgebra in die Liealgebra $\mathfrak{u}_n$ der echten oberen Dreiecksmatrizen eingebettet werden, so ist sie nilpotent.*

Beweis. Nach 3.38 reicht es zu zeigen, dass $\mathfrak{u}_n \subset \mathfrak{gl}_n$ nilpotent ist. Dies folgt aber induktiv durch die Beobachtung, dass beim Bilden der Lieklammer von echten oberen Dreiecksmatrizen immer mehr Nebendiagonalen verschwinden. Eleganter folgt die Nilpotenz von $\mathfrak{u}_n$ aus dem Fakt, dass jeder nilpotente Endomorphismus $x \in \mathfrak{gl}_n$ bereits ad-nilpotent ist ([Hum72], S.12 Lemma) und dann dem Satz von Engel ([Hum72], S.12 Theorem). □

Wir halten noch zwei Propositionen für spätere Kapitel fest:

Proposition 3.40 ([Hum72] S. 14, Übung 8)**.** *Jede nichttriviale nilpotente Liealgebra $\mathfrak{g}$ enthält ein Ideal der Kodimension Eins.*

Beweis. Es gilt $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$, da andernfalls die absteigende Zentralreihe konstant wäre. Dann ist $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ eine abelsche Liealgebra von Dimension mindestens Eins. Wähle einen eindimensionalen Untervektorraum $I \subset \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Da die Lieklammer trivial ist, ist I bereits ein Ideal. Betrachte die Projektion $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Da π surjektiv ist, ist $\pi^{-1}(I)$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dim(\pi^{-1}(I)) &= \dim(I) + \dim(\ker(\pi)) \\
&= \dim(I) + \dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \\
&= \dim(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) - 1 + \dim([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \\
&= \dim(\mathfrak{g}) - 1
\end{aligned}$$

Somit hat $\pi^{-1}(I)$ die Kodimension Eins. □

Proposition 3.41. *Jede nichttriviale nilpotente Liealgebra $\mathfrak{g}$ hat nichttriviales Zentrum, in Formeln*

$$Z(\mathfrak{g}) := \{y \in \mathfrak{g} \mid \forall x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0\} \neq \{0\}$$

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$, sodass $\mathfrak{g}^N = 0$ und $\mathfrak{g}^{N-1} \neq 0$. Es gilt $\mathfrak{g}^{N-1} \subset Z(\mathfrak{g})$. □

4 Liealgebren von unipotenten affinen algebraischen Gruppen in Charaktersitik Null

Sei G eine affine algebraische Gruppe. Wie im analytischen Fall möchten wir eine Exponentialabbildung $\mathrm{Lie}(G) \to G$ definieren. Die naheliegende Idee ist G in ein $\mathrm{GL}(n;k)$ einzubetten und dann das Matrixexponential zu bilden. Zu zeigen, dass diese Abbildung wohldefiniert, also unabhängig von der gewählten Einbettung ist, stellt ein Problem dar. Aus diesem Grund wird eine andere Herangehensweise gewählt. Wir folgen der Darstellung in [Soe25], 3.10 und füllen ein paar Details aus.

4.1 Exponential lokal nilpotenter Endomorphismen von Vektorräumen

Wir folgen [Soe24], Abschnitt 2.4.

Definition 4.1 ([Soe24] 2.4.1)**.** Ein Endomorphismus δ einer abelschen Gruppe V heißt *lokal nilpotent*, wenn es für jedes $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\delta^n(v) = 0$. Ist V ein Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik Null, so definieren wir für $\delta\colon V \to V$ linear und lokal nilpotent eine Abbildung $\exp(\delta)\colon V \to V$ durch die Exponentialreihe

$$\exp(\delta)(v) := \sum_{n \geq 0} \frac{\delta^n(v)}{n!}.$$

Bemerkung 4.2. Die Abbildung ist wohldefiniert, da δ lokal nilpotent ist, die Summe also für jedes $v \in V$ endlich ist.

Wir zeigen, dass die Abbildung $\exp(\delta)$ linear ist: Seien $v, w \in V$ und $\lambda \in k$. Dann gilt:

$$\exp(\delta)(v + \lambda w) = \sum_{n \geq 0} \frac{\delta^n(v + \lambda w)}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{\delta^n(v) + \lambda \delta^n(w)}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\delta^n(v)}{n!} + \lambda \frac{\delta^n(w)}{n!} \right)$$
$$= \sum_{n \geq 0} \frac{\delta^n(v)}{n!} + \lambda \sum_{n \geq 0} \frac{\delta^n(w)}{n!} = \exp(\delta)(v) + \lambda \exp(\delta)(w).$$

Also ist $\exp(\delta)$ eine lineare Abbildung.

Lemma 4.3 ([Soe24] 2.4.2)**.** *Seien V und W Vektorräume über einem Körper der Charakteristik Null.*

1. *Für* $0 \in \mathrm{End}(V)$ *gilt* $\exp(0) = \mathrm{id}$.

2. *Sind δ und δ' kommutierende lokal nilpotente Endomorphismen von V, so ist auch $\delta + \delta'$ lokal nilpotent und es gilt* $\exp(\delta + \delta') = (\exp(\delta)) \circ (\exp(\delta'))$. *Insbesondere folgt dann* $\exp(-\delta) = (\exp(\delta))^{-1}$.

3. Ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"] & W \arrow[d, "\delta'"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

mit lokal nilpotenten Vertikalen bleibt kommutativ, wenn wir auf beide Vertikalen exp *anwenden.*

Beweis. □

Lemma 4.4 ([Soe24] 2.4.3)**.** *Sei k ein Körper der Charakteristik Null, A eine k-Algebra und $\delta\colon A \to A$ eine lokal nilpotente Derivation von A. Dann ist* $\exp(\delta)$ *ein Algebrenautomorphismus von A.*

Beweis. □

4.2 Exponentialabbildung bei affinen algebraischen Gruppen

Sei nun G eine affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Sei $X \in \mathrm{Lie}(G)$ nilpotent. Per Definition **??** ist die Fortsetzung von X zu einem linksinvarianten Vektorfeld $\grave{X}$ eine lokal nilpotente Derivation von $\mathcal{O}(G)$, die mit allen Linksverschiebungen $\acute{z}$ für $z \in G$ vertauscht.
Nach Lemma 4.4 ist somit $\exp(\grave{X})$ ein Ringalgebrenautomorphismus von $\mathcal{O}(G)$.
Aus Teil 3 von Lemma 4.3 folgt, dass auch $\exp(\grave{X})$ mit allen Linksverschiebungen λ_z für $z \in G$ vertauscht.
Wie im Beweis der Jordanzerlegung in affinen algebraischen Gruppen 1.28 Teil 1 diskutiert, muss der Ringalgebrenautomorphismus $\exp(\grave{X})$ von $\mathcal{O}(G)$ somit die Rechtsverschiebung mit einem wohlbestimmten Element $g \in G$ sein. Wir bezeichnen dieses Element als

$$g := \tilde{\exp}(X)$$

Später werden wir diese Notation wieder zu $\exp(X)$ vereinfachen können.

Bemerkung 4.5. Der Ausdruck $\tilde{\exp}(X)$ ist nur für $X \in \mathrm{Lie}(G)$ nilpotent definiert und liefert im Allgemeinen also keine Abbildung $\mathrm{Lie}(G) \to G$, da nicht jedes Element der Liealgebra nilpotent ist. Bezeichne mit $(\mathrm{Lie}(G))_{\mathrm{n}}$ die Menge der nilpotenten Elementen in $\mathrm{Lie}(G)$. Wir erhalten eine Abbildung

$$\tilde{\exp}\colon (\mathrm{Lie}(G))_{\mathrm{n}} \to G$$

Ist G unipotent, so haben wir bereits in 3.30 gesehen, dass $(\mathrm{Lie}(G))_{\mathrm{n}} = \mathrm{Lie}(G)$ und wir erhalten tatsächlich eine Abbildung

$$\tilde{\exp}\colon \mathrm{Lie}(G) \to G$$

Beispiel 4.6 (Die Exponentialabbildung der additiven Gruppe $\mathbb{G}_a$, [Soe25] 3.10.2)**.** Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Die Gruppe $\mathbb{G}_a$ ist unipotent. Nach **??** ist jedes Element in $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a)$ von der Form $\lambda\partial_{(0)}$ mit $\lambda \in k$.

Seine Fortsetzung zu einer nilpotenten Derivation auf $\mathcal{O}(\mathbb{G}_a) = k[T]$ ist die formale Ableitung ∂. Der Ring der regulären Funktionen $k[T]$ wird als Vektorraum von den T^n mit $n \geq 0$ erzeugt. Wir rechnen

$$\begin{aligned}(\exp \lambda\partial)(T^n) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda\partial)^k(T^n)}{k!} \\ &= T^n + \frac{\lambda n T^{n-1}}{1!} + \frac{\lambda^2 n(n-1)T^{n-2}}{2!} + \frac{\lambda^3 n(n-1)(n-2)T^{n-3}}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} \lambda^i T^{n-i} \\ &= (T+\lambda)^n\end{aligned}$$

Somit gilt für alle $f \in k[T]$, dass $(\exp \lambda\partial)f = f \circ (+\lambda)$, also $\tilde{\exp}\colon \lambda\partial_{(0)} \mapsto \lambda$. Wir sehen also, dass die Exponentialabbildung

$$\tilde{\exp}\colon \mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a) \to \mathbb{G}_a$$

hier mindestens eine Bijektion liefert. In Kürze werden wir stärker zeigen, dass sie für jede unipotente Gruppe sogar einen Isomorphismus von Varietäten liefert.

Beispiel 4.7. Die Liealgebra der multiplikativen Gruppe $\mathbb{G}_m$ enthält keine nilpotenten Elemente, sodass die Exponentialabbildung hier keinerlei Information liefert.

Lemma 4.8 ([Soe25], 3.10.3). *Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null und $X \in \mathrm{Lie}(G)$ nilpotent. Dann gilt*

$$\varphi(\tilde{\exp}(X)) = \tilde{\exp}(\mathrm{d}\varphi(X))$$

Beweis. Schreibe abkürzend $Y := \mathrm{d}\varphi(X)$. Betrachte die zugehörigen linksinvarianten Vektorfelder $\grave{X}$ und $\grave{Y}$. Zunächst haben wir $\mathrm{d}_e\varphi\colon X_e \to Y_e$, aus der Linksinvarianz folgt dann aber, dass sie bereits φ-verwandt sind. Wie im Beweis von 3.15 gesehen, haben wir dann die Gleichheit $\grave{X} \circ \varphi^\sharp = \varphi^\sharp \circ \grave{Y}$. Nach 3.28 sind $\grave{X}$ und $\grave{Y}$ als Derivationen lokal nilpotent und wir haben die Exponentialreihen

$$\exp(\grave{X}) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\grave{X}^k, \quad \exp(\grave{Y}) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\grave{Y}^k$$

welche nur endliche Summen sind. Die Gleichheit $\grave{X} \circ \varphi^\sharp = \varphi^\sharp \circ \grave{Y}$ bleibt erhalten, wenn wir Summen und Potenzen der Vektorfelder nehmen (da diese dann weiterhin φ-verwandt sind), also haben wir auch

$$\exp(\grave{X}) \circ \varphi^\sharp = \varphi^\sharp \circ \exp(\grave{Y})$$

$\exp(\grave{X})$ entspricht nun der Rechtsverschiebung mit $\tilde{\exp}(X)$ und $\exp(\grave{Y})$ entspricht der Rechtsverschiebung mit $\tilde{\exp}(Y)$. Somit liefert die obenstehende Gleichheit gerade

$$(\cdot\tilde{\exp}(X))^\sharp \circ \varphi^\sharp = \varphi^\sharp \circ (\cdot\tilde{\exp}(Y))^\sharp$$

In anderen Worten kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(H) \arrow[r, "(\cdot\tilde{\exp}(Y))^\sharp"] \arrow[d, "\varphi^\sharp"] & \mathcal{O}(H) \arrow[d, "\varphi^\sharp"] \\ \mathcal{O}(G) \arrow[r, "(\cdot\tilde{\exp}(X))^\sharp"] & \mathcal{O}(G) \end{tikzcd}$$

Das Bilden des Rings der regulären Funktionen liefert eine Äquivalenz von Kategorien (siehe z.B. [Har77] §1, Corollary 3.8) und somit kommutiert auch das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} H & H \arrow[l, "\cdot\tilde{\exp}(Y)"'] \\ G \arrow[u, "\varphi"] & G \arrow[l, "\cdot\tilde{\exp}(X)"'] \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

Einsetzen von $e \in G$ unten rechts liefert die gewünschte Gleichheit. □

Lemma 4.9 ([Soe25], 3.10.4)**.** *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Dann gilt mit der kanonischen Identifikation* $\mathrm{richt}\colon \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V)$ *für alle nilpotenten* $X \in \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V))$ *die Identität*

$$\tilde{\exp}(X) = \exp(\mathrm{richt}(X))$$

Beweis. Für einen lokal nilpotenten Endomorphismus $N \in \mathrm{End}(V)$ definieren wir einen Gruppenhomomorphismus $\varphi_N\colon (k, +) \to \mathrm{GL}(V); t \mapsto \exp(tN)$. Dann haben wir die Gleichheit $\mathrm{richt}(\mathrm{d}\varphi_N(\partial_{(0)})) = N$. Formal müssten hierfür erst einmal die Summen- und Produktregel für unser Differential bewiesen werden. Unter Verwendung dieser gilt dann nämlich (schon noch abuse of notation, richt reinziehen?)

$$\mathrm{richt}(\mathrm{d}\varphi_N(\partial_{(0)})) = \mathrm{richt}\left(\partial_{(0)}(\exp(tN))\right) = \mathrm{richt}\left(\partial_{(0)}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(tN)^k}{k!}\right)\right) = N$$

Speziell haben wir für $N = \mathrm{richt}(X)$ die Gleichheit $\mathrm{richt}(\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{richt}(X)}(\partial_{(0)})) = \mathrm{richt}(X)$ und da richt insbesondere injektiv ist also $\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{richt}(X)}(\partial_{(0)}) = X$. Somit folgt

$$\tilde{\exp}(X) = \tilde{\exp}(\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{richt}(X)}(\partial_{(0)})) = \varphi_{\mathrm{richt}(X)}(\tilde{\exp}(\partial_{(0)})) = \varphi_{\mathrm{richt}(X)}(1) = \exp(\mathrm{richt}(X))$$

Hierbei folgt die zweite Gleichheit aus 4.8 und die dritte Gleichheit aus dem Beispiel 4.6. □

Bemerkung 4.10. Aufgrund dieser Identität führt es nicht zu Mehrdeutigkeiten, wenn wir die Notation zu $\tilde{\exp} = \exp$ vereinfachen.

Beispiel 4.11. Für die unipotente Gruppe $\mathbb{U}(n; k)$ liefert das Matrixexponential eine Bijektion

$$\mathrm{Lie}(\mathbb{U}(n;k)) = \mathfrak{u}_n = \left\{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\} \xrightarrow{\exp} \left\{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{U}(n;k)$$

Aus Identitäten auf Ebene der formalen Potenzreihen folgt nämlich, dass die Umkehrabbildung gegeben ist durch die Reihenentwicklung von $\log(1+x)$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Lemma 4.9 zeigt, dass das Matrixexponential hier unserer Abbildung $\widetilde{\exp}$ entspricht.

Satz 4.12 ([Soe25], 3.10.6)**.** *Sei U eine unipotente affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Fassen wir den Vektorraum* $\mathrm{Lie}(U)$ *als affine Varietät auf, so induziert die Exponentialabbildung einen Isomorphismus von Varietäten*

$$\exp\colon \mathrm{Lie}(U) \xrightarrow{\sim} U$$

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass exp und log zueinander inverse Bijektionen liefern zwischen der Menge der echten oberen Dreiecksmatrizen und der Menge der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen, jeweils mit Einträgen in k:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\} \underset{\log}{\overset{\exp}{\longleftrightarrow}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sei nun U eine abgeschlossene Untergruppe rechts und $\mathrm{Lie}(U)$ ihre Liealgebra links. Zunächst zeigen wir, dass $\exp(\mathrm{Lie}(U)) \subset U$. Hierfür betrachten wir die Inklusion $i\colon U \to \mathrm{GL}(n;k)$. Dann ist das Differential eine Inklusion $\mathrm{d}i\colon \mathrm{Lie}(U) \to \mathfrak{gl}_n$. Nach 4.8 kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}(U) \arrow[r, "\widetilde{\exp}"] \arrow[d, "\mathrm{d}i"] & U \arrow[d, "i"] \\ \mathfrak{gl}_n \arrow[r, "\widetilde{\exp}=\exp"] & \mathrm{GL}(n;k) \end{tikzcd}$$

Wichtig ist hierbei, dass auf $\mathfrak{gl}_n$ gilt $\widetilde{\exp} = \exp$. Sei $X \in \mathrm{Lie}(U)$ beliebig. Wir rechnen

$$\exp(X) = \exp(\mathrm{d}i(X)) = \widetilde{\exp}(\mathrm{d}i(X)) = i(\widetilde{\exp}(X)) \in i(U) = U$$

was die gewünschte Inklusion zeigt. Nun gilt $\dim(\mathrm{Lie}(U)) = \dim(U)$ und $\mathrm{Lie}(U)$ ist abgeschlossen. exp ist ein Homöomorphismus, also ist auch $\exp(\mathrm{Lie}(U))$ abgeschlossen und es gilt $\dim(\exp(\mathrm{Lie}(U))) = \dim(U)$. Somit folgt bereits $\exp(\mathrm{Lie}(U)) = U$ unter der Erkenntnis 3.35, dass in Charakteristik Null jede unipotente Gruppe zusammenhängend, also irreduzibel ist. Wäre die Inklusion echt, so könnten wir jede Kette von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen in $\exp(\mathrm{Lie}(U))$ durch U selbst verlängern, die Dimensionen würden also nicht übereinstimmen. Da die Funktionen exp und log Morphismen sind erhalten wir einen Isomorphismus von Varietäten. Nun ist jede unipotente Gruppe isomorph zu einem solchen U, also ist auch jede unipotente Gruppe isomorph zu ihrer Liealgebra, was den Beweis beendet. □

Proposition 4.13. *Das Bilden der Liealgebra liefert einen Funktor*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{unipotente affine algebraische}\\ \textit{Gruppen über } k\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Lie}} \left\{\begin{array}{c}\textit{endlichdimensionale nilpotente}\\ \textit{Liealgebren über } k\end{array}\right\}.$$

Hierbei sind auf beiden Seiten natürlich die vollen Unterkategorien gemeint.

Beweis. Zunächst erinnern wir, dass jede affine Varietät in einen endlichdimensionalen affinen Raum eingebettet werden kann. Somit ist insbesondere jede affine algebraische Gruppe endlichdimensional. Da das bilden der Liealgebra die Dimension erhält, ist die Liealgebra einer affinen algebraischen Gruppe also tatsächlich endlichdimensional. Für einen Morphismus $\varphi\colon G \to G'$ von affinen algebraischen Gruppen liefert das Differential nach **??** einen Morphismus von Liealgebren $\mathrm{d}\varphi\colon \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G')$. Die Rechenregeln für das Differential zeigen die funktoriellen Eigenschaften. Sei nun U eine unipotente affine algebraische Gruppe. Die Einbettung $U \hookrightarrow \mathbb{U}(n;k)$ liefert eine Einbettung $\mathrm{Lie}(U) \hookrightarrow \mathrm{Lie}(\mathbb{U}(n;k)) = \mathfrak{u}_n$. Da $\mathfrak{u}_n$ gerade die Liealgebra der echten oberen Dreiecksmatrizen ist, ist $\mathrm{Lie}(U)$ nach 3.39 eine nilpotente Liealgebra. □

Satz 4.14 ([Soe25], 3.10.9). *Das Bilden der Liealgebra liefert sogar eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{unipotente affine algebraische}\\ \textit{Gruppen über } k\end{array}\right\} \xrightarrow{\approx} \left\{\begin{array}{c}\textit{endlichdimensionale nilpotente}\\ \textit{Liealgebren über } k\end{array}\right\}.$$

Ist die Argumentation in diesem Beweis richtig?

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass der Funktor treu ist, dass er also Injektionen auf den Morphismenräumen induziert. Seien dafür $\phi, \phi'\colon U \to U'$ Morphismen von unipotenten affinen algebraischen Gruppen. Die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}(U) \arrow[r, "\mathrm{d}\phi"] \arrow[d, "\exp"] & \mathrm{Lie}(U') \arrow[d, "\exp"] \\ U \arrow[r, "\phi"] & U' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Lie}(U) \arrow[r, "\mathrm{d}\phi'"] \arrow[d, "\exp"] & \mathrm{Lie}(U') \arrow[d, "\exp"] \\ U \arrow[r, "\phi'"] & U' \end{tikzcd}$$

kommutieren aufgrund der Funktorialität 4.8. Gilt nun $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\phi'$, so erhalten wir für alle $X \in \mathrm{Lie}(U)$ die Gleichung

$$\phi(\exp(X)) = \exp(\mathrm{d}\phi(X)) = \exp(\mathrm{d}\phi'(X)) = \phi'(\exp(X))$$

und da exp nach 4.12 ein Isomorphismus ist also bereits $\phi = \phi'$. Somit ist die Treue gezeigt.

Als nächstes zeigen wir, dass der Funktor essentiell surjektiv ist, dass also jede endlichdimensionale nilpotente Liealgebra isomorph ist zur Liealgebra einer unipotenten affinen algebraischen Gruppe. Dazu reicht es zu zeigen, dass für jedes n und jede Unteralgebra $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{u}_n$ der Liealgebra $\mathfrak{u}_n \subset \mathrm{Mat}(n;k)$ aller echten oberen Dreiecksmatrizen auch $\exp(\mathfrak{n})$ eine Untergruppe der Gruppe aller unipotenten oberen Dreiecksmatrizen $\mathbb{U}(n;k)$ ist. Dies beweisen wir durch Induktion über die Dimension von $\mathfrak{n}$. Der einzige nulldimensionale Vektorraum, ist der triviale Vektorraum $\{0\}$, also ist auch die einzige nulldimensionale Liealgebra die triviale Liealgebra $\mathfrak{n} = \{0\}$. Ihr Bild unter exp ist die triviale Untergruppe. Sei nun $\dim(\mathfrak{n}) = n \geq 1$ und die Aussage gelte für Liealgebren der Dimension kleiner n. Wir finden nach 3.40 stets ein Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$ der Kodimension Eins. Sei $x \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{m}$. Da die Rechtsmultiplikation mit x und die Linksmultiplikation mit x miteinander kommutieren folgt aus 4.3 für jede nilpotente Matrix x und jede Matrix y die Gleichheit

$$\begin{aligned}\exp(x)\, y\, \exp(x)^{-1} &= \exp(x)\, y\, \exp(-x)\\ &= \exp((x\cdot) - (\cdot x))(y)\\ &= \exp(xy - yx)\\ &= \exp(\operatorname{ad} x)(y)\end{aligned}$$

Nun ist $\operatorname{ad} x$ selbst eine nilpotente Derivation der Matrixalgebra und $\exp(\operatorname{ad} x)$ somit wohldefiniert und ein Automorphismus der Matrixalgebra. Für z eine weitere nilpotente Matrix rechnen wir

$$\begin{aligned}\exp(x)\exp(z)\exp(x)^{-1} &= (\exp(\operatorname{ad} x))(\exp(z)\\ &= \exp((\exp(\operatorname{ad} x))(z)),\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Funktorialität von exp folgt. Da $\mathfrak{m}$ ein Ideal ist gilt $(\operatorname{ad} x)(z) \in \mathfrak{m}$ für alle $z \in \mathfrak{m}$. Offensichtlich gilt dies dann auch für Summen und Potenzen der Kommutatoren, also auch $(\exp(\operatorname{ad} x)(z)) \in \mathfrak{m}$ für alle $z \in \mathfrak{m}$. Insgesamt also $\exp(x)\exp(z)\exp(x)^{-1} = \exp((\exp(\operatorname{ad} x))(z)) \in \exp(\mathfrak{m})$. Per Induktionsvoraussetzung ist $\exp(\mathfrak{m})$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{U}(n;k)$. Es ist klar, dass auch $\exp(kx)$ eine Untergruppe ist, da $\exp(\lambda x)\exp(\mu x) = \exp((\lambda+\mu)x) \in \exp(kx)$ und $\exp(\lambda x)^{-1} = \exp(-\lambda x) \in \exp(kx)$. Also normalisiert die Untergruppe $\exp(kx)$ die Untergruppe $\exp(\mathfrak{m})$ und somit ist das Produkt $(\exp(\mathfrak{m})(\exp(kx))$ selbst eine Untergruppe ([Lan02] S.15). Unser Produkt ist gerade die Bahn des neutralen Elements der Wirkung von $(\exp(\mathfrak{m}) \times (\exp(kx))$ auf $\mathbb{U}(n;k)$ gegeben durch $(x,y)\cdot v := xyv$ für $x \in \exp(\mathfrak{m}), y \in \exp(kx), v \in \mathbb{U}(n;k)$. Da die operierende Gruppe unipotent ist, folgt aus 2.16, dass unsere Bahn abgeschlossen ist. Da gilt $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \oplus kx$, enthält die Liealgebra von $(\exp(\mathfrak{m})(\exp(kx))$ die Liealgebra von $\mathfrak{n}$ und fällt dann aus Dimensionsgründen sogar damit zusammen. Aus der Treue des Funktors folgt $\exp(\mathfrak{n}) = (\exp(\mathfrak{m})(\exp(kx))$ und somit ist $\exp(\mathfrak{n}) \subset \mathbb{U}(n;k)$ in der Tat eine abgeschlossene Untergruppe.

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass der Funktor voll ist, dass also jeder Morphismus $F\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{n}$ von endlichdimensionalen nilpotenten Liealgebren von einem Morphismus unipotenter affiner algebraischer Gruppen herkommt. Sei dafür $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$ der Graph des Liealgebrenmorphismus. $\mathfrak{t}$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$. Setze $M := \exp(\mathfrak{m}), N := \exp(\mathfrak{n})$ und $T := \exp(\mathfrak{t})$. Nach dem vorangegangenen sind dies unipotente affine algebraische Gruppen. Weiter ist $T \subset M \times N$ eine abgeschlossene Untergruppe. Die Projektion $\pi_1\colon \mathfrak{t} \to \mathfrak{m}$ ist ein Liealgebrenisomorphismus und kommt über den Funktor her von der Projektion auf Gruppenebene $p_1\colon T \to M$. Wir möchten zeigen, dass p_1 ein Isomorphismus affiner algebraischer Gruppen ist. Betrachte den induzierten Gruppenisomorphismus

$$T/\ker(p_1) \to M$$

Es gilt $\mathrm{Lie}(\ker(p_1)) = \ker(\pi_1) = \{0\}$, also ist $\ker(p_1)$ nulldimensional und somit eine endliche unipotente Gruppe und nach 3.33 trivial. Dann ist $p_1 \colon T \to M$ ein Gruppenisomorphismus und insbesondere bijektiv. Aus Zariski's Hauptsatz 4.15 folgt, dass p_1 ein Isomorphismus von Varietäten ist. Also ist $p_1 \colon T \to M$ insgesamt tatsächlich ein Isomorphismus affiner algebraischer Gruppen. Dann gibt es zu jedem $m \in M$ genau ein $n \in N$, sodass $(m, n) \in T \subset M \times N$, also existiert $f \colon M \to N$, sodass T der Graph von f ist. f muss hierbei ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen sein. Also kommt der Liealgebrenmorphismus F vom Gruppenhomomorphismus f her. Dies beendet den Beweis. □

Proposition 4.15 (Zariski's Hauptsatz, Version). *Seien X, Y affine Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Sei $n := \dim(X) = \dim(Y)$ und $f \colon X \to Y$ ein bijektiver Morphismus von affinen Varietäten. Dann existiert eine offene Teilmenge $U \subset Y$, sodass die Einschränkung $f^{-1}(U) \to U$ ein Isomorphismus von Varietäten ist. Sind X und Y in dieser Situation weiter affine algebraische Gruppen, so ist sogar $f \colon X \to Y$ ein Isomorphismus von Varietäten.*

Ist die Argumentation im Beweis so richtig? Mehr Referenzen einfügen?

Beweis. Basierend auf einer Erklärung von Professor Soergel.
Schreibe abkürzend $A := \mathcal{O}(X)$, $B := \mathcal{O}(Y)$ und $K(X) := \mathrm{Quot}(A)$, $K(Y) := \mathrm{Quot}(B)$. Da f dominant ist, erhalten wir einen injektiven k-Algebren-Homomorphismus $f^\sharp \colon B \hookrightarrow A$ (vgl. [Mum99] I §8 Proposition 1). Wir können den induzierten Homomorphismus der Funktionenkörper $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ als eine Körpererweiterung auffassen. Da gilt $\dim X = \dim Y$, ist der Transzendenzgrad von $K(X)$ über k gleich dem von $K(Y)$ (vgl. [Har77] §1, Theorem 1.8A.). Dann ist $K(X)$ eine algebraische Erweiterung von $K(Y)$: Angenommen $x \in K(X)$ ist nicht algebraisch über $K(Y)$, dann ist es transzendent über $K(Y)$ und somit auch transzendent über k. Dann wäre aber der Transzendenzgrad von $K(X)$ über k größer als der von $K(Y)$.

Da k Charakteristik Null hat, ist jede algebraische Körpererweiterung separabel. Also ist $K(X)/K(Y)$ eine endliche separable Erweiterung und somit nach dem Satz vom primitiven Element einfach (vgl. [Lan02] V, §4, Theorem 4.6). Es existiert also ein $z \in K(X)$ mit $K(X) = K(Y)(z)$.

Sei $P(T) \in K(Y)[T]$ das Minimalpolynom von z über $K(Y)$. Die Koeffizienten des Polynoms liegen allgemein nicht in B. Ist s' aber ein gemeinsamer Nenner der Koeffizienten, so liegen sie in $B_{s'}$. Dann ist z ganz über $B_{s'}$ und $A_{s'}$ ist eine endliche $B_{s'}$-Algebra. Geometrisch liefert die Lokalisierung an s' eine offene Teilmenge $U' := D(s') \subset Y$.

Die Resultante $\mathrm{Res}_T(P, P')$ ist als Polynom in den Koeffizienten von P nicht Null, da P separabel ist (Charakteristik 0). Nach weiterer Lokalisierung an der Resultante haben wir ein s, sodass A_s weiterhin eine endlich erzeugte B_s-Algebra ist und $\mathrm{Quot}(A_s) = K(X), \mathrm{Quot}(B_s) = K(Y)$. Geometrisch erhalten wir eine kleinere offene Teilmenge $U := D(s) \subset U'$, sodass über jedem Punkt von U die Faser von f genau so viele Punkte hat wie der Grad d der Körpererweiterung $[K(X) : K(Y)]$. Da f bijektiv ist, ist $d = 1$, und somit $K(X) = K(Y)$. Das Minimalpolynom von z hat Grad 1, also ist $z \in K(Y)$. Da A_s eine endliche B_s-Algebra ist und die Funktionenkörper gleich sind, folgt aus [?], dass $A_s = B_s$. Dann ist die zugehörige Abbildung

(?)Hierfür habe ich noch keine passende Referenz gefunden, der Beweis scheint mir aber nicht allzu schwer

$f^{-1}(D(s)) \to D(s)$ ein Isomorphismus von Varietäten.

Sind X und Y zusätzlich affine algebraische Gruppen, so sind sie insbesondere homogene Räume. Nach dem Vorangegangenen finden wir ein $U \subset Y$, sodass $f^{-1}(U) \to U$ ein Isomorphismus ist. Dann folgt aber bereits, dass für alle $g \in Y$ auch $f^{-1}(gU) \to gU$ ein Isomorphismus ist und die offenen Mengen gU überdecken Y, wir erhalten also auch global einen Isomorphismus. $\square$

5 Kleine unipotente affine algebraische Gruppen

In diesem Abschnitt wird nun die Klassifizierung niedrigdimensionaler unipotenter Gruppen begonnen. Hierbei nehmen wir weiterhin den Körper k als algebraisch abgeschlossen an. Wir müssen nun jedoch klar zwischen Charakteristik Null und positiver Charakteristik unterscheiden, da die Situation in diesen beiden Fällen sehr verschieden ist.

5.1 Kleine unipotente Gruppen in Charakteristik Null

Im vorangegangenen Kapitel haben wir herausgestellt, dass die Kategorie der unipotenten affinen algebraischen Gruppen über einem Körper k mit char $k = 0$ äquivalent ist zu der Kategorie der endlichdimensionalen nilpotenten Liealgebren über k. Weiterhin haben wir gesehen, dass der Funktor die Dimension erhält. Konkret: Die Liealgebra einer unipotenten affinen algebraischen Gruppe hat die gleiche Dimension wie die Gruppe selbst. Hierbei meint die Dimension der Liealgebra natürlich ihre Dimension als Vektorraum und die Dimension der Gruppe natürlich die Krulldimension der zugrundeliegenden Varietät. Isomorphe algebraische Gruppen haben die gleiche Dimension. Ebenso haben isomorphe Liealgebren die gleiche Dimension.

Sei $n \geq 0$. Wir möchten nun die unipotenten affinen algebraischen Gruppen der Dimension n klassifizieren. Isomorphie ist stets eine Äquivalenzrelation. Das heißt wir möchten alle unipotenten affinen algebraischen Gruppen der Dimension n modulo Isomorphie bestimmen.
Eine Äquivalenz von Kategorien liefert per Definition eine Bijektion auf den Äquivalenzklassen. In unserem Fall bedeutet dies: Kennen wir die nilpotenten Liealgebren der Dimension n bis auf Isomorphie, so kennen wir bereits die unipotenten affinen algebraischen Gruppen der Dimension n bis auf Isomorphie. Wir brauchen nämlich nur ein Repräsentantensystem der nilpotententen Liealgebren der Dimension n zu wählen und erhalten dann über die zugehörigen algebraischen Gruppen ein Repräsentantensystem für die unipotenten affinen algebraischen Gruppen der Dimension n.

Die direkte Klassifikation der unipotenten Gruppen ist schon in niedriger Dimension schwer. Aus diesem Grund werden wir im Folgenden nilpotente Liealgebren niedriger Dimension klassifizieren und anschließend stets herausstellen, was dies für die Klassifikation der unipotenten Gruppen bedeutet.

Im Folgenden sei k stets ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null.

5.1.1 Der kommutative Fall

Lemma 5.1. *Sei $n \in N$ beliebig. Bis auf Isomorphie gibt es nur eine abelsche Liealgebra über k der Dimension n.*

Beweis. Bis auf Isomorphie gibt es nur einen k-Vektorraum der Dimension n. Die Lieklammer einer abelschen Liealgebra ist trivial, also ist eine abelsche Liealgebra der Dimension n nichts anderes als ein n-dimensionaler Vektorraum und ein Isomorphismus von abelschen Liealgebren ist nichts anderes als ein Isomorphismus der zugrundeliegenden Vektorräume. □

Lemma 5.2. *Sei U eine unipotente affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Dann ist U eine abelsche Gruppe genau dann, wenn $\mathrm{Lie}(U)$ eine abelsche Liealgebra ist.*

Ist die Argumentation im Beweis richtig?

Beweis. Ohne Einschränkung sei U eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{U}(n;k)$. Wir betrachten eine Kette von Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
U \text{ ist kommutativ} &\overset{(1)}{\iff} \text{Für alle } g,h \in U \text{ gilt } ghg^{-1} = h \\
&\overset{(2)}{\iff} \text{Für alle } g \in U \text{ gilt } \mathrm{int}_g = \mathrm{id}_U \\
&\overset{(3)}{\iff} \text{Für alle } g \in U \text{ gilt } \mathrm{Ad}_g = \mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(U)} \\
&\overset{(4)}{\iff} \text{Für alle } X \in \mathrm{Lie}(U) \text{ gilt } \mathrm{ad}\, X = 0 \\
&\overset{(5)}{\iff} \mathrm{Lie}(U) \text{ ist abelsch}
\end{aligned}
$$

Die Äquivalenzen (1) und (2) sind klar. Die Implikation $\Rightarrow$ der dritten Äquivalenz ist folgt mit $\mathrm{Ad}_g = \mathrm{d}_g(\mathrm{int}_g)$ direkt. Die Implikation $\Leftarrow$ folgt daraus, dass unter den gegebenen Voraussetzungen das Bilden der Liealgebra (also das Bilden des Differentials) ein treuer Funktor ist. Für die Implikation $\Rightarrow$ in (4) beachte man, dass dann $\mathrm{Ad}\colon U \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}(U)); g \mapsto \mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(U)}$ ein konstanter Morphismus ist und das Differential konstanter Morphismen verschwindet. Die andere Implikation $\Leftarrow$ in (4) beweisen wir nun: Ist $\mathrm{ad}\, X = 0$ für alle $X \in \mathrm{Lie}(U)$, so gilt mit der Funktorialität von exp

$$I_n = \exp(0_n) = \exp(\mathrm{ad}\, X) = \exp(\mathrm{d}_e\mathrm{Ad}(X)) = \mathrm{Ad}(\exp(X))$$

für alle $X \in \mathrm{Lie}(U)$ und da exp hier ein Isomorphismus ist also bereits für alle $g \in U$. Allgemeiner entspricht dies der Erkenntnis, dass, wenn das Differential eines Morphismus affiner Varietäten auf einer zusammenhängenden Varietät verschwindet, die Funktion konstant sein muss. Da unser Morphismus zusätzlich ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt, dass sein Bild das neutrale Element enthält, er also konstant das neutrale Element ist. Die Äquivalenz (5) ist klar nach 3.27. □

Proposition 5.3 ([Soe25] Übung 3.10.13)**.** *Jede kommutative unipotente affine algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null ist isomorph zur additiven Gruppe eines endlichdimensionalen k-Vektorraums.*

Beweis. Eine unipotente Gruppe ist genau dann kommutativ, wenn ihre Liealgebra es ist. Somit gilt die Äquivalenz von Kategorien 4.14 auch dann noch, wenn wir auf beiden Seiten Kommutativität fordern. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach 5.1 bis auf Isomorphie aber nur eine abelsche Liealgebra der Dimension n und diese ist nilpotent. Somit gibt es bis auf Isomorphie auch nur eine kommutative unipotente Gruppe der Dimension n. Die additive Gruppe eines n-dimensionalen k-Vektorraums ist $\mathbb{G}_a^n$, eine kommutative Gruppe, welche nach 2.7 unipotent ist. Dies beendet den Beweis. □

5.1.2 Dimension Null

Eine affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper hat Dimension Null genau dann, wenn sie eine endliche Menge ist. In 3.33 haben wir bereits gesehen, dass jede endliche unipotente affine algebraische Gruppe trivial ist. Diesen Fakt zeigen wir nun noch ein weiteres Mal unter Verwendung der Äquivalenz von Kategorien. Sei $\mathfrak{n}$ eine nulldimensionale Liealgebra. Der einzige nulldimensionale Vektorraum ist der triviale Vektorraum, also muss auch $\mathfrak{n}$ die triviale Liealgebra sein $\mathfrak{n} = \{0\}$. Diese ist nilpotent. Die zugehörige unipotente Gruppe ist die triviale Gruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht.

5.1.3 Dimension Eins

Sei $\mathfrak{n}$ eine eindimensionale Liealgebra. Sei $\{x\}$ eine Basis. Seien $y, y' \in \mathfrak{n}$. Dann existieren $\lambda, \lambda' \in k$, sodass $y = \lambda x, y' = \lambda' x$. Wir rechnen

$$[y, y'] = [\lambda x, \lambda' x] = \lambda\lambda'[x, x] = 0$$

Dies bedeutet, dass jede eindimensionale Liealgebra abelsch ist. Nach 5.1 gibt es bis auf Isomorphie nur eine abelsche Liealgebra der Dimension Eins und diese ist nilpotent. Dann gibt es bis auf Isomorphie auch nur eine unipotente affine algebraische Gruppe der Dimension Eins. Die additive Gruppe ist eine solche. Also ist jede eindimensionale unipotente affine algebraische Gruppe über k isomorph zu $\mathbb{G}_a$.

5.1.4 Dimension Zwei

Wie zuvor gibt es bis auf Isomorphie nur eine abelsche Liealgebra der Dimension Zwei und diese ist nilpotent. Wir betrachten den nichtabelschen Fall:

Lemma 5.4 ([EW06] 3.1)**.** *Jede nichtabelsche zweidimensionale Liealgebra $\mathfrak{n}$ über k hat eine Basis $\{x_1, x_2\}$, sodass für die Lieklammer gilt*

$$[x_1, x_2] = x_1$$

Beweis. Sei $\{v_1, v_2\}$ eine beliebige Basis von $\mathfrak{n}$. Dann wird die Unteralgebra $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ von $[v_1, v_2]$ aufgespannt: Seien $w_1, w_2 \in \mathfrak{n}$ beliebig und schreibe $w_1 = \lambda_1 v_1 + \mu_1 v_2, w_2 = \lambda_2 v_1 + \mu_2 v_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in k$. Dann gilt

$$[w_1, w_2] = [\lambda_1 v_1 + \mu_1 v_2, \lambda_2 v_1 + \mu_2 v_2] = \lambda_1\mu_2[v_1, v_2] - \lambda_2\mu_1[v_1, v_2] = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)[v_1, v_2]$$

Weiter gilt $[v_1, v_2] \neq 0$, andernfalls wäre die Lieklammer trivial. Also ist $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ insbesondere eindimensional. Sei $x_1 \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \setminus \{0\}$. Sei $y \in \mathfrak{n} \setminus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ beliebig. Wir erhalten $[x_1, y] = \lambda x_1$ für ein $\lambda \neq 0$. Setze $x_2 = \lambda^{-1} y$. Dann ist $\{x_1, x_2\}$ eine Basis von $\mathfrak{n}$ für die gilt

$$[x_1, x_2] = [x_1, \lambda^{-1} y] = \lambda^{-1}[x_1, y] = \lambda^{-1}\lambda x_1 = x_1$$

□

Proposition 5.5. *Bis auf Isomorphie gibt es genau eine nichtabelsche zweidimensionale Liealgebra über k.*

Beweis. Sei V ein zweidimensionaler Vektorraum mit Basis $\{x_1, x_2\}$. Nachrechnen zeigt, dass die Operation $[x_1, x_2] = x_1$ eine nichttriviale Lieklammer auf V definiert. Dies zeigt die Existenz. Seien $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$ zweidimensionale nichtabelsche Liealgebren über k. Wähle eine Basis $\{x_1, x_2\}$ von $\mathfrak{n}$ und eine Basis $\{x_1', x_2'\}$ von $\mathfrak{n}'$, welche jeweils die Eigenschaft aus dem Lemma erfüllen. Dann definiert der Vektorraumisomorphismus $\phi\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}'$ gegeben durch $\phi(x_1) = x_1', \phi(x_2) = x_2'$ bereits einen Isomorphismus von Liealgebren, da gilt:

$$\phi([x_1, x_2]) = \phi(x_1) = x_1' = [x_1', x_2'] = [\phi(x_1), \phi(x_2)]$$

□

Lemma 5.6. *Jede zweidimensionale nichtabelsche Liealgebra ist nicht nilpotent.*

Beweis. Sei $\mathfrak{n}$ eine zweidimensionale nichtabelsche Lialgebra mit Basis x_1, x_2 wie oben. Man betrachte die absteigende Zentralreihe.

$$\mathfrak{n}^0 = \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}^1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \langle [a, b] \mid a, b \in \mathfrak{n} \rangle$$

Nun reicht es aber die Lieklammer auf den Basiselementen zu kennen: $[x_1, x_1] = 0, [x_1, x_2] = x_1, [x_2, x_2] = 0, [x_2, x_1] = -x_1$. Daraus folgt $\mathfrak{n}^1 = \langle x_1 \rangle$. Dann ist

$$\mathfrak{n}^2 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^1] = [\mathfrak{n}, \langle x_1 \rangle] = \langle [a, b] \mid a \in \mathfrak{n}, b \in \langle x_1 \rangle \rangle$$

Wieder rechnen wir die Lieklammer auf den Basiselementen aus: $[x_1, x_1] = 0, [x_2, x_1] = -x_1$. Daraus folgt $\mathfrak{n}^2 = \langle x_1 \rangle$, also wird die absteigende Zentralreihe stationär und $\mathfrak{n}$ ist nicht nilpotent. □

Satz 5.7. *Jede zweidimensionale unipotente affine algebraische Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$.*

Beweis. Aus den Erkenntnissen über zweidimensionale Liealgebren folgt mit der Äquivalenz von Kategorien direkt, dass es bis auf Isomorphie nur eine zweidimensionale unipotente affine algebraische Gruppe gibt. Also reicht es zu zeigen, dass die Gruppe $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$ unipotent ist. Das folgt aber aus 2.7. □

Bemerkung 5.8. Bis hierhin haben wir bei der Klassifikation der Liealgebren nicht benutzt, dass der zugrundeliegende Körper k algebraisch abgeschlossen ist und Charakteristik Null hat, die Klassifikation der Liealgebren gilt also bis zu diesem Punkt für jeden beliebigen Körper.

5.1.5 Dimension Drei

Sei $\mathfrak{n}$ eine dreidimensionale Liealgebra. Wir klassifizieren nach der Dimension von $\mathfrak{n}^1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$.

Fall 1

Gilt $\dim(\mathfrak{n}^1) = 0$, so ist $\mathfrak{n}$ abelsch und wie zuvor sind alle solchen Liealgebren isomorph und nilpotent.

Fall 2

Gilt $\dim(\mathfrak{n}^1) = 3$, so ist $\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}$, die absteigende Zentralreihe ist also stationär und $\mathfrak{n}$ nicht nilpotent.

Fall 3

([EW06] 3.2.1) Wir nehmen an, dass $\dim(\mathfrak{n}^1) = 1$ und, dass $\mathfrak{n}^1$ im Zentrum $Z(\mathfrak{n})$ enthalten ist. Seien $x, y \in \mathfrak{n}$, sodass $[x, y] \neq 0$. Da $\mathfrak{n}^1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ nach Annahme eindimensional ist, erzeugt $[x, y]$ bereits $\mathfrak{n}^1$. Da wir weiter annehmen, dass $\mathfrak{n}^1 \subset Z(\mathfrak{n})$, gilt $[a, [x, y]] = 0$ für alle $a \in \mathfrak{n}$. Wir definieren

$$z := [x, y]$$

Dann sind x, y, z linear unabhängig: Angenommen es gilt

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

mit $\lambda, \mu, \nu \in k$. Wir bilden die Lieklammer mit x und vereinfachen:

$$0 = [\lambda x + \mu y + \nu z, x] = \lambda[x, x] + \mu[y, x] + \nu[z, x] = -\mu z$$

Da $z \neq 0$, folgt $\mu = 0$. Analog ergibt das Bilden der Lieklammer mit y:

$$0 = [\lambda x + \mu y + \nu z, y] = \lambda[x, y] + \mu[y, y] + \nu[z, y] = \lambda z,$$

also $\lambda = 0$. Damit folgt schließlich aus der ursprünglichen Gleichung $\nu z = 0$, also auch $\nu = 0$. Somit ist $\{x, y, z\}$ eine Basis von $\mathfrak{n}$. Die Lieklammern der Basiselemente

$$[x, y] = z, \quad [x, z] = 0, \quad [y, z] = 0$$

definieren die restlichen Lieklammern bereits. Betrachte die Liealgebra $\mathfrak{u}_3$ der echten oberen Dreiecksmatrizen über k. Die Menge

$$\left\{ e_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{23} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{13} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von $\mathfrak{u}_3$, bezüglich derer gilt

$$[e_{12}, e_{23}] = e_{13}, \quad [e_{12}, e_{13}] = 0, \quad [e_{23}, e_{13}] = 0$$

Dies zeigt, dass tatsächlich eine Liealgebra $\mathfrak{n}$ mit den obigen Forderungen existiert und diese bis auf Isomorphie eindeutig ist, nämlich isomorph zu $\mathfrak{u}_3$. Wir haben bereits im Beweis von 3.39 gesehen, dass $\mathfrak{u}_3$ nilpotent ist.

Fall 4

(Adaption von [EW06] 3.2.2) Nun nehmen wir an, dass $\dim(\mathfrak{n}^1) = 1$ und, dass $\mathfrak{n}^1$ nicht im Zentrum $Z(\mathfrak{n})$ enthalten ist. Sei x eine Basis von $\mathfrak{n}^1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. Da wir annehmen, dass $\mathfrak{n}^1 \not\subseteq Z(\mathfrak{n})$ existiert ein $y' \in \mathfrak{n}$, sodass $0 \neq [x, y'] \in \mathfrak{n}^1$. Weiter existiert dann ein $\lambda \in k \setminus \{0\}$, sodass $[x, y'] = \lambda x$. Mit $y := \lambda^{-1} y'$ gilt dann $[x, y] = x$. Aus $[x, y] = x \neq 0$ folgt, dass x und y linear unabhängig sind. Sei $\mathfrak{h}$ der von x und y erzeugte zweidimensionale Untervektorraum von $\mathfrak{n}$. Dieser ist stabil unter dem Bilden der Lieklammer, da alle möglichen Lieklammern der Basisvektoren x, y wieder in $\mathfrak{h}$ liegen. Somit ist $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{n}$ und per Konstruktion isomorph zur eindeutigen nichtabelschen zweidimensionalen Liealgebra über k. Sie ist, wie in 5.6 bewiesen, nicht nilpotent. Da jede Unteralgebra einer nilpotenten Liealgebra aber selbst nilpotent ist, kann $\mathfrak{n}$ nicht nilpotent sein.

Fall 5

Gibt es Fehler in der Argumentation ?

Nun betrachten wir den letzten Fall, nämlich $\dim(\mathfrak{n}^1) = 2$. Behauptung: Dann ist $\mathfrak{n}$ nicht nilpotent.

Beweis. Wir unterscheiden Fälle nach der Dimension von $\mathfrak{n}^2 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^1] = [\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]]$.

Ist $\dim([\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]]) = 2$, so wird die absteigende Zentralreihe konstant und $\mathfrak{n}$ ist nicht nilpotent.

Nehme nun an, dass $\dim([\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]]) = 1$. Wähle eine Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathfrak{n}$, derart, dass $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ ist und $\{e_1\}$ eine Basis von $[\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]]$ ist. Angenommen $\mathfrak{n}$ ist nilpotent, dann muss $[e_1, x] = 0$ für alle $x \in \mathfrak{n}$. Es existiert $y \in \mathfrak{n}$ mit $[e_2, y] = e_1$. Wir schreiben $y = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in k$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} [e_2, y] &= [e_2, \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3] \\ &= -\alpha[e_1, e_2] + \beta[e_2, e_2] + [e_2, \gamma e_3] \\ &= [e_2, \gamma e_3] \end{aligned}$$

Also gilt $[e_2, \gamma e_3] = e_1$. Die Liealgebra $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ wird definiert von den Lieklammern auf den Basisvektoren, diese können wir nun ausrechnen:

$$[e_1, e_1] = 0, [e_1, e_2] = 0. [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_2] = 0, [e_2, e_3] = \frac{1}{\gamma} e_1, [e_3, e_3] = 0$$

Dies zeigt, dass $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ von e_1 erzeugt wird und eindimensional ist, ein Widerspruch.

Es bleibt also nur noch der Fall, dass $\dim([\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]]) = 0$. Sei $\{e_1, e_2\}$ eine Basis von $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ und e_3, sodass $\{e_1, e_2, e_3\}$ eine Basis von $\mathfrak{n}$ ist. Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{n}$

$$[e_1, x] = 0 \quad \text{und} \quad [e_2, x] = 0$$

Daraus folgt, dass $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ erzeugt wird von der Menge $\{[e_3, x] \mid x \in \mathfrak{n}\}$. Sei $x \in \mathfrak{n}$

beliebig, also $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in \mathfrak{n}$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}[e_3, x] &= [e_3, \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3] \\ &= [e_3, \alpha e_1] + [e_3, \beta e_2] + [e_3, \gamma e_3] \\ &= -\alpha[e_1, e_3] - \beta[e_2, e_3] \\ &= 0\end{aligned}$$

Es folgt $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \{0\}$, ein Widerspruch. □

Satz 5.9. *Jede unipotente affine algebraische Gruppe der Dimension Drei über k ist entweder isomorph zu $\mathbb{G}_a^3$ oder isomorph zu $\mathbb{U}(3; k)$.*

Beweis. Wir haben gesehen, dass es bis auf Isomorphie nur zwei nilpotente Liealgebren der Dimension Drei gibt: Die abelsche Liealgebra und die Liealgebra $\mathfrak{u}_3$. Also gibt es bis auf Isomorphie auch nur zwei unipotente affine algebraische Gruppen der Dimension Drei. $\mathbb{G}_a^3$ und $\mathbb{U}(3; k)$ sind dreidimensionale unipotente Gruppen. Sie sind nicht isomorph, da $\mathbb{G}_a^3$ kommutativ ist und $\mathbb{U}(3; k)$ nicht kommutativ ist. Dies zeigt die gewünschte Aussage. Genauer haben wir bereits gesehen, dass $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}_a^3)$ die abelsche Liealgebra der Dimension Drei sein muss (5.3) und, dass $\mathrm{Lie}(\mathbb{U}(n; k)) = \mathfrak{u}_3$ (3.30). □

Ausblick

Die Klassifikation nilpotenter Liealgebren ist auch noch in höheren Dimensionen bekannt, wenn auch zunehmend technisch. Beispielsweise in [?] werden nilpotente Liealgebren der Dimensionen 5 und 6 klassifiziert. Somit ist auf diesem Wege auch eine Klassifikation der unipotenten Gruppen höherer Dimension über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null möglich.

5.2 Kleine unipotente Gruppen in Charakteristik $p > 0$

Im Fall $\mathrm{char}\, k = p > 0$ (p ist Primzahl, sonst handelt es sich nicht um einen Körper) ist die Situation schwieriger. Weiterhin haben die unipotenten Gruppen weniger schöne Eigenschaften: $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{G}_a$ und somit selbst unipotent. Sie ist nicht zusammenhängend.

5.2.1 Dimension Null

(Basierend auf [Soe25] 1.5.12) Wir holen etwas aus. Wie zuvor können wir jede endliche Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k als affine algebraische Gruppe auffassen mit dem Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}(G) = \{f : G \to k\}$. Betrachte nun die endliche Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Sie ist kommutativ, also existiert eine Jordanzerlegung wie in 1.32. Diese berechnen wir im Folgenden. Sei $\mathrm{char}\, k = p > 0$.

Fall 1: m **ist teilerfremd zu** p

In diesem Fall sind alle Elemente von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halbeinfach. Wir können nämlich $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ in die multiplikative Gruppe $k \setminus \{0\} = \mathrm{GL}(1; k)$ als Untergruppe der m-ten Einheitswurzeln einbetten. Alle Elemente von $k \setminus \{0\}$ sind halbeinfach, also sind nach 1.28 auch alle Elemente von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halbeinfach.

Fall 2: m **ist eine Potenz von** p

Sei $r \in \mathbb{N}$, sodass $m = p^r$. Sei n, sodass $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorph ist zu einer abgeschlossenen Untergruppe $\mathrm{GL}(n; k)$. Sei $a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und sei $A \in \mathrm{GL}(n; k)$ das Bild von a unter der Einbettung. Es gilt $a^m = a^{p^r} = 1$ (dies folgt direkt aus dem Satz von Lagrange [Lan02], Proposition 2.2, p. 12). Somit gilt auch $A^{p^r} = I$ und es folgt, dass das Minimalpolynom von A ein Teiler von $X^{p^r} - 1 \in k[X]$. In Charakteristik p gilt aber $X^{p^r} - 1 = (X - 1)^{p^r}$ und somit folgt, dass alle Eigenwerte von A Eins sind. Dann ist A, und somit auch a, unipotent.

Der allgemeine Fall

Für beliebiges m schreibe $m = p^r n$ mit n teilerfremd zu p. Der Chinesische Restsatz liefert einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Fassen wir nun $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als Zariski-abgeschlossene Untergruppen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ auf, so liefert dies bereits die kommutative Jordanzerlegung. Wie in den Fällen 1 und 2 gesehen, sind nämlich die Elemente von $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ unipotent und die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halbeinfach.

Aufbauend darauf können wir Aussagen über endliche unipotente Gruppen treffen:

Definition 5.10. Eine Gruppe G heißt *p-Gruppe*, wenn die Ordnung jedes ihrer Elemente eine Potenz von p ist. Ist G endlich, so ist dies äquivalent dazu, dass die Gruppenordnung von G eine Potenz von p ist.

Satz 5.11. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik* $\mathrm{char}\, k = p > 0$. *Die unipotenten affinen algebraischen Gruppen über k der Dimension Null sind gerade die endlichen p-Gruppen.*

Beweis. Sei U eine endliche unipotente affine algebraische Gruppe. Sei m die Ordnung von U und $u \in U$ beliebig. Wir notieren die von u erzeugte zyklische Untergruppe als $\langle u \rangle$. Es gilt $\langle u \rangle \cong \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Als Untergruppe von U ist $\langle u \rangle$ unipotent und somit folgt aus den obigen Überlegungen bereits, dass i eine Potenz von p sein muss.
Sei nun umgekehrt U eine endliche p-Gruppe und $u \in U$. Dann hat $\langle u \rangle$ die Gruppenordnung p^r für ein $r \in \mathbb{N}$ und somit gilt $\langle u \rangle \cong \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. Nach Fall 2 ist jedes Element von $\langle u \rangle$ unipotent. Die natürliche Abbildung $i \colon \langle u \rangle \hookrightarrow U$ ist ein Morphismus affiner algebraischer Gruppen, also sind die Bilder nach 1.28 ebenfalls unipotent. Insbesondere ist das Element u unipotent. $\square$

Bemerkung 5.12. Der Satz 5.11 zeigt bereits, was in positiver Charakteristik alles schiefgeht. Zunächst sehen wir, dass die Äquivalenz von Kategorien 4.14 nicht mehr gilt: Es gibt nämlich bis auf Isomorphie nur eine nilpotente Liealgebra über k der

Dimension Null, aber sehr viele p-Gruppen. Weiterhin sehen wir, dass nicht mehr jede unipotente Gruppe zusammenhängend ist. Die einzige zusammenhängende algebraische Gruppe der Dimension Null ist nämlich die triviale Gruppe.

Da jeder Gruppenisomorphismus zwischen zwei endlichen Gruppen bereits ein Isomorphismus affiner algebraischer Gruppen ist, entspricht die Klassifikation der nulldimensionalen unipotenten Gruppen gerade der Klassifikation der endlichen p-Gruppen. Diese ist zum aktuellen Zeitpunkt nur teilweise bekannt. Man siehe z.B. [?] und [?]. Wir verfolgen diese Klassifikation nicht weiter.

5.2.2 Dimension Eins

Ausblick

Literaturverzeichnis

[Bor91] Armand Borel. *Linear Algebraic Groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 1991. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0941-6.

[EW06] Karin Erdmann and Mark J. Wildon. *Introduction to Lie Algebras*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 1st edition, 2006. https://doi.org/10.1007/1-84628-490-2.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1977. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3849-0.

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1st edition, 1972. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6398-2.

[Hum75] James E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups*, volume 21 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1st edition, 1975. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9443-3.

[Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 3rd edition, 2002. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0041-0.

[Mum99] David Mumford. *The Red Book of Varieties and Schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 1999. https://doi.org/10.1007/b62130.

[Soe24] Wolfgang Soergel. Halbeinfache lie-algebren, 2024. Skript, Universität Freiburg. `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXHL.pdf`, Fassung vom 25.04.2024.

[Soe25] Wolfgang Soergel. Affine algebraische gruppen, 2025. Skript, Universität Freiburg. `https://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/AAG.pdf`, Fassung vom 20.06.2025.

[Spr98] T. A. Springer. *Linear Algebraic Groups*, volume 9 of *Modern Birkhäuser Classics*. Birkhäuser, 2nd edition, 1998. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4840-4.