

# Topologie<sup>1</sup>

Wolfgang Soergel

13. März 2012

<sup>1</sup>Für die bebilderte 13MB-Version siehe .../TOPOLOGIEmitBildern.pdf



# Inhaltsverzeichnis

<b>A</b>	<b>Topologie</b>	<b>7</b>
<b>I</b>	<b>Fundamentalgruppe und Überlagerungen</b>	<b>9</b>
1	Homotopie und Fundamentalgruppe . . . . .	11
1.1	Einführung in die algebraische Topologie . . . . .	11
1.2	Die Definition der Fundamentalgruppe . . . . .	15
1.3	Die Fundamentalgruppe der Kreislinie . . . . .	19
1.4	Anwendungen und Beispiele . . . . .	23
1.5	Homotopie zwischen Abbildungen . . . . .	26
1.6	Homotopie und Fundamentalgruppe . . . . .	29
1.7	Selbstabbildungen der Kreislinie . . . . .	32
2	Kategorien und Funktoren . . . . .	39
2.1	Kategorien . . . . .	39
2.2	Funktoren . . . . .	43
2.3	Transformationen . . . . .	45
2.4	Produkte in Kategorien . . . . .	49
2.5	Kartesische und kokartesische Diagramme . . . . .	51
3	Beschreibung einiger Fundamentalgruppen . . . . .	56
3.1	Kartesische und kokartesische Diagramme . . . . .	56
3.2	Der Satz von Seifert und van Kampen . . . . .	60
3.3	Freie Gruppen . . . . .	63
3.4	Simplizialkomplexe und triangulierbare Flächen . . . . .	67
3.5	Klassifikation der geschlossenen Flächen . . . . .	74
3.6	Gruppen durch Erzeugende und Relationen . . . . .	82
3.7	Die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen . . . . .	83
3.8	Push-out von Gruppen . . . . .	85
4	Überlagerungstheorie . . . . .	88
4.1	Überlagerungen . . . . .	88
4.2	Kategorien von Mengen mit Gruppenwirkung . . . . .	90
4.3	Quotientenabbildungen als Überlagerungen . . . . .	92
4.4	Lifts und Decktransformationen . . . . .	93

4.5	Universelle Überlagerungen . . . . .	96
4.6	Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern . . .	102
4.7	Klassifikation von Überlagerungen . . . . .	108
4.8	Existenz universeller Überlagerungen . . . . .	111
4.9	Adjungierte Funktoren . . . . .	115
4.10	Der abstrakte Faserfunktork . . . . .	120
4.11	Die Zopfgruppe . . . . .	122
4.12	Überlagerungen topologischer Gruppen* . . . . .	129
4.13	Überlagerungen und Homotopie* . . . . .	130
<b>II</b>	<b>Singuläre Homologie</b>	<b>133</b>
1	Singuläre Homologie . . . . .	135
1.1	Simpliziale Homologie . . . . .	135
1.2	Definition der singulären Homologie . . . . .	142
1.3	Funktorialität der Homologie . . . . .	149
1.4	Homotopie-Invarianz . . . . .	152
1.5	Erste Homologie und Fundamentalgruppe . . . . .	160
1.6	Homologie offener Teilmengen der Ebene . . . . .	164
2	Relative Homologie mit Anwendungen . . . . .	174
2.1	Relative Homologie . . . . .	174
2.2	Die lange exakte Homologiesequenz . . . . .	178
2.3	Ausschneidung . . . . .	183
2.4	Homologie von Simplizialkomplexen . . . . .	194
2.5	Endlichkeitsaussagen für Mannigfaltigkeiten . . . . .	200
2.6	Variationen zur simplizialen Homologie* . . . . .	201
2.7	Einbettungen von Sphären in Sphären . . . . .	208
2.8	Homologie von endlichen Zellkomplexen . . . . .	213
2.9	Homologie und Orientierung . . . . .	217
2.10	Orientierung und Fundamentalzykel . . . . .	219
3	Homologie mit Koeffizienten und Produkte . . . . .	232
3.1	Homologie mit Koeffizienten . . . . .	232
3.2	Tensorprodukte über Ringen . . . . .	235
3.3	Erste Anwendungen in der Homologietheorie . . . . .	240
3.4	Torsionsprodukt von abelschen Gruppen . . . . .	241
3.5	Das universelle Koeffiziententheorem . . . . .	246
3.6	Homologie von Produkten . . . . .	248
3.7	Eine explizite Eilenberg-Zilber-Abbildung . . . . .	257
3.8	Eigenschaften des Kreuzprodukts . . . . .	260
4	Singuläre Kohomologie . . . . .	264
4.1	Die Kohomologiegruppen . . . . .	264
4.2	Der Kohomologiering . . . . .	267

4.3	Cup-Produkt von singulären Koketten . . . . .	272
4.4	Differentielle graduierte Algebra . . . . .	273
4.5	Die Homologie als Modul über der Kohomologie . . . . .	277
4.6	Ein Kriterium für Homotopieäquivalenzen . . . . .	281
4.7	Eigenschaften der Kohomologie . . . . .	283
4.8	Erweiterungen von abelschen Gruppen . . . . .	285
4.9	Injektive abelsche Gruppen . . . . .	287
4.10	Koeffizientenwechsel in der Kohomologie . . . . .	291
5	Poincaré-Dualität und Schnittpaarung . . . . .	293
5.1	Limites und Kolimites . . . . .	293
5.2	Kohomologie mit kompaktem Träger . . . . .	300
5.3	Poincaré-Dualität . . . . .	307
5.4	Schnittzahlen . . . . .	313
5.5	Anschauung im nichtkompakten Fall . . . . .	321
<b>III</b>	<b>Garbenkohomologie</b>	<b>327</b>
1	Garben und ihre Kohomologie . . . . .	330
1.1	Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen . . . . .	330
1.2	Erste Čech-Kohomologie und Torsoren . . . . .	335
1.3	Prägarben und höhere Čech-Kohomologie . . . . .	339
1.4	Garben und ihre étalen Räume . . . . .	344
1.5	Kerne und Kokerne in Kategorien . . . . .	354
1.6	Präabelsche Kategorien . . . . .	355
1.7	Additive und abelsche Kategorien . . . . .	357
1.8	Kerne und Kokerne für abelsche Garben . . . . .	360
1.9	Definition der Garbenkohomologie . . . . .	362
1.10	Kohomologie welcher Garben . . . . .	365
1.11	Erste Čech-Kohomologie als Garbenkohomologie . . . . .	366
2	Funktorialität und Beispiele . . . . .	369
2.1	Ein Spektralsequenzargument . . . . .	369
2.2	Angeordnete Čech-Kohomologie . . . . .	371
2.3	Kohomologie durch azyklische Auflösungen . . . . .	375
2.4	Rückzug von Garben . . . . .	378
2.5	Rückzug in der Garbenkohomologie . . . . .	383
2.6	Parakompakte Räume . . . . .	387
2.7	Garben auf parakompakten Räumen . . . . .	389
2.8	Direktes Bild von Garben . . . . .	393
2.9	Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie . . . . .	397
2.10	Der Satz von de Rham . . . . .	401
2.11	Kohomologie mit kompaktem Träger . . . . .	404
3	Abstrakte homologische Algebra . . . . .	423

3.1	Die lange exakte Kohomologiesequenz . . . . .	423
3.2	Höhere derivierte Funktoren . . . . .	427
3.3	Ausgezeichnete Dreiecke . . . . .	435
3.4	Abstrakte Interpretation des Kohomologierings . . . . .	440
4	Lokalisierung in Kategorien . . . . .	445
4.1	Köcher . . . . .	445
4.2	Lokalisierung von Kategorien . . . . .	446
4.3	Lokalisierung unter Ore-Bedingungen . . . . .	450
5	Derivierte Kategorien und Funktoren . . . . .	454
5.1	Triangulierte Kategorien . . . . .	454
5.2	Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien . . . . .	459
5.3	Triangulierte Kategorien und dg-Moduln . . . . .	461
5.4	Quotienten triangulierter Kategorien . . . . .	465
5.5	Derivierte Kategorien . . . . .	468
5.6	Beschränkte derivierte Kategorien . . . . .	469
5.7	Derivierte Kategorien durch Auflösungen . . . . .	473
5.8	Derivierte Kategorien als dg-Modulkategorien . . . . .	477
5.9	Rechtsderivierte Funktoren . . . . .	479
5.10	Approximieren durch azyklische Auflösungen . . . . .	485
5.11	Linksderivierte Funktoren . . . . .	489
5.12	Wohl nicht hier . . . . .	491
5.13	Derivierte Kategorien, ALT . . . . .	491
6	Viel Später?! . . . . .	494
6.1	Spektralsequenzen . . . . .	494
6.2	Bidualität für Kettenkomplexe . . . . .	502
6.3	Relative Kategorientheorie . . . . .	502
6.4	Faserungen von Kategorien . . . . .	503
6.5	Morphismen von Kategorienfaserungen, Versuch . . . . .	507
6.6	Basiswechsel . . . . .	508
6.7	Gefaserte Produkte von Kategorien, woanders . . . . .	509
6.8	Nachdenken über Stacks, woanders . . . . .	512
6.9	Kartesische Funktoren, Wohin? . . . . .	515
7	Altes Zeug, wohl Schrott . . . . .	516
7.1	Alter Beweis von Čech gleich Garben . . . . .	516
7.2	Kohomologie und azyklische Auflösungen (ALT) . . . . .	517

**Literaturverzeichnis** **521**

**Index** **523**

**Teil A**  
**Topologie**





# Kapitel I

## Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Für Korrekturen zu vorläufigen Versionen danke ich vielen Freiburger Studentinnen und Studenten, insbesondere Gregor Fritz, Gerald Höhn, Stephan Wehrheim, Isolde Adler, Olaf Schnürer.

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Homotopie und Fundamentalgruppe</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1	Einführung in die algebraische Topologie . . . . .	11
1.2	Die Definition der Fundamentalgruppe . . . . .	15
1.3	Die Fundamentalgruppe der Kreislinie . . . . .	19
1.4	Anwendungen und Beispiele . . . . .	23
1.5	Homotopie zwischen Abbildungen . . . . .	26
1.6	Homotopie und Fundamentalgruppe . . . . .	29
1.7	Selbstabbildungen der Kreislinie . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Kategorien und Funktoren</b> . . . . .	<b>39</b>
2.1	Kategorien . . . . .	39
2.2	Funktoren . . . . .	43
2.3	Transformationen . . . . .	45
2.4	Produkte in Kategorien . . . . .	49
2.5	Kartesische und kokartesische Diagramme . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Beschreibung einiger Fundamentalgruppen</b> . . . . .	<b>56</b>
3.1	Kartesische und kokartesische Diagramme . . . . .	56
3.2	Der Satz von Seifert und van Kampen . . . . .	60

10 KAPITEL I. FUNDAMENTALGRUPPE UND ÜBERLAGERUNGEN

3.3	Freie Gruppen . . . . .	63
3.4	Simplizialkomplexe und triangulierbare Flächen . .	67
3.5	Klassifikation der geschlossenen Flächen . . . . .	74
3.6	Gruppen durch Erzeugende und Relationen . . . .	82
3.7	Die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen . .	83
3.8	Push-out von Gruppen . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Überlagerungstheorie . . . . .</b>	<b>88</b>
4.1	Überlagerungen . . . . .	88
4.2	Kategorien von Mengen mit Gruppenwirkung . . .	90
4.3	Quotientenabbildungen als Überlagerungen . . . .	92
4.4	Lifts und Decktransformationen . . . . .	93
4.5	Universelle Überlagerungen . . . . .	96
4.6	Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern	102
4.7	Klassifikation von Überlagerungen . . . . .	108
4.8	Existenz universeller Überlagerungen . . . . .	111
4.9	Adjungierte Funktoren . . . . .	115
4.10	Der abstrakte Faserfunktork . . . . .	120
4.11	Die Zopfgruppe . . . . .	122
4.12	Überlagerungen topologischer Gruppen* . . . . .	129
4.13	Überlagerungen und Homotopie* . . . . .	130

---

# 1 Homotopie und Fundamentalgruppe

## 1.1 Einführung in die algebraische Topologie

1.1.1. Ich erinnere an den vertrauten Begriff der Stetigkeit von Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen. Weiter bezeichne  $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die euklidische Norm,  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , und

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

die  $n$ -dimensionale **Kugelschale** oder  $n$ -**Sphäre**. Es ist also  $S^{-1} = \emptyset$ ,  $S^0 = \{+1, -1\}$ ,  $S^1$  die Kreislinie,  $S^2$  die Kugelschale und so weiter. Zur Motivation liste ich nun einige typische Probleme der Topologie auf.

1. Man zeige, daß es für  $n \geq 0$  keine stetige Injektion  $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  der  $n$ -dimensionalen Kugelschale in die  $n$ -dimensionale Ebene gibt. Als Übung empfehlen sich die Fälle  $n = 0, 1$ . Der Fall  $n = 2$  wird in [1.7.8](#) erledigt, der allgemeine Fall ergibt sich als Konsequenz aus [II.2.7.14](#).
2. “Ein Igel läßt sich nicht kämmen ohne Wirbel”. In Formeln zeige man: Es gibt keine stetige Abbildung  $\kappa : S^2 \rightarrow S^2$  derart, daß  $\kappa(x)$  senkrecht steht auf  $x$  für alle  $x \in S^2$ . Wir zeigen das in [1.4.3](#).
3. Es bezeichne stets  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  die  $n$ -dimensionale **Vollkugel**. Es ist also  $D^0$  ein Punkt,  $D^1 = [-1, +1]$  ein kompaktes Intervall,  $D^2$  die abgeschlossene Kreisscheibe und so weiter. Man zeige, daß jede stetige Abbildung  $f : D^n \rightarrow D^n$  von einer abgeschlossenen Vollkugel in sich selber einen Fixpunkt hat. Diese Aussage heißt der **Brouwer’sche Fixpunktsatz**. Als Übung empfehlen sich wieder die Fälle  $n = 0, 1$ . Der Fall  $n = 2$  wird in [1.4.2](#) behandelt, der allgemeine Fall in [II.2.3.9](#).

1.1.2. Gegeben Teilmengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $B \subset \mathbb{R}^m$  heißt eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$  heißt ein **Homöomorphismus** genau dann, wenn sie stetig und bijektiv ist und ihre Inverse  $f^{-1} : B \rightarrow A$  auch stetig ist. Des weiteren heißen  $A$  und  $B$  **homöomorph** genau dann, wenn es einen Homöomorphismus von  $A$  nach  $B$  gibt. Wir schreiben kurz  $A \cong B$  für die Aussage “ $A$  ist homöomorph zu  $B$ ”. Anschaulich bedeutet  $A \cong B$ , daß sich  $A$  durch “Verbeulen und Verbiegen” aus  $B$  erhalten läßt. Zum Beispiel sind je zwei offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  homöomorph, und “Die Oberfläche einer Kaffeetasse mit einem Henkel ist homöomorph zur Oberfläche eines Rettungsrings”. Man bezeichnet die Topologie deshalb auch scherzhaft als “Gummigeometrie”. Zur weiteren Motivation liste ich auch noch einige typische Probleme im Zusammenhang mit dem Homöomorphiebegriff auf.

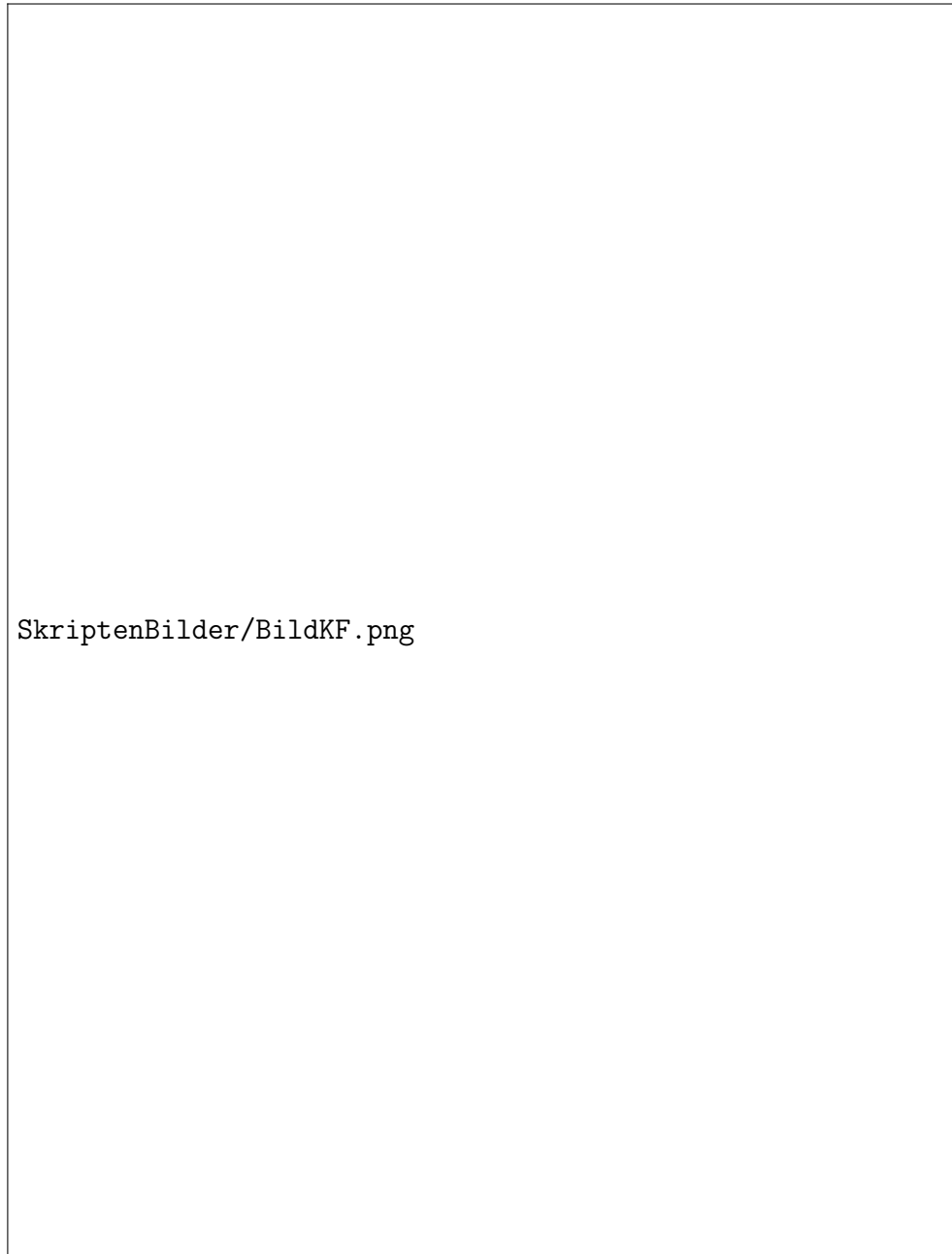
1. **Invarianz der Dimension:** Man zeige, daß für natürliche Zahlen  $n, m \geq 0$  gilt  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Rightarrow n = m$ . In Worten sind also endlichdimensionale reelle Räume verschiedener Dimension, wenn man sie mit ihrer natürlichen Topologie versieht, auch nicht homöomorph.
2. Man zeige, daß der Rettungsring, auch genannt der zweidimensionale **Torus**  $S^1 \times S^1$ , nicht homöomorph ist zur 2-Sphäre  $S^2$ .
3. Sei  $S \subset \mathbb{R}^2$  eine Teilmenge, die homöomorph ist zur Kreislinie,  $S \cong S^1$ . Man zeige, daß auch das Komplement von  $S$  homöomorph ist zum Komplement der Kreislinie,  $\mathbb{R}^2 \setminus S \cong \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ . Der Beweis gelingt erst unter Zuhilfenahme von Methoden der Analysis, genauer folgt das unschwer aus II.2.7.10 zusammen mit II.1.6.5 und dem “kleinen” Riemann’schen Abbildungssatz ?? der Funktionentheorie.

*Ergänzung 1.1.3.* Man kann für  $S \subset \mathbb{R}^2$  homöomorph zur Kreislinie sogar zeigen, daß es einen Homöomorphismus  $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$  gibt mit  $f(S^1) = S$ , aber den Beweis dieses Satzes von Schönflies werden wir nicht behandeln. Im übrigen erweisen sich die höherdimensionalen Analoga der Aussagen des letzten Punktes der vorangehenden Aufzählung sämtlich als falsch: Zum Beispiel ist die sogenannte “gehörnte Sphäre von Alexander” eine zur Kugelschale  $S^2$  homöomorphe Teilmenge des Raums  $\mathbb{R}^3$ , bei der eine Zusammenhangskomponente des Komplements noch nicht einmal einfach zusammenhängend ist.

1.1.4. In mathematisch nicht ganz so präziser Formulierung will ich auch noch die Klassifikation zusammenhängender geschlossener Flächen besprechen. Ich gebe zunächst eine Definition, die etwas unbeholfen ist, da sie die Sprache der Topologie noch weitgehend vermeidet.

**Definition 1.1.5.** Eine Teilmenge  $F \subset \mathbb{R}^n$  heißt eine **geschlossene topologische in  $\mathbb{R}^n$  eingebettete  $d$ -Mannigfaltigkeit** genau dann, wenn  $F$  kompakt ist und es für jeden Punkt  $p \in F$  eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  gibt mit  $p \in U$  und  $U \cap F \cong \mathbb{R}^d$ .

1.1.6. Beispiele für geschlossene  $d$ -Mannigfaltigkeiten sind die Sphären  $S^d$ . Wir zeigen in ??, daß jede geschlossene 1-Mannigfaltigkeit homöomorph ist zu einer endlichen disjunkten Vereinigung von Kopien von  $S^1$ . Eine geschlossene 2-Mannigfaltigkeit nennen wir auch eine **geschlossene Fläche**. Beispiele für geschlossene Flächen sind die Kugelschale  $S^2$ , der Torus  $S^1 \times S^1$ , oder auch die Oberfläche einer massiven Acht, die homöomorph ist zur Oberfläche einer dickwandigen Suppentasse mit zwei Henkeln. Ein etwas komplizierteres Beispiel für eine geschlossene Fläche ist die sogenannte **Klein’sche Flasche**, die man erhält, indem man bei einer Flasche den Flaschenhals langzieht,



Die Klein'sche Flasche

umbiegt, ihn von aussen unter Durchdringung der Flaschenwand ins Innere der Flasche schiebt, dann ein kreisrundes Loch in den Boden der Flasche schneidet, und schließlich die Flaschenöffnung in das Loch unten am Boden einklebt. Genauer erhält man so in der Anschauung noch keine geschlossene Fläche in unserem Sinne, da sich unsere Fläche selbst überschneidet an der Stelle, an der der Flaschenhals in die Flasche eindringt. In der vierten Dimension jedoch kann man diese Selbstüberschneidung vermeiden. Stellen wir uns dazu die vierte Koordinate als Farbe vor und malen unsere Flasche changierend so an, daß der Flaschenhals und der Flaschenboden rot, der Flaschenkörper aber blau sind. Dann ist klar, daß unsere Fläche ohne Selbstüberschneidung im vierdimensionalen Raum liegt, und das ist dann wirklich unsere Klein'sche Flasche. Die Klein'sche Flasche ist nicht homöomorph zu einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , wie wir in III.2.11.42 beweisen werden. Im folgenden Satz brauchen wir noch das berühmte Möbiusband, das man erhält, wenn man einen Papierstreifen einmal verdrillt zu einem Ring verklebt. Der Rand des Möbiusbandes ist eine einzige geschlossene Kreislinie.

**Satz 1.1.7 (Klassifikation der geschlossenen Flächen).** *Jede zusammenhängende geschlossene Fläche ist homöomorph zu genau einer der im folgenden beschriebenen Flächen:*

- *Man nehme die Kugelschale  $S^2$ , schneide in diese  $2g$  kreisrunde Löcher hinein und verbinde diese Löcher paarweise durch  $g$  hohle Henkel. Für  $g = 0, 1, 2, \dots$  liefert das jeweils eine Fläche, die **orientierbare Fläche vom Geschlecht  $g$** .*
- *Man nehme die Kugelschale  $S^2$ , schneide in diese  $g$  kreisrunde Löcher hinein und klebe Möbiusbänder in diese Löcher ein. Für  $g = 1, 2, \dots$  liefert das jeweils eine Fläche, die **nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht  $g$** .*

1.1.8. Die orientierbaren Flächen vom Geschlecht  $g = 0, 1, 2$  sind die Kugelschale, den Torus und die Oberfläche einer Kaffeetasse mit zwei Henkeln. Die nichtorientierbaren Flächen vom Geschlecht  $g = 1, 2$  sind die reelle projektive Ebene  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  aus ?? und die Klein'sche Flasche. Die nicht orientierbaren Flächen zeichnen sich dadurch aus, daß man bei einem Rundweg als Spaziergänger auf der Fläche unter Umständen "mit dem Kopf nach unten" wieder am Ausgangspunkt ankommt. Statt des Einklebens von Möbiusbändern mag man sich gleichbedeutend auch das Ankleben sogenannter "Kreuzhauen" vorstellen, wie sie auf Seite ?? vorgestellt werden. Zum Nachdenken hier noch eine Frage: Welche Fläche unserer Liste erhält man, wenn man an

die Klein'sche Flasche einen Henkel anklebt? Die Antwort liefert die "Henkelelimination" im Beweis des Klassifikationssatzes 3.5.11: Wir erhalten die nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht 4. Jetzt gilt es aber zunächst, einen präzisen und effektiven Begriffsapparat für die Behandlung derartiger Fragestellungen aufzubauen.

*Übung 1.1.9.* Läßt man aus der Kugelschale  $S^n$  für  $n \geq 0$  einen Punkt weg, so entsteht ein zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorpher Raum. Hinweis: Stereographische Projektion.

## 1.2 Die Definition der Fundamentalgruppe

**Definition 1.2.1.** Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $x, y \in X$  Punkte. Die Menge aller normierten Wege von  $x$  nach  $y$  bezeichnen wir mit

$$\Omega(X, y, x) := \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \mid \alpha \text{ ist stetig, } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

Für zwei Wege  $\beta \in \Omega(X, z, y)$  und  $\alpha \in \Omega(X, y, x)$  definieren wir ihre **Verknüpfung** oder auch **Aneinanderhängung**  $\beta * \alpha \in \Omega(X, z, x)$  durch

$$(\beta * \alpha)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2; \\ \beta(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig nach ??, also in der Tat ein Weg. Anschaulich gesprochen entsteht er dadurch, daß wir erst den Weg  $\alpha$  und dann den Weg  $\beta$  jeweils mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen, so daß wir insgesamt wieder einen durch das Einheitsintervall parametrisierten Weg erhalten. Weiter definieren wir für  $x \in X$  den **konstanten Weg**  $\varepsilon_x$  durch  $\varepsilon_x(t) = x \forall t$  und bilden zu jedem Weg  $\alpha \in \Omega(X, y, x)$  den **inversen Weg**  $\bar{\alpha} \in \Omega(X, x, y)$  durch die Vorschrift  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ .

**Definition 1.2.2.** Seien  $x, y$  Punkte eines topologischen Raums  $X$ . Zwei Wege  $\alpha, \beta$  von  $x$  nach  $y$  heißen **homotop** oder präziser **homotop mit festen Endpunkten** und wir schreiben  $\alpha \simeq \beta$  genau dann, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- bzw. Oberkante unseres Quadrats mit  $\alpha$  bzw.  $\beta$  übereinstimmt und die auf der Vorder- und Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also  $h(t, 0) = \alpha(t)$  und  $h(t, 1) = \beta(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$  sowie  $h(0, \tau) = x$  und  $h(1, \tau) = y$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ . Wir schreiben unter diesen Umständen auch kurz

$$h : \alpha \simeq \beta$$

1.2.3. Vielleicht anschaulicher kann man diese Bedingung dahingehend interpretieren, daß es eine durch  $\tau \in [0, 1]$  parametrisierte Familie  $h_\tau$  von normierten Wegen von  $x$  nach  $y$  geben soll derart, daß gilt  $h_0 = \alpha$ ,  $h_1 = \beta$  und daß unsere Familie stetig von  $\tau$  abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung  $[0, 1]^2 \rightarrow X$ ,  $(t, \tau) \mapsto h_\tau(t)$  stetig ist. Zwei beliebige Wege von  $x$  nach  $y$  nennen wir **homotop** genau dann, wenn die zugehörigen normierten Wege in diesem Sinne homotop sind.

*Beispiel 1.2.4.* Gegeben  $X \subset \mathbb{R}^n$  konvex und  $x, y \in X$  sind je zwei Wege  $\alpha, \beta \in \Omega(X, y, x)$  homotop vermittelt  $h(t, \tau) = (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$ .

*Beispiel 1.2.5.* Bilder homotoper Wege sind homotop. Ist genauer eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  stetig, so folgt aus  $h : \alpha \simeq \beta$  schon  $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ .

**Lemma 1.2.6.** Für jeden topologischen Raum  $X$  und beliebige Punkte  $x, y \in X$  ist Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $\Omega(X, y, x)$  aller Wege von  $x$  nach  $y$ .

*Beweis.* Wir müssen zeigen, daß gilt (1)  $\alpha \simeq \alpha$ , (2)  $\alpha \simeq \beta \Rightarrow \beta \simeq \alpha$ , und daß (3) aus  $\alpha \simeq \beta$  und  $\beta \simeq \gamma$  folgt  $\alpha \simeq \gamma$ . Wir überlassen dem Leser den Beweis der beiden ersten Aussagen und zeigen nur die letzte Aussage. Seien also  $h : \alpha \simeq \beta$  und  $g : \beta \simeq \gamma$  Homotopien. Wir definieren  $f : [0, 1]^2 \rightarrow X$  durch

$$f(t, \tau) = \begin{cases} h(t, 2\tau) & 0 \leq \tau \leq 1/2; \\ g(t, 2\tau - 1) & 1/2 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist in der Tat die Abbildung  $f$  stetig, denn ihre Restriktionen auf die abgeschlossenen Teilmengen  $[0, 1] \times [0, 1/2]$  und  $[0, 1] \times [1/2, 1]$  des Einheitsquadrats sind es und wir können ?? anwenden. Nach Konstruktion ist aber nun  $f$  eine Homotopie  $f : \alpha \simeq \gamma$ .  $\square$

**Definition 1.2.7.** Äquivalenzklassen von Wegen unter der Äquivalenzrelation der Homotopie nennen wir **Homotopieklassen** von Wegen. Die Menge aller Homotopieklassen von Wegen von einem Punkt  $x$  zu einem Punkt  $y$  in einem Raum  $X$  notieren wir  $\pi_1(X, y, x)$ , in Formeln setzen wir also

$$\pi_1(X, y, x) := \Omega(X, y, x) / \simeq$$

Die Homotopieklasse eines Weges  $\alpha$  notieren wir  $[\alpha]$ .

**Definition 1.2.8.** Ein **punktierter Raum**  $(X, x)$  ist ein topologischer Raum  $X$  mit einem ausgezeichneten **Basispunkt**  $x \in X$ . Für einen punktierten Raum  $(X, x)$  vereinbaren wir die Abkürzungen  $\Omega(X, x) := \Omega(X, x, x)$  für die Menge aller Wege mit Anfangs- und Endpunkt  $x$  sowie  $\pi_1(X, x) := \pi_1(X, x, x)$  für die Menge aller Homotopieklassen derartiger Wege.



*Ergänzung 1.2.9.* Versetzen wir die Menge  $\Omega(X, y, x)$  mit der kompakt-offenen Topologie ?? und setzen  $h(t, \tau) = h_\tau(t)$ , so ist  $h$  nach ?? stetig genau dann, wenn die Abbildung  $[0, 1] \rightarrow \Omega(X, y, x)$ ,  $\tau \mapsto h_\tau$  stetig ist. Mit dieser Topologie heißt  $\Omega(X, y, x)$  ein **Wegeraum** und zwei Wege sind homotop genau dann, wenn sie zur selben Wegzusammenhangskomponente des Wegeraums gehören. Speziell heißt  $\Omega(X, x)$  ein **Schleifenraum** und  $\pi_1(X, x)$  ist die Menge der Wegzusammenhangskomponenten des Schleifenraums. Notieren wir  $\pi_0(Y)$  die Menge der Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raums  $Y$ , so haben wir demnach in Formeln  $\pi_1(X, x) = \pi_0(\Omega(X, x))$  und Lemma ?? erweist sich als Spezialfall der allgemeinen Erkenntnis ??, daß auf jedem topologischen Raum die Wegverbindbarkeit eine Äquivalenzrelation ist.

**Satz 1.2.10 (Fundamentalgruppe).** *Gegeben ein punktierter Raum  $(X, x)$  induziert das Aneinanderhängen von Wegen eine Verknüpfung auf der Menge  $\pi_1(X, x)$  aller Homotopieklassen von Wegen mit Anfangs- und Endpunkt  $x$ , und mit dieser Verknüpfung wird*

$$\pi_1(X, x)$$

*eine Gruppe, die **Fundamentalgruppe** des punktierten Raums  $(X, x)$ .*

*Beispiel 1.2.11.* Ist  $X \subset \mathbb{R}^n$  eine konvexe Teilmenge, so ist die Fundamentalgruppe von  $X$  nach 1.2.4 für jeden Basispunkt  $x \in X$  trivial.

*Beweis.* Die beiden ersten Aussagen des anschließenden Lemmas 1.2.12 sagen uns, daß die Homotopieklasse der Verknüpfung von zwei Wegen nur von den Homotopieklassen der verknüpften Wege abhängt. Die weiteren Aussagen liefern das neutrale Element, die Inversen und das Assoziativgesetz.  $\square$

**Lemma 1.2.12.** *Wann immer die folgenden Verknüpfungen von Wegen sinnvoll sind, gilt:*

$$1. \alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta$$

$$2. \beta \simeq \beta' \Rightarrow \alpha * \beta \simeq \alpha * \beta'$$

$$3. \varepsilon * \alpha \simeq \alpha \simeq \alpha * \varepsilon$$

$$4. \alpha * \bar{\alpha} \simeq \varepsilon, \bar{\alpha} * \alpha \simeq \varepsilon$$

$$5. \overline{(\alpha * \beta)} = \bar{\beta} * \bar{\alpha}$$

$$6. (\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$$

*Beweis.* Wir zeigen nur beispielhaft die letzte Behauptung. Bezeichnet  $v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  die “Reparametrisierungsabbildung”, die stückweise linear läuft zwischen den Eckwerten  $v(0) = 0$ ,  $v(1/4) = 1/2$ ,  $v(1/2) = 3/4$  und  $v(1) = 1$ , so gilt

$$\alpha * (\beta * \gamma) = ((\alpha * \beta) * \gamma) \circ v$$

Da nach 1.2.5 Bilder homotoper Wege wieder homotop sind, insbesondere auch die Bilder unter der stetigen Abbildung  $(\alpha * \beta) * \gamma$ , reicht es  $v \simeq \text{id}$  nachzuweisen. Aber nach 1.2.4 sind zwei Wege in  $[0, 1]$  mit denselben Endpunkten stets homotop.  $\square$

1.2.13. Wir erinnern daran, daß nach ?? ein topologischer Raum “wegweise einfach zusammenhängend” heißt genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist und wenn darüber hinaus jeder geschlossene Weg in unserem Raum zusammenziehbar ist.

*Übung* 1.2.14. Ein topologischer Raum ist wegzusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist und seine Fundamentalgruppe in Bezug auf einen und gleichbedeutend jeden Basispunkt trivial ist.

*Beispiel* 1.2.15. *Später, Wohin?* Wir erklären zu jedem topologischen Raum  $X$  eine Kategorie, das **fundamentale Gruppoid**  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_X$  unseres Raums  $X$ , wie folgt: Seine Objekte sind die Punkte von  $X$ , die Morphismenmenge  $\mathcal{W}(x, y)$  besteht aus allen Homotopieklassen von Wegen mit Anfangspunkt  $x$  und Endpunkt  $y$ , in Formeln

$$\mathcal{W}(x, y) = \pi_1(X, y, x)$$

und die Verknüpfung von Morphismen ist das Hintereinanderhängen von Wegen. Man benutzt Lemma 1.2.12, um die Axiome einer Kategorie zu prüfen. Unsere Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x)$  ist genau die Automorphismengruppe des Punktes  $x$  in seinem fundamentalen Gruppoid, in Formeln  $\pi_1(X, x) = \mathcal{W}_X^\times(x)$ . Unsere Fundamentalgruppe ist ein Funktor  $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$  von den punktierten topologischen Räumen in die Gruppen.

1.2.16. Sei  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  ein **Morphismus punktierter Räume**, als da heißt eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f(x) = y$ . So definiert man einen Homomorphismus der Fundamentalgruppen  $\pi_1(f) = f_\#$  durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \pi_1(f) = f_\# : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(Y, y) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da nach 1.2.5 Bilder homotoper Wege homotop sind. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, da stets gilt  $f \circ (\alpha * \beta) =$

$(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ . Offensichtlich haben wir  $\text{id}_\# = \text{id}$  und  $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$  wann immer  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  und  $g : (Y, y) \rightarrow (Z, z)$  Morphismen punktierter Räume sind. In der Terminologie, die in 2.2.1 eingeführt wird, ist die Fundamentalgruppe demnach ein “Funktorkonstrukt von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen”.

*Übung 1.2.17.* Man zeige: Kann ein topologischer Raum durch zwei wegweise einfach zusammenhängende offene Teilmengen mit wegzusammenhängendem Schnitt überdeckt werden, so ist er bereits selbst wegweise einfach zusammenhängend. Hinweis: Man erinnere sich an den Überdeckungssatz von Lebesgue ???. Das Resultat wird sich später als ein Spezialfall des Satzes von Seifert-van Kampen 3.2.1 erweisen.

*Übung 1.2.18.* Die Sphären  $S^n$  sind für  $n \geq 2$  wegweise einfach zusammenhängend. Hinweis: 1.2.17.

*Ergänzung 1.2.19.* Die **Poincaré-Vermutung** besagt, daß jede wegweise einfach zusammenhängende topologische kompakte 3-Mannigfaltigkeit ohne Rand homöomorph ist zur dreidimensionalen Sphäre  $S^3$ . Sie wurde 2002 mit analytischen Methoden von G. Perelman bewiesen.

*Übung 1.2.20.* Sei  $I \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge, die einen Untervektorraum der Kodimension  $\geq 3$  erzeugt, in Formeln  $\dim \langle I \rangle_{\mathbb{R}} \leq n - 3$ . So ist die Fundamentalgruppe des Komplements von  $I$  trivial, in Formeln  $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus I, *) = 1$ .

*Übung 1.2.21.* Man zeige: Die Fundamentalgruppe einer separablen punktierten Mannigfaltigkeit ist stets abzählbar.

*Ergänzende Übung 1.2.22. Die Fundamentalgruppe einer punktierten kompakten Mannigfaltigkeit ist stets endlich erzeugt.* Hinweis: Bezeichne  $B = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| < 1\}$  den 1-Ball um den Ursprung und  $\bar{B} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$  seinen Abschluß. Für unsere Mannigfaltigkeit  $X$  wähle man stetige Karten  $\varphi_1, \dots, \varphi_r : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  derart, daß die Bilder von  $B$  schon  $X$  überdecken. Für jedes Paar von Indizes  $i, j$  mit  $i \neq j$  wähle man eine endliche Überdeckung des Schnitts  $\varphi_i(\bar{B}) \cap \varphi_j(\bar{B})$  durch zusammenhängende offene Teilmengen  $U_{ij}^\nu$  von  $\varphi_i(\mathbb{R}^n) \cap \varphi_j(\mathbb{R}^n)$ . Für jedes  $\nu$  wähle man einen Weg  $\gamma_{ij}^\nu$  von  $\varphi_j(0)$  nach  $\varphi_i(0)$ , der erst innerhalb von  $\varphi_j(\mathbb{R}^n)$  nach  $U_{ij}^\nu$  läuft und dann innerhalb von  $\varphi_i(\mathbb{R}^n)$  nach  $\varphi_i(0)$ . Seien  $\beta_i$  Wege von  $p = \varphi_1(0)$  nach  $\varphi_i(0)$  mit der einzigen Einschränkung, daß  $\beta_1$  der konstante Weg sein soll. So erzeugen die Verknüpfungen  $\bar{\beta}_i * \gamma_{ij}^\nu * \beta_j$  die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, p)$ .

### 1.3 Die Fundamentalgruppe der Kreislinie

**Satz 1.3.1 (Fundamentalgruppe der Kreislinie).** *Die Fundamentalgruppe der Kreislinie  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  ist isomorph zur additiven Gruppe*

der ganzen Zahlen. Genauer ist die Abbildung, die jeder ganzen Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  die Homotopieklasse des Weges  $[0, 1] \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto \exp(2\pi i n t)$  zuordnet, ein Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1) \\ n &\mapsto [t \mapsto \exp(2\pi i n t)] \end{aligned}$$

1.3.2. Unter der **Umlaufzahl** eines Weges  $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$  versteht man das Urbild seiner Homotopieklasse  $[\gamma]$  unter diesem Isomorphismus. In anderen Worten ist also die Umlaufzahl von  $\gamma$  diejenige ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$ , für die  $\gamma$  homotop ist zum Weg  $t \mapsto \exp(2\pi i n t)$ . Genau genommen hatten wir eigentlich  $S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| = 1\}$  vereinbart. Hier gehen wir implizit von der Identifikation  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ ,  $(a, b) \mapsto a + bi$  aus.

1.3.3. Ist allgemeiner  $V$  ein zweidimensionaler reeller euklidischer Vektorraum und  $S \subset V$  die Menge aller Vektoren der Länge Eins und  $p \in S$  ein beliebiger Basispunkt, so können wir jeder Orientierung  $\varepsilon$  von  $V$  einen Isomorphismus

$$i_\varepsilon : \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S, v)$$

zuordnen durch die Vorschrift, daß  $n \in \mathbb{Z}$  die Homotopieklasse des Weges  $t \mapsto \cos(2\pi n t)v + \sin(2\pi n t)w$  zugeordnet wird, für  $(v, w)$  die Ergänzung des Vektors  $v$  zu einer orientierten angeordneten Orthonormalbasis von  $V$ . Für die entgegengesetzte Orientierung gilt dann  $i_{-\varepsilon}(n) = i_\varepsilon(-n)$ .

*Ergänzung* 1.3.4. Arbeiten wir mit einem Körper  $\mathbb{C}$  von vergesslichen komplexen Zahlen im Sinne von ??, so liefert uns die obige Konstruktion genau genommen nur einen kanonischen Isomorphismus  $2\pi i \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ , der jedem  $a \in \ker(\exp) = 2\pi i \mathbb{Z}$  eben den normierten Weg  $t \mapsto \exp(ta)$  zuordnet. Man beachte, daß die Untergruppe  $2\pi i \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$  auch in einem Körper von vergesslichen komplexen Zahlen wohldefiniert ist, etwa als die von den beiden Quadratwurzeln von  $-1$  erzeugte additive Untergruppe.

*Beweis.* Zur Vereinfachung betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Exp} : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

Mit der Euler'schen Formel können wir auch schreiben  $\text{Exp}(t) = \exp(2\pi i t)$ . Das erklärt erstens unsere Notation und zweitens sieht man so leichter, daß  $\text{Exp}$  ein Gruppenhomomorphismus ist von der additiven Gruppe der reellen Zahlen in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen der Länge 1. Anschaulich wickelt  $\text{Exp}$  die reelle Gerade auf die Kreislinie auf und aufgrund des Faktors  $2\pi$  haben wir  $\text{Exp}^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ . In dieser Notation erhält die Abbildungsvorschrift aus unserem Satz die Gestalt

$$n \mapsto [t \mapsto \text{Exp}(nt)]$$

Als erstes zeigen wir nun, daß sie einen Gruppenhomomorphismus definiert. Gegeben  $m, n \in \mathbb{Z}$  bezeichnen wir mit  $(m + n \cdot)$  den Weg  $t \mapsto m + nt$  aus  $\Omega(\mathbb{R}, m + n, m)$ . Da je zwei Wege in  $\mathbb{R}$  mit denselben Endpunkten homotop sind, haben wir

$$(n + m \cdot) * (n \cdot) \simeq ((m + n) \cdot)$$

Diese Homotopie bleibt bestehen, wenn wir beide Seiten mit  $\text{Exp}$  verknüpfen. Dies  $\text{Exp}$  dürfen wir dann auf die beiden Faktoren des  $*$ -Produkts verteilen, und wegen  $\text{Exp} \circ (n + m \cdot) = \text{Exp} \circ (m \cdot)$  erkennen wir, daß unsere Abbildungsvorschrift  $n \mapsto [\text{Exp} \circ (n \cdot)]$  in der Tat einen Gruppenhomomorphismus definiert. Um zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, konstruieren wir eine inverse Abbildung. Der erste Schritt dazu ist die folgende Definition.

**Definition 1.3.5.** Ist  $Y$  ein topologischer Raum und  $f : Y \rightarrow S^1$  eine stetige Abbildung, so heißt eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{Exp} \circ \tilde{f} = f$  auch ein **Lift** oder eine **Hochhebung** von  $f$ .

**Lemma 1.3.6.** Seien  $Y$  zusammenhängend,  $f : Y \rightarrow S^1$  eine stetige Abbildung und  $\tilde{f}, \hat{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Lifts von  $f$ . So gibt es  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $\hat{f}(y) = \tilde{f}(y) + k$  für alle  $y \in Y$ .

*Beweis.* Sicher gilt  $\text{Exp}(\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)) = 1$ , also  $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y) \in \mathbb{Z}$  für alle  $y \in Y$ . Ist nun  $Y$  zusammenhängend, so muß  $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)$  konstant sein.  $\square$

**Lemma 1.3.7.** Jede stetige Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow S^1$  besitzt einen Lift.

*Beweis.*  $\text{Exp}$  liefert Homöomorphismen  $\text{Exp}_x : (x, x + 1) \xrightarrow{\sim} S^1 \setminus \{\text{Exp}(x)\}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , siehe Übung ???. Ist also  $f$  nicht surjektiv, liegt sagen wir  $\text{Exp}(x)$  nicht in seinem Bild, so ist  $\text{Exp}_x^{-1} \circ f = \tilde{f}$  ein Lift und wir sind fertig. Weil nun  $f$  gleichmäßig stetig ist, finden wir  $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = 1$  derart, daß  $f$  auf allen Teilintervallen  $[a_{i-1}, a_i]$  nicht surjektiv ist. Wir wählen nun Lifts  $\tilde{f}_i$  von  $f|_{[a_{i-1}, a_i]}$  für  $i = 1, \dots, k$  und können diese Lifts durch Addition von Elementen von  $\mathbb{Z}$  so abändern, daß stets gilt  $\tilde{f}_i(a_i) = \tilde{f}_{i+1}(a_i)$ . Dann definieren wir  $\tilde{f}$  durch  $\tilde{f}|_{[a_i, a_{i+1}]} = \tilde{f}_i$  und sind fertig.  $\square$

**Lemma 1.3.8.** Jede stetige Abbildung  $f : [0, 1]^2 \rightarrow S^1$  besitzt einen Lift.

*Beweis.* Wir zerlegen zunächst unser Quadrat  $[0, 1]^2$  in so kleine Schachfelder, daß das Bild keines unserer Felder ganz  $S^1$  ist. Die Einschränkung von  $f$  auf jedes dieser Felder läßt sich wie im Beweis zuvor leicht liften. Als nächstes konzentrieren wir uns auf eine Zeile von Schachfeldern und ändern in dieser Zeile unsere Lifts so um Konstanten aus  $\mathbb{Z}$  ab, daß sie auf dem Schnitt benachbarter Felder zusammenpassen. So erhalten wir einen Lift auf

der ganzen Zeile. Das machen wir für jede Zeile, passen dann diese Lifts wieder aneinander an, und erhalten so schließlich einen Lift auf unserem ganzen Quadrat.  $\square$

1.3.9. Sei  $x \in S^1$  ein beliebiger Basispunkt. Für jeden geschlossenen Weg  $\alpha \in \Omega(S^1, x)$  definieren wir seine “Lift-Umlaufzahl”  $\text{Um}(\alpha) \in \mathbb{Z}$  dadurch, daß gilt

$$\text{Um}(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)$$

für jeden Lift  $\tilde{\alpha}$  von  $\alpha$ . Am Ende des Beweises werden wir sehen, daß diese Lift-Umlaufzahl mit der in 1.3.2 definierten Umlaufzahl übereinstimmt, aber bis dahin brauchen wir für dieses Konzept noch eine eigene Bezeichnung.

**Proposition 1.3.10.** *Geschlossene Wege in der Kreislinie sind homotop genau dann, wenn sie dieselbe Lift-Umlaufzahl haben. In Formeln gilt für Wege  $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, x)$  also*

$$\alpha \simeq \beta \Leftrightarrow \text{Um}(\alpha) = \text{Um}(\beta)$$

*Beweis.*  $\Rightarrow$ .) Zu  $h : \alpha \simeq \beta$  finden wir mit Lemma 1.3.8 einen Lift  $\tilde{h}$ . Sicher ist  $\tilde{h}$  auf der Unterkante des Einheitsquadrats ein Lift  $\tilde{\alpha}$  von  $\alpha$ , auf der Oberkante ein Lift  $\tilde{\beta}$  von  $\beta$ , und auf der Vorder- und Hinterkante wie  $h$  konstant. Insbesondere haben wir  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$  und  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$  und damit folgt  $\text{Um}(\alpha) = \text{Um}(\beta)$ .

$\Leftarrow$ .)  $\text{Um}(\alpha) = \text{Um}(\beta)$  bedeutet, daß je zwei Lifts  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\beta}$  von  $\alpha$  und  $\beta$  mit demselben Anfangspunkt auch denselben Endpunkt haben. Nach 1.2.4 sind dann aber  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\beta}$  homotop, und mit 1.2.5 folgt daraus  $\alpha \simeq \beta$ .  $\square$

Unsere Abbildung  $\text{Um} : \Omega(S^1, x) \rightarrow \mathbb{Z}$  induziert also eine Injektion

$$\text{Um} : \pi_1(S^1, x) \rightarrow \mathbb{Z}$$

und es reicht zu zeigen, daß sie linksinvers ist zur Abbildung aus unserem Satz. In der Tat prüft man ohne Schwierigkeiten  $\text{Um}[\text{Exp} \circ (n \cdot)] = n$ .  $\square$

*Übung 1.3.11.* Ist  $\alpha \in \Omega(X, x)$  ein geschlossener Weg, so gibt es genau eine stetige Abbildung  $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$  mit  $\alpha = \hat{\alpha} \circ \text{Exp}$ , und

$$\hat{\alpha}_\# : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

ist unter unserer Identifikation  $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$  gegeben durch  $n \mapsto [\alpha]^n$ .

*Übung 1.3.12.* Die Abbildung  $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$  induziert auf der Fundamentalgruppe  $\pi_1(S^1, 1)$  die Abbildung  $c \mapsto c^n$  in multiplikativer Schreibweise, also  $c \mapsto nc$  in additiver Schreibweise.

*Übung 1.3.13.* Ist  $Y$  ein kartesisches Produkt von endlich vielen reellen Intervallen, so besitzt jede stetige Abbildung  $Y \rightarrow S^1$  einen Lift.

*Übung 1.3.14.* Man zeige: Ein geschlossener Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1)$  in  $\mathbb{R}_{>0}$  und der Eigenschaft, daß es  $a \in (0, 1)$  gibt mit  $\gamma(a) \in \mathbb{R}_{<0}$  und  $\operatorname{Im}(\gamma(t)) \geq 0 \forall t \in [0, a]$  und  $\operatorname{Im}(\gamma(t)) \leq 0 \forall t \in [a, 1]$ , hat die Umlaufzahl Eins um den Ursprung.

## 1.4 Anwendungen und Beispiele

**Satz 1.4.1 (Retraktionen einer Kreisscheibe auf ihren Rand).** *Es gibt keine stetige Abbildung von einer abgeschlossenen Kreisscheibe auf ihren Randkreis, deren Einschränkung auf besagten Randkreis die Identität ist.*

*Beweis.* Bezeichne  $D = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leq 1\}$  die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und  $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = 1\}$  ihren Randkreis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, es gäbe solch eine stetige Abbildung  $r : D \rightarrow S^1$  mit  $r(z) = z$  für alle  $z \in S^1$ . Bezeichne  $i : S^1 \hookrightarrow D$  die Einbettung. Wir hätten also ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{i} & D \\ & \searrow \text{id} & \downarrow r \\ & & S^1 \end{array}$$

und erhielten mit  $\pi_1$  ein kommutatives Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, x) & \longrightarrow & \pi_1(D, x) \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \\ & & \pi_1(S^1, x) \end{array}$$

Das ist aber unmöglich, da ja gilt  $\pi_1(D, x) \cong 1$  nach 1.2.4 und  $\pi_1(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$  nach 1.3.1.  $\square$

**Satz 1.4.2 (Fixpunktsatz von Brouwer für die Kreisscheibe).** *Jede stetige Abbildung von der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich selbst hat einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Sei  $f : D \rightarrow D$  unsere stetige Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe  $D$ . Wäre  $f : D \rightarrow D$  stetig mit  $f(x) \neq x$  für alle  $x \in D$ , so könnten wir eine Abbildung  $r : D \rightarrow S^1$  der Einheitskreisscheibe auf ihren Rand  $S^1$  definieren durch die Vorschrift, daß sie jedem  $x \in D$  denjenigen Punkt



Die Retraktion  $r$  aus dem Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer



$r(x) \in S^1$  zuordnet, “in dem der Strahl, der in  $f(x)$  beginnt und durch  $x$  läuft, die Kreislinie  $S^1$  trifft”. Offensichtlich wäre  $r$  stetig und  $r(z) = z$  für alle  $z \in S^1$ , im Widerspruch zum vorhergehenden Satz.  $\square$

**Satz 1.4.3 (vom Igel).** *Es gibt keine stetige Selbstabbildung der Kugelschale  $\kappa : S^2 \rightarrow S^2$  derart, daß  $\kappa(x)$  senkrecht steht auf  $x$  für alle  $x \in S^2$ .*

1.4.4. Man stelle sich vor, die Abbildung  $\kappa$  ordne jedem Punkt  $x$  auf der Haut eines Igels die Richtung  $\kappa(x)$  des dort entspringenden Stachels zu. Die Bedingung “ $\kappa(x)$  steht senkrecht auf  $x$ ” bedeutet, daß die Stacheln flach anliegen müssen, und unser Satz sagt, daß sich ein Igel nicht “wirbelfrei kämmen läßt”. Man beachte jedoch, daß sich ein “Igel von der Form eines Rettungsrings” durchaus wirbelfrei kämmen läßt. Einen eleganteren Beweis einer allgemeineren Aussage werden wir mit singulärer Homologie in II.2.9.4 geben können.

*Beweis.* Wir zeigen das durch Widerspruch und nehmen also an, es gäbe so eine Kämmung  $\kappa$ . Bezeichne  $S_+^2$  bzw.  $S_-^2$  die nördliche bzw. südliche abgeschlossene Hemisphäre und  $S^1 = S_+^2 \cap S_-^2$  den Äquator. Für  $p \in S_+^2$  bezeichne  $R_p^+$  die Rotation mit Rotationsachse in der Äquatorebene, die  $p$  auf den Nordpol  $(0, 0, 1)$  dreht. Dann ist  $p \mapsto R_p^+(\kappa(p))$  eine stetige Abbildung  $\kappa_+ : S_+^2 \rightarrow S^1$ . Analog definieren wir  $\kappa_- : S_-^2 \rightarrow S^1$ . Offensichtlich gilt für alle  $p$  auf dem Äquator  $p \in S^1$  die Beziehung

$$\kappa_+(p) = s_p(\kappa_-(p)),$$

wo  $s_p : S^1 \rightarrow S^1$  die Spiegelung an der zu  $p$  senkrechten Geraden in der Äquatorebene bezeichnet, die also  $p$  auf  $-p$  abbildet. Fassen wir  $S^1 \subset \mathbb{C}$  auf als die komplexen Zahlen der Länge 1, so wird die Abbildung  $s : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ ,  $(p, x) \mapsto s_p(x)$  beschrieben durch die Formel  $(p, x) \mapsto -p^2 x^{-1}$ . Wir erhalten also

$$-\kappa_+(p)\kappa_-(p) = p^2 \quad \forall p \in S^1$$

Das ist aber unmöglich, denn  $p \mapsto p^2$  induziert auf  $\pi_1(S^1, 1)$  die Multiplikation mit 2, wohingegen die linke Seite auf  $\pi_1(S^1, 1)$  eine konstante Abbildung liefert: In der Tat läßt sich die stetige Abbildung  $S^1 \rightarrow S^1$ ,  $p \mapsto -\kappa_+(p)\kappa_-(p)$  ja faktorisieren in

$$S^1 \xrightarrow{\Delta} (S_+^2 \times S_-^2) \xrightarrow{\kappa_+ \times \kappa_-} (S^1 \times S^1) \xrightarrow{\text{mult}} S^1 \xrightarrow{(-1)} S^1$$

mit  $\Delta(z) = (z, z)$ , und die Fundamentalgruppe von  $(S_+^2 \times S_-^2)$  ist trivial, da dieser Raum homöomorph ist zur konvexen Teilmenge  $D \times D \subset \mathbb{R}^4$ . Dieser Widerspruch beendet den Beweis.  $\square$

**Satz 1.4.5 (Die Fundamentalgruppe von einem Produkt).** Für zwei punktierte Räume  $(X, x)$  und  $(Y, y)$  induzieren die beiden Projektionen  $\text{pr}_1$  und  $\text{pr}_2$  von  $X \times Y$  auf  $X$  und  $Y$  einen Isomorphismus

$$(\pi_1(\text{pr}_1), \pi_1(\text{pr}_2)) : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

*Beweis.* Nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie haben wir schon mal eine Bijektion

$$\begin{aligned} \Omega(X \times Y, (x, y)) &\longrightarrow \Omega(X, x) \times \Omega(Y, y) \\ \alpha &\longmapsto (\text{pr}_1 \circ \alpha, \text{pr}_2 \circ \alpha), \end{aligned}$$

und ebenso nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie definiert eine Abbildung  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X \times Y$  eine Homotopie (mit festen Endpunkten) von Wegen  $\alpha$  und  $\beta$  genau dann, wenn  $\text{pr}_i \circ H$  eine Homotopie von  $\text{pr}_i \circ \alpha$  und  $\text{pr}_i \circ \beta$  definiert für  $i = 1, 2$ .  $\square$

*Beispiel 1.4.6.* Der Rettungsring  $S^1 \times S^1$  hat also für jeden Basispunkt die Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Anschaulich liefert ja auch jeder geschlossene Weg auf dem Rettungsring zwei Umlaufzahlen: “Wie oft der Weg um die Luftkammer läuft” und “Wie oft er um den hypothetischen Matrosen im Ring läuft”.

*Übung 1.4.7 (Jeder Mensch hat einen Haarwirbel).* Wir gehen hier davon aus, daß die Haare am Rand des Haarwuchses alle nach unten wachsen. Man zeige nun: Es gibt keine stetige Abbildung  $\kappa : S_+^2 \rightarrow S^2$  von der oberen Hemisphäre in die Sphäre, die den Äquator in die untere Hemisphäre abbildet und so, daß  $\kappa(x)$  senkrecht steht auf  $x$  für alle  $x \in S_+^2$ .

*Übung 1.4.8.* In ?? haben Sie bereits gezeigt, daß es nicht möglich ist, in stetiger Weise zu jeder komplexen Zahl eine Wurzel zu wählen, daß es also keine stetige Abbildung  $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit  $w(z)^2 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Man gebe einen alternativen Beweis mit den im Vorgehenden entwickelten Hilfsmitteln.

## 1.5 Homotopie zwischen Abbildungen

**Definition 1.5.1.** Seien  $f, g : Y \rightarrow X$  stetige Abbildungen. Eine **Homotopie** von  $f$  nach  $g$  ist eine stetige Abbildung

$$H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$$

derart, daß gilt  $H(y, 0) = f(y)$  und  $H(y, 1) = g(y)$  für alle  $y \in Y$ . Man sagt,  $f$  ist **homotop** zu  $g$  und schreibt  $f \simeq g$  genau dann, wenn es eine Homotopie von  $f$  nach  $g$  gibt.

1.5.2. Dieser Begriff von homotop deckt sich für Wege *nicht* mit unserem Begriff aus 1.2.2. Zur Unterscheidung nennt man Wege, die homotop sind im Sinne des vorhergehenden Abschnitts, präziser **homotop mit festen Endpunkten**.

**Proposition 1.5.3.** *Gegeben topologische Räume  $X, Y$  ist die Relation  $\simeq$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $\text{Top}(X, Y)$  aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .*

*Beweis.* Wir zeigen nur die Transitivität

$$f \simeq g \text{ und } g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$$

Seien  $F, G$  Homotopien von  $f$  nach  $g$  bzw. von  $g$  nach  $h$ . So definiert man eine Homotopie  $H$  von  $f$  nach  $h$  durch

$$H(x, \tau) = \begin{cases} F(x, 2\tau) & 0 \leq \tau \leq 1/2; \\ G(x, 2\tau - 1) & 1/2 \leq \tau \leq 1. \end{cases} \quad \square$$

**Definition 1.5.4.** Die Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung  $f$  bezeichnen wir mit  $[f]$  und nennen sie die **Homotopie-Klasse** von  $f$ . Gegeben topologische Räume  $X, Y$  bezeichnen wir mit  $\text{Hot}(X, Y)$  die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . In der Literatur ist hierfür auch die Notation  $[X, Y]$  gebräuchlich.

1.5.5. Hier ist etwas Vorsicht geboten, denn für Wege  $\alpha$  hat nun das Symbol  $[\alpha]$  zwei verschiedene Bedeutungen. Im Zweifelsfall ist bei Wegen immer die Homotopieklasse von  $\alpha$  unter Homotopie mit festen Endpunkten gemeint.

*Beispiel 1.5.6.* Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine konvexe Teilmenge und  $Y$  ein beliebiger topologischer Raum. So sind je zwei stetige Abbildungen  $f, g : Y \rightarrow D$  homotop. In der Tat ist  $H(y, \tau) = \tau f(y) + (1 - \tau)g(y)$  eine Homotopie.

**Proposition 1.5.7.** *Seien  $f, g : Y \rightarrow X$  stetige homotope Abbildungen, in Formeln  $f \simeq g$ . So gilt auch  $h \circ f \simeq h \circ g$  für jede stetige Abbildung  $h : X \rightarrow Z$  und  $f \circ h \simeq g \circ h$  für jede stetige Abbildung  $h : Z \rightarrow Y$ .*

*Beweis.* Ist  $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ , so ist die Abbildung  $h \circ H : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$  eine Homotopie von  $h \circ f$  nach  $h \circ g$  und die Abbildung  $H \circ (h \times \text{id}) : Z \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Homotopie von  $f \circ h$  nach  $g \circ h$ .  $\square$

1.5.8. Da nach der Proposition die Homotopieklasse einer Verknüpfung von stetigen Abbildungen nur von den Homotopieklassen der verknüpften Abbildungen abhängt, können wir eine Verknüpfung von Homotopieklassen definieren durch die Vorschrift  $[f] \circ [g] = [f \circ g]$ .

*Beispiel 1.5.9.* Wir bilden nun die sogenannte **Homotopiekategorie** topologischer Räume  $\text{Hot}$ . Ihre Objekte sind topologische Räume, als Morphismen von einem Raum in einen anderen nehmen wir jedoch die Menge  $\text{Hot}(X, Y)$  aller Homotopieklassen von stetigen Abbildungen und erklären ihre Verknüpfung in der offensichtlichen Weise durch  $[f] \circ [g] = [f \circ g]$ . Für die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen zwischen zwei Räumen ist auch die Notation  $\text{Hot}(X, Y) = [X, Y]$  gebräuchlich. Isomorphismen in der Homotopiekategorie Homotopieäquivalenzen.

**Definition 1.5.10.** Eine Abbildung heißt **nullhomotop** genau dann, wenn sie homotop ist zu einer konstanten Abbildung. Ein topologischer Raum  $X$  heißt **zusammenziehbar** genau dann, wenn er nicht leer ist und die Identität  $\text{id}_X$  auf  $X$  nullhomotop ist.

1.5.11. Ausgeschrieben bedeutet “zusammenziehbar” also: Es gibt einen Punkt  $x_0 \in X$  und eine stetige Abbildung  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $H(x, 0) = x_0$ ,  $H(x, 1) = x$  für alle  $x \in X$ . Zum Beispiel ist jede konvexe Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  zusammenziehbar.

**Definition 1.5.12.** Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt eine **Homotopieäquivalenz** genau dann, wenn es eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt mit  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  und  $g \circ f \simeq \text{id}_X$ . Zwei topologische Räume heißen **homotopieäquivalent** genau dann, wenn es eine Homotopie-Äquivalenz vom einen zum anderen gibt.

*Ergänzende Übung 1.5.13.* Man betrachte die **Homotopiekategorie punktierter Räume**  $\text{Hot}^*$  mit punktierten Räumen als Objekten und Homotopieklassen für basispunkterhaltende Homotopie als Morphismen. So wird die Fundamentalgruppe, aufgefaßt als Funktor  $\pi_1 : \text{Hot}^* \rightarrow \text{Ens}$ , dargestellt durch die punktierte Kreislinie. Die punktierte Kreislinie kann im Übrigen versehen werden mit der Struktur eines Gruppenobjekts in  $(\text{Hot}^*)^{\text{opp}}$ , und das liefert in diesem Kontext die Gruppenstruktur auf  $\pi_1(X, x)$ .

*Beispiel 1.5.14.* Ein Raum  $X$  ist zusammenziehbar genau dann, wenn er homotopieäquivalent ist zu einem Punkt.

*Übung 1.5.15.* Ist  $Y$  beliebig und  $X$  zusammenziehbar, so sind je zwei Abbildungen  $f, g : Y \rightarrow X$  homotop. Ist zusätzlich  $Y$  wegzusammenhängend, so sind auch je zwei Abbildungen  $X \rightarrow Y$  homotop.

*Übung 1.5.16.* Jeder zusammenziehbare Raum ist wegzusammenhängend.

*Übung 1.5.17.* Die Einbettung  $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$  ist eine Homotopie-Äquivalenz.

## 1.6 Homotopie und Fundamentalgruppe

1.6.1. Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppe und Homotopie. Zunächst interessieren wir uns dafür, wie die Fundamentalgruppe vom Basispunkt abhängt. Falls es keinen Weg von  $x$  nach  $y$  gibt, haben  $\pi_1(X, x)$  und  $\pi_1(X, y)$  nichts miteinander zu tun. Gibt es aber einen Weg, so erhalten wir isomorphe Gruppen. Genauer gilt:

**Satz 1.6.2 (Wechsel des Basispunkts).** *Gegeben Punkte  $x, y$  eines topologischen Raums  $X$  liefert jeder stetige Weg  $\gamma$  von  $x$  nach  $y$  einen Isomorphismus*

$$i_\gamma : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, y) \\ [\alpha] \mapsto [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$$

1.6.3. Hier und im folgenden kürzen wir  $(\alpha * \beta) * \gamma$  mit  $\alpha * \beta * \gamma$  ab, für verknüpfbare Wege  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ . Wann immer wir diese Notation verwenden, wird es eh nicht auf die Klammern ankommen, da wir Wege nur bis auf Homotopie betrachten.

*Übung 1.6.4.* Homotope Wege liefern denselben Isomorphismus, in Formeln  $\gamma \simeq \delta \Rightarrow i_\gamma = i_\delta$ . Außerdem gilt  $i_{\gamma * \delta} = i_\gamma \circ i_\delta$  für verknüpfbare Wege  $\gamma, \delta$  und für den konstanten Weg  $\varepsilon = \varepsilon_x$  ist  $i_\varepsilon$  die Identität auf  $\pi_1(X, x)$ .

*Beweis.*  $\alpha \simeq \alpha' \Rightarrow \gamma * \alpha * \gamma^{-1} \simeq \gamma * \alpha' * \gamma^{-1}$  nach Lemma 1.2.12, also ist  $i_\gamma$  wohldefiniert. Man erkennt mühelos, daß  $i_{\gamma^{-1}}$  invers ist zu  $i_\gamma$ , insbesondere ist  $i_\gamma$  eine Bijektion. Um zu prüfen, daß  $i_\gamma$  auch ein Gruppenhomomorphismus ist, rechnen wir

$$\begin{aligned} i_\gamma([\alpha] * [\beta]) &= [\gamma * (\alpha * \beta) * \gamma^{-1}] \\ i_\gamma([\alpha]) * i_\gamma([\beta]) &= [(\gamma * \alpha * \gamma^{-1}) * (\gamma * \beta * \gamma^{-1})] \end{aligned}$$

und sehen, daß auf der rechten Seite in der oberen und unteren Zeile dieselbe Homotopieklasse steht.  $\square$

**Satz 1.6.5 (Homotopie und Fundamentalgruppe).** *Seien stetige Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  gegeben und sei  $H$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Sei  $x \in X$  gewählt und bezeichne  $\gamma$  den Weg  $\gamma(t) = H(x, t)$  von  $f(x)$  nach  $g(x)$ . So gilt  $g_\# = i_\gamma \circ f_\#$ , d.h. es kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(Y, f(x)) \\ \parallel & & \wr \downarrow i_\gamma \\ \pi_1(X, x) & \xrightarrow{g_\#} & \pi_1(Y, g(x)) \end{array}$$

*Beweis.* Es gilt zu zeigen  $\gamma^{-1} * (g \circ \alpha) * \gamma \simeq (f \circ \alpha)$  für alle  $\alpha \in \Omega(X, x)$ . Es reicht dazu, eine Homotopie  $\gamma^{-1} * (g \circ \alpha) * \gamma \simeq \varepsilon * (f \circ \alpha) * \varepsilon$  anzugeben. Für  $\tau \in [0, 1]$  bezeichne  $H_\tau : X \rightarrow Y$  die Abbildung  $x \mapsto H(x, \tau)$  und  $\gamma_\tau \in \Omega(Y, \gamma(\tau), \gamma(0))$  das Anfangsstück  $\gamma_\tau(t) = \gamma(t\tau)$  von  $\gamma$ . Die gewünschte Homotopie wird dann geliefert von der Abbildung  $\tau \mapsto h_\tau = \gamma_\tau^{-1} * (H_\tau \circ \alpha) * \gamma_\tau$ . Unsere Zwischenwege bestehen also darin, daß wir erst  $\gamma$  ein Stück weit gehen, dann das mit der Homotopie deformierte  $f \circ \alpha$  herumgehen und anschließend wieder mit  $\gamma$  zurückgehen. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Familie von Zwischenwegen die von einer Homotopie geforderte Stetigkeitseigenschaft hat.  $\square$

**Korollar 1.6.6.** *Jede Homotopie-Äquivalenz induziert einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen. Jede nullhomotope Abbildung induziert die triviale Abbildung auf den Fundamentalgruppen. Die Fundamentalgruppe eines zusammenziehbaren Raums ist trivial.*

*Beweis.* Ist  $u$  eine Homotopie-Äquivalenz, so gibt es nach Definition eine Abbildung  $v$  in die andere Richtung mit  $u \circ v \simeq \text{id}$  und  $v \circ u \simeq \text{id}$ . Aus dem Satz folgt, daß dann  $(u \circ v)_\# = u_\# \circ v_\#$  und  $(v \circ u)_\# = v_\# \circ u_\#$  Isomorphismen sind. Daraus folgt aber sofort, daß auch  $u_\#$  und  $v_\#$  Isomorphismen sein müssen. Die anderen Aussagen des Korollars sind offensichtlich.  $\square$

*Beispiel 1.6.7.* Die Fundamentalgruppe des Komplements eines Punktes in der Ebene ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$ , denn dieses Komplement ist nach 1.5.17 homotopieäquivalent zur Kreislinie. Genauer repräsentiert für  $x \neq y$  zwei Punkte der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  der Weg  $t \mapsto y + x \exp(2\pi it)$  einen Erzeuger von  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus y, x)$ . Ist allgemein  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein geschlossener Weg in der komplexen Zahlenebene und  $y \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$  ein Punkt, der nicht auf besagtem Weg liegt, so erklären wir die **Umlaufzahl**

$$\text{Um}(\gamma, y)$$

von unserem Weg  $\gamma$  um unseren Punkt  $y$  als diejenige ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$ , für die  $\gamma$  als Weg in  $\mathbb{C} \setminus y$  homotop ist zum Weg  $t \mapsto y + \gamma(0) \exp(2\pi int)$ .

*Übung 1.6.8.* Man zeige den Fundamentalsatz der Algebra mit den hier entwickelten Methoden. Man zeige also in anderen Worten, daß jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten eine Nullstelle hat. Hinweis: Hat unsere Polynomfunktion  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  keine Nullstelle, so sind die Abbildungen  $P_\tau : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0, z \mapsto P(\tau z)$  alle homotop zur konstanten Abbildung  $P_0$ .



In jede Zusammenhangskomponente aus dem Komplement des hier gezeichneten Weges habe ich hier die Umlaufzahl des besagten Weges um einen und jeden Punkt aus besagter Zusammenhangskomponente geschrieben.

*Übung 1.6.9.* Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Komplements einer Gerade im  $\mathbb{R}^3$  isomorph ist zu  $\mathbb{Z}$ . Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Raums, der entsteht, wenn man aus dem  $\mathbb{R}^3$  die  $z$ -Achse sowie den Einheitskreis in der  $xy$ -Ebene herausnimmt, isomorph ist zu  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Hinweis: 1.4.6.

**Satz 1.6.10.** *Ein geschlossener Weg in der punktierten Ebene  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , der in der Fundamentalgruppe  $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$  weder das neutrale Element noch einen Erzeuger repräsentiert, kann nicht auf  $(0, 1]$  injektiv sein.*

*Beweis.* Für das  $n$ -fache eines Erzeugers findet man mit Argumenten wie in 1.3.7 einen geschlossenen Weg  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$  mit  $\gamma(t) = \alpha(t)^n$  für alle  $t$ . Induzierte nun  $\gamma$  eine Einbettung  $\tilde{\gamma} : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ , so hätte die analog definierte Abbildung  $\tilde{\alpha} : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$  die Eigenschaft  $z \neq w \Rightarrow \tilde{\alpha}(z) \neq \zeta \tilde{\alpha}(w)$  für jede  $n$ -te Einheitswurzel  $\zeta \neq 1$  und wir erhielten eine stetige Abbildung  $\varphi_\zeta : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  durch die Vorschrift  $\varphi_\zeta(z, w) = \tilde{\alpha}(z) - \zeta \tilde{\alpha}(w)$ . Die von  $\varphi_\zeta$  auf den Fundamentalgruppen induzierte Abbildung wäre unter geeigneten Identifikationen die Addition  $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , aber nach Vorschalten der Diagonale  $S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  erhielten wir die Abbildung  $z \mapsto (1 - \zeta)\tilde{\alpha}(z)$ , die offensichtlich homotop ist zu  $\tilde{\alpha}$  und folglich einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen induziert. Widerspruch!  $\square$

*Ergänzung 1.6.11.* Feiner liefert der vorhergehende Beweis bei Betrachtung aller  $n$ -ten Einheitswurzeln  $\zeta \neq 1$ , daß der in gewisser Weise die Abweichung von der Injektivität messende Ausdruck  $\sum_{p \in \gamma[0,1]} (|\gamma^{-1}(p)| - 1)$  mindestens so groß sein muß wie der Betrag der Umlaufzahl. Das mag eine gute Übung abgeben.


## 1.7 Selbstabbildungen der Kreislinie

**Satz 1.7.1 (Selbstabbildungen der Kreislinie bis auf Homotopie).** *Man erhält eine Bijektion zwischen der Menge aller ganzen Zahlen und der Menge aller Homotopieklassen von Selbstabbildungen der Kreislinie, indem man jeder ganzen Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  die Homotopieklasse des  $n$ -fachen Potenzierens  $S^1 \rightarrow S^1$ ,  $z \mapsto z^n$  zuordnet. In Formeln haben wir also eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \text{Hot}(S^1, S^1) \\ n &\mapsto [z \mapsto z^n] \end{aligned}$$

1.7.2. Mit dem **Abbildungsgrad** einer stetigen Selbstabbildung der Kreislinie meint man das Urbild ihrer Homotopieklasse unter dieser Bijektion.





SkriptenBilder/BildU11Z.png

Ein geschlossener Weg in der punktierten Ebene mit Umlaufzahl Drei um den als Kreuz eingezeichneten Punkt, der “so injektiv ist wie irgend möglich”.

In anderen Worten ist also der Abbildungsgrad einer stetigen Selbstabbildung  $f : S^1 \rightarrow S^1$  diejenige ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$ , für die  $f$  homotop ist zur Abbildung  $z \mapsto z^n$ . In II.2.10.28 führen wir allgemeiner den Abbildungsgrad stetiger Abbildungen zwischen “kompakten orientierten zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten derselben Dimension” ein.

*Beweis.* Wir konstruieren explizit eine Inverse zur Zuordnung aus unserem Satz. Dazu erinnern wir an unsere Abbildung  $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi it)$ . Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  stetig. Da wir den Begriff des Abbildungsgrads eben schon vergeben haben, erklären wir nur für diesen Beweis den “Liftungsgrad” oder kurz  $(\text{grad } f) \in \mathbb{Z}$  von  $f$  durch die Formel  $\text{grad } f = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ , wo  $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ein beliebiger Lift von  $f \circ \text{Exp} : [0, 1] \rightarrow S^1$  ist, d.h. eine Abbildung derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Nach 1.3.7 gibt es stets solch ein  $\tilde{f}$ , und es ist sogar eindeutig bis auf eine additive Konstante aus  $\mathbb{Z}$ . Folglich ist  $\text{grad } f$  wohldefiniert.

**Lemma 1.7.3.** *Genau dann sind zwei Selbstabbildungen der Kreislinie homotop, wenn sie denselben Liftungsgrad haben.*

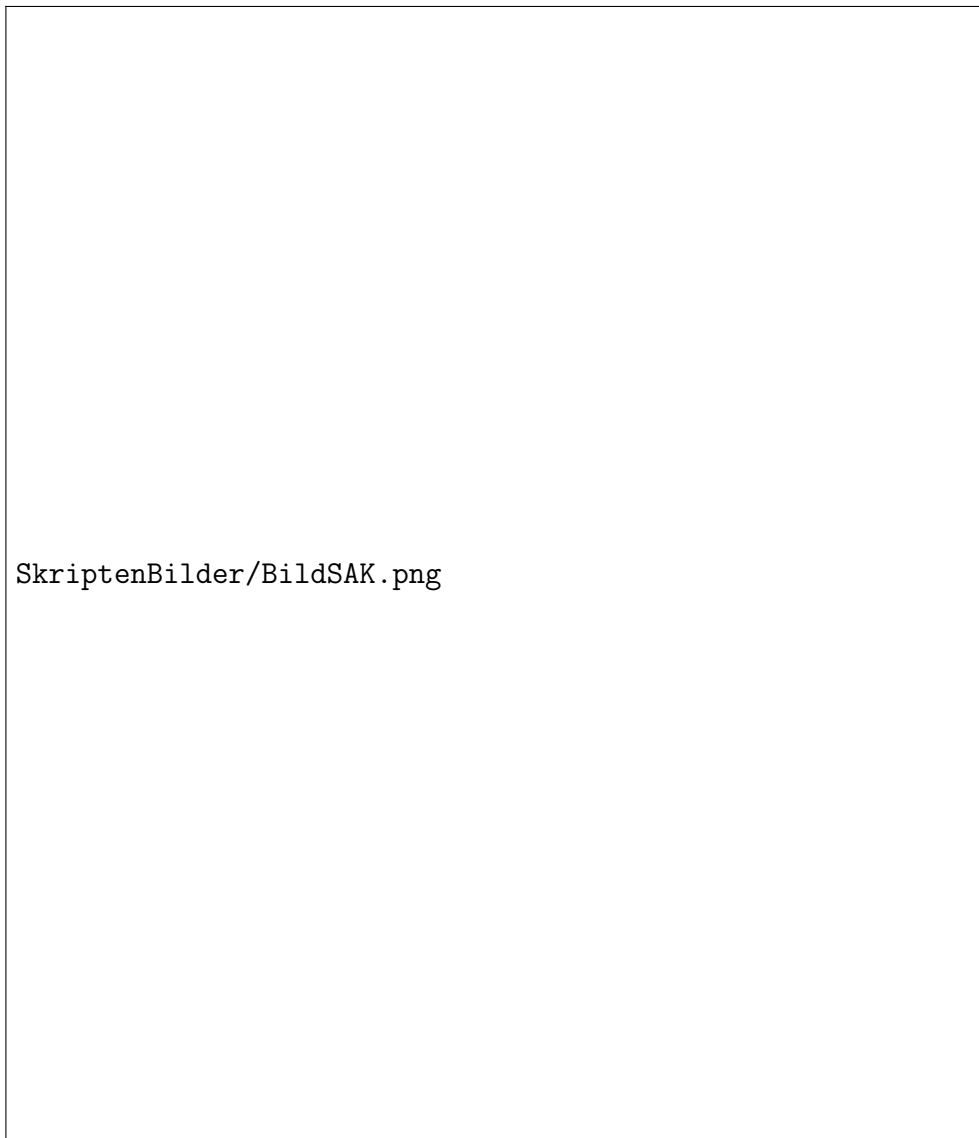
*Beweis.* Seien  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  gegeben und sei  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Nach 1.3.8 finden wir  $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  derart, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{H}} & \mathbb{R} \\ \text{Exp} \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ S^1 \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & S^1 \end{array}$$

Es folgt  $\tilde{H}(0, \tau) - \tilde{H}(1, \tau) \in \mathbb{Z} \quad \forall \tau$ , mithin ist diese Abbildung konstant und wir erhalten  $\text{grad } f = \text{grad } g$ . Also haben homotope Selbstabbildungen der Kreislinie denselben Liftungsgrad. Seien umgekehrt  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  zwei stetige Selbstabbildungen der Kreislinie mit demselben Liftungsgrad. Es gilt zu zeigen, daß sie homotop sind. Seien dazu  $\tilde{f}, \tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gewählt wie in der Definition des Liftungsgrads. Wir definieren  $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Vorschrift

$$\tilde{H}(t, \tau) = (1 - \tau)\tilde{f}(t) + \tau\tilde{g}(t)$$

Aus  $\text{grad } f = \text{grad } g$  folgt nun  $\tilde{H}(0, \tau) - \text{grad } f = \tilde{H}(1, \tau)$ , also  $(\text{Exp} \circ \tilde{H})(0, \tau) = (\text{Exp} \circ \tilde{H})(1, \tau)$  für alle  $\tau$ . Folglich gibt es eine Abbildung von Mengen  $H$  wie



Eine Selbstabbildung der Kreislinie vom Abbildungsgrad  $(-3)$ .

in der unteren Zeile des obigen Diagramms derart, daß das Diagramm kommutiert. Da  $\text{Exp} \times \text{id} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1]$  nach ?? final ist, ist  $H$  sogar stetig. Das ist dann die gesuchte Homotopie von  $f$  nach  $g$ .  $\square$

Nach dem Lemma liefert unser Liftungsgrad eine Injektion

$$\text{grad} : \text{Hot}(S^1, S^1) \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

und aus den Definitionen folgt mühelos, daß  $z \mapsto z^n$  den Liftungsgrad  $n$  hat. Der Satz ist bewiesen.  $\square$

*Übung 1.7.4.* Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  stetig. Für alle  $z \in S^1$  enthält  $f^{-1}(z)$  mindestens  $|\text{grad } f|$  Punkte.

*Übung 1.7.5.* Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  stetig,  $z \in S^1$ . So kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, z) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(S^1, f(z)) \\ \text{Um} \downarrow & & \downarrow \text{Um} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{(\text{grad } f) \cdot} & \mathbb{Z} \end{array}$$

wo in der unteren Horizontale die Multiplikation mit  $(\text{grad } f)$  gemeint ist. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall  $f(z) = z^n$  zurück.

**Proposition 1.7.6.** *Jede stetige schiefsymmetrische Abbildung der Kreislinie auf sich selbst hat ungeraden Abbildungsgrad und ist mithin surjektiv.*

*Beweis.* In Formeln gilt es zu zeigen, daß für  $f : S^1 \rightarrow S^1$  stetig mit  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x$  der Abbildungsgrad  $\text{grad } f$  notwendig ungerade ist. Nach 1.3.7 finden wir stets ein  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{Exp} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Aus  $f(-x) = -f(x)$  folgt  $\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) \in \tilde{f}(t) + \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  für alle  $t$ , es gibt also ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{f}(t) + \frac{1}{2} + k \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Wir erhalten insbesondere

$$\begin{aligned} \tilde{f}(1) &= \tilde{f}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + k \\ &= \tilde{f}(0) + 1 + 2k \end{aligned}$$

und folglich  $\text{grad } f = 1 + 2k$ .  $\square$

**Satz 1.7.7 (Borsuk-Ulam).** *Jede stetige schiefsymmetrische Abbildung von der Kugelschale in die Ebene hat eine Nullstelle.*

*Beweis.* Gegeben  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig mit  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in S^2$  gilt es zu zeigen, daß ein  $x \in S^2$  existiert mit  $f(x) = 0$ . Sonst wäre jedoch  $x \mapsto f(x)/\|f(x)\|$  eine stetige schiefsymmetrische Abbildung  $g : S^2 \rightarrow S^1$ . Die Einschränkung von  $g$  auf den Äquator  $S^1 \subset S^2$  wäre also nicht nullhomotop nach Proposition 1.7.6, aber sie faktorisiert über die zusammenziehbare nördliche Hemisphäre  $S^2_+ \subset S^2$ . Widerspruch!  $\square$

**Korollar 1.7.8.** *Für jede stetige Abbildung von der Kugelschale in die Ebene gibt es ein Paar von gegenüberliegenden Punkten der Kugelschale, die auf denselben Punkt der Ebene abgebildet werden.*

1.7.9. Insbesondere kann also eine stetige Abbildung von der Kugelschale in die Ebene nie injektiv sein. Das ist Ihnen hoffentlich anschaulich sofort klar, aber ich kenne keinen einfacheren Beweis als den hier gegebenen.

*Beweis.* Sei  $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  unsere stetige Abbildung. Gäbe es kein  $x \in S^2$  mit  $h(x) = h(-x)$ , So wäre  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = h(x) - h(-x)$  stetig und schiefsymmetrisch ohne Nullstelle, im Widerspruch zum Satz 1.7.7 Borsuk-Ulam.  $\square$

**Korollar 1.7.10 (Satz vom Butterbrot mit Schinken).** *Gegeben drei kompakte Teilmengen des Raums gibt es stets eine Ebene, die sie alle drei in jeweils zwei volumengleiche Teile teilt.*

1.7.11. Ist also ein Butterbrot mit Schinken gegeben und betrachtet man die Mengen der Punkte des Raums, an denen sich Schinken bzw. Butter bzw. Brot befindet, so kann man mit einem Schnitt das Brot so teilen, daß zwei Hungerige jeweils gleichviel sowohl vom Schinken, als auch von der Butter als auch vom Brot erhalten.

*Beweis.* Um dieses Korollar zu beweisen, formulieren wir es zunächst einmal um. Seien  $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$  unsere drei Kompakta. Sicher finden wir eine stetige Abbildung  $\alpha : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  derart, daß für alle  $x \in S^2$  die Ebene durch den Punkt  $\alpha(x)x$  mit Normalenvektor  $x$  die Menge  $A$  halbiert: Hat  $A$  nicht Volumen Null, so ordnen wir zum Beispiel jedem  $x$  das maximal mögliche  $\alpha(x)$  zu, sonst dürfen wir  $\alpha(x)$  eh beliebig wählen. Sicher dürfen wir weiter sogar  $\alpha$  schiefsymmetrisch annehmen, indem wir sonst  $\alpha$  durch  $(\alpha(x) - \alpha(-x))/2$  ersetzen. Ebenso finden wir stetige schiefsymmetrische  $\beta, \gamma : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  für  $B$  und  $C$ , und es gilt zu zeigen, daß wir  $x \in S^2$  finden mit  $\alpha(x) = \beta(x) = \gamma(x)$ . Nach dem Satz 1.7.7 von Borsuk-Ulam hat aber jede stetige schiefsymmetrische Abbildung von der Kugelschale in die Ebene eine Nullstelle, insbesondere also auch die Abbildung

$$\begin{aligned} f : S^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (\alpha(x) - \beta(x), \beta(x) - \gamma(x)) \end{aligned} \quad \square$$

**Korollar 1.7.12 (Lusternik-Schnirelmann).** *Gegeben eine Überdeckung der Kugelschale durch drei abgeschlossene Teilmengen enthält mindestens eine unserer drei Mengen ein Paar von gegenüberliegenden Punkten.*

*Beweis.* Wäre  $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  ein Gegenbeispiel, so könnten wir stetige schiefsymmetrische Funktionen  $f_i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  finden mit  $f_i(x) = 1$  für  $x \in A_i$ , zum Beispiel indem wir mit den Funktionen  $d(A_i, \cdot)$  spielen, oder indem wir nach Tietze's Erweiterunglemma ?? eine stetige Funktion  $g_i$  finden mit  $g_i(\pm x) = \pm 1$  für  $x \in A_i$  und dann  $f_i(y) = (g_i(y) - g_i(-y))/2$  setzen für alle  $y$ . Dann könnten wir den Satz von Borsuk-Ulam 1.7.7 anwenden auf  $f = (f_1, f_2) : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und fänden  $x \in S^2$  mit  $\pm x \notin A_1, \pm x \notin A_2$ , also notwendig  $x, -x \in A_3$ .  $\square$

## 2 Kategorien und Funktoren

### 2.1 Kategorien

2.1.1. Wir nutzen den Homotopie-Begriff als motivierendes Beispiel, um in die Sprache der Kategorien und Funktoren einzuführen. Diese Sprache ist ähnlich ausdrucksstark, grundlegend und elegant wie die Mengenlehre und gehört meines Erachtens in den Rucksack jeder Mathematikerin und jedes Mathematikers. Ich bin sogar der Ansicht, daß die “naive Mengenlehre” aus den Grundvorlesungen am besten durch eine axiomatische Beschreibung der “Kategorie aller Mengen” wie etwa in [LR03] formalisiert wird. So formal will ich bei der hier gegebenen Darstellung jedoch nicht werden und arbeite deshalb weiter auf der Grundlage der naiven Mengenlehre. Da die “Gesamtheit aller Mengen” nach ?? nicht als Menge angesehen werden darf, verlassen wir kurzzeitig den Rahmen der naiven Mengenlehre und betrachten die “Klasse” aller Mengen. Bis auf weiteres ist dieser naive Zugang für unsere Bedürfnisse ausreichend. Sobald kompliziertere Konstruktionen anstehen, erkläre ich dann, wie man sich mit dem Kunstgriff der Wahl eines “Universums” doch wieder in den Rahmen der naiven Mengenlehre retten kann. Eine ausführlichere Behandlung der Kategorientheorie findet man zum Beispiel in [Mac98].

**Definition 2.1.2.** Eine **Kategorie**  $\mathcal{C}$  besteht aus

- a. einer Klasse von **Objekten**  $\text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- b. einer Menge  $\mathcal{C}(X, Y)$  von **Morphismen** für je zwei Objekte  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- c. einer Abbildung  $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ ,  $(f, g) \mapsto g \circ f$  für je drei Objekte  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ , genannt die **Verknüpfung** von Morphismen,

derart, daß folgende Axiome erfüllt sind:

1. Die Verknüpfung ist **assoziativ**, d.h. es gilt  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  für Morphismen  $f, g$  und  $h$  wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind;
2. Für jedes Objekt  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  gibt es einen Morphismus  $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ , die **Identität auf**  $X$ , so daß gilt  $\text{id}_X \circ f = f$  und  $g \circ \text{id}_X = g$  für Morphismen  $f, g$  wann immer diese Verknüpfungen sinnvoll sind. Die üblichen Argumente zeigen, daß es für jedes  $X$  höchstens einen derartigen Morphismus geben kann, womit auch die Verwendung des bestimmten Artikels gerechtfertigt ist.

3. Die Morphismenmengen sind paarweise disjunkt.

Eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden, heißt eine **kleine Kategorie**.

*Beispiel 2.1.3.* Unser erstes Beispiel ist die Kategorie  $\mathcal{C} = \text{Ens}$  aller Mengen. Ihre Objekte sind beliebige Mengen. Für zwei Mengen  $X, Y$  ist  $\text{Ens}(X, Y)$  die Menge aller Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . Die Verknüpfung ordnet jedem Paar  $(f, g)$  von Abbildungen ihre Komposition  $g \circ f$  zu, und  $\text{id}_X \in \text{Ens}(X, X)$  ist schlicht die “identische” Abbildung  $\text{id}_X(x) = x \forall x \in X$ .

2.1.4. Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und seien in  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  Objekte von  $\mathcal{C}$ . Statt  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  sagen wir auch “ $f$  ist ein Morphismus von  $X$  nach  $Y$ ” und schreiben kurz  $f : X \rightarrow Y$ . Statt  $\text{id}_X$  schreiben wir oft nur  $\text{id}$ . Statt  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  schreiben wir oft kürzer  $X \in \mathcal{C}$ . Die Morphismen von  $X$  zu sich selber nennen wir die **Endomorphismen** von  $X$  und kürzen sie ab mit  $\mathcal{C}(X, X) = \mathcal{C}(X)$ .

2.1.5. Hier kommen einige Beispiele von Kategorien. Als Verknüpfung von Morphismen ist für die Kategorien dieser Liste stets die Komposition von Abbildungen gemeint.

Kategorie	Morphismen	Kürzel
{Mengen}	alle Abbildungen	Ens
{Monoide}	Morphismen von Monoiden	Mon
{Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Grp
{abelsche Gruppen}	Gruppenhomomorphismen	Ab
{topologische Räume}	stetige Abbildungen	Top
{punktierte Mengen}	Abbildungen, die den Basispunkt erhalten	Ens*
{punktierte Räume}	stetige Abbildungen, die den Basispunkt erhalten	Top*
{ $k$ -Vektorräume}	$k$ -lineare Abbildungen	$k$ -Mod, $\text{Mod}_k$
{Affine Räume über $k$ }	affine Abbildungen	$k$ -Aff, $\text{Aff}_k$
{nicht unitäre Ringe}	Rng-Homomorphismen	Rng
{Ringe}	Ringhomomorphismen	Ring
{kommutative Ringe}	Ringhomomorphismen	Kring
{ $k$ -Algebren}	$k$ -Algebren-Homomorphismen	$k$ -Alg, $\text{Alg}_k$

2.1.6. Unter einer **Unterkategorie** einer Kategorie versteht man ein Paar bestehend aus einer Teilklasse von Objekten nebst Teilmengen der Morphismenräume für je zwei Objekte unserer Teilklasse derart, daß die offensichtlichen Bedingungen erfüllt sind. Eine Unterkategorie heißt **voll** genau dann,



wenn die fraglichen Teilmengen der Morphismenräume jeweils aus allen Morphismen in der ursprünglichen Kategorie bestehen.

2.1.7. Morphismen von  $k$ -Vektorräumen  $V, W$  notiert man statt  $\text{Mod}_k(V, W)$  meist  $\text{Hom}_k(V, W)$  und für Endomorphismen ist die Notation  $\text{Mod}_k(V) = \text{End}_k V$  üblich. Das Symbol “Hom” für Morphismenräume versuche ich jedoch im allgemeinen zu vermeiden. Ich will es reservieren für die sogenannten “internen Hom-Räume”, unter denen man Vorschriften versteht, die zwei Objekten einer Kategorie ein drittes zuordnen, im Fall der Vektorräume etwa die Morphismenmenge mit ihrer natürlichen Vektorraumstruktur. Das Kürzel “Mod” mit etwelchen oberen und unteren Indizes wird stets stehen für abelsche Gruppen mit Zusatzstrukturen, meist Operationen von Ringen oder Gruppen. Gehen diese Zusatzstrukturen aus dem Kontext hervor, so lassen wir die entsprechenden Indizes auch manchmal weg. Für abelsche Gruppen ohne Zusatzstrukturen benutzen wir stets das Kürzel “Ab”.

*Beispiel 2.1.8.* Ein etwas komplizierteres Beispiel für eine Kategorie ist die sogenannte **Homotopiekategorie** topologischer Räume  $\text{Hot}$ . Ihre Objekte sind topologische Räume, als Morphismen von einem Raum in einen anderen nehmen wir jedoch die Menge  $\text{Hot}(X, Y)$  aller Homotopieklassen von stetigen Abbildungen und erklären ihre Verknüpfung in der offensichtlichen Weise durch  $[f] \circ [g] = [f \circ g]$ . Für die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen zwischen zwei Räumen ist auch die Notation  $\text{Hot}(X, Y) = [X, Y]$  gebräuchlich.

*Beispiel 2.1.9.* Jede partiell geordnete Menge  $(A, \leq)$  kann als Kategorie aufgefaßt werden wie folgt: Objekte sind die Elemente, Morphismen gibt es jeweils einen von einem Element zu jedem kleineren und zu sich selber, die Verknüpfung von Morphismen ist die offensichtliche und einzig mögliche.

*Beispiel 2.1.10.* Ein andersartiges Beispiel ist das **fundamentale Gruppoid**  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_X$  eines topologischen Raums  $X$ . Seine Objekte sind die Punkte von  $X$ , die Morphismenmenge  $\mathcal{W}(x, y)$  besteht aus allen Homotopieklassen von Wegen mit Anfangspunkt  $x$  und Endpunkt  $y$ , in Formeln

$$\mathcal{W}(x, y) = \pi_1(X, y, x)$$

und die Verknüpfung von Morphismen ist das Hintereinanderhängen von Wegen. Man benutzt Lemma 1.2.12, um die Axiome einer Kategorie zu prüfen.

*Beispiel 2.1.11.* Für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  bildet man die **opponierte Kategorie**  $\mathcal{C}^\circ = \mathcal{C}^{\text{opp}}$  wie folgt: Man setzt

$$\text{Ob } \mathcal{C}^\circ = \text{Ob } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{C}^\circ(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X)$$

und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in  $\mathcal{C}^\circ$  in der offensichtlichen Weise.

*Beispiel 2.1.12.* Für Kategorien  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  bildet man die **Produkt-Kategorie**  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  wie folgt: Man setzt  $\text{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \text{Ob } \mathcal{A} \times \text{Ob } \mathcal{B}$ , erklärt Morphismen in der Produktkategorie als Paare von Morphismen in den Ausgangskategorien und erklärt die Verknüpfung von Morphismen in der Produktkategorie in der offensichtlichen Weise.

**Definition 2.1.13.** 1. Ein Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  in einer Kategorie heißt ein **Isomorphismus** oder **Iso** und als Adjektiv **iso** genau dann, wenn es einen Morphismus  $g \in \mathcal{C}(Y, X)$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$ . Wir notieren die Menge aller Isomorphismen von  $X$  nach  $Y$  auch  $\mathcal{C}^\times(X, Y)$  und notieren Isomorphismen oft  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ .

2. Zwei Objekte  $X$  und  $Y$  einer Kategorie heißen **isomorph** genau dann, wenn es einen Iso  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$  gibt. Man schreibt dann auch kurz  $X \cong Y$ .

*Übung 2.1.14.* Ein Morphismus  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  in einer Kategorie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn es Morphismen  $g, h \in \mathcal{C}(Y, X)$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_Y$  und einen  $h \circ f = \text{id}_X$ .

*Beispiele 2.1.15.* Isomorphismen in der Kategorie der Mengen nennt man Bijektionen, Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume Homöomorphismen, Isomorphismen in der Homotopiekategorie Homotopieäquivalenzen. Kategorien, in denen alle Morphismen Isomorphismen sind, heißen auch **Gruppoid**. Kategorien, in denen es außer den Identitäten keine Morphismen gibt, heißen **diskret**. Natürlich ist jede diskrete Kategorie ein Gruppoid.

2.1.16. Viele mathematische Fragestellungen lassen sich in der Sprache der Kategorien dahingehend formulieren, daß man einen Überblick über alle Objekte einer Kategorie gewinnen will, wobei man zwischen isomorphen Objekten nicht unterscheidet. Man spricht dann auch von **Isomorphieklassen** von Objekten und Fragestellungen dieser Art heißen **Klassifikationsprobleme**. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen  $k$ -Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, in der Einleitung hatten wir eine Klassifikation der zusammenhängenden geschlossenen Flächen angegeben, und die Isomorphieklassen des fundamentalen Gruppoids eines topologischen Raums sind schlicht seine Wegzusammenhangskomponenten.

2.1.17. Die Isomorphismen von einem Objekt  $X$  einer Kategorie auf sich selber heißen die **Automorphismen** von  $X$ . Sie bilden stets eine Gruppe, die **Automorphismengruppe**  $\mathcal{C}^\times(X)$  von  $X$ . Unsere Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x)$  ist genau die Automorphismengruppe des Punktes  $x$  in seinem fundamentalen Gruppoid, in Formeln  $\pi_1(X, x) = \mathcal{W}_X^\times(x)$ .

**Definition 2.1.18.** Ein Objekt  $F$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **final** genau dann, wenn es für alle  $Y \in \mathcal{C}$  genau einen Morphismus von  $Y$  nach  $F$  gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(Y, F)| = 1 \quad \forall Y \in \mathcal{C}$$

**Definition 2.1.19.** Ein Objekt  $K$  einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **kofinal** genau dann, wenn es für alle  $Y \in \mathcal{C}$  genau einen Morphismus von  $K$  nach  $Y$  gibt, in Formeln

$$|\mathcal{C}(K, Y)| = 1 \quad \forall Y \in \mathcal{C}$$

2.1.20. Zwischen je zwei finalen (bzw. kofinalen) Objekten gibt es offensichtlich genau einen Isomorphismus. Wir reden deshalb meist etwas lax von *dem* finalen bzw. kofinalen Objekt und bezeichnen “das” finale Objekt gerne mit  $\text{pt} = \text{pt}(\mathcal{C})$  für “Punkt” und Morphismen dahin mit  $c$  für “konstant”. Manchmal verwenden wir als Bezeichnung des finalen Objekts auch die kleingeschriebene Bezeichnung der Kategorie, etwa  $\text{top}$  für den einelementigen topologischen Raum oder  $\text{ens}$  für die einelementige Menge.

*Beispiele 2.1.21.* In der Kategorie der Mengen sind die einpunktigen Mengen die finalen Objekte und die leere Menge ist das einzige kofinale Objekt.

*Übung 2.1.22.* Man finde finale und kofinale Objekte in den Kategorien der Gruppen, Ringe, topologischen Räume.

*Ergänzung 2.1.23.* Gibt es in einer Kategorie eine Menge von Objekten derart, daß jedes Objekt isomorph ist zu einem Objekt aus besagter Menge, so nennt man die Kategorie **svelte**. Insbesondere ist jede kleine Kategorie svelte.

## 2.2 Funktoren

**Definition 2.2.1.** Ein **Funktor**  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  von einer Kategorie  $\mathcal{A}$  in eine Kategorie  $\mathcal{B}$  besteht aus

- a. einer Abbildung  $F : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}$ ,  $X \mapsto FX$ ;
- b. einer Abbildung  $F : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(FX, FY)$ ,  $f \mapsto Ff$  für je zwei Objekte  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{A}$ ,

derart, daß gilt

1.  $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$  für beliebige verknüpfbare Morphismen  $f$  und  $g$  aus der Kategorie  $\mathcal{A}$ ;
2.  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$  für jedes Objekt  $X \in \mathcal{A}$ .

2.2.2. Man gibt bei einem Funktor  $F$  meist nur die Abbildung  $X \mapsto FX$  auf den Objekten an in der Hoffnung, daß dadurch schon klar wird, welche Abbildung  $f \mapsto Ff$  auf den Morphismen gemeint ist.

*Beispiele 2.2.3.* Unsere Fundamentalgruppe ist ein Funktor  $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$  von den punktierten topologischen Räumen in die Gruppen. Das “Vergessen der Gruppenstruktur” definiert einen Funktor  $\text{Grp} \rightarrow \text{Ens}$  von den Gruppen in die Mengen. Natürlich gibt es noch viele andere solche **Vergiss-Funktoren**. Die Zuordnung, die jedem topologischen Raum  $X$  die Menge  $\pi_0(X)$  seiner Wegzusammenhangskomponenten zuordnet, ist ein Funktor  $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Ens}$ . Indem wir die Komponente des ausgezeichneten Punktes auszeichnen, erhalten wir ebenso einen Funktor  $\pi_0 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Ens}^*$ . Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $X \in \mathcal{C}$  ein Objekt, so ist die Zuordnung

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, \_): \mathcal{C} &\rightarrow \text{Ens} \\ Y &\mapsto \mathcal{C}(X, Y) \end{aligned}$$

stets ein Funktor. Sind  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren, so ist auch  $G \circ F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Und schließlich haben wir für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  den **Identitätsfunktor**  $\text{Id} = \text{Id}_{\mathcal{C}}$  von besagter Kategorie in sich selber. Jeder Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  liefert in offensichtlicher Weise einen Funktor  $F : \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$  zwischen den zugehörigen opponierten Kategorien.

**Lemma 2.2.4.** *Ein Funktor bildet stets Isomorphismen auf Isomorphismen ab. Insbesondere haben isomorphe Objekte unter einem Funktor stets isomorphe Bilder.*

*Beweis.* Sei  $F$  unser Funktor. Wir schließen:

$$\begin{aligned} f \text{ ist Isomorphismus} &\Rightarrow \text{Es gibt } g \text{ mit } f \circ g = \text{id und } g \circ f = \text{id} \\ &\Rightarrow (Ff) \circ (Fg) = \text{id und } (Fg) \circ (Ff) = \text{id} \\ &\Rightarrow Ff \text{ ist Isomorphismus.} \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 2.2.5.** Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^\circ$  heißt auch ein **kontravarianter Funktor** von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$ .

2.2.6. Ausgeschrieben besteht ein kontravarianter Funktor von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  aus einer Abbildung  $F : \text{Ob } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}$  sowie für je zwei Objekte  $X, Y \in \mathcal{A}$  einer Abbildung  $F : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(FY, FX)$  derart, daß gilt  $F(\text{id}) = \text{id}$  und  $F(f \circ g) = Fg \circ Ff$  für alle verknüpfbaren Morphismen  $f, g$ .

*Beispiel 2.2.7.* Die Zuordnung  $D$ , die jedem Vektorraum  $V$  über einem Körper  $k$  seinen Dualraum  $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$  zuordnet, ist ein kontravarianter Funktor  $D : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$ ,  $V \mapsto V^*$ . Natürlich hätten wir hier statt  $\text{Hom}_k(V, k)$  ebensogut  $\text{Mod}_k(V, k)$  schreiben können, aber die Notation  $\text{Hom}$  betont, daß wir uns besonders für die Vektorraumstruktur auf besagter Menge von Morphismen interessieren.

*Beispiel 2.2.8.* Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  und ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  ist die Zuordnung  $\mathcal{C}(\_, X) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  stets ein kontravarianter Funktor.

**Definition 2.2.9.** 1. Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt **treu** genau dann, wenn er Injektionen  $F : \mathcal{A}(A, A') \hookrightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$  auf den Morphismen induziert, für alle  $A, A' \in \mathcal{A}$ .

2. Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt eine **volltreu** genau dann, wenn er Bijektionen  $F : \mathcal{A}(A, A') \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(FA, FA')$  auf den Morphismen induziert.

3. Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt eine **Äquivalenz von Kategorien** genau dann, wenn er volltreu ist und zusätzlich eine Surjektion auf Isomorphieklassen von Objekten induziert, wenn es also in Formeln für alle  $B \in \mathcal{B}$  ein  $A \in \mathcal{A}$  gibt mit  $FA \cong B$ .

4. Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt ein **Isomorphismus von Kategorien** genau dann, wenn er bijektiv ist auf Objekten und auf Morphismen.

*Beispiel 2.2.10.* Sei  $k$  ein Körper. Wir betrachten die Kategorie  $\text{Modfg}_k$  aller endlichdimensionalen alias endlich erzeugten alias “finitely generated”  $k$ -Vektorräume mit linearen Abbildungen als Morphismen. Weiter betrachten wir, und zwar sogar für einen beliebigen Ring  $k$ , die Kategorie  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_k$  mit Objekten  $\text{Ob } \mathcal{M} = \mathbb{N}$  und als Morphismen Matrizen mit Einträgen in  $k$ , in Formeln

$$\mathcal{M}(m, n) = \text{M}(n \times m; k)$$

Die Verknüpfung von Morphismen in  $\mathcal{M}$  sei die Matrixmultiplikation. Im Fall eines Körpers  $k$  ist dann der offensichtliche Funktor  $n \mapsto k^n$  eine Äquivalenz  $R : \mathcal{M}_k \xrightarrow{\sim} \text{Modfg}_k$ , aber natürlich kein Isomorphismus von Kategorien. Wenn unser Ring  $k$  selbst durch einen größeren Ausdruck gegeben ist, schreiben wir für die Matrixkategorie statt  $\mathcal{M}_k$  auch manchmal  $\mathcal{M}(k)$ .

*Übung 2.2.11.* Jede Äquivalenz von Kategorien induziert eine Bijektion zwischen den zugehörigen Isomorphieklassen von Objekten. Zum Beispiel werden die endlichdimensionalen  $k$ -Vektorräume klassifiziert durch ihre Dimension, d.h. durch Elemente von  $\mathbb{N}$ .

*Übung 2.2.12.* Die Verknüpfung von zwei Äquivalenzen von Kategorien ist wieder eine Äquivalenz von Kategorien.

## 2.3 Transformationen

2.3.1. Bis hierher hat sich unsere Theorie in vertrauten Bahnen bewegt: Wir haben nur eine neue Art von Strukturen erklärt, die Kategorien, und struktur-erhaltende Abbildungen alias Morphismen dazwischen betrachtet, die Funktoren. Insoweit paßt alles noch in den strukturellen Rahmen, an den man seit

der linearen Algebra durch das Studium von Vektorräumen und linearen Abbildungen gewöhnt worden ist. Das Neue bei der Kategorientheorie ist nun, daß es auch “Morphismen von Morphismen” gibt. Sie heißen “Transformationen von Funktoren” und sind das Thema dieses Abschnitts.

**Definition 2.3.2.** Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Kategorien und  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktoren. Eine **Transformation**  $\tau : F \Rightarrow G$  ist eine Vorschrift, die jedem Objekt  $X \in \mathcal{A}$  einen Morphismus  $\tau_X \in \mathcal{B}(FX, GX)$  zuordnet derart, daß für jeden Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{A}$  das folgende Diagramm in  $\mathcal{B}$  kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\tau_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\tau_Y} & GY \end{array}$$

Ob ein Doppelpfeil eine Transformation von Funktoren oder vielmehr eine Implikation meint muß der Leser aus dem Kontext erschließen. Sind alle  $\tau_X$  Isomorphismen, so nenne ich  $\tau$  eine **Isotransformation**, aber diese Terminologie ist nicht gebräuchlich. In der Literatur spricht man eher von einem **Isomorphismus** oder auch einer **Äquivalenz von Funktoren**. Die Klasse aller Transformationen von  $F$  nach  $G$  bezeichnen wir mit  $\text{Trans}(F, G)$  oder, wenn zusätzliche Information wichtig ist, auch ausführlicher mit  $\text{Trans}_{\mathcal{A}}(F, G)$  oder sogar  $\text{Trans}_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}(F, G)$ .

2.3.3. In der Literatur heißen unsere Transformationen meist “natürliche Transformationen”. Diese Terminologie schien mir jedoch unnötig umständlich und entspricht auch nicht meinem Sprachempfinden: Ich möchte zum Beispiel unter der “natürlichen” Transformation des Identitätsfunktors auf der Kategorie aller  $\mathbb{R}$ -Vektorräume in den Bidualraumfunktoren gerne die in 2.3.5 gegebene Transformation verstehen, die zwar keineswegs die einzige Transformation zwischen diesen Funktoren ist, aber wohl schon die “natürlichste”.

2.3.4. Sind  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Kategorien und ist  $\mathcal{A}$  klein, so erhalten wir eine weitere Kategorie  $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  mit den Funktoren von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  als Objekten und den Transformationen von Funktoren als Morphismen.

*Beispiel 2.3.5.* Sei  $k$  ein Körper und  $B : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$  der Funktor, der jedem  $k$ -Vektorraum  $V$  seinen Bidualraum  $BV = V^{**}$  zuordnet. So liefern die Evaluationen  $\tau_V : V \rightarrow V^{**}$ ,  $v \mapsto (f \mapsto f(v))$  eine Transformation  $\text{Id} \Rightarrow B$  sowie eine Isotransformation zwischen den Restriktionen dieser Funktoren auf die Kategorie der endlichdimensionalen  $k$ -Vektorräume.

*Beispiel 2.3.6.* Sei  $k$  ein Körper und  $D : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k^\circ$  der Funktor, der jedem Raum seinen Dualraum zuordnet. Sei weiter  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(k)$  die Matrizenkategorie aus 2.2.10 und  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\circ$  der Funktor, der Matrizen

transponiert. Sei schließlich  $R : \mathcal{M} \rightarrow \text{Mod}_k$  unser Funktor aus 2.2.10 und bezeichne  $R$  auch den entsprechenden Funktor zwischen den jeweils opponierten Kategorien. So erhalten wir eine Isotransformation

$$\tau : RT \Rightarrow DR$$

indem wir jeder natürlichen Zahl alias jedem Objekt  $n \in \mathcal{M}$  den offensichtlichen Isomorphismus  $\tau_n : k^n \xrightarrow{\sim} (k^n)^*$  zuordnen. Es kann hilfreich sein, durch Doppelpfeile in Diagrammen von Kategorien und Funktoren klarzumachen, zwischen welchen Funktoren eine Transformation gemeint ist. So wäre etwa unser  $\tau$  ein möglicher Doppelpfeil im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{T} & \mathcal{M}^\circ \\ R \downarrow & \swarrow & \downarrow R \\ \text{Mod}_k & \xrightarrow{D} & \text{Mod}_k^\circ \end{array}$$

*Beispiel 2.3.7.* Sei  $k$  ein Körper. Gegeben zwei  $k$ -Vektorräume  $V, W$  können wir die Menge  $\text{Mod}_k(V, W)$  versehen mit der Struktur eines  $k$ -Vektorraums. Wollen wir besonders betonen, daß wir diese Struktur meinen, so schreiben wir  $\text{Hom}_k(V, W)$ . Mit dieser Notation definieren die natürlichen Abbildungen

$$V^* \otimes_k W \rightarrow \text{Hom}_k(V, W)$$

für  $k$ -Vektorräume  $V, W$  eine Transformation zwischen den durch diese Vorschriften gegebenen Funktoren

$$\text{Mod}_k^\circ \times \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$$

und eine Äquivalenz, wenn wir uns im ersten Faktor auf endlichdimensionale Räume beschränken.

*Beispiel 2.3.8.* Für jeden Funktor gibt es die **identische Transformation**  $\text{id}$  von besagtem Funktor zu sich selber. Sind  $\tau : F \Rightarrow G$  und  $\sigma : G \Rightarrow H$  Transformationen, so ist auch  $\sigma \circ \tau : F \Rightarrow H$  eine Transformation.

*Beispiel 2.3.9.* Seien  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  Funktoren und  $\tau : F \Rightarrow G$  eine Transformation. Gegeben ein weiterer Funktor  $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Transformation  $H\tau : HF \Rightarrow HG$ . Gegeben ein weiterer Funktor  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  erhalten wir in offensichtlicher Weise eine Transformation  $\tau H : FH \Rightarrow GH$ .

*Übung 2.3.10.* Gegeben Funktoren  $F, F' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G, G' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  und Transformationen  $\alpha : F \Rightarrow F'$  sowie  $\beta : G \Rightarrow G'$  gilt die Gleichheit  $\beta F' \circ G \alpha = G' \alpha \circ \beta F$  von Transformationen  $GF \Rightarrow G'F'$ .

2.3.11. Einen Funktor von einer Kategorie  $\mathcal{C}$  in die Kategorie der Mengen nennen wir kurz einen **Mengenfunktor auf  $\mathcal{C}$** . Gegeben eine kleine Kategorie  $\mathcal{C}$  bildet die Klasse aller Mengenfunktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  mit den Transformationen als Morphismen wieder eine Kategorie. Die zur Kategorie der Mengenfunktoren auf  $\mathcal{C}$  opponierte Kategorie  $\mathcal{C}^\wedge = \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Ens})^\circ$  kann man als eine Art “Vervollständigung” von  $\mathcal{C}$  interpretieren, da nämlich, wie das gleich anschließende Yoneda-Lemma 2.3.12 zeigt, die Vorschrift  $X \mapsto \mathcal{C}(X, \_)$  einen volltreuen Funktor

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\wedge$$

definiert. Diejenigen Mengenfunktoren auf  $\mathcal{C}$ , die äquivalent sind zu Mengenfunktoren im Bild von  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\wedge$ , heißen **darstellbare Funktoren**. Ist ein Mengenfunktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  äquivalent zu  $\mathcal{C}(X, \_)$  für ein  $X \in \mathcal{C}$ , so sagen wir, der **Funktor  $F$  werde dargestellt durch das Objekt  $X$** . Zum Beispiel wird der Vergißfunktor von den  $k$ -Vektorräumen in die Mengen dargestellt durch den eindimensionalen Vektorraum  $k$ , der Vergißfunktor von den Gruppen in die Mengen durch die Gruppe  $\mathbb{Z}$ , und der Funktor  $\pi_0 : \text{Hot} \rightarrow \text{Ens}$ , der jedem Raum die Menge seiner Wegzusammenhangskomponenten zuordnet, durch den einpunktigen Raum.

**Proposition 2.3.12 (Yoneda-Lemma).** *Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $X \in \mathcal{C}$  ein Objekt und  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  ein Mengenfunktor auf  $\mathcal{C}$ . So liefert die Abbildungsvorschrift  $\tau \mapsto \tau_X(\text{id}_X)$  eine Bijektion*

$$\text{Trans}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(X, \_), F) \xrightarrow{\sim} F(X)$$

*Beweis.* Wir konstruieren zunächst eine Abbildung in die andere Richtung. Für beliebiges  $a \in F(X)$  betrachten wir dazu die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \tau_Y : \mathcal{C}(X, Y) & \rightarrow & F(Y) \\ f & \mapsto & (Ff)(a) \end{array}$$

Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß sie eine Transformation  $\tau : \mathcal{C}(X, \_) \Rightarrow F$  bilden, die wir mit  $\hat{\tau}(a)$  bezeichnen. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß die Abbildung  $a \mapsto \hat{\tau}(a)$  invers ist zu unserer Abbildung  $\tau \mapsto \hat{a}(\tau) = \tau_X(\text{id}_X)$  aus dem Theorem. Dafür müssen wir also prüfen, daß gilt  $a = \hat{a}(\hat{\tau}(a))$  für alle  $a \in F(X)$  und  $\tau = \hat{\tau}(\hat{a}(\tau))$  für alle Transformationen  $\tau : \mathcal{C}(X, \_) \Rightarrow F$ . Das überlassen wir dem Leser.  $\square$

2.3.13. Dual zu  $\mathcal{C}^\wedge$  kann man natürlich für jede kleine Kategorie  $\mathcal{C}$  auch die Kategorie  $\mathcal{C}^\vee$  aller kontravarianten Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  betrachten und erhält mit  $X \mapsto \mathcal{C}(\_, X)$  eine volltreue Einbettung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\vee$ .



*Übung 2.3.14.* Sei  $k$  ein Körper und  $\text{Id} : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$  der Identitätsfunktork. Man bestimme alle Transformationen von diesem Funktor zu sich selber.

*Übung 2.3.15.* Man betrachte die **Homotopiekategorie punktierter Räume**  $\text{Hot}^*$  mit punktierten Räumen als Objekten und Homotopieklassen für basispunkterhaltende Homotopie als Morphismen. So wird die Fundamentalgruppe, aufgefaßt als Funktor  $\pi_1 : \text{Hot}^* \rightarrow \text{Ens}$ , dargestellt durch die punktierte Kreislinie. Die punktierte Kreislinie kann im Übrigen versehen werden mit der Struktur eines Gruppenobjekts in  $(\text{Hot}^*)^\circ$ , und das liefert in diesem Kontext die Gruppenstruktur auf  $\pi_1(X, x)$ .

*Übung 2.3.16.* Sind zwei Funktoren äquivalent und ist der Eine eine Äquivalenz von Kategorien, so auch der Andere.

2.3.17. Ein Zugang zu der von Grothendieck konstruierten Kategorie der **Schemata** ist es, diese Kategorie zu realisieren als volle Unterkategorie der Kategorie  $\text{Kring}^\wedge$ , die wir erhalten, wenn wir die Kategorie der kommutativen Ringe mit der nötigen Sorgfalt bei Fragen der Mengenlehre in der oben erklärten Weise vervollständigen. Der affine Raum der Dimension  $n$  wird dann zum Beispiel definiert als der Funktor, der jedem kommutativen Ring  $R$  die Menge  $R^n$  zuordnet, und der projektive Raum der Dimension  $n$  als der Funktor, der jedem kommutativen Ring  $R$  die Menge derjenigen direkten Summanden  $D$  des  $R$ -Moduls  $R^{n+1}$  zuordnet, die "vom Rang Eins" sind in dem Sinne, daß bei jedem Primideal  $\mathfrak{p} \subset R$  ihre Lokalisierung  $D_{\mathfrak{p}}$  ein freier  $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul vom Rang Eins ist. Man kann mit Schemata so effizient und geometrisch arbeiten, daß sie mittlerweile zum eigentlichen Arbeitspferd der algebraischen Geometrie geworden sind.

## 2.4 Produkte in Kategorien

**Definition 2.4.1.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten von  $\mathcal{C}$ . Ein **Produkt** der  $X_i$  ist ein Datum  $(P, (p_i)_{i \in I})$  bestehend aus (1) einem Objekt  $P \in \mathcal{C}$  und (2) Morphismen  $p_i : P \rightarrow X_i$ , den sogenannten **Projektionen**, derart daß gilt: Ist  $Y \in \mathcal{C}$  ein Objekt und sind  $q_i : Y \rightarrow X_i$  Morphismen, so gibt es genau einen Morphismus  $q : Y \rightarrow P$  mit  $p_i \circ q = q_i \quad \forall i \in I$ . Wir notieren diesen Morphismus dann  $q = (q_i)_{i \in I}$ .

*Beispiele 2.4.2.* In der Kategorie der Mengen ist  $P = \prod_{i \in I} X_i$  mit  $p_i$  den üblichen Projektionsabbildungen ein Produkt der  $X_i$ . Dasselbe gilt in der Kategorie der topologischen Räume, wenn wir  $P$  mit der Produkttopologie im Sinne von ?? versehen.

2.4.3. Produkte in Kategorien sind im wesentlichen eindeutig, falls sie existieren. Sind genauer  $(P, (p_i))$  und  $(\tilde{P}, (\tilde{p}_i))$  zwei mögliche Produkte der Objekte  $X_i$ , so gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft von  $P$  genau ein

$\tilde{p} : \tilde{P} \rightarrow P$  mit  $p_i \circ \tilde{p} = \tilde{p}_i$  und ebenso genau ein  $p : P \rightarrow \tilde{P}$  mit  $\tilde{p}_i \circ p = p_i$ . Weiter gibt es auch genau ein  $f : P \rightarrow P$  mit  $p_i \circ f = p_i$ , und da sowohl  $f = \text{id}$  als auch  $f = \tilde{p} \circ p$  diese Bedingung erfüllen, folgt  $\tilde{p} \circ p = \text{id}$ . Ebenso erhalten wir  $p \circ \tilde{p} = \text{id}$ , mithin sind  $p$  und  $\tilde{p}$  zueinander inverse Isomorphismen. Aufgrund dieser Eindeutigkeit sprechen wir ab jetzt meist von **dem** Produkt und notieren es

$$\left( \prod_{i \in I} X_i, (\text{pr}_i)_{i \in I} \right)$$

oder im Fall endlicher Familien  $X_1 \times \dots \times X_n$  und benutzen für die Projektionen manchmal auch die Notation  $\text{pr}_{X_i}$ . Morphismen in das Produkt schreiben wir im Fall endlicher Familien auch  $(q_1, \dots, q_n)$ . Sind schließlich Morphismen  $f : X \rightarrow X'$ ,  $g : Y \rightarrow Y'$  gegeben und existieren die Produkte  $X \times Y$  und  $X' \times Y'$ , so benutzen wir die Abkürzung  $(f \circ \text{pr}_X, g \circ \text{pr}_Y) = f \times g$  und nennen diesen Morphismus den **Produktmorphismus**

$$f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$$

*Beispiele 2.4.4.* Das Produkt über eine leere Familie von Mengen erklärt man als “die” einpunktige Menge, damit das Bilden von Produkten von Mengen “assoziativ” wird in der Weise, daß wir bei einer Familie  $(I_j)_{j \in J}$  von Indexmengen mit disjunkter Vereinigung  $I = \bigsqcup_j I_j$  stets eine kanonische Bijektion

$$\prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\sim} \prod_{j \in J} \left( \prod_{i \in I_j} X_i \right)$$

haben. Das Produkt über eine leere Familie in einer beliebigen Kategorie  $\mathcal{C}$  verstehen wir analog als “das” finale Objekt, da dann die offensichtliche Abbildung auch in diesem Fall Bijektionen  $\mathcal{C}(Y, \prod_{i \in I} X_i) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(Y, X_i)$  liefert. Wenn wir sagen, eine Kategorie **habe Produkte** oder auch nur endliche Produkte, so fordern wir insbesondere implizit die Existenz eines finalen Objekts.

*Übung 2.4.5.* Man präzisiere und zeige die “Assoziativität” von Produkten, die die Formel  $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$  andeutet.

2.4.6. Produkte in der opponierten Kategorie heißen “Koprodukte”. Im folgenden sprechen wir diese Definition explizit aus.

**Definition 2.4.7.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten aus  $\mathcal{C}$ . Ein **Koprodukt** der  $X_i$  ist ein Datum  $(K, (\text{in}_i)_{i \in I})$  bestehend aus einem Objekt  $K \in \mathcal{C}$  und Morphismen  $\text{in}_i : X_i \rightarrow K$  derart, daß gilt: Ist  $Z \in \mathcal{C}$  ein Objekt und sind  $f_i : X_i \rightarrow Z$  Morphismen, so gibt es genau

einen Morphismus  $f : K \rightarrow Z$  mit  $f \circ \text{in}_i = f_i \quad \forall i \in I$ . Wir notieren diesen Morphismus dann auch  $(f_i)_{i \in I}$  und hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, wann damit ein Morphismus aus einem Koprodukt und wann ein Morphismus in ein Produkt gemeint ist. Wir notieren Koprodukte  $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ .

*Beispiele 2.4.8.* In der Kategorie der Mengen ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ . In der Kategorie der topologischen Räume gilt dasselbe. In der Kategorie der punktierten topologischen Räume ist das Koprodukt die **Einpunktverbindung**  $\bigvee_{i \in I} X_i = \bigsqcup X_i / \sim$ , wo die Äquivalenzrelation  $\sim$  dadurch erklärt sei, daß alle Basispunkte der verschiedenen  $X_i$  unter  $\sim$  eine Äquivalenzklasse bilden und die anderen Äquivalenzklassen einelementig sind. In der Kategorie der abelschen Gruppen ist das Koprodukt die direkte Summe.

2.4.9. Für die algebraisch Gebildeten unter Ihnen sei bemerkt, daß in der Kategorie Kring der kommutativen Ringe das Tensorprodukt über  $\mathbb{Z}$  im Sinne von II.3.2 ein Koprodukt ist, sofern die Multiplikation auf  $A \otimes B$  durch  $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$  erklärt wird und die kanonischen Morphismen durch  $a \mapsto a \otimes 1$  und  $b \mapsto 1 \otimes b$ .

## 2.5 Kartesische und kokartesische Diagramme

**Definition 2.5.1.** Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  und ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  definieren wir ganz allgemein die Kategorie  $\mathcal{C}_X$  der **Objekte von  $\mathcal{C}$  über  $X$**  wie folgt: Objekte von  $\mathcal{C}_X$  sind Paare  $(Y, p)$  mit  $Y \in \mathcal{C}$  und  $p \in \mathcal{C}(Y, X)$ , Morphismen in  $\mathcal{C}_X$  von einem Objekt  $(Y, p)$  in ein weiteres Objekt  $(Z, q)$  sind Morphismen  $f : Y \rightarrow Z$  in  $\mathcal{C}$  mit  $q \circ f = p$ . Wir nennen sie auch die **Morphismen über  $X$** .

**Definition 2.5.2.** Dual definieren wir die Kategorie  $\mathcal{C}^X$  der **Objekte von  $\mathcal{C}$  unter  $X$**  wie folgt: Objekte von  $\mathcal{C}^X$  sind Morphismen  $p : X \rightarrow Y$  von  $X$  zu einem Objekt von  $\mathcal{C}$  und Morphismen sind was der Leser sich denkt, so daß wir haben  $(\mathcal{C}^\circ)_X = (\mathcal{C}^X)^\circ$ .

*Beispiele 2.5.3.* Zum Beispiel ist die Kategorie der punktierten topologischen Räume  $\text{Top}^*$  die “Kategorie der topologischen Räume unter dem einpunktigen Raum”, und die Kategorie der Erweiterungen eines Körpers  $K$  ist die “Kategorie aller Körper unter  $K$ .”

2.5.4. Wir werden Kategorien auch für andere Bedeutungen mit oberen und unteren Indizes versehen und können nur hoffen, daß aus dem Kontext klar wird, welche Bedeutung jeweils gemeint ist. Zum Beispiel bezeichnet  $\text{Mod}_k$

stets die Kategorie aller  $k$ -Vektorräume und nie die Kategorie aller Objekte einer Kategorie  $\text{Mod}$  über ihrem Objekt  $k$ .

**Definition 2.5.5.** Ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{c_y} & Y \\ c_z \downarrow & & \downarrow a \\ Z & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **kartesisch** oder ein **pull-back-Diagramm** genau dann, wenn es kommutativ ist und  $(W, c_y, c_z)$  ein Produkt ist in der Kategorie  $\mathcal{C}_X$  der Objekte von  $\mathcal{C}$  über  $X$ , wobei wir  $W$  mittels  $b \circ c_z = a \circ c_y$  als Objekt von  $\mathcal{C}_X$  aufzufassen haben. Ausformuliert bedeutet das: Für jedes weitere kommutative Diagramm in  $\mathcal{C}$  der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow a \\ Z & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

gibt es genau einen Morphismus  $u : T \rightarrow W$  mit  $f = c_y \circ u$  und  $g = c_z \circ u$ .

2.5.6. Ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow a \\ Z & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

nennen wir ein **Winkeldiagramm** oder kurz einen **Winkel**. In einer beliebigen Kategorie läßt sich nicht jeder Winkel zu einem kartesischen Diagramm vervollständigen, aber wenn es sich vervollständigen läßt, dann ist diese Vervollständigung als ein Produkt in  $\mathcal{C}_X$  im wesentlichen eindeutig. Wir erlauben uns deshalb den bestimmten Artikel, schreiben

$$W = Y \times_X Z$$

und nennen dieses Objekt **den Rückzug** oder den **pull-back das Faserprodukt** von  $Y$  mit  $Z$  über  $X$ . Diese Terminologie hat den folgenden Hintergrund: Ist  $f : Y \rightarrow X$  eine Abbildung und  $x \in X$  ein Punkt, so nennt man ja sein Urbild  $Y_x = f^{-1}(x)$  auch die Faser von  $f$  über  $x$ . Den pull-back in der Kategorie der Mengen können wir nun verstehen als ein "faserweises Produkt", in der Kategorie der Mengen gilt nämlich

$$Y \times_X Z = \{(y, z) \in Y \times Z \mid a(y) = b(z)\}$$

und insbesondere haben wir  $(Y \times_X Z)_x = Y_x \times Z_x$  für alle  $x \in X$ . Ähnlich erhalten wir auch das Faserprodukt in der Kategorie der topologischen Räume, hierzu müssen wir nur die Menge  $Y \times_X Z$  versehen mit der von der Produkttopologie auf  $Y \times Z$  induzierten Topologie.

*Übung 2.5.7.* Sei in einer Kategorie ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z \end{array}$$

gegeben. Sind die zwei Quadrate kartesisch, so ist auch das einhüllende Rechteck kartesisch, mit den horizontalen Verknüpfungen als horizontalen Pfeilen.

*Übung 2.5.8.* Ist  $i : Z \hookrightarrow X$  die Einbettung eines Teilraums und  $f : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so ist das folgende Diagramm kartesisch in der Kategorie der topologischen Räume:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \hookrightarrow & Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \hookrightarrow & X \end{array}$$

*Übung 2.5.9.* Gegeben zwei kartesische Quadrate ist auch das ‘‘Produktquadrat’’, bei dem an jeder Ecke das Produkt der zugehörigen Objekte aus unseren beiden Ausgangsquadraten steht, ein kartesisches Quadrat, wenn diese vier Produkte alle existieren.

*Übung 2.5.10.* Seien  $X, Z$  Objekte einer Kategorie derart, daß die Produkte  $Z \times X$  und  $X \times X$  existieren. Für jeden Morphismus  $g : Z \rightarrow X$  ist dann das folgende Diagramm mit den Morphismen  $g, g \times \text{id}$  in den Horizontalen und  $(\text{id}, g), \Delta = (\text{id}, \text{id})$  in den Vertikalen kartesisch:

$$\begin{array}{ccc} Z & \rightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z \times X & \rightarrow & X \times X \end{array}$$

**Definition 2.5.11.** Kartesische Diagramme in der opponierten Kategorie heißen **kokartesische Diagramme** oder auch **push-out-Diagramme**. Ausgeschrieben ist ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & & \downarrow c_Y \\ Z & \xrightarrow{c_Z} & W \end{array}$$

also kokartesisch genau dann, wenn es kommutiert und wenn es für jedes andere kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

genau einen Morphismus  $u : W \rightarrow G$  gibt mit  $f = u \circ c_y$  und  $g = u \circ c_z$ . Unsere Eindeutigkeitsaussagen 3.1.6 für kartesische Diagramme gelten entsprechend auch für kokartesische Diagramme. Winkeldiagramme in der opponierten Kategorie nennen wir **Kowinkeldiagramme** oder kurz **Kowinkel**.

*Übung 2.5.12.* Der push-out in der Kategorie der Mengen bzw. der topologischen Räume ist genau die Verklebung aus ??.

*Übung 2.5.13.* Ist in einem kartesischen oder kokartesischen Diagramm ein Ursprungspfeil ein Isomorphismus, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem pull-back bzw. in den push-out.

*Übung 2.5.14.* In der Kategorie der abelschen Gruppen läßt sich jeder Winkel bzw. Kowinkel zu einem kartesischen bzw. kokartesischen Diagramm vervollständigen. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen von zwei parallelen Pfeilen einer eine Surjektion, so auch der andere. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen ein Ursprungspfeil eine Injektion, so auch der gegenüberliegende Pfeil in den push-out. Hinweis: Man argumentiere mit einer expliziten Konstruktion des push-out. Wer spicken will, vergleiche II.4.9.6. Ein allgemeines Argument wird in III.5.7.11 gegeben.

*Übung 2.5.15.* In einem kartesischen Diagramm von Mengen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & W \end{array}$$

gilt für jede Teilmenge  $A \subset Y$  die Gleichheit  $p^{-1}(f(A)) = g(q^{-1}(A))$  von Teilmengen von  $Z$ .

*Ergänzende Übung 2.5.16.* Die algebraisch Gebildeten unter Ihnen mögen sich überlegen, daß in der Kategorie Kring der kommutativen Ringe alle Diagramme der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{q} & B \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{p} & A \otimes_C B \end{array}$$

kokartesisch sind, mit beliebigen Ringhomomorphismen  $C \rightarrow A$  und  $C \rightarrow B$ , der hoffentlich offensichtlichen Multiplikation auf dem Tensorprodukt, und den hoffentlich offensichtlichen Ringhomomorphismen in das Tensorprodukt.

### 3 Beschreibung einiger Fundamentalgruppen

#### 3.1 Kartesische und kokartesische Diagramme

**Definition 3.1.1.** Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{C}$  und ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  definieren wir ganz allgemein die Kategorie  $\mathcal{C}_X$  der **Objekte von  $\mathcal{C}$  über  $X$**  wie folgt: Objekte von  $\mathcal{C}_X$  sind Paare  $(Y, p)$  mit  $Y \in \mathcal{C}$  und  $p \in \mathcal{C}(Y, X)$ , Morphismen in  $\mathcal{C}_X$  von einem Objekt  $(Y, p)$  in ein weiteres Objekt  $(Z, q)$  sind Morphismen  $f : Y \rightarrow Z$  in  $\mathcal{C}$  mit  $q \circ f = p$ . Wir nennen sie auch die **Morphismen über  $X$** .

**Definition 3.1.2.** Dual definieren wir die Kategorie  $\mathcal{C}^X$  der **Objekte von  $\mathcal{C}$  unter  $X$**  wie folgt: Objekte von  $\mathcal{C}^X$  sind Morphismen  $p : X \rightarrow Y$  von  $X$  zu einem Objekt von  $\mathcal{C}$  und Morphismen sind was der Leser sich denkt, so daß wir haben  $(\mathcal{C}^{\text{opp}})_X = (\mathcal{C}^X)^{\text{opp}}$ .

*Beispiele 3.1.3.* Zum Beispiel ist die Kategorie der punktierten topologischen Räume  $\text{Top}^*$  die “Kategorie der topologischen Räume unter dem einpunktigen Raum”, und die Kategorie der Erweiterungen eines Körpers  $K$  ist die “Kategorie aller Körper unter  $K$ .”

3.1.4. Wir werden Kategorien auch für andere Bedeutungen mit oberen und unteren Indizes versehen und können nur hoffen, daß aus dem Kontext klar wird, welche Bedeutung jeweils gemeint ist. Zum Beispiel bezeichnet  $\text{Mod}_k$  stets die Kategorie aller  $k$ -Vektorräume und nie die Kategorie aller Objekte einer Kategorie  $\text{Mod}$  über ihrem Objekt  $k$ .

**Definition 3.1.5.** Ein Diagramm der Gestalt

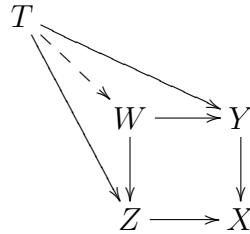
$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{c_y} & Y \\ c_z \downarrow & & \downarrow a \\ Z & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **kartesisch** oder ein **pull-back-Diagramm** genau dann, wenn es kommutativ ist und  $(W, c_y, c_z)$  ein Produkt ist in der Kategorie  $\mathcal{C}_X$  der Objekte von  $\mathcal{C}$  über  $X$ , wobei wir  $W$  mittels  $b \circ c_z = a \circ c_y$  als Objekt von  $\mathcal{C}_X$  aufzufassen haben. Ausformuliert bedeutet das: Für jedes weitere kommutative Diagramm in  $\mathcal{C}$  der Gestalt

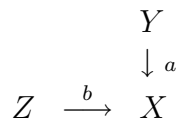
$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow a \\ Z & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$



gibt es genau einen Morphismus  $u : T \rightarrow W$  mit  $f = c_y \circ u$  und  $g = c_z \circ u$ . Man mag diese verschiedenen Daten auch zusammenfassen im Diagramm



3.1.6. Ein Diagramm der Gestalt



nennen wir ein **Winkeldiagramm** oder kurz einen **Winkel**. In einer beliebigen Kategorie läßt sich nicht jeder Winkel zu einem kartesischen Diagramm vervollständigen, aber wenn er sich vervollständigen läßt, dann ist diese Vervollständigung als ein Produkt in  $\mathcal{C}_X$  im wesentlichen eindeutig. Wir erlauben uns deshalb den bestimmten Artikel, schreiben

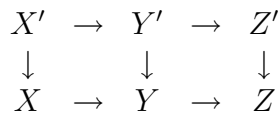
$$W = Y \times_X Z$$

und nennen dieses Objekt den **Rückzug** oder den **pull-back** oder das **Faserprodukt** von  $Y$  mit  $Z$  über  $X$ . Diese Terminologie hat den folgenden Hintergrund: Ist  $f : Y \rightarrow X$  eine Abbildung und  $x \in X$  ein Punkt, so nennt man ja sein Urbild  $Y_x = f^{-1}(x)$  auch die Faser von  $f$  über  $x$ . Den pull-back in der Kategorie der Mengen können wir nun verstehen als ein "faserweises Produkt", in der Kategorie der Mengen gilt nämlich

$$Y \times_X Z = \{(y, z) \in Y \times Z \mid a(y) = b(z)\}$$

und insbesondere haben wir  $(Y \times_X Z)_x = Y_x \times Z_x$  für alle  $x \in X$ . Ähnlich erhalten wir auch das Faserprodukt in der Kategorie der topologischen Räume, hierzu müssen wir nur die Menge  $Y \times_X Z$  versehen mit der von der Produkttopologie auf  $Y \times Z$  induzierten Topologie.

*Übung 3.1.7.* Sei in einer Kategorie ein kommutatives Diagramm der Gestalt



gegeben. Sind die zwei Quadrate kartesisch, so ist auch das einhüllende Rechteck kartesisch, mit den horizontalen Verknüpfungen als horizontalen Pfeilen.

*Übung 3.1.8.* Ist  $i : Z \hookrightarrow X$  die Einbettung eines Teilraums und  $f : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so ist das folgende Diagramm kartesisch in der Kategorie der topologischen Räume:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \hookrightarrow & Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \hookrightarrow & X \end{array}$$

*Übung 3.1.9.* Gegeben zwei kartesische Quadrate ist auch das “Produktquadrat”, bei dem an jeder Ecke das Produkt der zugehörigen Objekte aus unseren beiden Ausgangsquadraten steht, ein kartesisches Quadrat, wenn diese vier Produkte alle existieren.

*Übung 3.1.10.* Seien  $X, Z$  Objekte einer Kategorie derart, daß die Produkte  $Z \times X$  und  $X \times X$  existieren. Für jeden Morphismus  $g : Z \rightarrow X$  ist dann das folgende Diagramm mit den Morphismen  $g, g \times \text{id}$  in den Horizontalen und  $(\text{id}, g), \Delta = (\text{id}, \text{id})$  in den Vertikalen kartesisch:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & X \\ (\text{id}, g) \downarrow & & \downarrow \Delta \\ Z \times X & \xrightarrow{g \times \text{id}} & X \times X \end{array}$$

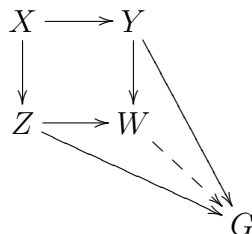
**Definition 3.1.11.** Kartesische Diagramme in der opponierten Kategorie heißen **kokartesische Diagramme** oder auch **push-out-Diagramme**. Ausgeschrieben ist ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & & \downarrow c_y \\ Z & \xrightarrow{c_z} & W \end{array}$$

also kokartesisch genau dann, wenn es kommutiert und wenn es für jedes andere kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ b \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

genau einen Morphismus  $u : W \rightarrow G$  gibt mit  $f = u \circ c_y$  und  $g = u \circ c_z$ . Man mag diese verschiedenen Daten auch zusammenfassen im Diagramm



Unsere Eindeutigkeitsaussagen 3.1.6 für kartesische Diagramme gelten entsprechend auch für kokartesische Diagramme. Winkeldiagramme in der opponierten Kategorie nennen wir **Kowinkeldiagramme** oder kurz **Kowinkel**.

*Übung 3.1.12.* Der push-out in der Kategorie der Mengen bzw. der topologischen Räume ist genau die Verklebung aus ??.

*Übung 3.1.13.* Ist in einem kartesischen oder kokartesischen Diagramm ein Ursprungspfeil ein Isomorphismus, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem pull-back bzw. in den push-out.

*Übung 3.1.14.* In der Kategorie der abelschen Gruppen läßt sich jeder Winkel bzw. Kowinkel zu einem kartesischen bzw. kokartesischen Diagramm vervollständigen. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen von zwei parallelen Pfeilen einer eine Surjektion, so auch der andere. Ist in einem kokartesischen Diagramm von abelschen Gruppen ein Ursprungspfeil eine Injektion, so auch der gegenüberliegende Pfeil in den push-out. Hinweis: Man argumentiere mit einer expliziten Konstruktion des push-out. Wer spicken will, vergleiche II.4.9.6. Ein allgemeines Argument wird in III.5.7.11 gegeben.

*Übung 3.1.15.* In einem kartesischen Diagramm von Mengen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{p} & W \end{array}$$

gilt für jede Teilmenge  $A \subset Y$  die Gleichheit  $p^{-1}(f(A)) = g(q^{-1}(A))$  von Teilmengen von  $Z$ .

*Ergänzende Übung 3.1.16.* Die algebraisch Gebildeten unter Ihnen mögen sich überlegen, daß in der Kategorie Kring der kommutativen Ringe alle Diagramme der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{q} & B \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{p} & A \otimes_C B \end{array}$$

kokartesisch sind, mit beliebigen Ringhomomorphismen  $C \rightarrow A$  und  $C \rightarrow B$ , der hoffentlich offensichtlichen Multiplikation auf dem Tensorprodukt, und den hoffentlich offensichtlichen Ringhomomorphismen in das Tensorprodukt.

### 3.2 Der Satz von Seifert und van Kampen

**Satz 3.2.1 (Seifert-van Kampen).** *Sei ein topologischer Raum  $X$  die Vereinigung zweier offener Teilmengen  $U, V \subseteq X$ . Ist der Schnitt  $U \cap V$  wegzusammenhängend, so ist für jeden Basispunkt  $x \in U \cap V$  das folgende Diagramm von Gruppen kokartesisch:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x) & \rightarrow & \pi_1(V, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U, x) & \rightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

3.2.2. Einen meines Erachtens besonders transparenten Beweis im Fall lokal zusammenziehbarer Räume werden wir später im Rahmen der Überlagerungstheorie in 4.8.6 kennenlernen.

*Beweis.* Wir überlegen uns zuerst, daß  $\pi_1(X, x)$  erzeugt wird von den Bildern von  $\pi_1(U, x)$  und  $\pi_1(V, x)$ . In der Tat kann man für jeden Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$  eine Unterteilung  $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r = 1$  des Einheitsintervalls finden derart, daß gilt  $\gamma[a_{i-1}, a_i] \subset U$  für gerades  $i$  und  $\gamma[a_{i-1}, a_i] \subset V$  für ungerades  $i$ . Das folgt etwa aus dem Überdeckungssatz von Lebesgue ?? angewandt auf die offene Überdeckung des Kompaktums  $[0, 1]$  durch  $\gamma^{-1}(U)$  und  $\gamma^{-1}(V)$ . Für jedes  $i$  finden wir dann weiter einen Weg  $\beta_i$  in  $U \cap V$  von  $x$  nach  $\gamma(a_i)$ . Wählen wir nun  $v_i : [0, 1] \rightarrow [a_{i-1}, a_i]$  stetig mit  $v_i(0) = a_{i-1}$ ,  $v_i(1) = a_i$  und bezeichnen mit  $\gamma_i = \gamma \circ v_i$  das “ $i$ -te Stück von  $\gamma$ ”, so gilt

$$[\gamma] = [\beta_r^{-1} * \gamma_r * \beta_{r-1}] \dots [\beta_1^{-1} * \gamma_1 * \beta_0]$$

und  $\beta_i^{-1} * \gamma_i * \beta_{i-1}$  liegt in  $\Omega(U, x)$  bzw.  $\Omega(V, x)$  für gerades bzw. ungerades  $i$ . Also wird  $\pi_1(X, x)$  erzeugt von den Bildern von  $\pi_1(U, x)$  und  $\pi_1(V, x)$ . Für den Rest des Beweises verwenden wir eine andere Schreibweise und setzen  $U = U_+$  und  $V = U_-$ . Sei nun in der Kategorie der Gruppen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_+ \cap U_-, x) & \longrightarrow & \pi_1(U_-, x) \\ \downarrow & & \downarrow f_- \\ \pi_1(U_+, x) & \xrightarrow{f_+} & G \end{array}$$

gegeben. Für  $\sigma \in \{+, -\}$  bezeichnen wir mit  $\pi_\sigma$  den von der Einbettung induzierten Homomorphismus  $\pi_\sigma : \pi_1(U_\sigma, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ . Da die Bilder der Homomorphismen  $\pi_\sigma$  nach dem vorhergehenden bereits  $\pi_1(X, x)$  erzeugen, gibt es höchstens einen Gruppenhomomorphismus  $u : \pi_1(X, x) \rightarrow G$  mit  $f_\sigma = u \circ \pi_\sigma$  für  $\sigma \in \{+, -\}$ . Es bleibt, die Existenz von  $u$  zu zeigen. Wir brauchen dazu sorgfältige Notationen und schreiben  $[a]_+$ ,  $[a]_-$ ,  $[a]$  für die

Homotopieklasse mit festen Endpunkten von einem Weg  $a$  in  $U_+$ ,  $U_-$  oder  $X$ . Nach dem ersten Teil des Beweises läßt sich jedes  $c \in \pi_1(X, x)$  darstellen in der Form  $c = [a_r] \dots [a_1]$  mit  $a_i \in \Omega(U_{\varepsilon_i}, x)$  für geeignetes  $\varepsilon : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{+, -\}$ ,  $i \mapsto \varepsilon_i$ . Wir würden natürlich gern

$$u(c) := f_{\varepsilon_r}([a_r]_{\varepsilon_r}) \dots f_{\varepsilon_1}([a_1]_{\varepsilon_1})$$

setzen. Das Problem besteht darin zu zeigen, daß jede andere Darstellung  $c = [b_s] \dots [b_1]$  mit einem möglichen  $\eta : \{1, \dots, s\} \rightarrow \{+, -\}$  dasselbe  $u(c)$  liefern muß. Betrachten wir also die Menge  $\mathcal{F}$  aller Folgen  $(a_1, \varepsilon_1), (a_2, \varepsilon_2), \dots, (a_r, \varepsilon_r)$  mit  $\varepsilon_i \in \{+, -\}$  und  $a_i \in \Omega(U_{\varepsilon_i}, x)$  für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$  und beliebigen  $r \in \mathbb{N}$  sowie die Abbildung

$$\tilde{u} : \mathcal{F} \rightarrow G, \quad ((a_1, \varepsilon_1), \dots, (a_r, \varepsilon_r)) \mapsto f_{\varepsilon_1}(a_1) \dots f_{\varepsilon_r}(a_r)$$

In  $\mathcal{F}$  betrachten wir die Teilmenge  $\mathcal{F}_c$  aller Folgen mit  $c = [a_r] \dots [a_1]$ . Wir werden uns überzeugen, daß man von jeder Folge aus  $\mathcal{F}_c$  zu jeder anderen Folge aus  $\mathcal{F}_c$  übergehen kann in endlich vielen Schritten der folgenden vier Arten:

1. Man ersetzt  $(a_i, \varepsilon_i)$  durch einen anderen Vertreter  $(\tilde{a}_i, \varepsilon_i)$  seiner Homotopieklasse,  $[a_i]_{\varepsilon_i} = [\tilde{a}_i]_{\varepsilon_i}$ .
2. Falls  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$  ersetzt man die Folgenglieder  $(a_i, \varepsilon_i), (a_{i+1}, \varepsilon_{i+1})$  durch ihre Verknüpfung  $(a_{i+1} * a_i, \varepsilon_i)$ . Dieser Schritt führt also zu einer um eins kürzeren Folge.
3. Man geht Schritt 2 rückwärts.
4. Man ersetzt den Weg  $(a_i, \varepsilon_i)$  durch  $(a_i, -\varepsilon_i)$ , falls das Bild von  $a_i$  schon in  $U_+ \cap U_-$  liegt.

Haben wir das gezeigt, so folgt, daß  $\tilde{u}$  konstant ist auf  $\mathcal{F}_c$ , denn es ist sicher gleich auf je zwei Elementen von  $\mathcal{F}_c$ , die nur einen Schritt auseinander sind. Damit ist  $u(c)$  wohldefiniert und unser Satz ist bewiesen. Seien also  $(a_i, \varepsilon_i)_{i=1}^r$  und  $(b_j, \eta_j)_{j=1}^s$  zwei Folgen aus  $\mathcal{F}_c$ . Das bedeutet insbesondere, daß es in  $X$  eine Homotopie mit festen Endpunkten gibt

$$h : (\dots ((a_r * \dots a_3) * a_2) * a_1) \xrightarrow{\sim} (\dots ((b_s * \dots b_3) * b_2) * b_1)$$

Unterteilen wir  $[0, 1] \times [0, 1]$  in kleine Schachfelder der Seitenlänge  $1/N$ , so wird nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue ?? für hinreichend großes  $N$  jedes abgeschlossene Schachfeld unter  $H(t, \tau) = h_\tau(t)$  ganz nach  $U_+$  oder ganz nach  $U_-$  abgebildet. Für jeden Punkt  $p$ , der eine Ecke mindestens eines

Feldes ist, wählen wir einen Weg  $\gamma_p$  von  $x$  nach  $H(p)$ , und zwar so, daß für  $H(p)$  in  $U_+$ ,  $U_-$ ,  $U_+ \cap U_-$  oder  $\{x\}$  auch der ganze Weg  $\gamma_p$  in dieser Menge verläuft. Sind  $p, q$  benachbarte Ecken eines Schachfeldes, so bezeichnen wir mit  $d_{p,q} : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  die affine Abbildung mit  $d_{p,q}(0) = q$ ,  $d_{p,q}(1) = p$  und definieren  $\langle p, q \rangle \in \Omega(X, x)$  als

$$\langle p, q \rangle = \gamma_p^{-1} * (H \circ d_{p,q}) * \gamma_q$$

Ist  $p_0, p_1, \dots, p_{2N}$  eine Folge von Ecken, die man bei einer geeigneten Wanderung von  $p_0 = (0, 0)$  bis  $p_{2N} = (1, 1)$  entlang der Kanten der Felder der Reihe nach aufsucht, und sind Vorzeichen  $\sigma_i \in \{+, -\}$  gegeben derart, daß die ganze Kante  $[p_{i-1}, p_i]$  unter  $H$  nach  $U_{\sigma_i}$  abgebildet wird, so ist

$$(\langle p_{2N}, p_{2N-1} \rangle, \sigma_{2N}) \dots (\langle p_1, p_0 \rangle, \sigma_1)$$

eine Folge aus  $\mathcal{F}_c$ . Folgen dieser Art nennen wir "Schachbrettfolgen". Es ist nicht schwer einzusehen, daß man zwischen je zwei Schachbrettfolgen in endlich vielen Schritten der vier oben beschriebenen Arten hin- und hergehen kann. Der wesentliche Punkt hierbei ist es, zu prüfen, daß für ein von  $H$  ganz nach  $U_\sigma$  abgebildetes Schachfeld mit Ecken

$$\begin{pmatrix} y & z \\ x & w \end{pmatrix}$$

die Wege  $\langle z, w \rangle * \langle w, x \rangle$  und  $\langle z, y \rangle * \langle y, x \rangle$  in  $U_\sigma$  homotop sind. In der Tat folgt aber aus 1.2.4 sofort  $d_{z,w} * d_{w,x} \cong d_{z,y} * d_{y,x}$  in  $\Omega(\text{Schachfeld}, z, x)$ . Nehmen wir nun zusätzlich  $N = 2^K$  an mit  $K \geq r, s$  und betrachten die Folge  $p_0^\downarrow, p_1^\downarrow, \dots, p_{2N}^\downarrow$  der Ecken, die man bei einer Wanderung längs der unteren und der rechten Kante des ganzen Schachbretts der Reihe nach aufsucht, so ergibt sich mit etwas Nachdenken

$$[a_1]_{\varepsilon_1} = [\langle p_{N/2}^\downarrow, p_{N/2-1}^\downarrow \rangle * \dots * \langle p_1^\downarrow, p_0^\downarrow \rangle]_{\varepsilon_1}$$

und allgemeiner

$$[a_i]_{\varepsilon_i} = [\langle p_{\alpha_i}^\downarrow, p_{\alpha_i-1}^\downarrow \rangle * \dots * \langle p_{\alpha_{i-1}+1}^\downarrow, p_{\alpha_{i-1}}^\downarrow \rangle]_{\varepsilon_i}$$

für geeignete  $N = \alpha_r > \dots > \alpha_2 > \alpha_1 = N/2 > \alpha_0 = 0$ . Für  $i > N$  sind die Wege  $\langle p_i^\downarrow, p_{i-1}^\downarrow \rangle$  eh konstant, wir können also in endlich vielen Schritten von unserer Ausgangsfolge  $(a_i, \varepsilon_i)_{i=1}^r$  zu einer Schachbrettfolge der Gestalt  $(\langle p_j^\downarrow, p_{j-1}^\downarrow \rangle, \sigma_j)_{j=1}^{2N}$  gelangen. Ebenso gelangen wir aber auch in endlich vielen Schritten von  $(b_j, \eta_j)_{j=1}^s$  zu einer Schachbrettfolge, und wir wissen ja schon, daß wir zwischen je zwei Schachbrettfolgen in endlich vielen Schritten hin- und hergehen können.  $\square$

*Übung 3.2.3.* Ist  $M$  eine zusammenhängende  $d$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $d \geq 3$  und  $E \subset M$  eine endliche Teilmenge, so induziert die Einbettung  $M \setminus E \hookrightarrow M$  einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen.

*Übung 3.2.4.* Man zeige, daß die Fundamentalgruppe des Komplements einer Kreislinie im  $\mathbb{R}^3$  isomorph ist zu  $\mathbb{Z}$ . Hinweis: Die Fundamentalgruppe ändert sich nach 3.2.3 nicht, wenn wir den  $\mathbb{R}^3$  durch Hinzufügen eines Punktes zur  $S^3$  machen. Dann kann man 1.6.9 anwenden.

### 3.3 Freie Gruppen

3.3.1 (**Freie Monoide**). Gegeben eine Menge  $X$  definieren wir ein Monoid  $\text{Mon}^\uparrow X$ , das **freie Monoid** über  $X$ , wie folgt: Für  $n = 0, 1, 2, \dots$  betrachten wir zunächst die Mengen  $\mathcal{W}_n X = \{a : \{1, \dots, n\} \rightarrow X\}$ . Wir schreiben  $a(i) = a_i$  und interpretieren Elemente  $a \in \mathcal{W}_n X$  als endliche Wörter  $a_1 a_2 \dots a_n$  aus Elementen von  $X$ . Wir haben also

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 X &\text{ besteht nur aus einem Wort, dem "leeren" Wort, notiert } e; \\ \mathcal{W}_1 X &= \{x \mid x \in X\}; \\ \mathcal{W}_2 X &= \{xy \mid x, y \in X\} \text{ und so weiter.} \end{aligned}$$

Wir betrachten dann die "Menge aller Wörter"  $\mathcal{W}X = \bigsqcup_n \mathcal{W}_n X$  und erklären darauf eine Verknüpfung, das "Hintereinanderschreiben von Wörtern"

$$\begin{aligned} \mathcal{W}X \times \mathcal{W}X &\rightarrow \mathcal{W}X \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

Diese Verknüpfung ist offensichtlich assoziativ, die Längen von Wörtern addieren sich beim Verknüpfen, und das leere Wort ist ein neutrales Element. Dieses Monoid zusammen mit der offensichtlichen Einbettung  $\text{can} : X \rightarrow \mathcal{W}X$  nennen wir das **freie Monoid über  $X$**  und notieren es  $\text{Mon}^\uparrow X$ .

**Lemma 3.3.2 (Universelle Eigenschaft freier Monoide).** *Sei  $X$  eine Menge und bezeichne  $\text{can} : X \rightarrow \text{Mon}^\uparrow X$ ,  $x \mapsto x$  die **kanonische Abbildung** von  $X$  in das freie Monoid über  $X$ . Ist  $M$  ein Monoid und  $\varphi : X \rightarrow M$  eine Abbildung, so gibt es genau einen Monoidhomomorphismus  $\tilde{\varphi} : \text{Mon}^\uparrow X \rightarrow M$  mit  $\tilde{\varphi} \circ \text{can} = \varphi$ , im Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{can}} & \text{Mon}^\uparrow X \\ & \searrow \varphi & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & M \end{array}$$

*Beweis.* Dem Leser überlassen. □

*Bemerkung 3.3.3.* Gegeben eine einelementige Menge  $X = \{x\}$  und das additive Monoid  $\mathbb{N}$  liefert die Abbildung  $x \mapsto 1$  einen Isomorphismus von Monoiden  $\text{Mon}^\uparrow\{x\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ .

**Definition 3.3.4.** Gegeben eine Menge  $X$  definieren wir eine Gruppe  $\text{Grp}^\uparrow X$ , die **freie Gruppe** über  $X$ , wie folgt: Wir beginnen mit dem freien Monoid

$$\mathcal{F}X = \text{Mon}^\uparrow(X \times \{+1, -1\})$$

über dem kartesischen Produkt  $X \times \{+1, -1\}$ . Wir interpretieren die Elemente dieses Monoids als endliche Wörter  $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n}$  mit  $a_i \in X$  und  $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ . Ein typisches Element unseres Monoids wäre etwa das Wort  $xyx^{-1}xy^{-1}$  mit  $x, y \in X$ . Sei nun  $\sim$  die kleinste Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{F}X$  derart, daß gilt:

1.  $xx^{-1} \sim e \sim x^{-1}x \quad \forall x \in X$ ;
2.  $a \sim b \Rightarrow ca \sim cb$  und  $ac \sim bc \quad \forall a, b, c \in \mathcal{F}X$ .

Bezeichne  $\text{Grp}^\uparrow X = \mathcal{F}X / \sim$  die Menge der Äquivalenzklassen. Die Klasse von  $a \in \mathcal{F}X$  heiße  $[a]$ . Offensichtlich definiert die Verknüpfung auf  $\mathcal{F}X$  eine Verknüpfung auf  $\text{Grp}^\uparrow X$ .

**Satz 3.3.5.** *Mit dieser Verknüpfung ist  $\text{Grp}^\uparrow X$  eine Gruppe, die sogenannte freie Gruppe über der Menge  $X$ .*

*Beweis.* Das Assoziativgesetz gilt schon in  $\mathcal{F}X$ , also erst recht in  $\text{Grp}^\uparrow X$ . Das leere Wort  $e$  ist schon neutral in  $\mathcal{F}X$ , also ist erst recht  $[e]$  neutral in  $\text{Grp}^\uparrow X$ . Um die Existenz von Inversen nachzuweisen, betrachte man zu  $a = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n}$  das Wort  $b = a_n^{-\varepsilon_n} \dots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1}$  oder in Formeln zu  $a : \{1, \dots, n\} \rightarrow (X \times \{+1, -1\})$  das Wort  $b$  gegeben durch

$$b(i) = (a_{n-i}, -\varepsilon_{n-i})$$

Ist zum Beispiel  $a = xyx^{-1}yxx$ , so nehmen wir  $b = x^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}$ . Dann gilt offensichtlich  $[b][a] = [a][b] = [e]$ . □

**Lemma 3.3.6 (Universelle Eigenschaft freier Gruppen).** *Sei  $X$  eine Menge und bezeichne  $\text{can} : X \rightarrow \text{Grp}^\uparrow X, x \mapsto [x]$  die **kanonische Abbildung** von  $X$  in die freie Gruppe über  $X$ . Ist  $G$  eine Gruppe und  $\varphi : X \rightarrow G$  eine Abbildung, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus  $\tilde{\varphi} : \text{Grp}^\uparrow X \rightarrow G$  mit  $\tilde{\varphi} \circ \text{can} = \varphi$ , im Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{can}} & \text{Grp}^\uparrow X \\ & \searrow \varphi & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & G \end{array}$$



*Beweis.* Man definiere  $\hat{\varphi} : \mathcal{F}X \rightarrow G$  durch

$$\hat{\varphi}(a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}) = \varphi(a_1)^{\varepsilon_1} \dots \varphi(a_n)^{\varepsilon_n}$$

Betrachten wir auf  $\mathcal{F}X$  die Äquivalenz-Relation  $a \sim_{\varphi} b \Leftrightarrow \hat{\varphi}(a) = \hat{\varphi}(b)$ , so erfüllt  $\sim_{\varphi}$  sicher die Bedingungen 1 und 2 an unsere Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{F}X$  aus 3.3.4. Also ist  $\hat{\varphi}$  konstant auf den Äquivalenzklassen zu  $\sim$  und definiert eine Abbildung  $\tilde{\varphi} : \text{Grp}^{\uparrow} X \rightarrow G$  mit  $\tilde{\varphi}([a]) = \hat{\varphi}(a)$ . Damit ist die Existenz von  $\tilde{\varphi}$  gezeigt. Die Eindeutigkeit ist klar.  $\square$

3.3.7. Die Notation  $\text{Grp}^{\uparrow} X$  wird in 4.9.6 verallgemeinert auf beliebige Kategorien  $\mathcal{C}$  mit einem ausgezeichneten Funktor in die Kategorie der Mengen.

*Beispiel 3.3.8.* Die freie Gruppe über der leeren Menge besteht nur aus dem neutralen Element. Die freie Gruppe über einer einelementigen Menge ist isomorph zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen. Ist genauer  $X = \{x\}$  eine einelementige Menge, so ist der Gruppenhomomorphismus  $\text{Grp}^{\uparrow} X \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $[x] \mapsto 1$  ein Isomorphismus.

*Übung 3.3.9.* Man zeige, daß jedes Element unserer freien Gruppe  $\text{Grp}^{\uparrow} X$  genau einen Repräsentanten kürzester Länge in  $\mathcal{F}X$  hat, und daß diese Repräsentanten genau die “unkürzbaren Worte” aus  $\mathcal{F}X$  sind. Hinweis: Man konstruiere eine Operation der Gruppe  $\text{Grp}^{\uparrow} X$  auf der Menge aller unkürzbaren Worte.

*Übung 3.3.10.* Jede Abbildung von Mengen  $\varphi : X \rightarrow Y$  setzt sich auf genau eine Weise fort zu einer Abbildung von Gruppen  $\text{Grp}^{\uparrow} X \rightarrow \text{Grp}^{\uparrow} Y$ , und unser  $\text{Grp}^{\uparrow}$  ist so in natürlicher Weise ein Funktor von den Mengen in die Gruppen. Man zeige, daß dieser Funktor  $\text{Grp}^{\uparrow}$  kokartesische Diagramme von Mengen zu kokarteschen Diagrammen von Gruppen macht. Das wird später zu 4.9.25 verallgemeinert. Sind insbesondere  $X$  und  $Y$  zwei Mengen, so ist das folgende Diagramm kokartesisch in der Kategorie der Gruppen:

$$\begin{array}{ccc} \text{Grp}^{\uparrow}(X \cap Y) & \rightarrow & \text{Grp}^{\uparrow} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grp}^{\uparrow} Y & \rightarrow & \text{Grp}^{\uparrow}(X \cup Y) \end{array}$$

**Korollar 3.3.11.** *Ist  $I \subset \mathbb{C}$  eine endliche Teilmenge, so gibt es für jeden Basispunkt  $*$  einen (unkanonischen) Isomorphismus zwischen der Fundamentalgruppe des Komplements von  $I$  und der freien Gruppe über  $I$ , in Formeln*

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus I, *) \cong \text{Grp}^{\uparrow} I$$



Ein geschlossener nicht zusammenziehbarer Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene. Denken wir uns das Mittelkreuz als Basispunkt und bezeichnet  $\alpha$  bzw.  $\beta$  in der Fundamentalgruppe das Umrunden gegen den Uhrzeigersinn von  $a$  bzw.  $b$ , so ist unser Fundamentalgruppe nach [3.3.11](#) frei erzeugt von  $\alpha$  und  $\beta$  und unser Weg repräsentiert das Element  $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$  in der Fundamentalgruppe.

*Beweis.* Nach 1.6.6 dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, es sei  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Wir wenden nun den Satz von Seifert-van Kampen an mit  $U = \{z \in \mathbb{C} \setminus I \mid \operatorname{Re} z < n\}$  und  $V = \{z \in \mathbb{C} \setminus I \mid \operatorname{Re} z > n - 1\}$  und erhalten den Satz mit vollständiger Induktion aus der vorhergehenden Übung 3.3.10.  $\square$

*Übung 3.3.12.* Man zeige, daß wir einen Isomorphismus zwischen der freien Gruppe über einer endlichen Menge  $I$  und der Fundamentalgruppe der Einpunktverbindung  $\bigvee_{i \in I} S^1$  von Kopien der punktierten Räume  $(S^1, 1)$  erhalten, wenn wir jedem  $i \in I$  das “einfache Durchlaufen der  $i$ -ten Kreislinie” zuordnen.

*Übung 3.3.13.* Die Fundamentalgruppe des Komplements zweier “nicht ineinander verschlungener” Kreislinien in  $\mathbb{R}^3$  ist isomorph zur freien Gruppe in zwei Erzeugern. Hinweis: 3.2.4. Die Fundamentalgruppe des Komplements von zwei “ineinander verschlungenen” Kreislinien in  $\mathbb{R}^3$  ist isomorph zur freien abelschen Gruppe in zwei Erzeugern. Hinweis:  $\mathbb{R}^3$  zu  $S^3$  ergänzen, 1.6.9 anwenden.

*Übung 3.3.14.* Man bestimme die Fundamentalgruppe des Komplements einer Acht im  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.4 Simplicialkomplexe und triangulierbare Flächen

3.4.1. Ist  $V$  ein reeller Raum und  $M \subset V$  eine Teilmenge, so definiert man die konvexe Hülle von  $M$  wie in ?? als den Schnitt aller konvexen Teilmengen von  $V$ , die  $M$  umfassen. Die konvexe Hülle der leeren Menge ist die leere Menge. Explizit wird die konvexe Hülle einer nichtleeren Menge im Fall eines Vektorraums gegeben durch die Vorschrift

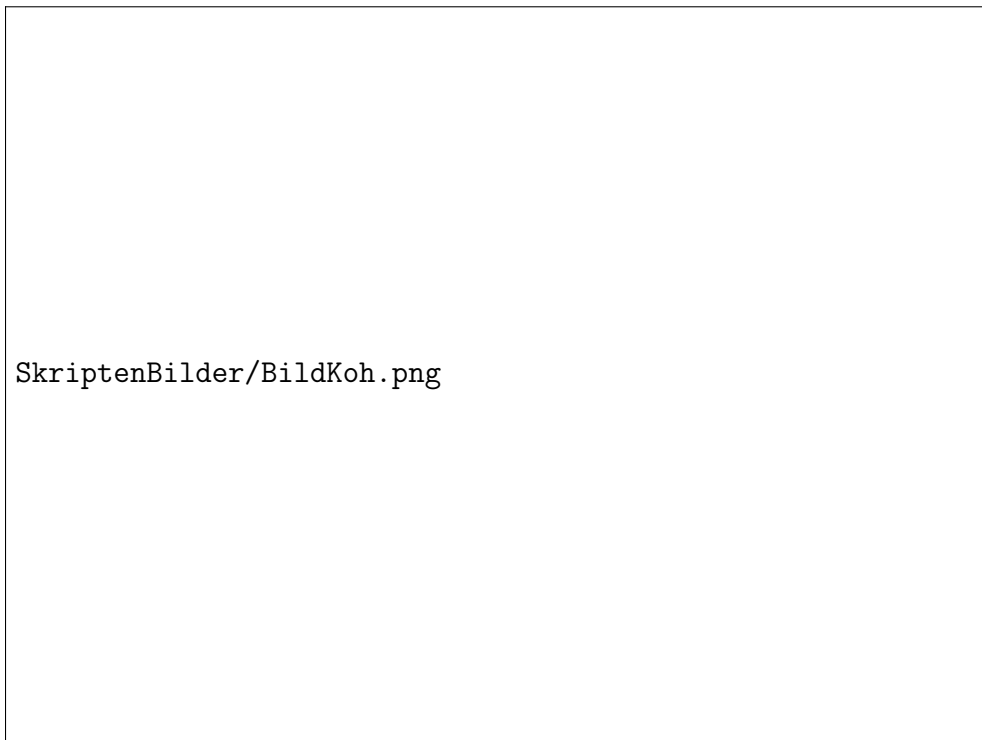
$$\left\{ \sum_{i=0}^n t_i p_i \mid n \geq 0, p_i \in M, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

Im Fall eines affinen Raums gilt dieselbe Formel, wenn man die Summe interpretiert als  $p_0 + \sum_{i=1}^n t_i(p_i - p_0)$ .

**Definition 3.4.2.** Punkte  $p_0, \dots, p_n$  in einem reellen Raum heißen **affin unabhängig** genau dann, wenn es keinen  $(n-1)$ -dimensionalen affinen Teilraum gibt, der sie alle enthält. Dann bezeichnet man ihre konvexe Hülle auch mit

$$\Delta(p_0, \dots, p_n)$$

und nennt sie den **vollen Simplex** mit Ecken  $p_0, \dots, p_n$ .



Eine endliche Teilmenge der Ebene, dargestellt durch fette Punkte, und ihre konvexe Hülle, dargestellt als schraffierter Bereich.

*Beispiele 3.4.3.* Wir vereinbaren  $\Delta(\emptyset) = \emptyset$ . Es gilt  $\Delta(p) = \{p\}$ . Zwei Punkte  $p, q$  sind affin unabhängig genau dann, wenn sie verschieden sind, und in diesem Fall ist  $\Delta(p, q)$  das “abgeschlossene Streckenstück zwischen  $p$  und  $q$ ”. Drei Punkte  $p, q, r$  sind affin unabhängig genau dann, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen, und in diesem Fall ist  $\Delta(p, q, r)$  die “abgeschlossene Fläche des Dreiecks mit Ecken  $p, q$  und  $r$ ”.

3.4.4. Die Bezeichnung “Simplex” kann wohl zurückgeführt werden auf denselben Wortstamm wie “simpel”. In jedem Fall werden volle Simplizes verwendet als einfachste Grundbausteine bei der Konstruktion komplizierterer Räume. Die Konstruktionsvorschrift ist dabei ein rein kombinatorisches Datum, das wir gleich definieren und einen “Simplizialkomplex” nennen werden. Den zugehörigen topologischen Raum nennen wir dann den zugehörigen “Polyeder”.


**Definition 3.4.5.** Ein **Simplizialkomplex**  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ist eine Menge  $E$  mitsamt einem System  $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$  von endlichen Teilmengen von  $E$ , das unter dem Bilden von Teilmengen stabil ist und die leere Menge sowie alle einelementigen Teilmengen von  $E$  enthält. Wir nennen die Elemente von  $E$  die **Ecken** und die Elemente von  $\mathcal{K}$  die **Simplizes** unseres Simplizialkomplexes. Die Simplizes der Kardinalität  $(n + 1)$  nennen wir  **$n$ -Simplizes** und die Menge aller  $n$ -Simplizes notieren wir  $\mathcal{K}_n$ . Wir identifizieren oft stillschweigend die Menge  $E$  der Ecken mit der Menge  $\mathcal{K}_0$  der 0-Simplizes. Wenn in der Literatur von einem Simplizialkomplex die Rede ist, ist allerdings auch oft ein “abstrakter” Simplizialkomplex im Sinne von Übung 3.4.16 gemeint.

*Beispiel 3.4.6.* Für jede Menge  $E$  ist das System aller ihrer endlichen Teilmengen ein Simplizialkomplex. Insbesondere gilt das auch für  $E = \emptyset$ . In diesem Fall besitzt unser Simplizialkomplex als einzigen Simplex die leere Menge, einen  $(-1)$ -Simplex. Auch im allgemeinen besitzt jeder Simplizialkomplex genau einen  $(-1)$ -Simplex.

**Definition 3.4.7.** Wir ordnen jedem Simplizialkomplex  $(E, \mathcal{K})$  einen topologischen Raum  $\Delta(\mathcal{K})$  zu, den wir seinen **Polyeder** nennen. Als zugrundeliegende Menge nehmen wir

$$\Delta(\mathcal{K}) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \begin{array}{l} \text{Es gibt einen Simplex } \sigma \in \mathcal{K} \text{ mit } (\text{supp } f) = \sigma \\ \text{und es gilt } \sum_{e \in E} f(e) = 1 \end{array} \right\}$$

mit der üblichen Notation  $\text{supp } f = \{e \in E \mid f(e) \neq 0\}$  für den Träger oder englisch und französisch “support” von  $f$ . Diese Menge ist enthalten im freien Vektorraum  $\mathbb{R}E$  über  $E$  aller Abbildungen  $E \rightarrow \mathbb{R}$  mit endlichem Träger. Für alle  $\sigma \in \mathcal{K}$  betrachten wir nun die Teilmenge  $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$  aller  $f$  mit Träger in  $\sigma$ . Bezeichnen wir für  $e \in E$  mit  $\tilde{e} \in \mathbb{R}E$  das zugehörige Element



SkriptenBilder/BildSiKK.png

Versuch der graphischen Darstellung des Polyeders eines  
Simplizialkomplexes mit acht Ecken  $E = \{a, b, \dots, h\}$  und einem 3-Simplex  
 $\{a, b, c, d\}$ , sechs 2-Simplizes  $\{a, b, c\}$ ,  $\{a, b, d\}$ ,  $\{a, c, d\}$ ,  $\{b, c, d\}$ ,  $\{b, d, e\}$ ,  
 $\{f, g, h\}$ , und dreizehn 1-Simplizes.

der Standardbasis und besteht  $\sigma$  aus den  $n + 1$  Ecken  $e_0, \dots, e_n \in E$ , so ist  $\Delta(\sigma)$  gerade die konvexe Hülle der  $\tilde{e}_i$ , in Formeln

$$\Delta(\sigma) = \Delta(\tilde{e}_0, \dots, \tilde{e}_n)$$

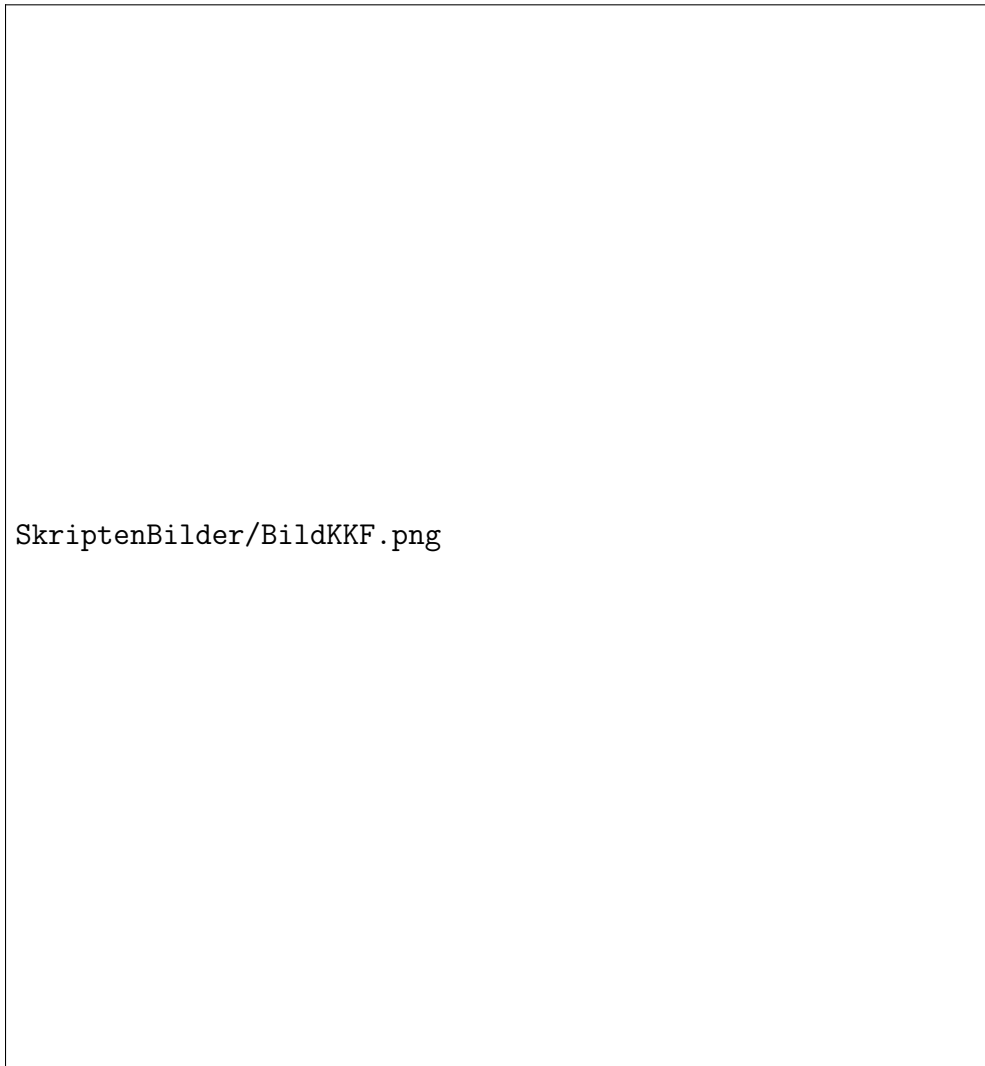
Unser Polyeder ist die Vereinigung aller dieser vollen Simplizes. Ist  $E$  endlich, so nehmen wir als Topologie auf  $\Delta(\mathcal{K})$  schlicht die Topologie, die induziert wird von der kanonischen Topologie auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $\mathbb{R}E$ . Im allgemeinen verstehen wir  $\Delta(\mathcal{K})$  mit der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$  von Polyedern endlicher Unterkomplexe  $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$  oder gleichbedeutend der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$  der vollen Simplizes zu  $\sigma \in \mathcal{K}$ . In Übung 3.4.15 wird erklärt, warum wir unsere Menge nicht mit der Kofinaltopologie zur Familie der Auswertungen an allen Ecken  $E$  unseres Komplexes verstehen.

3.4.8. Ein grundlegendes und weitgehend ungelöstes Problem der Topologie ist die Klassifikation aller endlichen Polyeder bis auf Homotopie, siehe zum Beispiel den Artikel von Baues in [Jam95].

3.4.9. Wir können den Polyeder  $\Delta(\mathcal{K})$  eines Simplizialkomplexes  $(E, \mathcal{K})$  oft auch in Vektorräumen  $V$  einer Dimension  $\dim V < |E|$  realisieren. Ist genauer  $E \rightarrow V, e \mapsto \bar{e}$  irgendeine Abbildung der Ecken unseres Simplizialkomplexes in einen reellen Vektorraum  $V$ , so gibt es genau eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}E \rightarrow V$  mit  $\tilde{e} \mapsto \bar{e}$ . Ist diese Abbildung darüber hinaus injektiv auf  $\Delta(\mathcal{K})$  und ist unser Vektorraum endlichdimensional und unser Simplizialkomplex endlich, so induziert unsere Abbildung nach ?? einen Homöomorphismus von unserem Polyeder mit seinem Bild. Notwendig und hinreichend für die Injektivität ist hier, daß (1) für jeden Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}$  seine Bildmenge  $\bar{\sigma} \subset V$  affin unabhängig ist in  $V$  und daß (2) für je zwei Simplizes  $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$  für die vollen Simplizes  $\Delta(\bar{\sigma}) \subset V$  gilt  $\Delta(\bar{\sigma}) \cap \Delta(\bar{\tau}) = \Delta(\overline{\sigma \cap \tau})$ . Unter diesen Voraussetzungen (1) und (2) liefert unsere Abbildung also einen Homöomorphismus zwischen dem Polyeder  $\Delta(\mathcal{K})$  eines endlichen Simplizialkomplexes und der Vereinigung von vollen Simplizes  $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \Delta(\bar{\sigma})$  im endlichdimensionalen Vektorraum  $V$ .

**Definition 3.4.10.** Eine **simpliziale Abbildung**  $\varphi$  von einem Simplizialkomplex  $(E, \mathcal{K})$  in einen Simplizialkomplex  $(E', \mathcal{K}')$  ist eine Abbildung auf den Ecken  $\varphi : E \rightarrow E'$  derart, daß gilt  $\sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \varphi(\sigma) \in \mathcal{K}'$ . So eine simpliziale Abbildung definiert eine stetige Abbildung  $\varphi : \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{K}')$  zwischen den zugehörigen topologischen Räumen durch “affine Fortsetzung auf das Innere der Simplizes”, in Formeln  $f \mapsto \varphi f$  mit

$$(\varphi f)(e') = \sum_{\varphi(e)=e'} f(e) \quad \forall e' \in E'$$



Dieser Simplizialkomplex ist keine kombinatorische Fläche, da im “mittleren Punkt” die dritte Bedingung unsere Definition [3.4.11](#) verletzt ist.



**Definition 3.4.11.** Eine **kombinatorische Fläche** ist ein endlicher Simplicialkomplex  $\mathcal{F}$  derart, daß gilt:

1. Jeder Simplex liegt in einem 2-Simplex;
2. Jeder 1-Simplex liegt in höchstens zwei 2-Simplizes;
3. Alle 2-Simplizes, die einen gegebenen 0-Simplex enthalten, lassen sich so durchnummerieren als  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ , daß jeweils  $\sigma_i$  und  $\sigma_{i+1}$  eine Kante gemeinsam haben, in Formeln  $|\sigma_i \cap \sigma_{i+1}| = 2$  für  $1 \leq i < r$ .

Diejenigen 1-Simplizes, die nur zu einem einzigen 2-Simplex gehören, nennen wir die **Randkanten** unserer kombinatorischen Fläche. Gehört sogar jeder 1-Simplex zu genau zwei 2-Simplizes, so nennen wir unseren Simplicialkomplex eine **geschlossene kombinatorische Fläche** oder auch eine **kombinatorische Fläche ohne Rand**.

3.4.12. Es ist leicht zu sehen aber nicht ganz so leicht zu beweisen, daß der zu einer geschlossenen kombinatorischen Fläche  $\mathcal{F}$  gehörige Polyeder  $\Delta(\mathcal{F})$  eine geschlossene Fläche alias eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit ist im Sinne unserer Definition 1.1.5.

**Definition 3.4.13.** Eine **Triangulierung** einer geschlossenen Fläche  $X$  ist ein Paar bestehend aus einer geschlossenen kombinatorischen Fläche  $\mathcal{F}$  und einem Homöomorphismus  $\Delta(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} X$ .

*Bemerkung 3.4.14.* Rado [?, ?] hat gezeigt, daß jede geschlossene Fläche eine Triangulierung besitzt. Der Beweis ist nicht ganz einfach. In höheren Dimensionen gibt es übrigens auch durchaus kompakte topologische Mannigfaltigkeiten, die nicht homöomorph sind zu Polyedern, die also “nicht triangulierbar” sind.

*Übung 3.4.15.* Der Polyeder  $\Delta(\mathcal{K})$  zu einem Simplicialkomplex  $(E, \mathcal{K})$  ist stets Hausdorff und jede kompakte Teilmenge  $A \subset \Delta(\mathcal{K})$  ist schon enthalten in einer Vereinigung von endlich vielen Simplizes. Hinweis: Eine Teilmenge von  $\Delta(\mathcal{K})$ , die jeden Simplex in höchstens endlich vielen Punkten trifft, ist stets abgeschlossen und diskret. Besteht unser Simplicialkomplex aus abzählbar vielen Kanten, die in einen zentralen Punkt hereinlaufen, so gilt diese Aussage nicht für die von den Auswertungen an allen Ecken induzierte Kofinaltopologie!

*Übung 3.4.16.* Ein **abstrakter Simplicialkomplex** ist eine partiell geordnete Menge derart, daß (1) jede zweielementige Teilmenge eine größte untere Schranke besitzt und (2) die Menge aller Elemente kleinergleich einem beliebig vorgegebenen Element als partiell geordnete Menge isomorph ist zum

System aller Teilmengen einer endlichen Menge. Natürlich ist für jeden Simplicialkomplex im Sinne von 3.4.5 die Menge seiner Simplexe mit der durch die Inklusion gegebenen Ordnung ein abstrakter Simplicialkomplex. Man zeige, daß umgekehrt auch jeder abstrakte Simplicialkomplex isomorph ist zur partiell geordneten Menge der Simplexe eines bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmten Simplicialkomplexes im Sinne von 3.4.5.

*Ergänzende Übung 3.4.17.* Für eine beliebige Menge  $E$  ist die Menge  $\mathcal{K}$  aller endlichen Teilmengen von  $E$  ein Simplicialkomplex. Den zugehörigen Polyeder schreiben wir  $\Delta(E)$  und nennen ihn den **vollen Simplex mit Ecken**  $E$ . Man zeige, daß für  $E \neq \emptyset$  der volle Simplex  $\Delta(E)$  zusammenziehbar ist.

### 3.5 Klassifikation der geschlossenen Flächen

3.5.1. Wir werden im folgenden den in 1.1.7 formulierten Satz unter der Zusatzannahme der “Triangulierbarkeit” beweisen, d.h. wir klassifizieren die triangulierbaren geschlossenen Flächen bis auf Homöomorphie. Dieser Abschnitt nimmt eine Sonderstellung ein insofern, als die Argumentation nicht so weit in die formalen Details getrieben wird wie in den anderen Abschnitten.

**Definition 3.5.2.** Sei  $\mathcal{F}$  eine kombinatorische Fläche. Eine **Zerschneidung** von  $\mathcal{F}$  ist eine kombinatorische Fläche  $\mathcal{Z}$  mit einer simplicialen Abbildung  $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{F}$ , die auf den 2-Simplexen eine Bijektion  $\varphi : \mathcal{Z}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_2$  induziert. Umgekehrt sagen wir in dieser Situation auch,  $\mathcal{F}$  entstehe durch **Verklebung** von  $\mathcal{Z}$ .

**Definition 3.5.3.** Eine kombinatorische Fläche  $\mathcal{Z}$  heißt ein **Vieleck** genau dann, wenn der zugehörige Polyeder  $\Delta(\mathcal{Z})$  homöomorph ist zur abgeschlossenen Kreisscheibe  $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ .

**Lemma 3.5.4.** *Ist  $\mathcal{Z}$  ein Vieleck und  $\varphi : D^2 \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{Z})$  ein Homöomorphismus, so ist das Bild der Kreislinie  $\varphi(S^1)$  die Vereinigung der Randkanten von  $\mathcal{Z}$  im Sinne von 3.4.11.*

*Beweis.* Das Komplement von  $S^1$  kann man im topologischen Raum  $D^2$  charakterisieren als die Menge aller Punkte  $z$ , die eine zusammenziehbare Umgebung  $U$  besitzen derart, daß  $U \setminus z$  eine nichttriviale Fundamentalgruppe hat. Das Komplement der Vereinigung der Randkanten in  $\Delta(\mathcal{Z})$  kann man genauso charakterisieren.  $\square$

**Lemma 3.5.5.** *Jede zusammenhängende kombinatorische Fläche besitzt eine Zerschneidung zu einem Vieleck.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{F}$  unsere kombinatorische Fläche. Sicher gibt es eine Zerschneidung von  $\mathcal{F}$  in eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Vielecke. Sei  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{F}$  eine solche Zerschneidung mit der kleinstmöglichen Zahl von Zusammenhangskomponenten. Nehmen wir einmal an, es gäbe hier mehr als eine Komponente. Dann könnten wir also 2-Simplizes  $\sigma, \tau \in \mathcal{F}_2$  finden, die von verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{Z}$  herkommen. Da  $\mathcal{F}$  zusammenhängend ist, könnten wir  $\sigma, \tau$  in  $\mathcal{F}$  durch eine Kette von 2-Simplizes  $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r = \tau$  verbinden derart, daß gilt  $\sigma_i \cap \sigma_{i+1} \neq \emptyset$ . Aufgrund unserer Annahmen an eine kombinatorische Fläche können wir sogar annehmen, daß  $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$  jeweils ein 1-Simplex ist. Dann finden wir aber notwendig ein  $i$  derart, daß  $\sigma_i$  und  $\sigma_{i+1}$  von verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{Z}$  herkommen. Verkleben wir nun diese beiden Zusammenhangskomponenten entlang der Randkante  $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ , so erhalten wir eine Zerschneidung von  $\mathcal{F}$  in weniger Vielecke, im Widerspruch zur angenommenen Minimalität.  $\square$

3.5.6. Sei nun  $\mathcal{F}$  eine geschlossene kombinatorische Fläche und  $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{F}$  eine Zerschneidung zu einem Vieleck. Sicher werden unter  $\varphi$  die Randkanten von  $\mathcal{Z}$  paarweise identifiziert. Insbesondere ist also die Zahl der Randkanten unseres Vielecks gerade. Die Identifizierungsvorschrift können wir formal so aufschreiben:

**Definition 3.5.7.** Sei  $A$  eine endliche Menge, die wir in diesem Zusammenhang unser “Alphabet” nennen, mit  $|A| = r \geq 0$  Elementen, den “Buchstaben”. Ein **Flächenwort** im Alphabet  $A$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3, \dots, 2r\} &\rightarrow A \times \{1, -1\} \\ i &\mapsto (a(i), \varepsilon(i)) \end{aligned}$$

derart, daß jeder Buchstabe genau zweimal als ein  $a(i)$  vorkommt.

3.5.8. Wir schreiben Flächenworte in der Form  $a(1)^{\varepsilon(1)} \dots a(2r)^{\varepsilon(2r)}$  und nennen  $2r$  die “Länge” so eines Flächenworts. Beispiele für Flächenworte im Alphabet  $A = \{a, b\}$  sind etwa die Ausdrücke  $aabb^{-1}$  und  $aba^{-1}b$ .

**Definition 3.5.9.** Gegeben ein Flächenwort  $w$  in  $r \geq 2$  Buchstaben konstruieren wir eine geschlossene Fläche  $F(w)$  wie folgt: Wir betrachten ein regelmäßiges  $2r$ -Eck, mit  $2r$  der Länge unseres Flächenworts, schreiben die Buchstaben unseres Flächenworts der Reihe nach an seine Kanten, und versehen jede Kante mit einem Pfeil im Gegenuhrzeigersinn bzw. Uhrzeigersinn, je nachdem ob der Exponent ihres Buchstabens 1 bzw.  $-1$  ist. Dann verkleben wir jeweils die Kanten mit den gleichen Buchstaben so, daß die Spitzen der Pfeile identifiziert werden. Im Fall  $r = 1$  erlauben wir dem 2-Eck krumme Kanten und erhalten so zum Beispiel  $F(aa) \cong \mathbb{P}^2\mathbb{R}$  und  $F(aa^{-1}) \cong S^2$ . Im Fall  $r = 0$  definieren wir  $F(\ ) = S^2$ .

**Lemma 3.5.10.** *Der auf diese Weise zu einem Flächenwort  $w$  konstruierte topologische Raum  $F(w)$  ist stets eine geschlossene Fläche.*

*Beweis.* Die größte Schwierigkeit scheint mir hierbei der Nachweis, daß auch die Bilder der Ecken unseres Vielecks im verklebten Raum  $F(w)$  eine zu einer offenen Kreisscheibe homöomorphe offene Umgebung besitzen. Um das zu sehen, muß man sich überlegen, daß lokal um das Bild einer Ecke schlicht “mehrere Winkelsegmente zu einer Kreisscheibe verklebt werden”. Wir überlassen die Details dem Leser.  $\square$

**Satz 3.5.11 (Klassifikation der geschlossenen Flächen).** *Jede zusammenhängende (triangulierbare) Fläche ist homöomorph zur Fläche  $F(w)$  für genau ein Flächenwort  $w$  aus der folgenden Liste:*

1.  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$  mit  $g \geq 0$ .
2.  $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$  mit  $g \geq 1$ .

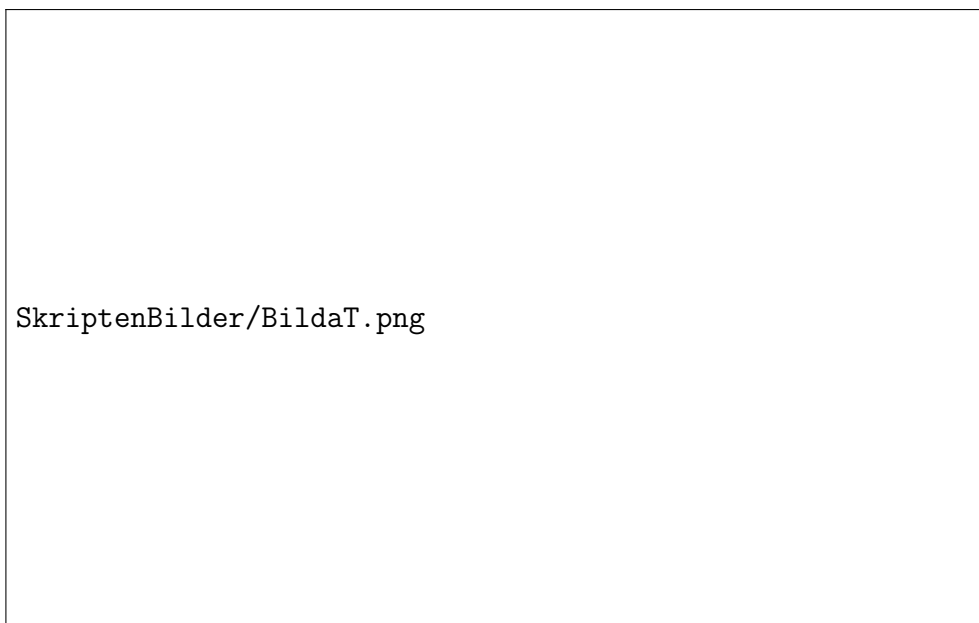
3.5.12. Dieser Satz präzisiert die in der Einleitung besprochene Klassifikation der geschlossenen Flächen 1.1.7.

*Beweis.* Zunächst einmal listen wir einige fundamentale Operationen auf der Menge aller Flächenwörter auf, die offensichtlich den Homöomorphietyp der zugehörigen Fläche nicht ändern. In den folgenden Formeln bedeuten  $a, b, c, d$  mit und ohne Hut stets Buchstaben unseres Alphabets  $A$ , dahingegen bedeuten  $u, v, w, z$  beliebige Abschnitte von Flächenwörtern.

1. “Zyklisches Vertauschen” und “von hinten nach vorne Lesen”, in Formeln  $F(vw) \cong F(wv)$  und  $F(w) \cong F(w^{-1})$ ;
2. “Substituieren” von  $a^{-1}$  für  $a$ , in Formeln  $F(va^\varepsilon wa^\eta z) \cong F(va^{-\varepsilon} wa^{-\eta} z)$ ;
3. “Aufschneiden des Vielecks längs der Gerade zwischen zwei Ecken und Zusammenkleben längs einer äußeren Kante” wie im nebenstehenden Bild dargestellt, in Formeln

$$\begin{aligned} F(uavza^{-1}w) &\cong F(usb^{-1}zvb) \\ F(uavzaw) &\cong F(uz^{-1}bw^{-1}vb) \end{aligned}$$

Zu jedem Flächenwort  $w$  definieren wir seine **Eckenzahl** als die Zahl der Punkte in der zugehörigen Fläche  $F(w)$ , die Bilder von Ecken unseres Vielecks sind. Kombinatorisch betrachtet man auf der Menge der Ecken die kleinste Äquivalenzrelation, unter der je zwei Ecken mit einer Ausgangskante zum selben Buchstaben oder einer Eingangskante zum selben Buchstaben äquivalent

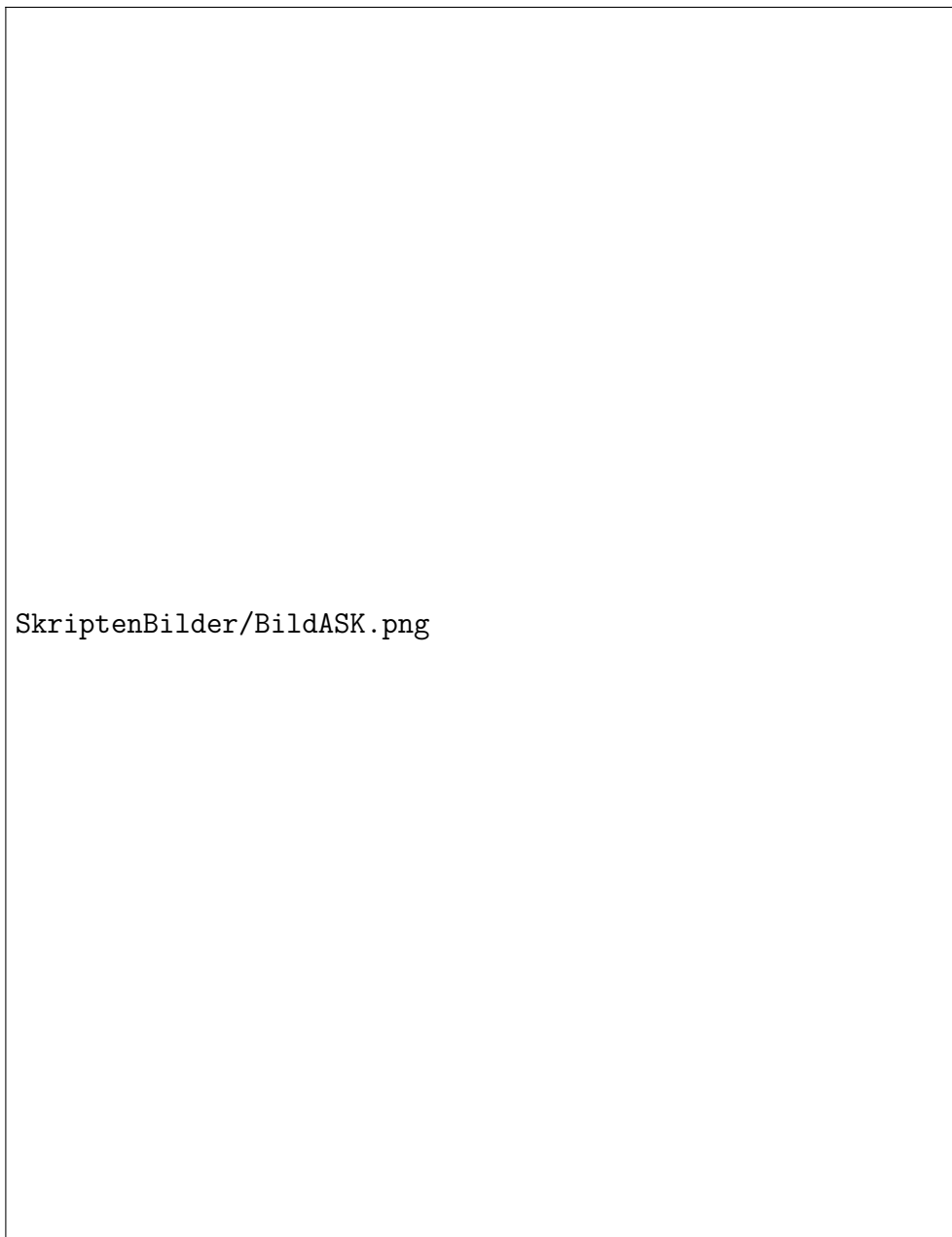


Dieses Bild soll die Definition der Fläche  $F(aba^{-1}b^{-1})$  anschaulich machen.

Verkleben wir nur längs der  $b$ -Kanten, so entsteht eine Klopapierrolle, verkleben weiter längs der  $b$ -Kanten entsteht ein Schimmring oder Torus.



Dieses Bild soll die Definition der Fläche  $F(aabb)$  anschaulich machen. Statt die zu jeweils zu verklebenden Randkanten mit denselben Buchstaben zu benennen, habe ich sie jeweils mit demselben Typ von Pfeilen, hier Doppelpfeilen bzw. einfachen Pfeilen, gekennzeichnet. Verklebt wird eigentlich nur das fett eingezeichnete Viereck. Ich finde, man erkennt in der Mitte recht gut, wie das Verkleben eine Fläche liefert, in der alle vier Eckpunkte unseres Quadrats dasselbe Bild haben. Es ist jedoch nicht so leicht zu sehen, daß diese Fläche homöomorph ist zur Klein'schen Flasche. Um sich das zu überlegen, sollte man wohl am besten die Klein'sche Flasche zerschneiden: Einmal rund um den Flachenhals, ein zweites Mal in Längsrichtung Flasche und Hals.



Dieses Bild soll die zweite Regel  $F(uavzaw) \cong F(uz^{-1}bw^{-1}vb)$  zum Aufschneiden und Verkleben anschaulich machen. Kleben wir das darin enthaltene achteckige “Stoppschild” zu einer Fläche zusammen, so entsteht dieselbe Fläche wie beim Zusammenkleben des mit gestricheltem Rand gezeichneten “Schmetterlings”. Hierbei könnten wir etwa konkret an ein Flächenwort in vier Buchstaben  $a, c, d, e$  denken und etwa  $u = c$ ,  $v = c^{-1}e$ ,  $z = d^{-1}$  und  $w = ed$  setzen, dieser Fall ist als Beispiel eingezeichnet.

sind, und kann dann die Eckenzahl verstehen als die Kardinalität der Äquivalenzklassen. Mit dieser Terminologie haben wir eine letzte fundamentale Operation:

4. “Kürzen”, in Formeln  $F(uava^{-1}) \cong F(w)$  unter der Annahme, daß die Enden der  $a$ -Kanten verschiedene Bilder in der verklebten Fläche haben. Sind hier  $u$  oder  $v$  leer, so haben die Enden der  $a$ -Kanten automatisch verschiedene Bilder und die Formel scheint mir offensichtlich. Sind  $u$  und  $v$  nicht leer, so betrachten wir in unserem Vieleck das Viereck mit den beiden  $a$ -Kanten als gegenüberliegenden Seiten. Sein Bild in der verklebten Fläche ist ein Zylinder, den wir zu einer Kreislinie identifizieren können, ohne den Homöomorphietyp der verklebten Fläche zu ändern.

**Lemma 3.5.13 (Eckenreduktion).** *Für jedes vorgegebene Flächenwort  $w$  ist entweder  $F(w)$  eine Sphäre, oder es gibt ein Flächenwort  $v$  mit Eckenzahl Eins und  $F(w) \cong F(v)$ .*

*Beweis.* Sei  $w$  ein Flächenwort mit Eckenzahl  $\geq 2$  und mehr als einem Buchstaben. Wir wählen einen Punkt  $P$  in  $F(w)$ , der das Bild einer Ecke unseres Vielecks ist, und nennen diejenigen Ecken unseres Vielecks “gut”, die nach  $P$  gehen. Die übrigen Ecken nennen wir “schlecht” und geben im Verfahren an, das entweder die Zahl der Ecken überhaupt oder die Zahl der schlechten Ecken unseres Eckenworts verringert ohne die zugehörige Fläche zu ändern. Sei in der Tat  $a$  eine Kante von einer guten Ecke zu einer schlechten Ecke. Zwei Fälle sind möglich:

1. Die beiden  $a$ -Kanten unseres Vielecks erscheinen mit demselben Exponenten. In diesem Fall können sich nach unserer Annahme die  $a$ -Kanten nicht berühren. Wir schneiden dann zwischen den Anfangspunkten der  $a$ -Kanten auf und verkleben längs der  $a$ -Kanten. So verringert sich die Zahl der schlechten Ecken um 1.
2. Die beiden  $a$ -Kanten unseres Vielecks erscheinen mit verschiedenen Exponenten. In diesem Fall können wir sie kürzen und so die Zahl der Ecken verringern.

Das zeigt das Lemma. □

Jede (triangulierbare) Fläche ist also homöomorph zur Sphäre oder zu einer Fläche  $F(w)$  für ein Flächenwort  $w$  mit Eckenzahl 1. Wir bemerken für das folgende, daß sich die Eckenzahl beim Aufschneiden und Verkleben nicht



ändert. Wir können uns also im Weiteren auf Worte der Eckenzahl 1 beschränken, und werden von nun an nur solche Worte betrachten. Man beachte nun als Spezialfälle des Aufschneidens und Verklebens die beiden folgenden Regeln:

**Kreuzhaubennormierung:**  $F(ubvbw) \cong F(uv^{-1}\hat{b}bw)$  : Durch Aufschneiden zwischen den Enden von  $b$  und Verkleben längs  $b$ . Die Bezeichnung rührt daher, daß wir wie auf Seite ?? erklärt ein Möbiusband auch als eine sogenannte Kreuzhaube realisieren können.

**Henkelnormierung:**  $F(ubvdwb^{-1}zd^{-1}x) \cong F(uzw\hat{b}\hat{d}b^{-1}\hat{d}^{-1}vx)$  : Durch Aufschneiden zwischen den Enden von  $b$  und Verkleben längs  $d$  kommt man zu  $ub\hat{d}b^{-1}zw\hat{d}^{-1}vx$ , mit erneutem Aufschneiden zwischen den Enden von  $\hat{d}$  und Verkleben längs  $b$  ergibt sich dann das gewünschte Resultat.

Unter Verwendung der ersten Regel normieren wir zunächst Kreuzhauben, bis wir ein Wort erreicht haben, bei dem jeder Buchstabe entweder als normierte Kreuzhaube  $aa$  bzw.  $a^{-1}a^{-1}$  oder in der Form  $\dots a \dots a^{-1} \dots$  vorkommt. Im letzteren Fall finden wir ein  $b$  derart, daß unser Wort feiner sogar die Form  $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$  hat, denn sonst müßten alle Buchstaben entweder doppelt oder gar nicht zwischen  $a$  und  $a^{-1}$  vorkommen, und dann hätten Anfangs- und Endpunkt der  $a$ -Kanten verschiedene Bilder in der Fläche, im Widerspruch zu unserer Annahme, daß die Eckenzahl 1 ist. Mit sukzessiven Henkelnormierungen landen wir also bei einem Wort, das eine Verkettung ist von Kreuzhauben  $cc$  und Henkeln  $aba^{-1}b^{-1}$ . Henkelnormierung rückwärts und dann mehrfaches Anwenden der Kreuzhaubennormierung liefert aber auch die sogenannte **Henkelelimination**, in Formeln

$$\begin{aligned} F(uccaba^{-1}b^{-1}v) &\cong F(uabca^{-1}cb^{-1}v) \\ &\cong F(uaba\hat{c}\hat{c}b^{-1}v) \\ &\cong F(ub^{-1}\hat{a}\hat{a}\hat{c}\hat{c}b^{-1}v) \\ &\cong F(u\hat{c}^{-1}\hat{c}^{-1}\hat{a}^{-1}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1}\hat{b}^{-1}v) \end{aligned}$$

so daß also jede Verkettung von Kreuzhauben und Henkeln, in der mindestens eine Kreuzhaube auftritt, dieselbe Fläche liefert wie ein reines Produkt von Kreuzhauben. Damit ist gezeigt, daß jede triangulierbare Fläche homöomorph ist zu mindestens einer Fläche, die durch ein Flächenwort aus unserer Liste beschrieben wird. Wir zeigen in 3.7, daß diese Flächen paarweise nicht-isomorphe Fundamentalgruppen haben. Daraus folgt, daß sie paarweise nicht homöomorph sind, und das beendet dann den Beweis des Klassifikationsatzes.  $\square$

### 3.6 Gruppen durch Erzeugende und Relationen

3.6.1. Ist  $G$  eine Gruppe und  $T \subset G$  eine Teilmenge, so hatten wir in ?? den Schnitt über alle Untergruppen von  $G$ , die  $T$  umfassen, die von  $T$  erzeugte Untergruppe genannt und mit  $\langle T \rangle$  bezeichnet.

**Definition 3.6.2.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $T \subset G$  eine Teilmenge. Der Schnitt über alle Normalteiler von  $G$ , die  $T$  umfassen, heißt der **von  $T$  erzeugte Normalteiler**  $\langle\langle T \rangle\rangle$ . Er kann auch beschrieben werden als die Untergruppe  $\langle\langle T \rangle\rangle = \langle gtg^{-1} \mid g \in G, t \in T \rangle$ .

**Lemma 3.6.3.** Sei  $\varphi : G \rightarrow G'$  ein Gruppenhomomorphismus und  $T \subset G$  eine Teilmenge mit  $\varphi(T) \subset \{e\}$ . So gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus  $\tilde{\varphi} : G/\langle\langle T \rangle\rangle \rightarrow G'$  mit  $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ , im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/\langle\langle T \rangle\rangle \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G' \end{array}$$

*Beweis.* Nach Annahme gilt  $T \subset \ker \varphi$ . Da  $\ker \varphi$  stets ein Normalteiler ist, folgt  $\langle\langle T \rangle\rangle \subset \ker \varphi$ . Jetzt folgt die Aussage aus der universellen Eigenschaft der Restklassengruppe ??  $\square$

**Definition 3.6.4.** Sei  $X$  eine Menge und  $R \subset \text{Grp}^\uparrow X$  eine Teilmenge der freien Gruppe über  $X$ . Der Quotient  $\text{Grp}^\uparrow X/\langle\langle R \rangle\rangle$  der freien Gruppe über  $X$  nach dem von  $R$  erzeugten Normalteiler heißt die **von der Menge  $X$  mit den Relationen  $R$  erzeugte Gruppe**. Meist werden die Relationen in der Form  $a_i = b_i$  mit Wörtern  $a_i, b_i \in \mathcal{W}X$  angegeben. Gemeint ist dann  $R = \{[a_i][b_i]^{-1}\}$ .

*Beispiel 3.6.5.* Die von zwei Elementen  $x$  und  $y$  mit der Relation  $xy = yx$  erzeugte Gruppe ist isomorph zu  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

3.6.6. Die Darstellung einer Gruppe durch Erzeugende und Relationen ist nicht "effektiv": Es gibt nachweislich keinen Algorithmus, der bestimmt, ob so eine Gruppe endlich oder gar trivial ist.

*Übung 3.6.7.* Sei eine Menge  $X$  die Vereinigung zweier Teilmengen  $X = X_1 \cup X_2$  mit Schnitt  $X_0 = X_1 \cap X_2$ . Seien  $R_i \subset \text{Grp}^\uparrow X_i$  Relationen ( $i = 0, 1, 2$ ). Gilt zusätzlich  $R_0 \subset \langle\langle R_i \rangle\rangle$  für  $i = 1, 2$ , so ist das folgende Diagramm ein Pushout:

$$\begin{array}{ccc} \text{Grp}^\uparrow X_0/\langle\langle R_0 \rangle\rangle & \rightarrow & \text{Grp}^\uparrow X_1/\langle\langle R_1 \rangle\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grp}^\uparrow X_2/\langle\langle R_2 \rangle\rangle & \rightarrow & \text{Grp}^\uparrow X/\langle\langle R_1 \cup R_2 \rangle\rangle \end{array}$$

*Übung 3.6.8.* Die symmetrische Gruppe  $\mathcal{S}_n$  kann beschrieben werden als die Gruppe mit Erzeugern  $s_1, \dots, s_{n-1}$  und Relationen  $s_i^2 = 1$ ,  $s_i s_j = s_j s_i$  für  $|i - j| > 1$ ,  $(s_i s_{i+1})^3 = 1$ . Die Tetraedergruppe alias die alternierende Gruppe  $A_4$  kann beschrieben werden als die Gruppe erzeugt von zwei Elementen  $s, t$  mit Relationen  $s^2 = t^3 = (st)^3 = 1$ . Die Ikosaedergruppe alias die alternierende Gruppe  $A_5$  kann beschrieben werden als die Gruppe erzeugt von zwei Elementen  $u, v$  mit Relationen  $u^2 = v^3 = (uv)^5 = 1$ .

### 3.7 Die Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

**Satz 3.7.1 (Fundamentalgruppen geschlossener Flächen).** *Gegeben ein Flächenwort  $w$  im Alphabet  $A$  mit Eckenzahl Eins wird die Fundamentalgruppe der zugehörigen Fläche  $F(w)$  erzeugt von der Menge  $A$  mit dem Flächenwort  $w$  als einziger Relation. Bezeichnet genauer  $*$   $\in F(w)$  das Bild der Ecken unseres Vielecks, so erhalten wir einen Isomorphismus*

$$(\text{Grp}^\uparrow A) / \langle\langle w \rangle\rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(F(w), *)$$

*indem wir jedem Buchstaben das Bild der entsprechenden Kante mit der durch den Exponenten unseres Buchstabens gegebenen Durchlaufrichtung zuzuordnen.*

*Beweis.* Sei  $p : Z \rightarrow F$  die Projektion unseres Vielecks  $Z \subset \mathbb{R}^2$  auf unsere Fläche  $F = F(w)$ . Das Bild  $p(\partial Z)$  vom Rand unseres Vielecks in unserer Fläche  $F$  besteht aus  $|A|$  Kreislinien, die alle in einem Punkt zusammengeklebt sind. Solch einen Raum nennt man auch ein **Bouquet von Kreislinien**. Bezeichne nun  $Z^\circ$  das Innere unseres Vielecks und sei  $z \in Z$  sein Mittelpunkt. Unter  $p$  geht  $Z^\circ$  homöomorph auf eine offene Teilmenge unserer Fläche  $F$  und wir vereinfachen die Notation und tun so, als ob  $Z^\circ$  schlicht eine Teilmenge von  $F$  wäre. Wir betrachten dann für unser Vieleck  $Z$  die offene Überdeckung  $Z = (Z \setminus z) \cup Z^\circ$  und wenden den Satz von Seifert und van Kampen 3.2.1 an auf die offene Überdeckung

$$F = (F \setminus z) \cup Z^\circ$$

unserer Fläche durch die Bilder dieser Mengen. Nehmen wir nun als Basispunkt das Bild eines Punktes aus  $e \in Z^\circ$ , der auf dem offenen Geradensegment von  $z$  zur "Ausgangsecke  $a$  unseres Flächenworts  $w$ " liegt, so liefert Seifert-van-Kampen 3.2.1 ein kokartesisches Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z^\circ \setminus z, e) & \rightarrow & \pi_1(Z^\circ, e) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(F \setminus z, e) & \rightarrow & \pi_1(F, e) \end{array}$$

Nun benutzen wir den Weg, der radial von  $e$  nach  $a$  läuft, oder genauer sein Bild in  $F$ , um die Fundamentalgruppen in der unteren Zeile mit den entsprechenden Fundamentalgruppen zum Basispunkt  $*$  zu identifizieren. Weiter zeigt das “radial nach außen schieben” von Punkten aus  $Z \setminus z$ , daß die Einbettung unseres Bouquets von Kreislinien  $p(\partial Z) \hookrightarrow F \setminus z$  eine Homotopieäquivalenz ist und folglich einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen zum Basispunkt  $*$  induziert. Die Fundamentalgruppe solch eines Bouquets haben Sie bereits in 3.3.12 mit der freien Gruppe über  $A$  identifiziert. Nun muß man sich überzeugen, daß unter den beschriebenen Identifikationen

$$\pi_1(F \setminus z, e) \cong \pi_1(F \setminus z, *) \cong \pi_1(p(\partial Z), *) \cong \text{Grp}^\uparrow A$$

das Bild eines der beiden Erzeuger von  $\pi_1(Z \setminus z, e)$  gerade auf das Wort  $w$  geht, aufgefaßt als Element der freien Gruppe  $\text{Grp}^\uparrow A$ . So ergibt sich ein kokartesisches Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \rightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grp}^\uparrow A & \rightarrow & \pi_1(F, *) \end{array}$$

wobei die Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Grp}^\uparrow A$  die  $1 \in \mathbb{Z}$  auf das Flächenwort  $w$  unserer Fläche in  $\text{Grp}^\uparrow A$  abbildet, und wir erhalten den gesuchten Isomorphismus  $\pi_1(F, *) = \text{Grp}^\uparrow A / \langle\langle w \rangle\rangle$ .  $\square$

**Definition 3.7.2.** Gegeben eine Gruppe  $G$  definiert man ihren **maximalen kommutativen Quotienten**, auch genannt ihre **Abelisierung**, als den Quotienten

$$G^{\text{ab}} := G / (G, G)$$

nach dem Normalteiler  $(G, G) \subset G$ , der von allen **Kommutatoren**  $ghg^{-1}h^{-1}$  mit  $g, h \in G$  erzeugt wird. Die Untergruppe  $(G, G)$  heißt im übrigen die **derivierte Gruppe** oder auch der **Kommutator** von  $G$ .

*Bemerkung 3.7.3.* Die Notation  $(G, G)$  geht zurück auf die in der Gruppentheorie übliche Notation  $ghg^{-1}h^{-1} = (g, h)$  für den Kommutator. Im Sinne unserer allgemeinen Konvention ??? sollte natürlich  $(G, G)$  eigentlich nur die Menge aller Kommutatoren aus  $G$  bezeichnen und der davon erzeugte Normalteiler sollte  $\langle\langle (G, G) \rangle\rangle$  notiert werden, aber da letzteres Konzept soviel häufiger vorkommt, ist es üblich, hier eine Ausnahme zu machen und mit  $(G, G)$  kurzerhand den von den Kommutatoren erzeugten Normalteiler zu bezeichnen.

**Lemma 3.7.4 (Universelle Eigenschaft der Abelisierung).** *Gegeben eine Gruppe  $G$  ist ihre Abelisierung  $G^{\text{ab}}$  eine abelsche Gruppe, und jeder*

*Morphismus von  $G$  in eine abelsche Gruppe faktorisiert über  $G^{\text{ab}}$ . In Formeln liefert also für jede abelsche Gruppe  $A$  das Verknüpfen mit der Projektion  $G \rightarrow G^{\text{ab}}$  eine Bijektion*

$$\text{Grp}(G^{\text{ab}}, A) \xrightarrow{\sim} \text{Grp}(G, A)$$

*Beweis.* Dem Leser überlassen.  $\square$

Nun wird offensichtlich ein push-out-Diagramm in der Kategorie der Gruppen unter der Abelisierung ein push-out-Diagramm in der Kategorie der abelschen Gruppen, und die Abelisierung einer freien Gruppe  $\text{Grp}^\uparrow A$  ist die freie abelsche Gruppe  $\text{Ab}^\uparrow A = \mathbb{Z}A$  aller endlichen formalen Linearkombinationen von Elementen von  $A$  mit ganzzahligen Koeffizienten. Für den maximalen kommutativen Quotienten  $\pi_1^{\text{ab}}$  erhalten wir damit  $\pi_1^{\text{ab}}(F(w), *) = \mathbb{Z}A \cong \mathbb{Z}^{2g}$  im Fall von  $g$  Henkeln und

$$\pi_1^{\text{ab}}(F(w), *) = \mathbb{Z}A/2\mathbb{Z}(c_1 + \dots + c_g) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{g-1}$$

im Fall von  $g$  Kreuzhauben. Da diese Gruppen paarweise nicht isomorph sind, nach ?? oder auch elementar mit Zählen der Elemente endlicher Ordnung und Berechnung der Dimensionen der Vektorräume aller Gruppenhomomorphismen nach  $\mathbb{Q}$ , sind auch die zugehörigen Flächen paarweise nicht homöomorph. Das beendet den Beweis des Klassifikationssatzes.

*Übung 3.7.5.* Die Abelisierung der freien Gruppe über einer Menge ist kanonisch isomorph zur freien abelschen Gruppe über besagter Menge.

*Übung 3.7.6.* Ist  $X$  eine zusammenhängende geschlossene Fläche vom Geschlecht  $g$  und  $E \subset X$  eine endliche nichtleere Teilmenge, so ist  $\pi_1(X \setminus E)$  frei in  $2g + |E| - 1$  Erzeugern.

### 3.8 Push-out von Gruppen

3.8.1. Schon beim Satz von Seifert und van Kampen wird sich der Leser gefragt haben, ob sich eigentlich jedes Kowinkeldiagramm von Gruppen zu einem kokartesischen Diagramm vervollständigen läßt. Das ist in der Tat der Fall und soll nun bewiesen werden. Wir beginnen mit

**Satz 3.8.2 (Koprodukte von Gruppen).** *Für eine beliebige Familie von Gruppen gibt es ein Koprodukt in der Kategorie der Gruppen.*

*Beweis.* Wir zeigen nur, wie man ein Koprodukt von zwei Gruppen  $G_1$  und  $G_2$  konstruieren kann. Es heißt das **freie Produkt** der Gruppen  $G_1$  und  $G_2$  und wird notiert als

$$G_1 * G_2$$

Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe  $\text{Grp}^\uparrow G$  über der Menge  $G$  haben wir ja für jede Gruppe  $G$  genau einen Gruppenhomomorphismus  $\text{Grp}^\uparrow G \rightarrow G$ , dessen Verknüpfung mit  $\text{can} : G \rightarrow \text{Grp}^\uparrow G$  die Identität auf  $G$  ist. Den Kern  $RG \subset \text{Grp}^\uparrow G$  von diesem Gruppenhomomorphismus nennen wir die "Relationen von  $G$ ". Wir definieren die Gruppe  $G_1 * G_2$  als den Quotienten der freien Gruppe über der disjunkten Vereinigung unserer beiden Gruppen nach dem von den Relationen in beiden Gruppen erzeugten Normalteiler, in Formeln

$$G_1 * G_2 = \text{Grp}^\uparrow(G_1 \sqcup G_2) / \langle\langle RG_1 \cup RG_2 \rangle\rangle$$

wo wir der Einfachheit halber das Bild von  $RG_i$  unter der von der Inklusion induzierten Abbildung  $\text{Grp}^\uparrow G_i \rightarrow \text{Grp}^\uparrow(G_1 \sqcup G_2)$  auch mit  $RG_i$  bezeichnet haben. Wir behaupten nun, daß diese Gruppe  $G_1 * G_2$  mit den offensichtlichen Abbildungen  $\text{can}_i : G_i \rightarrow G_1 * G_2$  ein Koproduct ist. In der Tat, ist irgendeine Gruppe  $H$  gegeben mitsamt Abbildungen  $f_1 : G_1 \rightarrow H$  und  $f_2 : G_2 \rightarrow H$ , so erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus  $f : \text{Grp}^\uparrow(G_1 \sqcup G_2) \rightarrow H$ . Ist zusätzlich  $f_i$  ein Gruppenhomomorphismus, so liegt  $RG_i$  im Kern von  $f$ . Sind  $f_1, f_2$  Gruppenhomomorphismen, so definiert  $f$  mithin einen Gruppenhomomorphismus  $\bar{f} : G_1 * G_2 \rightarrow H$ .  $\square$

*Übung 3.8.3.* Seien  $G_1, G_2$  Gruppen. Man zeige, daß sich jedes Element des freien Produkts  $G_1 * G_2$  in eindeutiger Weise schreiben läßt als ein Produkt  $g_1 g_2 \dots g_n$  mit  $n \geq 0$  und  $g_k \in G_{\varepsilon(k)}$  nicht das neutrale Element und  $\varepsilon(k) \neq \varepsilon(k+1)$  für  $1 \leq k < n$ . Wie üblich soll hier das leere Produkt mit  $n = 0$  das neutrale Element von  $G_1 * G_2$  darstellen. Hinweis: Man orientiere sich an 3.3.9.

**Korollar 3.8.4.** *Jedes Kowinkeldiagramm von Gruppen läßt sich zu einem push-out-Diagramm vervollständigen.*

3.8.5. Man nennt so einen push-out auch ein **amalgamiertes Produkt** und bezeichnet ihn mit  $G_1 *_G G_2$ .

*Beweis.* Sei

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_2} & G_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \\ G_1 & & \end{array}$$

unser Kowinkeldiagramm. Wir konstruieren unseren Pushout als den Quotienten

$$G_1 * G_2 / \langle\langle \varphi_1(x)^{-1} \varphi_2(x) \mid x \in G \rangle\rangle$$

und überlassen es dem Leser, die universelle Eigenschaft zu prüfen.  $\square$

Dieses Bild soll die vierte Regel zum “Kürzen” anschaulich machen.

## 4 Überlagerungstheorie

### 4.1 Überlagerungen

**Definition 4.1.1.** Eine stetige Abbildung  $p : \tilde{U} \rightarrow U$  heißt eine **triviale Überlagerung** genau dann, wenn es einen diskreten Raum  $F$  mitsamt einem Homöomorphismus  $\varphi : F \times U \xrightarrow{\sim} \tilde{U}$  gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F \times U & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \tilde{U} \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

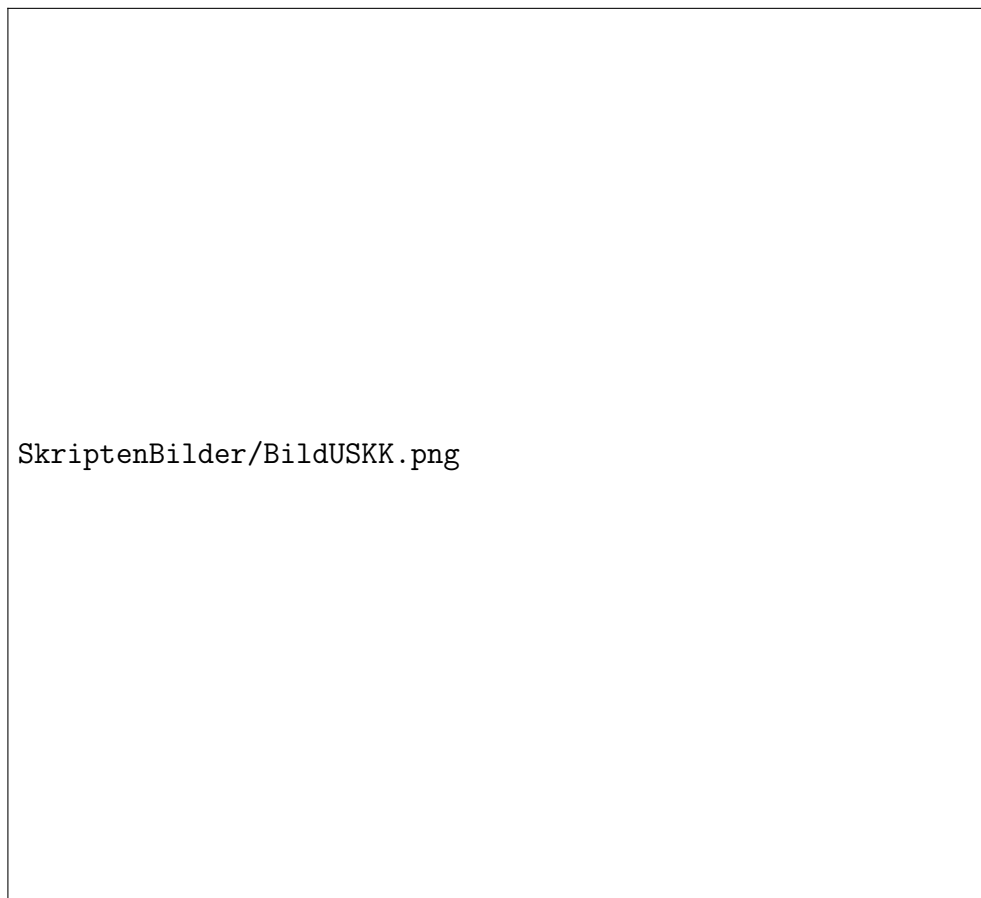
kommutiert. Solch ein Homöomorphismus heißt dann eine **Trivialisierung**. Eine stetige Abbildung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  heißt eine **Überlagerung** genau dann, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt derart, daß die induzierte Abbildung  $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$  eine triviale Überlagerung ist. Wir nennen  $U$  dann eine **trivial überlagerte Umgebung von  $x$** . Der Definitionsbereich  $\tilde{X}$  von  $p$  heißt der **Totalraum** unserer Überlagerung.

4.1.2. Wir fordern von einer Überlagerung *nicht*, daß sie surjektiv sein soll. Insbesondere ist für uns  $\emptyset \rightarrow X$  stets eine Überlagerung. Wir fordern auch *nicht*, daß die Fasern konstante Kardinalität haben sollen. Eine Überlagerung mit dieser Eigenschaft nennen wir eine **Faserung mit diskreter Faser**. In der Funktionentheorie arbeitet man manchmal mit einem etwas allgemeineren Überlagerungsbegriff, in dem etwa die Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^2$  auch noch als Überlagerung, genauer als “im Ursprung verzweigte Überlagerung” durchgehen würde. Die Überlagerungen im Sinne der obigen Definition würden in der dort üblichen Terminologie **unverzweigte Überlagerungen** heißen.

*Beispiele 4.1.3.* Die Abbildung  $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto \exp(2\pi it) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$  aus dem Beweis von 1.3.1 ist eine Überlagerung.  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  und die Projektion  $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$  sind Überlagerungen. Ebenso ist für jeden diskreten Raum  $F$  die Projektion  $\text{pr}_2 : F \times X \rightarrow X$  eine Überlagerung. Als weiteres Beispiel betrachte man  $\text{Exp} \times \text{Exp} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ . Sind allgemeiner  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  und  $g : \tilde{Y} \rightarrow Y$  Überlagerungen, so auch  $f \times g : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$ .

4.1.4. Ist  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung, so ist die Kardinalität der Fasern  $p^{-1}(x)$  konstant auf den Zusammenhangskomponenten von  $X$ . In der Tat sind für jede Menge  $E$  die Mengen  $\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |E|\}$  bzw.  $\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| \neq |E|\}$  aller Punkte  $x \in X$ , deren Fasern  $p^{-1}(x)$  dieselbe bzw. nicht dieselbe Kardinalität wie  $E$  haben, offen in  $X$ , da sie mit jedem





Eine zweifache Überlagerung der Kreislinie.

Punkt auch jede trivial überlagerte Umgebung des besagten Punktes umfassen. Ist  $X$  zusammenhängend, so nennt man die Zahl der Elemente einer und gleichbedeutend jeder Faser auch die **Zahl der Blätter** der Überlagerung.

**Definition 4.1.5.** Eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow X$  heißt **étale** genau dann, wenn jeder Punkt  $e \in E$  eine offene Umgebung  $U \subseteq E$  besitzt, die von  $p$  homöomorph auf eine offene Teilmenge  $p(U) \subseteq X$  abgebildet wird. Das Wort “étale” kommt übrigens aus dem Französischen und hat die Bedeutung “ausgebreitet”.

*Beispiele 4.1.6.* Jede Überlagerungsabbildung ist étale. Die Projektion unserer Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt  $\mathbb{R} \sqcup \{\tilde{0}\}$  aus ?? auf die Gerade  $\mathbb{R}$  ist étale. Jede Einbettung einer offenen Teilmenge ist étale. Jede Verknüpfung étaler Abbildungen ist étale.

*Übung 4.1.7.* Jede étale Abbildung ist offen, jede surjektive étale Abbildung ist nach ?? also final. Sind  $f$  und  $g$  verknüpfbare stetige Abbildungen und sind  $f$  und  $fg$  étale, so ist auch  $g$  étale.

*Ergänzende Übung 4.1.8.* Ist  $\tilde{X} \rightarrow X$  étale und  $Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so ist auch der pullback  $\tilde{X} \times_X Y \rightarrow Y$  étale.

*Übung 4.1.9.* Ist  $\tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so ist auch der pullback  $\tilde{X} \times_X Y \rightarrow Y$  eine Überlagerung. (Hinweis: 3.1.7.) Sind  $\tilde{X} \rightarrow X$  und  $\hat{X} \rightarrow X$  Überlagerungen, so auch ihr Faserprodukt  $\tilde{X} \times_X \hat{X} \rightarrow X$ .

*Übung 4.1.10.* Sind  $p : X \rightarrow Y$  und  $q : Y \rightarrow Z$  Überlagerungen und sind die Fasern von  $q$  endlich, so ist auch  $q \circ p$  eine Überlagerung.

*Übung 4.1.11.* Ist ein Raum lokal zusammenhängend, so ist jede Zusammenhangskomponente einer Überlagerung dieses Raums auch selbst eine Überlagerung besagten Raums.

*Ergänzende Übung 4.1.12.* Jede étale Abbildung von einem kompakten Hausdorffraum in einen Hausdorffraum ist eine Überlagerung.

## 4.2 Kategorien von Mengen mit Gruppenwirkung

4.2.1. Wir gehen nun davon aus, daß der Leser mit den grundlegenden Begriffsbildungen zu Gruppenwirkungen vertraut ist, wie sie zum Beispiel in ?? entwickelt werden.

**Definition 4.2.2.** Sei  $G$  eine Gruppe. Eine Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  von einer  $G$ -Menge  $X$  in eine weitere  $G$ -Menge  $Y$  heißt ein  **$G$ -Morphismus** oder auch  **$G$ -äquivariant** genau dann, wenn gilt  $\phi(gx) = g\phi(x) \forall g \in G, x \in X$ .

Mit den äquivarianten Abbildungen als Morphismen bilden die  $G$ -Mengen eine Kategorie, die wir mit  $G$ -Ens oder  $\text{Ens}^G$  bezeichnen. In derselben Weise bilden auch die  $G$ -Rechtsmengen eine Kategorie, die wir mit  $\text{Ens-}G$  bezeichnen, oder auch  $\text{Ens}^G$ , wenn wir vom Leser erwarten, daß er aus dem Kontext erschließt, ob Linksoperationen oder Rechtsoperationen gemeint sind. Dieselben Begriffe verwenden wir allgemeiner auch für  $G$  ein Monoid.

*Ergänzung 4.2.3.* Im Rahmen der Kategorientheorie könnten wir diese Kategorie auch beschreiben als die Kategorie

$$G\text{-Ens} = \text{Cat}([G], \text{Ens})$$

aller Funktoren von der Kategorie  $[G]$  aus ?? mit einem Objekt und je einem Morphismus von diesem Objekt zu sich selber für alle  $g \in G$  in die Kategorie der Mengen.

*Ergänzende Übung 4.2.4.* Genau dann stimmen für einen gegebenen homogenen Raum alle Isotropiegruppen überein, wenn er isomorph ist zum Quotienten der Gruppe nach einem Normalteiler. Wir sagen dann auch, der homogene Raum sei **normal**. Hinweis: ?. Ich finde diese Begriffsbildung ungeschickt: Normal zu sein ist für homogene Räume etwas ganz Besonderes, ebenso wie es leider für eine Untergruppe auch etwas ganz Besonderes ist, ein Normalteiler zu sein. Aber gut, vielleicht ist es ja bei Menschen auch so, daß normal zu sein etwas ganz Besonderes ist.

*Übung 4.2.5.* Jede Gruppe operiert auf der Menge aller ihrer Untergruppen durch Konjugation. Die Bahnen dieser Operation nennt man **Konjugationsklassen von Untergruppen**. Man zeige, daß für jede Gruppe  $G$  das Bilden der Gesamtheit aller Isotropiegruppen eine Bijektion liefert

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Transitive } G\text{-Mengen,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Konjugationsklassen von} \\ \text{Untergruppen von } G \end{array} \right\}$$

$$X \qquad \mapsto \qquad \{G_x \mid x \in X\}$$

*Übung 4.2.6.* Man zeige, daß die Linksoperation einer Gruppe  $G$  auf sich selbst einen Isomorphismus induziert zwischen der Gruppe  $G$  und der Automorphismengruppe der  $G$ -Rechtsmenge  $G$ , in Formeln  $G \xrightarrow{\sim} (\text{Ens-}G)^\times(G)$ ,  $g \mapsto (g \cdot)$ . Ebenso haben wir  $G \xrightarrow{\sim} (G\text{-Ens})^\times(G)$ ,  $g \mapsto (\cdot g^{-1})$ .

*Übung 4.2.7.* Der **Normalisator** einer Untergruppe  $H$  in einer Gruppe  $G$  ist definiert als die Untergruppe  $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$  von  $G$ . Man zeige, daß die Zuordnung  $g \mapsto (\cdot g^{-1})$ , die also jedem  $g \in G$  die Multiplikation von rechts mit  $g^{-1}$  zuordnet, einen Isomorphismus

$$N_G(H)/H \xrightarrow{\sim} (G\text{-Ens})^\times(G/H)$$

induziert zwischen der Quotientengruppe  $N_G(H)/H$  und der Automorphismengruppe der  $G$ -Menge  $G/H$ .

*Ergänzung 4.2.8.* Im Fall einer endlichen Untergruppe  $H$  in einer Gruppe  $G$  könnte man den Normalisator auch als die Teilmenge  $\{g \in G \mid gHg^{-1} \subset H\}$  charakterisieren. Im allgemeinen erhält man so jedoch gar keine Untergruppe, vergleiche 4.8.7 für ein Gegenbeispiel.

*Ergänzende Übung 4.2.9.* Gegeben Gruppen  $H, G$  bezeichne  $H$ -Ens- $G$  die Kategorie aller Mengen  $X$  mit einer Linksoperation von  $H$  und einer Rechtsoperation von  $G$  derart, daß gilt  $(hx)g = h(xg)$  für alle  $h \in H, x \in X$  und  $g \in G$ . Man erkläre, in welcher Weise diejenigen Objekte dieser Kategorie, auf denen die Rechtsoperation von  $G$  frei und transitiv ist, klassifiziert werden durch  $G$ -Konjugationsklassen von Gruppenhomomorphismen  $H \rightarrow G$ .

*Übung 4.2.10.* Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $A \in \mathcal{C}$  ein Objekt und  $G = \mathcal{C}^\times(A)$  seine Automorphismengruppe, so erhalten wir stets einen Funktor  $\mathcal{C}(A, \_): \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens-}G$ , indem wir setzen  $fg = f \circ g$  für  $B \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}(A, B)$  und  $g \in \mathcal{C}^\times(A)$ .

### 4.3 Quotientenabbildungen als Überlagerungen

**Definition 4.3.1.** Unter einer **Operation einer Gruppe auf einem Objekt einer Kategorie** versteht man einen Homomorphismus von besagter Gruppe in die Automorphismengruppe von besagtem Objekt.

4.3.2. Reden wir zum Beispiel von einer Operation einer Gruppe  $G$  auf einem topologischen Raum  $X$ , so fordern wir implizit, daß für alle  $g \in G$  die Abbildung  $X \rightarrow X, x \mapsto gx$  stetig sein soll. Gemeint ist hier die Operation einer abstrakten Gruppe.

**Definition 4.3.3.** Eine Operation einer Gruppe  $G$  auf einem topologischen Raum  $X$  heißt **topologisch frei** genau dann, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt, für die die Operation eine Injektion  $G \times U \hookrightarrow X$  liefert.

4.3.4. In der Literatur heißen unsere topologische freien Operationen meist **eigentlich diskontinuierlich**.

*Beispiele 4.3.5.* Die Gruppe  $\mathbb{Z}^n$  operiert topologisch frei durch Addition auf  $\mathbb{R}^n$ . Die Gruppe  $\{+1, -1\}$  operiert topologisch frei durch Multiplikation auf  $S^n$  und  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Für festes  $k$  operiert die Gruppe der  $k$ -ten Einheitswurzeln  $\{z \in \mathbb{C} \mid z^k = 1\}$  topologisch frei auf  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ . Die Operation von  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathbb{R}$  durch Addition ist frei, aber nicht topologisch frei.

*Übung 4.3.6.* Jede freie Operation einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorff-Raum ist topologisch frei.

4.3.7. Ist  $X$  ein topologischer Raum mit einer Operation einer Gruppe  $G$ , so geben wir dem Bahnenraum  $X/G$  die Quotiententopologie bezüglich der Surjektion  $X \rightarrow X/G$ . Wie wir in ?? gesehen haben, ist in diesem Fall sogar für einen beliebigen weiteren Raum  $Y$  die Abbildung  $Y \times X \rightarrow Y \times (X/G)$  final, die offensichtliche Abbildung liefert mithin einen Homöomorphismus  $(Y \times X)/G \xrightarrow{\sim} Y \times (X/G)$ .

**Satz 4.3.8 (Quotientenabbildungen als Überlagerungen).** *Ist  $X$  ein topologischer Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe  $G$ , so ist die Surjektion auf den Bahnenraum  $p : X \rightarrow X/G, x \mapsto Gx$  eine Überlagerung.*

*Beweis.* Gegeben  $x \in X$  und  $U$  eine offene Umgebung von  $x$  mit  $G \times U \hookrightarrow X$  sind sowohl  $p : U \rightarrow p(U)$  als auch  $G \times U \rightarrow p^{-1}(p(U))$  Homöomorphismen, da diese Abbildungen beide bijektiv, offen und stetig sind. Folglich ist  $p(U)$  eine trivial überlagerte Umgebung von  $Gx$ .  $\square$

*Übung 4.3.9.* Ist in der Situation des Satzes  $H \subset G$  eine Untergruppe, so ist auch  $X/H \rightarrow X/G$  eine Überlagerung.

*Beispiel 4.3.10.* Die Klein'sche Flasche kann realisiert werden als der Quotient der Ebene nach einer topologisch frei operierenden Gruppe, wie nebenstehendes Bild illustriert.

## 4.4 Lifts und Decktransformationen

**Definition 4.4.1.** Seien  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  und  $f : Y \rightarrow X$  stetige Abbildungen. Eine stetige Abbildung  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p \circ \tilde{f} = f$  heißt ein **Lift** oder eine **Hochhebung** von  $f$ . In der Kategorientheorie hatten wir so einen Lift einen "Morphismus über  $X$ " genannt. Der Begriff Lift ist insbesondere dann gebräuchlich, wenn  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung ist. Man mag sich einen Lift durch das folgende kommutative Diagramm veranschaulichen, das gleichzeitig auch die Terminologie erklärt:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

**Satz 4.4.2 (Eindeutigkeit von Lifts).** *Seien  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $f : Y \rightarrow X$  stetig. Seien  $\tilde{f}, \hat{f}$  zwei Lifts von  $f$ . Ist  $Y$  zusammenhängend und gibt es  $z \in Y$  mit  $\tilde{f}(z) = \hat{f}(z)$ , so gilt  $\tilde{f} = \hat{f}$ .*



Dieses Bild der Fläche  $F(aabb)$  von Seite 78 kann gelesen werden als eine Darstellung der Klein'schen Flasche als der Quotient der Ebene nach einer topologisch frei operierenden Gruppe, die von zwei Gleitspiegelungen mit parallelen Achsen und demselben Verschiebungsvektor erzeugt wird. Die Gleitspiegelachsen zweier erzeugender Gleitspiegelungen sind hier gestrichelt eingezeichnet.

*Beweis.* Wir zeigen: Die Mengen  $Y_g = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \hat{f}(y)\}$  und  $Y_u = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) \neq \hat{f}(y)\}$  sind beide offen. Aus  $z \in Y_g$  und  $Y$  zusammenhängend folgt dann  $Y_u = \emptyset$ . Sei also  $y \in Y$  ein Punkt. Man wähle eine trivial überlagerte Umgebung  $U$  von  $f(y)$  und eine Trivialisierung  $p^{-1}(U) \simeq F \times U$  von  $p$  auf  $U$ . Gegeben  $i \in F$  kürzen wir  $\{i\} \times U$  als  $i \times U$  ab. Seien nun  $\tilde{i}, \hat{i} \in F$  gegeben durch  $\tilde{f}(y) \in \tilde{i} \times U$  und  $\hat{f}(y) \in \hat{i} \times U$ . Dann ist

$$W = \tilde{f}^{-1}(\tilde{i} \times U) \cap \hat{f}^{-1}(\hat{i} \times U)$$

eine Umgebung von  $y$ , und es gilt  $W \subset Y_g$  falls  $y \in Y_g$  und  $W \subset Y_u$  falls  $y \in Y_u$ . Mithin sind  $Y_g$  und  $Y_u$  beide offen.  $\square$

**Definition 4.4.3.** Seien  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  und  $q : \hat{X} \rightarrow X$  Überlagerungen eines topologischen Raums  $X$ . Ein Lift von  $p$ , als da heißt eine stetige Abbildung  $d : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  mit  $q \circ d = p$ , heißt auch eine **Decktransformation** zwischen unseren Überlagerungen. Wir erhalten so die Kategorie

$$\text{Üb}_X$$

aller Überlagerungen von  $X$ , mit Überlagerungen als Objekten und Decktransformationen als Morphismen. Wir bezeichnen die Menge aller Decktransformationen zwischen zwei Überlagerungen  $\tilde{X}$  und  $\hat{X}$  eines Raums  $X$  nach unseren Konventionen mit  $\text{Top}_X(\tilde{X}, \hat{X})$ . Die Automorphismen einer Überlagerung heißen auch ihre **Deckbewegungen**. Wir schreiben nach unseren Konventionen  $\text{Top}_X^\times(\tilde{X})$  für die Gruppe der Deckbewegungen von  $\tilde{X}$  über  $X$ .

*Beispiele 4.4.4.* Die Deckbewegungen unserer Überlagerung  $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  sind genau die Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x + n$  für  $n \in \mathbb{Z}$ . Ist allgemeiner  $X$  zusammenhängend und operiert die Gruppe  $G$  topologisch frei auf  $X$ , so sind die Abbildungen  $x \mapsto gx$  für  $g \in G$  genau die Deckbewegungen der Überlagerung  $X \rightarrow G \backslash X$ . Das folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit von Lifts auf zusammenhängenden Räumen 4.4.2.

*Bemerkung 4.4.5.* Eine Decktransformation von einer Überlagerung auf sich selber muß keine Deckbewegung sein, vergleiche 4.8.7 für ein Gegenbeispiel. Etwas allgemeiner nenne ich Morphismen in  $\text{Top}_X$  auch dann **Decktransformationen**, wenn die beteiligten Räume über  $X$  keine Überlagerungen sind.

4.4.6. Da jede Überlagerungsabbildung étale ist, muß nach 4.1.7 auch jede Decktransformation étale sein. Insbesondere ist also jede Decktransformation offen und jede bijektive Decktransformation ein Isomorphismus von Überlagerungen.

*Ergänzung 4.4.7.* Mir ist nicht klar, ob jede Decktransformation bereits selbst eine Überlagerungsabbildung sein muß. Das gilt jedoch für lokal zusammenhängende Räume.

*Übung 4.4.8.* Sei  $\tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum  $\tilde{X}$  und  $G = \text{Top}_X^\times(\tilde{X})$  ihre Deckbewegungsgruppe. Man zeige, daß  $G$  topologisch frei auf  $\tilde{X}$  operiert und daß  $(G \backslash \tilde{X}) \rightarrow X$  eine Überlagerung ist.

**Definition 4.4.9.** Eine zusammenhängende Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  derart, daß die Gruppe der Deckbewegungen transitiv auf der Faser  $p^{-1}(x)$  über jedem Punkt  $x \in X$  operiert, nennt man auch **normal** oder **Galois** oder **regulär**.

*Übung 4.4.10 (Normale Hülle).* Man zeige, daß jede endliche zusammenhängende lokal zusammenhängende surjektive Überlagerung selbst eine endliche Überlagerung besitzt derart, daß die Verknüpfung der beiden Überlagerungsabbildungen eine normale Überlagerung ist. Hinweis: Man bilde über der Basis das Faserprodukt einiger Kopien unserer Überlagerung mit sich selbst und nehme darin eine geeignete Zusammenhangskomponente. Man zeige auch, daß es zu je zwei endlichen zusammenhängenden lokal zusammenhängenden surjektiven Überlagerungen eine weitere endlichen zusammenhängende Überlagerung gibt, die über beide als Überlagerungsabbildung faktorisiert.

## 4.5 Universelle Überlagerungen

**Definition 4.5.1.** Eine Überlagerung  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  eines punktierten Raums  $(X, x)$  heißt **universell** genau dann, wenn es für jede weitere Überlagerung  $(\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$  des besagten punktierten Raums genau eine basispunkterhaltende Decktransformation  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$  gibt.

4.5.2. In kategorientheoretischer Terminologie ist eine universelle Überlagerung eines punktierten Raums also ein initiales Objekt in der Kategorie aller seiner punktierten Überlagerungen. Insbesondere ist eine universelle Überlagerung eines punktierten Raums eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, weshalb sie den bestimmten Artikel verdient und wir guten Gewissens von *der* universellen Überlagerung reden dürfen. Universelle Überlagerungen in der basispunktfreien Situation, wie wir sie gleich im Anschluß definieren werden, haben meines Wissens keine vernünftige universelle Eigenschaft und sind auch nur eindeutig bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus. Wir erlauben uns dennoch auch in dieser Situation den bestimmten Artikel.





Versuch der bildlichen Darstellung einer dreiblättrigen Überlagerung der  
Acht, die keine nichttrivialen Decktransformationen zuläßt. Diese  
Überlagerung ist also nicht normal.



Versuch der graphischen Darstellung einer universellen Überlagerung einer punktierten Kreislinie. Gemeint ist eine nach oben und unten unendliche Spirale, die vertikal auf die Kreislinie projiziert wird.

**Definition 4.5.3.** Eine Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eines topologischen Raums  $X$  heißt **universell** genau dann, wenn sie surjektiv ist, beide Räume nicht leer sind, und für alle  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  die Überlagerung von punktierten Räumen  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, p(\tilde{x}))$  universell ist im Sinne der vorhergehenden Definition.

*Beispiel 4.5.4.* Die Überlagerung  $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  ist universell, wie aus 4.5.8 und 4.5.12 leicht folgen wird. Allgemeiner wird aus 4.7.3 folgen, daß eine surjektive Überlagerung durch einen zusammenhängenden lokal wegzusammenhängenden Raum mit trivialer Fundamentalgruppe stets universell ist.

**Definition 4.5.5.** Ein topologischer Raum heißt **einfach zusammenhängend** genau dann, wenn er nicht leer ist und jede Überlagerung unseres Raums trivial ist.

4.5.6. Ein einfach zusammenhängender Raum ist offensichtlich zusammenhängend, da eine disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen stets nichttriviale Überlagerungen besitzt.

**Lemma 4.5.7.** *Ein Raum ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn die Identität auf unserem Raum eine universelle Überlagerung ist.*

*Beweis.* Daß die Identität auf jedem einfach zusammenhängenden Raum eine universelle Überlagerung ist, scheint mir im Lichte von 4.5.6 und 4.4.2 offensichtlich. Ist umgekehrt die Identität auf einem Raum  $Y$  eine universelle Überlagerung, so ist nach unseren Definitionen  $Y$  nicht leer. Ist dann  $p : \hat{Y} \rightarrow Y$  eine Überlagerung und wählen wir  $y \in Y$ , so können wir unter unseren Annahmen eine Abbildung

$$p^{-1}(y) \times Y \rightarrow \hat{Y}$$

definieren, indem wir jedem Paar  $(\hat{y}, z)$  das Bild von  $z$  unter dem eindeutig bestimmten Lift  $(Y, y) \rightarrow (\hat{Y}, \hat{y})$  der Identität zuordnen. Sicher ist unsere Abbildung stetig und offen. Wenden wir die Annahme des Lemmas auch auf die anderen Punkte von  $Y$  an, so erkennen wir, daß unsere Abbildung zusätzlich injektiv und surjektiv ist und damit die Überlagerung  $\hat{Y} \rightarrow Y$  trivial.  $\square$

**Lemma 4.5.8.** *Nichtleere reelle Intervalle sind einfach zusammenhängend.*

*Beweis.* Wir zeigen das nur für kompakte Intervalle, der allgemeine Fall bleibt dem Leser zur Übung. Wir benutzen das Kriterium aus 4.5.7. Sei also  $p : U \rightarrow [a, b]$  eine Überlagerung. Aus Kompaktheitsgründen finden wir eine Unterteilung  $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$  derart, daß jedes der Teilintervalle  $[a_{i-1}, a_i]$  trivial überlagert ist. Gegeben ein Punkt  $u \in U$  finden wir

zunächst ein  $i$  mit  $p(u) \in [a_{i-1}, a_i]$ , dann einen Lift  $[a_{i-1}, a_i] \rightarrow U$  der Einbettung  $[a_{i-1}, a_i] \hookrightarrow [a, b]$ , dessen Bild unseren Punkt  $u$  enthält, und diesen Lift können wir schließlich induktiv auf ganz  $[a, b]$  erweitern.  $\square$

*Übung 4.5.9.* Das Quadrat  $[0, 1]^2$  und allgemeiner alle Hyperkuben  $[0, 1]^n$  sind einfach zusammenhängend.

*Bemerkung 4.5.10.* Später wird uns 4.7.4 ein einfaches Kriterium für einfachen Zusammenhang liefern, dessen Beweis aber bereits verwendet, daß das ebene Quadrat  $[0, 1]^2$  einfach zusammenhängend ist. In 4.13.3 zeigen wir, daß ganz allgemein das Produkt zweier einfach zusammenhängender Räume einfach zusammenhängend ist, falls einer der Faktoren zusätzlich lokal zusammenhängend ist.

**Satz 4.5.11 (Existenz von Lifts bei einfachem Zusammenhang).** *Sei  $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$  eine stetige Abbildung und  $(\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$  eine Überlagerung. Ist  $Y$  einfach zusammenhängend, so besitzt  $f$  genau einen Lift  $\hat{f} : (Y, y) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$ .*

*Beweis.* Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz 4.4.2 über die Eindeutigkeit von Lifts, da ja  $Y$  zusammenhängend ist nach 4.5.6. Die wesentliche neue Aussage betrifft die Existenz. Wir betrachten dazu das pull-back-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \hat{X} & \rightarrow & \hat{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \rightarrow & X \end{array}$$

Da  $Y$  einfach zusammenhängend ist, muß die linke Vertikale eine triviale Überlagerung sein. Wir finden also eine stetige Abbildung  $Y \rightarrow Y \times_X \hat{X}$  mit  $y \mapsto (y, \hat{x})$ . Verknüpfen wir diese stetige Abbildung mit der oberen Horizontalen, so ergibt sich der gesuchte Lift.  $\square$

**Korollar 4.5.12.** *Jede surjektive Überlagerung durch einen einfach zusammenhängenden Raum ist universell.*

*Bemerkung 4.5.13.* Ich weiß nicht, ob umgekehrt jede universelle Überlagerung durch einen einfach zusammenhängenden Raum geschehen muß. Sind unsere Räume jedoch lokal einfach zusammenhängend, so folgt das aus der Erkenntnis, daß die Verknüpfung von zwei Überlagerungsabbildungen zwischen lokal einfach zusammenhängenden Räumen wieder eine Überlagerungsabbildung sein muß.

*Beispiel 4.5.14.* Die Klein'sche Flasche hat nach 4.3.10 als universelle Überlagerung die Ebene. Dasselbe gilt im Übrigen für alle unsere kompakten zusammenhängenden Flächen mit Ausnahme der Kugelschale  $S^2$  und des zweidimensionalen reell-projektiven Raums  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ .



Graphische Darstellung eines Teils einer universellen Überlagerung der Figur 8. Jede vertikale Kante dieses Bildes geht unter der Überlagerungsabbildung homöomorph auf die obere Schlaufe der 8, jede horizontale Kante auf die untere Schlaufe der 8, und zwar soll das Durlaufen von unten nach oben bzw. von rechts nach links dabei jeweils dem Durchlaufen im Uhrzeigersinn entsprechen. Es gilt also salopp gesagt, “sich alle Kanten dieses Bildes gleich lang zu denken”. Die Kreuzungspunkte sind nach 4.8.3 in Bijektion zu den Elementen der freien Gruppe in zwei Erzeugern  $x$  und  $y$ , indem man etwa von der Mitte ausgehend jedes  $x$  interpretiert als “gehe nach rechts zum nächsten Kreuzungspunkt”, jedes  $x^{-1}$  als “gehe nach links”, jedes  $y$  als “gehe nach oben” und  $y^{-1}$  als “gehe nach unten”.

*Übung 4.5.15.* Sei  $u : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung mit Deckbewegungsgruppe  $G = \text{Top}_X^\times(\tilde{X})$ . Man zeige, daß  $G$  topologisch frei auf  $\tilde{X}$  operiert und daß  $u$  einen Homöomorphismus  $G \backslash \tilde{X} \xrightarrow{\sim} X$  induziert.

*Übung 4.5.16.* Für  $n \geq 1$  betrachte man den Kreis  $K_n \subset \mathbb{R}^2$  mit Radius  $1/n$ , der rechts von der  $y$ -Achse liegt und diese im Ursprung berührt. Man zeige, daß der Raum  $X = \bigcup_{n \geq 1} K_n$  keine universelle Überlagerung besitzt. Dieser sogenannte **Kreisraum** dient oft als Gegenbeispiel.

## 4.6 Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern

**Definition 4.6.1.** Seien  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $x, y \in X$  zwei Punkte und  $\gamma \in \Omega(X, y, x)$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ . So definieren wir eine Abbildung von der Faser bei  $x$  in die Faser bei  $y$

$$\langle \gamma \rangle : p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$$

wie folgt: Da nach 4.5.8 das Intervall  $[0, 1]$  einfach zusammenhängend ist, gibt es nach 4.5.11 für jeden Punkt  $z \in p^{-1}(x)$  genau einen Lift  $\tilde{\gamma}_z$  von  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $\tilde{\gamma}_z(0) = z$ . Wir definieren  $\langle \gamma \rangle(z)$  als seinen Endpunkt, in Formeln  $\langle \gamma \rangle(z) = \tilde{\gamma}_z(1)$ .

**Lemma 4.6.2.** Sei  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung.

1. Sind  $x, y \in X$  Punkte und  $\gamma \simeq \beta$  homotope Wege vom einen zum anderen, so liefern sie dieselbe Abbildung  $\langle \gamma \rangle = \langle \beta \rangle$  zwischen den Fasern. Insbesondere ist also auch für eine Homotopieklasse  $\gamma$  von Wegen die Abbildung  $\langle \gamma \rangle$  wohldefiniert.
2. Der konstante Weg  $\varepsilon$  bei  $x \in X$  definiert auf der Faser  $p^{-1}(x)$  die identische Abbildung  $\langle \varepsilon \rangle = \text{id}$ .
3. Sind  $\beta$  und  $\gamma$  verknüpfbare Wege in  $X$ , so gilt  $\langle \beta \rangle \circ \langle \gamma \rangle = \langle \beta * \gamma \rangle$ .

*Beweis.* Wir zeigen nur die erste Aussage, die beiden anderen sind klar nach den Definitionen. Sei  $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$  eine Homotopie (mit festen Endpunkten) zwischen unseren Wegen. Auf der vorderen bzw. hinteren Kante unseres Quadrats haben wir also  $H(0, t) = \gamma(t)$  bzw.  $H(1, t) = \beta(t)$ , und auf der oberen und der unteren Kante ist  $H$  konstant. Da unser Quadrat nach 4.5.9 einfach zusammenhängend ist, gibt es für alle  $z \in p^{-1}(x)$  einen Lift  $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}$  von  $H$  mit  $\tilde{H}(0, 0) = z$ . Nach dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts ist dieser Lift konstant  $z$  auf der unteren Kante, folglich ist er auf der vorderen bzw. hinteren Kante der Lift mit Anfangspunkt  $z$  von  $\gamma$  bzw.  $\beta$ . Da aber unser Lift auch konstant sein muß auf der oberen Kante, folgt  $\langle \gamma \rangle(z) = \langle \beta \rangle(z)$ .  $\square$



Versuch der graphischen Darstellung des Kreisraums. Man muß sich dabei allerdings noch unendlich viele immer kleinere Kreise hinzudenken.

SkriptenBilder/BildUPKn.png

Eine dreiblättrige Überlagerung der Acht, ein Punkt unten und die drei Punkte der Faser darüber, ein geschlossener Weg unten und die zugehörige Operation auf der Faser am Beispiel des “untersten” Punktes der Faser, der in diesem Fall auf den “obersten” Punkt der Faser geschoben wird.



**Satz 4.6.3 (Faserfunktör).** 1. Ist  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $x \in X$  ein Punkt, so definiert die Zuordnung  $\gamma \mapsto \langle \gamma \rangle$  eine Operation der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x)$  auf der Faser  $p^{-1}(x)$  über dem Basispunkt alias einen Gruppenhomomorphismus  $\pi_1(X, x) \rightarrow \text{Ens}^\times(p^{-1}(x))$ .

2. Ist  $q : \hat{X} \rightarrow X$  eine zweite Überlagerung und  $d : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  eine Decktransformation, so ist die Einschränkung  $d : p^{-1}(x) \rightarrow q^{-1}(x)$  auf die Fasern über  $x$  eine  $\pi_1(X, x)$ -äquivalente Abbildung.

4.6.4. Für einen punktierten topologischen Raum  $(X, x)$  erhalten wir also einen Funktor von der Kategorie seiner Überlagerungen in die Kategorie der Mengen mit Operation der Fundamentalgruppe, indem wir jeder Überlagerung von  $X$  ihre Faser bei  $x$  zuordnen. Dieser sogenannte **Faserfunktör**  $F = F_x$  wird in Formeln gegeben durch die Vorschrift

$$F = F_x : \begin{array}{ccc} \ddot{\text{Üb}}_X & \rightarrow & \pi_1(X, x)\text{-Ens} \\ p & \mapsto & p^{-1}(x) \end{array}$$

*Beweis.* Teil 1 folgt sofort aus dem vorhergehenden Lemma. Für Teil 2 müssen wir prüfen, daß gilt  $d \circ \langle \gamma \rangle = \langle \gamma \rangle \circ d$  für alle  $\gamma \in \pi_1(X, x)$ . Aber für  $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$  und  $z \in p^{-1}(x)$  ist ja  $\langle \gamma \rangle(z) = \tilde{\gamma}_z(1)$  für den Lift  $\tilde{\gamma}_z$  von  $\gamma$  in  $\tilde{X}$  mit Anfangspunkt  $z$ , und offensichtlich ist  $d \circ \tilde{\gamma}_z$  genau der Lift  $\hat{\gamma}_{d(z)}$  von  $\gamma$  in  $\hat{X}$  mit Anfangspunkt  $d(z)$ . Wir erhalten also  $d\langle \gamma \rangle(z) = d(\tilde{\gamma}_z(1)) = \hat{\gamma}_{d(z)}(1) = \langle \gamma \rangle d(z)$ .  $\square$

*Übung 4.6.5.* Man erkläre die Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern im Fall der auf Seite 97 dargestellten Überlagerung der Acht.

**Definition 4.6.6.** Eine Sequenz  $(X, x) \rightarrow (Y, y) \rightarrow (Z, z)$  von punktierten Mengen heißt **exakt** genau dann, wenn das Urbild in  $Y$  des ausgezeichneten Punktes  $z \in Z$  genau das Bild von  $X \rightarrow Y$  ist. Eine längere Sequenz von punktierten Mengen heißt exakt genau dann, wenn sie an jeder Stelle exakt ist. Eine Gruppe fassen wir in diesem Kontext stets auf als eine punktierte Menge mit dem neutralen Element als ausgezeichnetem Punkt. Eine Sequenz von punktierten Mengen  $(X, x) \rightarrow (Y, y) \rightarrow (Z, z)$  heißt eine **kurze exakte Sequenz** genau dann, wenn sie exakt ist in der Mitte und wenn außerdem die erste Abbildung injektiv ist und die zweite surjektiv. Wir notieren kurze exakte Sequenzen meist  $(X, x) \hookrightarrow (Y, y) \twoheadrightarrow (Z, z)$ .

4.6.7. Die Zuordnung, die jedem topologischen Raum  $X$  die Menge  $\pi_0(X)$  seiner Wegzusammenhangskomponenten zuordnet, ist ein Funktor  $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Ens}$ . Indem wir die Komponente des ausgezeichneten Punktes auszeichnen,

erhalten wir ebenso einen Funktor  $\pi_0 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Ens}^*$ . Für eine diskrete Menge  $F$  mit ausgezeichnetem Punkt  $\tilde{x} \in F$  haben wir also kanonisch  $\pi_0(F, \tilde{x}) = (F, \tilde{x})$ .

**Satz 4.6.8 (Die Fundamentalgruppe einer Überlagerung).** *Gegeben  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  eine Überlagerung punktierter Räume und  $F = p^{-1}(x)$  die Faser über dem ausgezeichneten Punkt erhalten wir mit  $\gamma \mapsto \langle \gamma \rangle(\tilde{x})$  als mittlerer Abbildung und den offensichtlichen Abbildungen vorne und hinten eine exakte Sequenz*

$$\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \hookrightarrow \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_0(F, \tilde{x}) \rightarrow \pi_0(\tilde{X}, \tilde{x})$$

4.6.9. Statt die Injektivität des ersten Pfeils durch  $\hookrightarrow$  anzudeuten, hätten wir die Sequenz auch links durch die triviale Gruppe  $\pi_1(F, \tilde{x})$  erweitern können. Hat unsere Überlagerung zusätzlich konstante Blätterzahl, so können wir unsere Sequenz darüber hinaus durch eine Surjektion auf  $\pi_0(X, x)$  nach rechts erweitern. Sie ist dann das Schlußstück der sogenannten “langen exakten Homotopiesequenz” zu einer sehr speziellen “Faserung”.

4.6.10. Insbesondere sagt uns dieser Satz, daß im Fall einer wegzusammenhängenden Überlagerung die Fundamentalgruppe der Basis  $\pi_1(X, x)$  transitiv operiert auf der Faser  $F = p^{-1}(x)$  über  $x$ , und daß wir die Isotropiegruppe eines Punktes  $\tilde{x}$  aus der Faser unter dieser Operation in kanonischer Weise identifizieren können mit der Fundamentalgruppe  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  der Überlagerung.

*Beweis.* Seien  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$  beliebig und  $x, y \in X$  ihre Bilder. So liefert nach unseren Definitionen  $p$  eine Bijektion

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{y}, \tilde{x}) \xrightarrow{\sim} \{\gamma \in \Omega(X, y, x) \mid \langle \gamma \rangle(\tilde{x}) = \tilde{y}\},$$

und diese Bijektion induziert eine Bijektion auf Homotopieklassen. Setzen wir  $\tilde{y} = \tilde{x}$ , so ergibt sich die Injektivität der ersten Abbildung und die Exaktheit unserer Sequenz an der Stelle  $\pi_1(X, x)$ . Läßt sich ein Punkt  $\tilde{y}$  aus der Faser  $F$  in  $\tilde{X}$  durch einen Weg  $\alpha$  mit  $\tilde{x}$  verbinden, so liegt  $\gamma = p \circ \alpha$  in  $\pi_1(X, x)$  und wir haben  $\tilde{y} = \langle \gamma \rangle(\tilde{x})$ . Haben wir umgekehrt  $\tilde{y} = \langle \gamma \rangle(\tilde{x})$  für ein  $\gamma \in \pi_1(X, x)$ , so verbindet der entsprechende Lift von  $\gamma$  auch unsere beiden Punkte in  $\tilde{X}$ . Das zeigt die Exaktheit unserer Sequenz an der Stelle  $\pi_0(F, \tilde{x})$ .  $\square$

4.6.11. Ich erinnere an den Begriff eines wegweise einfach zusammenhängenden Raums aus ???. In der Begrifflichkeit dieser Vorlesung ist das dasselbe wie ein wegweise zusammenhängender Raum mit trivialer Fundamentalgruppe in Bezug auf einen und gleichbedeutend jeden seiner Punkte.

**Korollar 4.6.12 (Fundamentalgruppe eines Bahnenraums).** *Operiert eine Gruppe topologisch frei auf einem wegweise einfach zusammenhängenden Raum, so hat der Bahnenraum besagte Gruppe als Fundamentalgruppe.*

*Ergänzende Übung 4.6.13.* Fordern wir im Korollar 4.6.12 nur  $X$  wegzusammenhängend, so können wir für jedes  $x \in X$  einen surjektiven Gruppenhomomorphismus  $c_x : \pi_1(X/G, \bar{x}) \rightarrow G$  mit Kern  $\pi_1(X, x)$  erklären durch die Vorschrift  $c_x(\gamma)^{-1}x = \langle \gamma \rangle(x)$ , und ist  $y$  ein weiterer Punkt derselben Faser und ist  $\beta \in \pi_1(X/G, \bar{x})$  ein Weg mit  $\langle \beta \rangle(x) = y$ , so gilt  $c_x = c_y \circ \text{int}(\beta)$  alias  $c_x(\gamma) = c_y(\beta\gamma\beta^{-1})$ . Ist  $X$  beliebig, so gilt das alles immer noch mit Ausnahme der Surjektivität der Abbildungen  $c_x$ .

*Ergänzende Übung 4.6.14.* Ist zusätzlich  $Y$  ein weiterer Raum mit einer topologisch freien Operation einer Gruppe  $H$  und  $(f, \varphi)$  ein Paar bestehend aus einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und einem Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  mit  $f(gx) = \varphi(g)f(x)$  für alle  $x \in X$  und  $g \in G$ , so kommutiert für jedes  $x \in X$  mit Bild  $y \in Y$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X/G, \bar{x}) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(Y/H, \bar{y}) \\ c_x \downarrow & & \downarrow c_y \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

*Beweis.* Sei  $X$  unser Raum und  $G$  unsere Gruppe. Bezeichne  $p : X \rightarrow X/G$  die Überlagerungsabbildung. Sei  $x \in X$  ein Punkt und  $p(x) = \bar{x}$  sein Bild im Bahnenraum. Per definitionem operiert  $G$  frei und transitiv auf der Faser  $p^{-1}(\bar{x})$ . Nach 4.6.8 operiert auch  $\pi_1(X/G, \bar{x})$  frei und transitiv auf der Faser, und nach 4.6.3 kommutieren diese beiden Operationen. Das anschließende algebraische Lemma beendet den Beweis und definiert sogar für jeden Punkt  $x$  der Faser einen Isomorphismus  $c_x : \pi_1(X/G, \bar{x}) \xrightarrow{\sim} G$ .  $\square$

**Lemma 4.6.15.** *Operieren zwei Gruppen  $G$  und  $H$  frei und transitiv auf derselben Menge  $F$  und kommutieren diese Operationen, in Formeln  $g(hp) = h(gp) \forall g \in G, h \in H, p \in F$ , so sind die Gruppen  $G$  und  $H$  isomorph.*

4.6.16. Genauer liefert jedes Element  $x \in F$  einen Gruppenisomorphismus  $c = c_x : H \rightarrow G$  mittels der Vorschrift  $hx = c(h)^{-1}x$ , und besagter Isomorphismus ist unabhängig von  $x$  genau dann, wenn die Gruppen  $G$  und  $H$  abelsch sind.

*Beweis.* Wir überlassen die formale Rechnung dem Leser und versuchen stattdessen eher informell, die Aussage transparent zu machen. Da  $H$  frei und transitiv operiert, ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} H & \rightarrow & F \\ h & \mapsto & hx \end{array}$$

eine  $H$ -äquivalente Bijektion. Wir dürfen also  $F = H$  annehmen. Die  $H$ -äquivalenten Abbildungen  $\phi : H \rightarrow H$ , also die Abbildungen  $\phi$  mit  $\phi(hf) = h\phi(f) \quad \forall h, f \in H$ , sind aber genau die Rechtsmultiplikationen mit Elementen von  $H$ . Das ist der strukturelle Grund für unser Lemma.  $\square$

*Beispiele 4.6.17.* Aus dem Korollar folgt insbesondere  $\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$  für  $n \geq 2$  und  $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

*Ergänzung 4.6.18.* Ist ganz allgemein  $K$  irgendein algebraischer Abschluß von  $\mathbb{R}$ , so setzen wir  $\mathbb{Z}_K(-1) = \ker(\exp : K \rightarrow K^\times)$  und finden kanonische Isomorphismen  $\pi_1(K^\times) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_K(-1)$ . Für unseren üblichen Abschluß  $K = \mathbb{C}$  schreiben wir  $2\pi i\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\mathbb{C}}(-1) = \mathbb{Z}(-1)$  und unser allgemeiner Isomorphismus spezialisiert zu einem kanonischen Isomorphismus  $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}(-1)$ , der insofern “kanonischer” ist als die schlichte Identifikation besagter Fundamentalgruppe mit  $\mathbb{Z}$ , als er zum Ausdruck bringt, daß die komplexe Konjugation auf der Fundamentalgruppe von  $\mathbb{C}^\times$  die Multiplikation mit  $-1$  induziert.

*Beispiel 4.6.19.* Das nebenstehende Bild zeigt eine Überlagerung der Figur 8. Die Fundamentalgruppe dieser Überlagerung ist offensichtlich eine nicht endlich erzeugte Untergruppe der Fundamentalgruppe der Figur 8, die ihrerseits durchaus endlich erzeugt ist.

## 4.7 Klassifikation von Überlagerungen

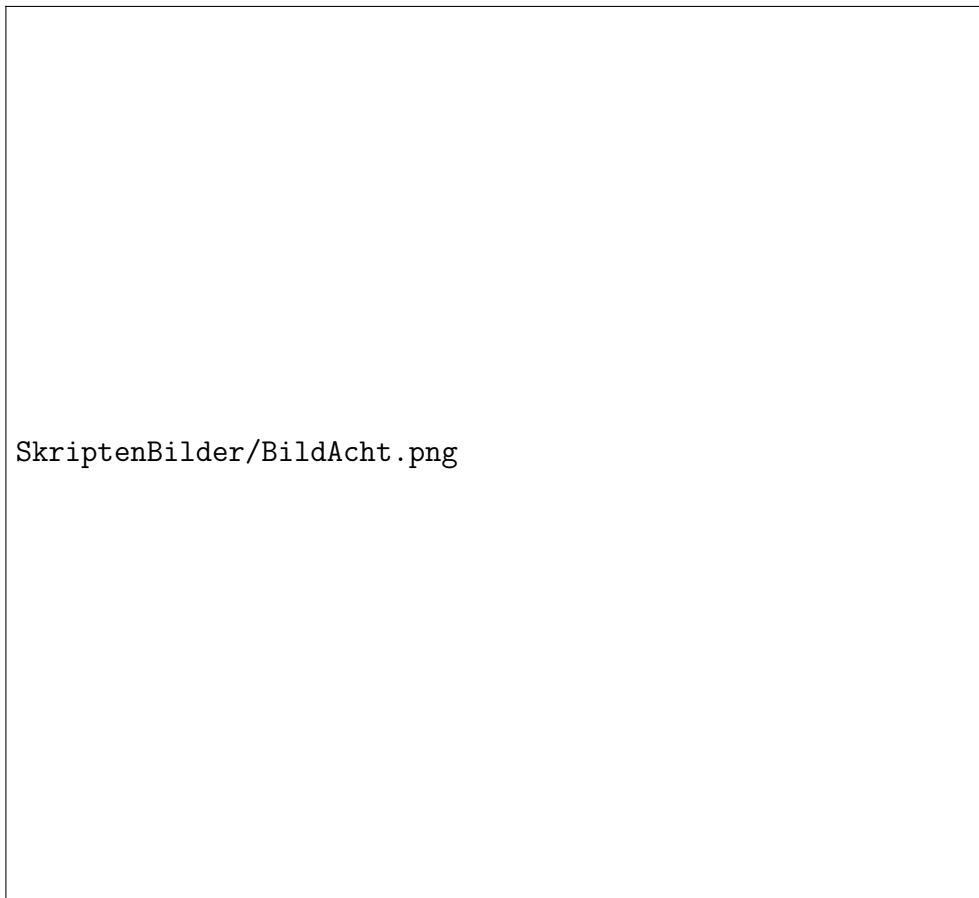
**Satz 4.7.1 (Klassifikation von Überlagerungen).** *Sei  $(X, x)$  ein zusammenhängender lokal zusammenziehbarer punktierter Raum.*

1. *Wir erhalten eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen zusammenhängender punktierter Überlagerungen  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  unseres punktierten Raums  $(X, x)$  und den Untergruppen seiner Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x)$  mittels der Zuordnung*

$$p \mapsto \text{im}(p_\# : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x))$$

2. *Diese Bijektion induziert auch eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von zusammenhängenden Überlagerungen unseres Raums und den Konjugationsklassen von Untergruppen seiner Fundamentalgruppe.*

*Ergänzung 4.7.2.* In der Literatur wird obiger Satz oft allgemeiner für “semi-lokal einfach zusammenhängende” Räume bewiesen. Der hier gegebene Beweis funktioniert ohne Änderungen auch in diesem allgemeineren Kontext. Ich habe es dennoch vorgezogen, mich auf lokal zusammenziehbare Räume zu beschränken, da mir diese Bedingung weniger technisch scheint und da sie



Eine Überlagerung der Figur 8 mit nicht endlich erzeugter  
Fundamentalgruppe.

alle mir bekannten Anwendungen abdeckt. Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir sehen, wie man die in obigem Satz enthaltenen Klassifikationen auch als direktes Korollar des Satzes über den Faserfunktorkorollar 4.8.4 erhalten kann. Ich selber ziehe diesen Zugang vor.

*Beweis.* Der Beweis des ersten Teils wird eine Weile brauchen. Der Zweite folgt dann aus der Erkenntnis, daß für eine andere Wahl von einem Urbildpunkt  $\hat{x} \in \tilde{X}$  von  $x$  das Bild von  $p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \hat{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$  als Untergruppe von  $\pi_1(X, x)$  konjugiert ist zum Bild von  $p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$ , und daß wir eine ganze Konjugationsklasse von Untergruppen erhalten, wenn wir hier alle Punkte der Faser über  $x$  durchlaufen. Das war im Wesentlichen die Aussage von 4.6.10. Für Teil 1 müssen wir zeigen, daß unsere Zuordnung sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Wir beginnen mit der Injektivität und unterbrechen an dieser Stelle den Beweis, um einige Zutaten bereitzustellen.  $\square$

**Satz 4.7.3 (Liftbarkeitskriterium).** *Sei  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  eine Überlagerung,  $(Y, y)$  ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender punktierter Raum und  $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$  stetig. Genau dann existiert ein Lift  $\tilde{f}$  von  $f$ , wenn in  $\pi_1(X, x)$  die Inklusion  $\text{im } f_{\#} \subset \text{im } p_{\#}$  gilt.*

*Beweis.* Wir veranschaulichen uns die Situation mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \tilde{f} \nearrow & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

Existiert ein Lift  $\tilde{f}$ , so folgt  $p_{\#} \circ \tilde{f}_{\#} = f_{\#}$  und damit  $\text{im } f_{\#} \subset \text{im } p_{\#}$ . Um die andere Richtung zu zeigen, bilden wir das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{Y}, \tilde{y}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

und behaupten, daß unter unseren Annahmen  $q_{\#} : \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  surjektiv ist. Sonst gäbe es nämlich einen geschlossenen Weg  $\gamma \in \Omega(Y, y)$  mit  $\langle \gamma \rangle(\tilde{y}) \neq \tilde{y}$ , also  $\langle f \circ \gamma \rangle(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$  da ja die obere Horizontale in unserem Quadrat eine Bijektion  $q^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x)$  induziert, also  $[f \circ \gamma] \notin \text{im } p_{\#}$  im Widerspruch zur Annahme. Aus unseren Voraussetzungen an die Topologie von  $Y$  folgt aber mit 4.1.11, daß die Zusammenhangskomponenten von  $\tilde{Y}$  selbst schon Überlagerungen von  $Y$  sind und daß sie wegzusammenhängend sind. Nach 4.6.8 bildet dann die Zusammenhangskomponente von  $\tilde{y}$  in  $\tilde{Y}$  eine einblättrige Überlagerung von  $Y$ , und die schenkt uns den gesuchten Lift.  $\square$

*Beweis der Injektivität im Klassifikationssatz.* Sind  $(\tilde{X}, \tilde{x})$  und  $(\hat{X}, \hat{x})$  zusammenhängende punktierte Überlagerungen derart, daß die Bilder ihrer Fundamentalgruppen in  $\pi_1(X, x)$  zusammenfallen, so liefert uns das Liftbarkeitskriterium 4.7.3 Decktransformationen hin und zurück, deren Komposition aufgrund der Eindeutigkeit von Lifts jeweils die Identität sein muß. Das zeigt die Injektivität im Klassifikationssatz. Die Surjektivität wird nach einigen Vorbereitungen im nächsten Abschnitt bewiesen.  $\square$

*Übung 4.7.4.* Jeder wegweise einfach zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Raum ist einfach zusammenhängend.

## 4.8 Existenz universeller Überlagerungen

**Satz 4.8.1 (Existenz universeller Überlagerungen).** *Jeder zusammenhängende lokal zusammenziehbare Raum besitzt bis auf Isomorphismus genau eine wegweise einfach zusammenhängende Überlagerung, und diese ist auch seine universelle Überlagerung.*

*Beweis.* Wir zeigen in diesem Beweis zunächst einmal nur, daß unser Raum eine wegweise einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt. Dazu wählen wir  $x \in X$  fest und betrachten die Menge  $\tilde{X}$  aller Homotopieklassen von Wegen mit Anfangspunkt  $x$ ,

$$\tilde{X} = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma \text{ ist stetig, } \gamma(0) = x\} / \simeq$$

wobei  $\simeq$  Homotopie mit festen Endpunkten meint. Die Homotopieklasse von  $\gamma$  heiße wieder  $[\gamma]$ . Insbesondere haben wir also eine Abbildung  $u : \tilde{X} \rightarrow X$ ,  $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ , die jeder Homotopieklasse von Wegen ihren gemeinsamen Endpunkt zuordnet. Sie ist surjektiv, da  $X$  wegzusammenhängend ist. Wir erklären nun auf  $\tilde{X}$  eine Topologie. Für jeden stetigen Weg  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $x$  und jede offene Umgebung  $V$  seines Endpunktes  $\gamma(1)$  setzen wir dazu

$$U(\gamma, V) = \{[\beta * \gamma] \mid \beta : [0, 1] \rightarrow V \text{ ist stetig mit } \beta(0) = \gamma(1)\}$$

und betrachten auf  $\tilde{X}$  die von allen  $U(\gamma, V)$  erzeugte Topologie. Offensichtlich ist  $u : \tilde{X} \rightarrow X$  stetig, das Urbild von  $V$  ist ja gerade die Vereinigung der  $U(\gamma, V)$  über alle Wege  $\gamma$  mit Endpunkt in  $V$ . Wir müssen zeigen, daß  $u$  eine Überlagerung ist. Für  $z \in X$  wählen wir dazu eine offene wegzusammenhängende Umgebung  $V$  von  $z$ , die ganz in einer zusammenziehbaren Umgebung enthalten ist. Natürlich wäre es auch in Ordnung, hier schlicht eine offene zusammenziehbare Umgebung von  $z$  zu nehmen, aber die Existenz einer

Umgebung mit diesen beiden Eigenschaften wird von unseren Bedingungen nicht sichergestellt. Betrachten wir nun die Abbildung

$$\Phi : u^{-1}(z) \times V \rightarrow \tilde{X}, \quad ([\gamma], v) \mapsto [\beta * \gamma],$$

wo  $\beta : [0, 1] \rightarrow V$  irgendein stetiger Weg von  $z$  nach  $v$  ist, der ganz in  $V$  verläuft. Aufgrund unserer Voraussetzungen an  $V$  ist  $\Phi$  wohldefiniert und eine Injektion mit Bild  $u^{-1}(V)$ . Wir zeigen, daß  $\Phi$  ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

1.  $\Phi$  ist stetig. In der Tat, liegt  $\Phi([\gamma], v)$  in  $U(\alpha, W)$ , so auch  $\Phi(\{[\gamma]\} \times V_1)$  für jede offene wegzusammenhängende Umgebung  $V_1$  von  $v$  in  $V \cap W$ .
2.  $\Phi$  ist offen. In der Tat, für wegzusammenhängendes offenes  $V_1 \subset V$  gilt  $\Phi(\{[\gamma]\} \times V_1) = U(\beta * \gamma, V_1)$  für jeden Weg  $\beta : [0, 1] \rightarrow V$  mit  $\beta(0) = z$ ,  $\beta(1) \in V_1$ .

Also ist  $u : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und wir müssen nur noch zeigen, daß die Fundamentalgruppe von  $\tilde{X}$  trivial ist. Bezeichne  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  die Klasse des konstanten Weges  $x$ . Jeder Weg  $\omega : ([0, 1], 0) \rightarrow (X, x)$  mit Anfangspunkt  $x$  hat als Lift den Weg  $\tilde{\omega} : ([0, 1], 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$  gegeben durch  $\tilde{\omega}(s) = [\omega_s]$  mit  $\omega_s(t) = \omega(st)$ . Die Wege  $\omega_s : [0, 1] \rightarrow X$  sind also Anfangsstücke von  $\omega$ , die so langsam durchlaufen werden, daß gilt  $\omega_s(1) = \omega(s)$ . Offensichtlich hat  $\tilde{\omega}$  den Endpunkt  $[\omega]$ . Mit  $X$  ist also auch  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend. Ist weiter  $\gamma \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{z}, \tilde{x})$  ein Weg mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$ , so ist natürlich  $\gamma$  der Lift mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$  von  $u \circ \gamma \in \Omega(X, u(\tilde{z}), x)$ , insbesondere ist der Endpunkt  $\tilde{z} = \gamma(1)$  von  $\gamma$  genau  $\gamma(1) = [u \circ \gamma] \in \tilde{X}$ . Daß  $\gamma$  geschlossen ist bedeutet also genau  $[u \circ \gamma] = [\varepsilon]$ . Diese Homotopie läßt sich nun liften und zeigt, daß  $\gamma$  homotop ist zum konstanten Weg  $\varepsilon \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x})$ . Mithin ist die Fundamentalgruppe von  $\tilde{X}$  trivial, und dann ist die hier konstruierte Überlagerung universell nach dem Liftbarkeitskriterium 4.7.3, das wir anwenden dürfen, da jeder lokal zusammenziehbare Raum a fortiori lokal wegzusammenhängend ist.  $\square$

*Übung 4.8.2.* Ein zusammenhängender lokal zusammenziehbarer Raum ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn er wegweise einfach zusammenhängend ist.

**Satz 4.8.3 (Deckbewegungsgruppe der universellen Überlagerung).** *Die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden lokal zusammenziehbaren Raums ist isomorph zur Deckbewegungsgruppe seiner universellen Überlagerung.*



*Beweis.* Nach 4.5.15 operiert die Deckbewegungsgruppe auf dem Totalraum jeder universellen Überlagerung topologisch frei mit dem ursprünglichem Raum als Quotienten. Nach 4.8.1 ist unter unseren Voraussetzungen die universelle Überlagerung wegweise einfach zusammenhängend. Der Satz folgt nun aus Korollar 4.6.12 über die Fundamentalgruppe von Quotienten von wegweise einfach zusammenhängenden Räumen nach topologisch freien Gruppenoperationen.  $\square$

*Beweis der Surjektivität im Klassifikationssatz.* Genauer als im vorhergehenden Satz 4.8.3 formuliert liefert jeder Punkt  $\tilde{x}$  aus der Faser über  $x$  in einer universellen Überlagerung  $\tilde{X}$  von  $X$  einen Isomorphismus

$$c = c_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} G$$

zwischen der Fundamentalgruppe von  $X$  und der Deckbewegungsgruppe  $G$  unserer universellen Überlagerung mittels der Regel  $c(\gamma)(\tilde{x}) = \langle \gamma \rangle^{-1}(\tilde{x})$ . Ist eine Untergruppe  $H \subset \pi_1(X, x)$  gegeben, so bezeichnen wir ihr Bild  $c(H) \subset G$  der Einfachheit halber auch mit  $H$  und betrachten den Quotienten  $H \backslash \tilde{X}$  sowie die offensichtliche Abbildung

$$q : (H \backslash \tilde{X}, H\tilde{x}) \rightarrow (X, x)$$

Der Leser mag selbst nachprüfen, daß das die gesuchte zusammenhängende punktierte Überlagerung mit  $q_{\#} = H$  ist.  $\square$

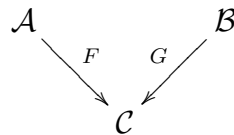
**Satz 4.8.4 (über den Faserfunktör).** *Ist  $X$  ein zusammenhängender lokal zusammenziehbarer topologischer Raum und  $x \in X$  ein Punkt, so liefert der Faserfunktör  $p \mapsto p^{-1}(x)$  eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Überlagerungen von  $X$  und der Kategorie der  $\pi_1(X, x)$ -Mengen*

$$\text{Üb}_X \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x)\text{-Ens}$$

4.8.5. Unter diesem Funktör entsprechen die zusammenhängenden Überlagerungen von  $X$  nach 4.6.8 genau den transitiven  $\pi_1(X, x)$ -Mengen. Unsere Klassifikation von Überlagerungen 4.7.1 wird in Anbetracht der Klassifikation von homogenen Räumen 4.2.5 damit ein Korollar zum vorhergehenden Satz.

*Beweis.* Wir werden im übernächsten Abschnitt sogar die noch allgemeinere Aussage 4.10.2 beweisen. Zunächst müssen wir jedoch weitere Hilfsmittel aus der Kategorientheorie bereitstellen. Den direkten Beweis hier überlassen wir dem Leser zur Übung.  $\square$

4.8.6 (**Kategorieller Beweis für Seifert-van Kampen**). Der Satz über den Faserfunktork erlaubt auch einen besonders transparenten Beweis des Satzes von Seifert von Kampen 3.2.1 im Fall lokal zusammenziehbarer Räume, den ich hier kurz skizzieren will. Ist ganz allgemein



ein Winkeldiagramm von Kategorien und Funktoren, so konstruiert man eine neue Kategorie

$$\mathcal{A} \times_{\mathcal{C}}^2 \mathcal{B}$$

mit Objekten Tripeln  $(A, B, i)$  bestehend aus einem Objekt  $A \in \mathcal{A}$ , einem Objekt  $B \in \mathcal{B}$  und einem Isomorphismus  $i : F(A) \xrightarrow{\sim} G(B)$ . Morphismen in dieser neuen Kategorie von  $(A, B, i)$  nach  $(A', B', i')$  sind der definitionem Paare von Morphismen  $(f, g)$  mit  $f : A \rightarrow A'$  und  $g : B \rightarrow B'$  derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{i} & G(B) \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gg \\ F(A') & \xrightarrow{i'} & G(B') \end{array}$$

kommutiert. Diese Kategorie heißt im übrigen das **2-Faserprodukt** unserer beiden Kategorien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  über  $\mathcal{C}$  und hat auch eine universelle Eigenschaft, die ich jedoch hier nicht ausformulieren will. Man beachte, daß es sich nicht einfach nur um ein Faserprodukt in der Kategorie  $\text{Cat}$  der Kategorien handelt: Das wäre vielmehr die Kategorie  $\mathcal{A} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$  mit Objekten Paaren  $(A, B)$  mit  $F(A) = G(B)$  und den hoffentlich offensichtlichen Morphismen. Ist nun ein topologischer Raum  $X$  die Vereinigung von zwei offenen Teilmengen  $X = U \cup V$ , so liefert das Einschränken von Überlagerungen wegen der Möglichkeit des Verklebens von Überlagerungen eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Üb}_X \xrightarrow{\sim} \text{Üb}_U \times_{\text{Üb}_{U \cap V}}^2 \text{Üb}_V$$

Sei nun  $x \in U \cap V$  fest gewählt. Um das Folgende übersichtlich zu halten, lassen wir nun bei der Notation unserer Fundamentalgruppen den Basispunkt  $x$  weg und vereinbaren wir nur für diesen Beweis, gegeben eine Gruppe  $G$ , die Notation  $[G] := G\text{-Ens}$  für die Kategorie der  $G$ -Mengen. Sind nun alle unsere Räume zusammenhängend und lokal zusammenziehbar, so liefert nach unserem Satz über den Faserfunktork 4.8.4 das Zurückziehen von Gruppenwirkungen ebenfalls eine Äquivalenz von Kategorien

$$[\pi_1(X)] \xrightarrow{\sim} [\pi_1(U)] \times_{[\pi_1(U \cap V)]}^2 [\pi_1(V)]$$

Das bedeutet aber genau, daß gegeben eine Menge  $A$  und Gruppenhomomorphismen  $\pi_1(U) \rightarrow \text{Ens}^\times(A)$ ,  $\pi_1(V) \rightarrow \text{Ens}^\times(A)$ , die nach Vorschalten denselben Gruppenhomomorphismus  $\pi_1(U \cap V) \rightarrow \text{Ens}^\times(A)$  liefern, es genau einen Gruppenhomomorphismus  $\pi_1(X) \rightarrow \text{Ens}^\times(A)$  gibt, von dem sie beide herkommen. Da sich nun jede Gruppe  $G$  in die Gruppe der Permutationen einer Menge  $A$  einbetten läßt—zum Beispiel durch Linksmultiplikation in die Menge der Permutationen von  $G$  selber—bedeutet das, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V) & \longrightarrow & \pi_1(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V) & \longrightarrow & \pi_1(X) \end{array}$$

kokartesisch sein muß. Das aber ist genau die Aussage des Satzes von Seifert und van Kampen.

*Ergänzung 4.8.7.* Eine Decktransformation einer zusammenhängenden Überlagerung auf sich selber muß keine Deckbewegung sein. Um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, sucht man zunächst Gruppen  $G \supset H$  derart, daß die  $G$ -Menge  $G/H$  nicht-bijektive  $G$ -äquivalente Selbstabbildungen besitzt, d.h. daß es  $a \in G$  gibt mit  $H \subsetneq aHa^{-1}$ . Hier kann man zum Beispiel in  $G = \text{SL}(2; \mathbb{Q})$  die Untergruppe  $H$  aller oberen Dreiecksmatrizen betrachten mit Einsen auf der Diagonale und einem ganzzahligen Eintrag in der oberen rechten Ecke, und als  $a$  eine geeignete Diagonalmatrix nehmen. Nun kann man zu jeder Gruppe einen lokal zusammenziehbaren Raum konstruieren, der besagte Gruppe als Fundamentalgruppe hat. Der vorhergehende Satz liefert dann das gesuchte Gegenbeispiel.

## 4.9 Adjungierte Funktoren

4.9.1. Das Konzept adjungierter Funktoren gehört zu den Grundbegriffen der Kategorientheorie. Ich habe seine Behandlung dennoch bis hierher hinausgezögert, da im folgenden Abschnitt 4.10 die ersten gehaltvollen Anwendungen kommen.

**Definition 4.9.2.** Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Kategorien und  $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  sowie  $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  Funktoren. Eine **Adjunktion  $\alpha$  von  $L$  mit  $R$**  oder in Kurzschreibweise  $\alpha : (L, R)$  ist eine Isotransformation

$$\alpha : \mathcal{B}(L-, -) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(-, R-)$$

von Funktoren  $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Ens}$ , d.h. eine Sammlung von “natürlichen” Isomorphismen  $\alpha_{X,Y} : \mathcal{B}(LX, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(X, RY)$  für  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{B}$ .

4.9.3. Gegeben Funktoren  $L$  und  $R$  kann es durchaus verschiedene Adjunktionen  $\alpha$  von  $L$  mit  $R$  geben. Gegeben zwei Tripel  $(\alpha, L, R)$  und  $(\alpha', L, R')$  wie oben mit demselben  $L$  gibt es jedoch nach dem Yoneda-Lemma stets genau eine Isotransformation  $R \xrightarrow{\sim} R'$  derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(LX, Y) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}(X, RY) \\ \parallel & & \downarrow \\ \mathcal{B}(LX, Y) & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{A}(X, R'Y) \end{array}$$

mit der durch diese Isotransformation induzierten rechten Vertikale kommutiert. In der Tat, fassen wir für festes  $Y$  unser Diagramm auf als Diagramm von Funktoren in  $X$ , so sagt uns das Yoneda-Lemma gerade, daß die a priori durch die Kommutativität des Diagramms erklärte Transformation in der rechten Vertikale bereits von einem eindeutig bestimmten Morphismus  $RY \xrightarrow{\sim} R'Y$  herkommen muß, und daß diese eindeutig bestimmten Morphismen eine Isotransformation  $R \xrightarrow{\sim} R'$  liefern, ist dann nicht mehr schwer zu sehen. Das Paar  $(\alpha, R)$  ist also, wenn es denn existiert, durch den Funktor  $L$  im wesentlichen eindeutig bestimmt. Man benutzt deshalb meist den bestimmten Artikel und nennt  $R$  **den rechtsadjungierten Funktor** zu  $L$ , wobei eigentlich nicht nur der Funktor  $R$  gemeint ist, sondern das Paar  $(\alpha, R)$ . Ebenso wird auch das Paar  $(\alpha, L)$  durch  $R$  im wesentlichen eindeutig festgelegt und man nennt  $L$  **den linksadjungierten Funktor** zu  $R$ . Spricht man von einem **adjungierten Paar**  $(L, R)$ , so ist der Leser gefordert, die vom Autor gemeinte Adjunktion  $\alpha$  von  $L$  und  $R$  aus dem Kontext zu erschließen.

*Ergänzung* 4.9.4. Zu jedem Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  können wir den **partiellen linksadjungierten Funktor** bilden, der eben nur auf der vollen Unterkategorie derjenigen Objekte  $B \in \mathcal{B}$  erklärt ist, für die der Funktor  $\mathcal{A} \rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}}$ ,  $X \mapsto \mathcal{B}(B, FX)$  darstellbar ist im Sinne von ???. Analog können wir zu jedem Funktor den **partiellen rechtsadjungierten Funktor** erklären.

*Vorschau* 4.9.5. Betrachten wir wie in ??? die Yoneda-Einbettung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\vee := \text{Cat}(\mathcal{C}, \text{Ens}^{\text{opp}})$ . Ein Funktor im Bild heißt ein “darstellbarer Funktor”. Auch wenn ein Funktor  $F \in \mathcal{C}^\vee$  nicht darstellbar ist, kann es jedoch passieren, daß der Rechtsadjungierte der Einbettung  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\vee$  bei  $F$  definiert ist. Das entsprechende Objekt  $R(F) \in \mathcal{C}$  mag man dann als die “bestmögliche Approximation an ein darstellendes Objekt” verstehen. Ein Beispiel für solche Konstruktionen sind die sogenannten **groben Modulräume**.

**Definition 4.9.6.** Ist allgemein  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit einem Funktor in die Kategorie der Mengen, d.h. eine Kategorie über  $\text{Ens}$ , und besitzt dieser Funktor einen Linksadjungierten, so nennen wir den Wert des Linksadjungierten

auf einer Menge  $X$  das **freie Objekt von  $\mathcal{C}$  über  $X$**  und notieren dies freie Objekt im allgemeinen

$$\mathcal{C}^\dagger X$$

*Beispiel 4.9.7.* Der Vergißfunktorkomplex von den Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie Gruppe über besagter Menge zuordnet, wie sie in 3.3 eingeführt wurde. Der Vergißfunktorkomplex von den abelschen Gruppen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge die freie abelsche Gruppe über besagter Menge zuordnet. Für diese Gruppe verwenden wir die Notation  $\text{Ab}^\dagger X = \mathbb{Z}X$ .

*Beispiel 4.9.8.* Der Vergißfunktorkomplex von den  $k$ -Vektorräumen in die Mengen hat als Linksadjungierten den Funktor, der jeder Menge  $X$  den freien  $k$ -Vektorraum über der Menge  $X$  zuordnet, d.h. den Vektorraum aller Abbildungen  $X \rightarrow k$ , die nur an endlich vielen Stellen  $x \in X$  verschieden sind von Null. Wir verwenden für diesen Vektorraum die abkürzende Notation

$$k\text{-Mod}^\dagger X = kX$$

Ist allgemeiner  $k$  ein Ring, so verwenden wir dieselbe Notation auch für den freien  $k$ -Modul über  $X$ . Gegeben ein kommutativer Ring  $k$  ist der freie  $k$ -Kring über einer Menge von Veränderlichen schlicht der Polynomring in diesen Veränderlichen, in Formeln gilt also zum Beispiel

$$\text{Kring}^{k^\dagger} \{T_1, \dots, T_n\} = k[T_1, \dots, T_n]$$

*Beispiele 4.9.9.* Der Funktor  $\text{Spek} : \text{Ralg}_\mathbb{C}^\circ \rightarrow \text{Top}$  aus ?? ist rechtsadjungiert zum Funktor  $\mathcal{C} : \text{Top} \rightarrow \text{Ralg}_\mathbb{C}^\circ$ . Diese Aussage ist der Kern der Argumentation in ??, wie wir gleich näher ausführen werden.

*Beispiele 4.9.10.* Gegeben ein Körper  $k$  und ein  $k$ -Vektorraum  $E$  ist der Funktor  $E \otimes_k : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$  linksadjungiert zu  $\text{Hom}_k(E, \_) : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k$  und der Funktor  $\text{Hom}_k(\_, E) : \text{Mod}_k \rightarrow \text{Mod}_k^{\text{opp}}$  hat als Rechtsadjungierten den Funktor  $\text{Hom}_k(\_, E) : \text{Mod}_k^{\text{opp}} \rightarrow \text{Mod}_k$ , genauer werden solche Adjunktionen im wesentlichen in ?? und ?? angegeben.

*Übung 4.9.11.* Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Kategorien und  $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  sowie  $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  Funktoren. Jede Transformation  $\alpha : \mathcal{B}(L-, -) \Rightarrow \mathcal{A}(-, R-)$  von Funktoren  $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Ens}$  liefert eine Transformation  $\hat{\alpha} : \text{Id} \Rightarrow RL$  durch die Vorschrift  $\hat{\alpha}_X = \alpha_{X, LX}(\text{id}_{LX})$ , d.h.  $\hat{\alpha}_X : X \rightarrow RLX$  ist das Bild der Identität unter dem durch  $\alpha$  gegebenen Morphismus  $\mathcal{B}(LX, LX) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(X, RLX)$ . Jede Transformation  $\tau : \text{id} \Rightarrow RL$  liefert umgekehrt eine Transformation  $\tilde{\tau} : \mathcal{B}(L-, -) \Rightarrow \mathcal{A}(-, R-)$  von Funktoren  $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Ens}$  als die Komposition von hoffentlich offensichtlichen Abbildungen

$$\tilde{\tau}_{X,Y} : \mathcal{B}(LX, Y) \rightarrow \mathcal{A}(RLX, RY) \rightarrow \mathcal{A}(X, RY)$$

für  $X \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{B}$ . Man zeige, daß wir auf diese Weise zueinander inverse Bijektionen zwischen den fraglichen Räumen von Transformationen erhalten.

*Übung 4.9.12.* Gegeben eine Adjunktion  $\alpha$  von Funktoren  $(L, R)$  erhalten wir in der in 4.9.11 erklärten Weise Transformationen  $\hat{\alpha} : \text{Id} \Rightarrow RL$  und  $\check{\alpha} : LR \Rightarrow \text{Id}$ . Man zeige, daß die Verknüpfung  $(\check{\alpha}L) \circ (L\hat{\alpha}) : L \Rightarrow LRL \Rightarrow L$  die identische Transformation vom Funktor  $L$  zu sich selber ist. Ebenso ist  $(R\check{\alpha}) \circ (\hat{\alpha}R)$  die Identität auf  $R$ . Sind umgekehrt Funktoren  $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  gegeben und Transformationen  $\varepsilon : \text{Id} \Rightarrow RL$  und  $\eta : LR \Rightarrow \text{Id}$  mit der Eigenschaft  $(R\eta) \circ (\varepsilon R) = \text{id}$  und  $(\eta L) \circ (L\varepsilon) = \text{id}$ , so gibt es genau eine Adjunktion  $\alpha$  von Funktoren  $(L, R)$  mit  $\hat{\alpha} = \varepsilon$  und  $\check{\alpha} = \eta$ .

**Lemma 4.9.13.** *Seien gegeben Funktoren  $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $\alpha : (L, R)$  eine Adjunktion von  $L$  mit  $R$ .*

1. *Genau dann ist  $\hat{\alpha}$  eine Isotransformation  $\hat{\alpha} : \text{Id} \xrightarrow{\sim} RL$ , wenn der Funktor  $L$  volltreu ist.*
2. *Genau dann ist  $\check{\alpha}$  eine Isotransformation  $\check{\alpha} : LR \xrightarrow{\sim} \text{Id}$ , wenn der Funktor  $R$  volltreu ist.*
3. *Genau dann sind  $\hat{\alpha}$  und  $\check{\alpha}$  beide Isotransformationen, wenn  $L$  und  $R$  Äquivalenzen von Kategorien sind. Man nennt  $L$  und  $R$  dann zueinander **quasiinverse Funktoren** und versteht dabei die Adjunktion als Teil des Datums.*

*Beweis.* Gegeben  $A, A' \in \mathcal{A}$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(A, A') & \rightarrow & \mathcal{B}(LA, LA') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(A, RLA') & = & \mathcal{A}(A, RLA') \end{array}$$

wobei die obere Horizontale von  $L$  induziert ist, die linke Vertikale die Verknüpfung ist mit  $\hat{\alpha}_{A'}$  und die rechte die Adjunktion  $\alpha$ . Das zeigt die erste Aussage. Die zweite Aussage zeigt man genauso. Für die dritte Aussage bemerkt man, daß unter der Annahme  $LRB \cong B$  jedes  $B \in \mathcal{B}$  isomorph ist zu einem Objekt der Gestalt  $LA$ . □

*Ergänzung 4.9.14.* Satz ?? zeigt also insbesondere, daß der Funktor  $\mathcal{C}$  von den kompakten topologischen Räumen in die  $\mathbb{C}$ -Ringalgebren volltreu ist.

*Ergänzende Übung 4.9.15.* Gegeben Funktoren  $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  und eine Adjunktion  $(L, R)$  betrachte man die vollen Unterkategorien

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \{A \in \mathcal{A} \mid \text{Die Adjunktionsabbildung ist ein Iso } A \xrightarrow{\sim} RLA\} \\ \mathcal{B}_0 &= \{B \in \mathcal{B} \mid \text{Die Adjunktionsabbildung ist ein Iso } LRB \xrightarrow{\sim} B\} \end{aligned}$$

und zeige, daß unser adjungiertes Paar stets eine Äquivalenz von Kategorien  $\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{B}_0$  induziert.

*Ergänzende Übung 4.9.16.* Besitzt ein Funktor  $F$  einen volltreuen Linksadjungierten  $L$ , so ist für jedes Objekt  $Y$ , auf dem der partielle Rechtsadjungierte von  $F$  definiert ist, der Adjunktionsmorphismus ein Isomorphismus  $FRY \xrightarrow{\sim} Y$  und der partielle Rechtsadjungierte ist volltreu. Hinweis: Für  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  beachte man die kanonischen Isomorphismen

$$\mathcal{B}(X, FRY) \cong \mathcal{A}(LX, RY) \cong \mathcal{B}(FLX, Y) \cong \mathcal{B}(X, Y)$$

In III.4.2.9 werden wir das auch direkt sehen können: Jeder Funktor mit einem volltreuen Linksadjungierten oder volltreuen Rechtsadjungierten ist ein ‘‘Lokalisierungsfunktor’’, und die beiden partiellen Adjungierten eines Lokalisierungsfunktors sind stets volltreu.

*Übung 4.9.17.* Ist  $\varphi : H \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus, so besitzt der offensichtliche Funktor  $G\text{-Ens} \rightarrow H\text{-Ens}$  einen Linksadjungierten, den wir  $\text{prod}_H^G$  notieren und der einer  $H$ -Menge  $X$  die  $G$ -Menge

$$G \times_H X$$

aller  $H$ -Bahnen in  $G \times X$  unter der Operation  $h(g, x) = (gh^{-1}, hx)$  zuordnet. Ebenso besitzt er einen Rechtsadjungierten  $\text{ind}_H^G : X \mapsto \text{Ens}^H(G, X)$ .

4.9.18. In der Literatur heißt  $G \times_H X$  meist die ‘‘von  $X$  induzierte  $G$ -Menge’’. Wir werden jedoch von der **von  $X$  koinduzierten  $G$ -Menge** reden, um mit anderen Begriffsbildungen kompatibel zu bleiben. Ist etwas allgemeiner  $H$  eine Gruppe und  $X$  eine  $H$ -Menge und  $Y$  eine  $H$ -Rechtsmenge, so erklärt man analog ihr **balanciertes Produkt**  $Y \times_H X$  als die Menge aller  $H$ -Bahnen in  $Y \times X$  unter der Operation  $h(y, x) = (yh^{-1}, hx)$ . Ein Ausdruck der Gestalt  $G \times_H X$  kann leider auch ein Faserprodukt bedeuten. Der Leser muß aus dem Kontext erschließen, welche Bedeutung jeweils gemeint ist.

*Übung 4.9.19.* Ist  $G$  eine Gruppe mit Untergruppen  $H, K$  und ist  $S = H \cap K$  ihren Schnitt, so induziert die Multiplikation eine Bijektion  $H \times_S K \xrightarrow{\sim} HK$ .

*Ergänzende Übung 4.9.20.* Ist  $G$  eine Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe und  $y \in G$  ein Element und  $S = H \cap yHy^{-1}$ , so erhalten wir einen Isomorphismus  $H \times_S H \xrightarrow{\sim} HyH$  von  $(H \times H)$ -Mengen mit der Rechtsoperation von  $s \in S$  auf  $H$  durch Rechtsmultiplikation und der Linksoperation von  $s \in S$  auf  $H$  durch Linksmultiplikation mit  $y^{-1}sy$  mittels der Abbildung  $[h, k] \mapsto hyk$ . Hinweis: Man wende 4.9.19 an mit  $K = yHy^{-1}$ .

*Ergänzende Übung 4.9.21.* Sei  $\varphi : H \rightarrow G$  ein Homomorphismus topologischer Gruppen. Bezeichnet  $\text{Top}^G$  die Kategorie der topologischen Räume mit einer stetigen  $G$ -Operation, so besitzt der offensichtliche Funktor

$\text{Top}^G \rightarrow \text{Top}^H$  einen Linksadjungierten, den wir  $\text{prod}_H^G$  notieren und der einem  $H$ -Raum  $X$  den  $G$ -Raum  $G \times_H X$  mit seiner Quotiententopologie zuordnet. Die Stetigkeit der Operation von  $G$  folgt hier zum Beispiel mit 4.3.7.

*Ergänzung 4.9.22.* Bezeichne  $[g, x] \in G \times_H X$  die Bahn von  $(g, x)$ . Ist  $H \subset G$  eine Untergruppe und  $X$  die Restriktion einer  $G$ -Menge, so definiert die Abbildung  $[g, x] \mapsto (gH, gx)$  eine  $G$ -äquivalente Bijektion

$$G \times_H X \xrightarrow{\sim} (G/H) \times X$$

*Ergänzende Übung 4.9.23.* Der Adjungierte einer Verknüpfung ist die Verknüpfung der Adjungierten, als da heißt: Gegeben Funktoren  $R_* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $S_* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  mit Linksadjungierten  $R^*$  und  $S^*$  ist auch  $(R^* \circ S^*, S_* \circ R_*)$  ein adjungiertes Paar in kanonischer Weise.

*Ergänzende Übung 4.9.24.* Jede Transformation von einem Funktor zu einem anderen induziert in natürlicher Weise eine Transformation in der Gegenrichtung zwischen ihren Links- bzw. ihren Rechtsadjungierten, soweit diese existieren.

*Ergänzende Übung 4.9.25.* Besitzt ein Funktor einen Rechtsadjungierten, so macht er kokartesische Diagramme zu kokartesischen Diagrammen. Besitzt ein Funktor einen Linksadjungierten, so macht er kartesische Diagramme zu kartesischen Diagrammen.

## 4.10 Der abstrakte Faserfunktork

4.10.1. Wir wollen nun unsere Überlagerungstheorie unter einem noch abstrakteren Blickwinkel verstehen, einerseits als Modellfall und Anwendungsbeispiel für kategorientheoretische Methoden, andererseits um die Verwandtschaft zur Galoistheorie herauszuarbeiten. Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $A \in \mathcal{C}$  ein Objekt und  $G = \mathcal{C}^\times(A)$  seine Automorphismengruppe, so erhalten wir stets einen Funktor in die Kategorie der  $G$ -Rechtsmengen

$$\mathcal{C}(A, \_): \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens-}G$$

indem wir setzen  $fg = f \circ g$  für alle  $B \in \mathcal{C}$ ,  $f \in \mathcal{C}(A, B)$  und  $g \in \mathcal{C}^\times(A)$ . Unser Satz 4.8.4 über den Faserfunktork läßt sich in dieser Sprache noch allgemeiner und konzeptioneller fassen.

**Satz 4.10.2 (über den abstrakten Faserfunktork).** *Ist  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung und  $G = \text{Top}_X^\times(\tilde{X})$  ihre Deckbewegungsgruppe, so liefert der Funktor  $\text{Top}_X(\tilde{X}, \_)$  eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Überlagerungen von  $X$  und der Kategorie der  $G$ -Rechtsmengen*

$$T = \text{Top}_X(\tilde{X}, \_): \text{Üb}_X \xrightarrow{\sim} \text{Ens-}G$$



4.10.3. Unser bisheriger Faserfunktors  $F = F_x : \ddot{\text{Üb}}_X \rightarrow \text{Ens}$  ist isomorph zu  $T$  gefolgt vom vergeßlichen Funktors, genauer liefert jeder Punkt  $\tilde{x}$  aus der Faser über  $x$  eine Isotransformation  $\tau = \tau_{\tilde{x}} : T\hat{X} \xrightarrow{\sim} F\hat{X}$ ,  $d \mapsto d(\tilde{x})$ . Aufgrund dieser Isotransformationen nenne ich  $T$  den **abstrakten Faserfunktors**. Ist  $X$  zusammenhängend und lokal zusammenziehbar, so liefert 4.8.3 zusammen mit 4.6.15 einen Isomorphismus  $c_{\tilde{x}} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} G$ . Fassen wir dann  $T$  als Funktors nach  $\text{Ens-}G$  auf und  $F$  als Funktors nach  $\pi_1(X, x)$ -Ens und betrachten darüber hinaus den Funktors  $C$ , der die  $G$ -Rechtsoperation durch Inversenbildung in eine Linksoperation verwandelt und diese  $G$ -Linksoperation dann mithilfe von  $c_{\tilde{x}}$  in eine Linksoperation von  $\pi_1(X, x)$ , so liefert  $\tau$  sogar eine Isotransformation  $C \circ T \xrightarrow{\sim} F$  von Funktors  $\ddot{\text{Üb}}_X \rightarrow \pi_1(X, x)$ -Ens. In Formeln ausgedrückt haben wir also unter diesen Umständen ein Diagramm von Funktors

$$\begin{array}{ccc} \ddot{\text{Üb}}_X & \xrightarrow{T} & \text{Ens-}G \\ \parallel & \swarrow \sim & \downarrow C \\ \ddot{\text{Üb}}_X & \xrightarrow{F} & \pi_1(X, x)\text{-Ens} \end{array}$$

das wie durch den Doppelpfeil angedeutet ‘‘kommutiert bis auf eine Isotransformation’’. Da  $C$  offensichtlich eine Äquivalenz von Kategorien ist, wird  $T$  hier eine Äquivalenz von Kategorien sein genau dann, wenn dasselbe gilt für  $F$ . Mithin folgt der Satz 4.8.4 über den Faserfunktors aus dem Satz über den abstrakten Faserfunktors.

*Beweis von 4.10.2.* Wir konstruieren zunächst einen Funktors in die Rückrichtung. Ist  $F$  eine Menge mit einer Rechtsoperation von  $G$ , so bilden wir eine Überlagerung

$$F \times_G \tilde{X} \rightarrow X$$

von  $X$  wie folgt: Wir betrachten auf  $F \times \tilde{X}$  die Operation von  $G$  gegeben durch  $g(m, \tilde{x}) = (mg^{-1}, g\tilde{x})$  und bezeichnen mit  $F \times_G \tilde{X}$  den Bahnenraum  $F \times_G \tilde{X} = G \backslash (F \times \tilde{X})$ , also unser balanciertes Produkt im Sinne von 4.9.18. Bezeichne  $[m, \tilde{x}] \in F \times_G \tilde{X}$  die Bahn von  $(m, \tilde{x})$ . Da  $G$  topologisch frei operiert auf  $\tilde{X}$  nach 4.4.8, ist  $F \times_G \tilde{X} \rightarrow X$ ,  $[m, \tilde{x}] \mapsto u(\tilde{x})$  nach 4.3.8 eine Überlagerungsabbildung. Den in dieser Weise konstruierten Funktors in die Rückrichtung bezeichnen wir mit  $A$ , in Formeln

$$A = \times_G \tilde{X} : \text{Ens-}G \rightarrow \ddot{\text{Üb}}_X$$

Als nächstes erklären wir eine Adjunktion  $(A, T)$ . Gegeben eine  $G$ -Rechtsmenge  $F$  und eine Überlagerung  $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow X$  gilt es, eine natürliche Bijektion

$$\text{Ens}^G(F, \text{Top}_X(\tilde{X}, \hat{X})) \xrightarrow{\sim} \text{Top}_X(F \times_G \tilde{X}, \hat{X})$$

zwischen der Menge der  $G$ -äquivalenten Abbildungen links und der Menge der stetigen Abbildungen über  $X$  rechts anzugeben. Man erhält sie durch Einschränken der offensichtlichen Bijektion

$$\text{Ens}(F, \text{Top}(\tilde{X}, \hat{X})) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(F \times \tilde{X}, \hat{X})$$

auf die Fixpunkte einer geeigneten  $G$ -Operation auf beiden Seiten. Jetzt müssen wir nach 4.9.13 nur noch zeigen, daß die durch unsere Adjunktion definierten Transformationen  $\text{id} \Rightarrow TA$  und  $AT \Rightarrow \text{id}$  Isotransformationen sind. Das überlassen wir dem Leser.  $\square$

*Ergänzung 4.10.4.* Die hier vorgestellte Theorie ist strukturell eng verwandt mit der Galoistheorie. Ist  $\tilde{K}/K$  eine endliche Galoiserweiterung, so kann man den Hauptsatz der Galoistheorie dahingehend interpretieren, daß der Funktor  $\text{Kring}^K(\cdot, \tilde{K})$  der  $K$ -linearen Körperhomomorphismen nach  $\tilde{K}$  eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Körpererweiterungen von } K, \\ \text{die sich in } \tilde{K} \text{ einbetten lassen} \end{array} \right\}^{\text{opp}} \xrightarrow{\sim} \{\text{transitive Gal}(\tilde{K}/K)\text{-Mengen}\}$$

liefert, für  $\text{Gal}(\tilde{K}/K) = (\text{Kring}^K)^{\times}(\tilde{K})$  die Galoisgruppe. Die Kategorie der zusammenhängenden Überlagerungen kann im Licht von 4.10.2 also aufgefaßt werden als ein geometrisches Analogon zur opponierten Kategorie unserer Kategorie von Körpererweiterungen. Noch besser würde die Analogie, wenn wir auch nur alle zusammenhängenden Überlagerungen betrachten würden, die eine Decktransformation von einer fest gewählten Galois-Überlagerung empfangen können.

*Übung 4.10.5.* Ist  $X$  zusammenhängend und lokal zusammenziehbar und  $(\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$  eine zusammenhängende Überlagerung, so ist die Gruppe der Deckbewegungen  $\text{Top}_X^{\times}(\hat{X})$  isomorph zu  $N/\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$  mit  $N \subset \pi_1(X, x)$  dem Normalisator von  $\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$ . Hinweis: 4.2.7.

## 4.11 Die Zopfgruppe

**Definition 4.11.1.** Sei  $X_n$  die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{C}$  mit genau  $n$  Elementen. Wir geben  $X_n$  die Finaltopologie für die die Reihenfolge vergessende Abbildung  $\mathbb{C}^n \setminus \Delta \rightarrow X_n$  mit  $\Delta \subset \mathbb{C}^n$  der **großen Diagonale** alias der Menge aller  $n$ -Tupel komplexer Zahlen, in denen mindestens eine Zahl doppelt vorkommt. Die Fundamentalgruppe von  $X_n$  heißt die **Zopfgruppe in  $n$  Strängen**, englisch **braid group**, französisch **groupe de tresses**. Als Basispunkt nehmen wir meist  $*$  =  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

4.11.2. Die Elemente der Zopfgruppe kann man durch Bilder darstellen wie etwa das nebenstehende Bild für ein Element  $\gamma \in \pi_1(X_3)$ . Das Bild stellt im Raum  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  die Menge  $\{(z, t) \mid z \in \gamma(t)\}$  dar, mit  $t$  als senkrechter Koordinate und mit der Konvention, daß Punkte mit größerem Imaginärteil weiter hinten liegen mögen. Die Verknüpfung in unserer Zopfgruppe bedeutet in dieser Anschauung das "Aneinanderhängen" solcher "Zöpfe".

*Notation* 4.11.3. Bezeichne  $s_\nu \in \pi_1(X_n, *)$  für  $1 \leq \nu \leq n-1$  die Klasse des Weges, unter dem der Punkt  $\nu$  durch die untere Halbebene nach  $\nu+1$  wandert und gleichzeitig der Punkt  $\nu+1$  durch die obere Halbebene nach  $\nu$ . Alle anderen Punkte sollen unter  $s_\nu$  auf ihren Plätzen bleiben. Ein Repräsentant dieser Klasse wäre also etwa der Weg

$$s_\nu(t) = \{1, \dots, \nu-1, (\nu+1/2 - e^{\pi i t}/2), (\nu+1/2 + e^{\pi i t}/2), \nu+2, \dots, n\}$$

**Satz 4.11.4 (Erzeuger und Relationen der Zopfgruppe).** *Die Zopfgruppe in  $n$  Strängen wird dargestellt durch die Erzeuger  $s_1, \dots, s_{n-1}$  mit den sogenannten **Zopfrelationen***

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i && \text{falls } |i-j| > 1; \\ s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j && \text{falls } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

4.11.5. In der Anschauung überzeugt man sich leicht, daß die  $s_i$  die Zopfgruppe erzeugen und die Zopfrelationen erfüllen. Hier verstellt das formale Argument nur den Blick. Das eigentliche Problem besteht darin, zu zeigen, daß nicht noch weitere Relationen benötigt werden. Wir schicken dem Beweis einige allgemeine Überlegungen zu Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten voraus.

**Definition 4.11.6.** Eine Teilmenge  $N$  einer  $d$ -Mannigfaltigkeit  $M$  heißt eine  **$n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit** genau dann, wenn es für jeden Punkt  $y \in N$  eine offene Umgebung  $U \subseteq M$  gibt und einen Homöomorphismus  $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$  mit  $U \cap N \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \times 0$ . Ein derartige offene Menge  $U$  nennen wir eine **plättbare Umgebung** von  $y \in N$ . Die Differenz  $d-n$  heißt die **Kodimension** der Untermannigfaltigkeit  $N$  in  $M$ .

**Proposition 4.11.7.** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $N \subseteq M$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $\geq 3$ . So induziert für beliebiges  $p \in M \setminus N$  die Einbettung einen Isomorphismus*

$$\pi_1(M \setminus N, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(M, p)$$

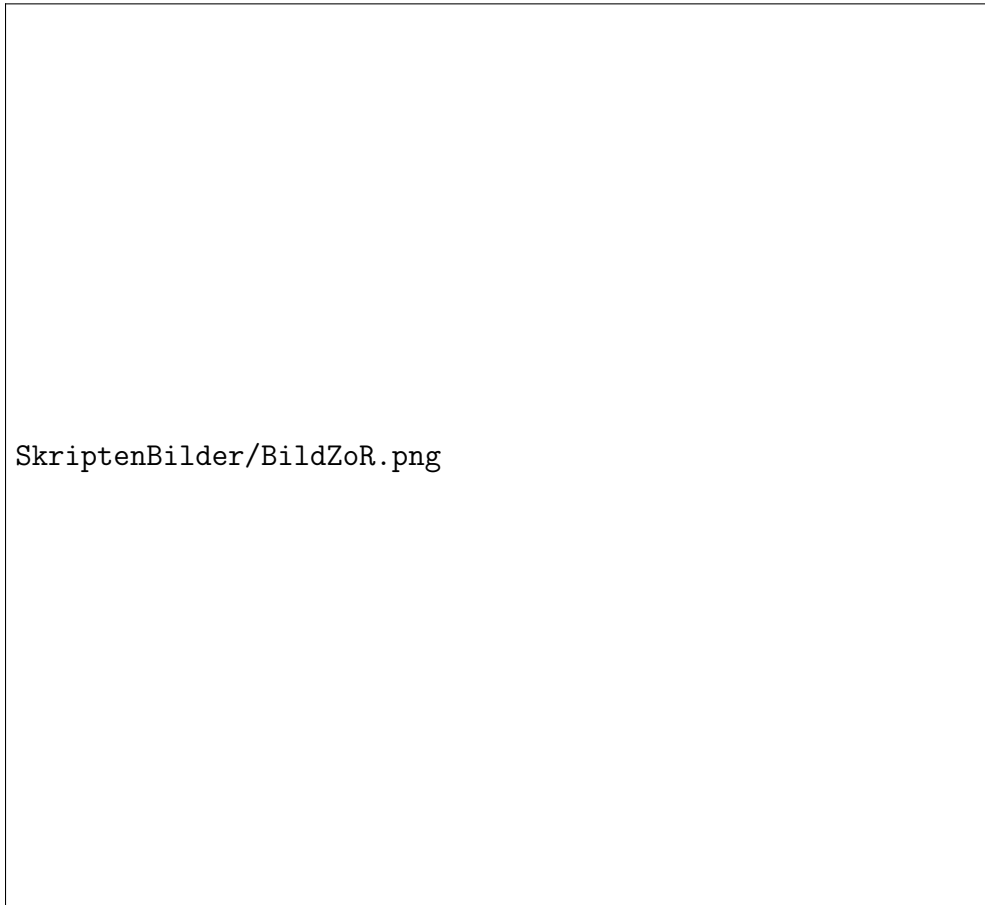


Illustration der Zopfrelation  $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ . In der Tat geht bei beiden Bildern der Faden von links oben nach rechts unten “auf der obersten Ebene”, der Faden von rechts oben nach links unten “auf der untersten Ebene”, und der Faden von der Mitte zur Mitte auf einer “mittleren Ebene”.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $M$  zusammenhängend annehmen. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Sei  $B \subset N$  eine abgeschlossene Teilmenge,  $U \subseteq M$  eine plättbare Umgebung eines Punktes von  $N$ , und  $p \in U \setminus B$ . So haben wir nach Seifert-van-Kampen ein kokartesisches Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \setminus B, p) & \rightarrow & \pi_1(U, p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(M \setminus B, p) & \rightarrow & \pi_1((M \setminus B) \cup U, p) \end{array}$$

und da nach 1.2.20 die obere Horizontale ein Isomorphismus ist, muss dasselbe nach 3.1.13 auch für die untere Horizontale gelten. Jetzt zeigen wir die Surjektivität von  $\pi_1(M \setminus N, p) \rightarrow \pi_1(M, p)$  im allgemeinen. Ist in der Tat  $\gamma \in \Omega(M, p)$  ein Weg, so wird  $\gamma[0, 1] \cap N$  überdeckt von endlich vielen plättbaren Umgebungen  $U_1, \dots, U_r$ . Nach unserer Vorüberlegung haben wir jedoch einen Isomorphismus

$$\pi_1(M \setminus N, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1((M \setminus N) \cup U_1 \cup \dots \cup U_r, p)$$

und  $[\gamma] \in \pi_1(M, p)$  liegt sicher im Bild der rechten Seite. Also liegt  $[\gamma]$  auch im Bild von  $\pi_1(M \setminus N, p)$  unter dem von der Einbettung induzierten Homomorphismus auf den Fundamentalgruppen. Ähnlich zeigen wir die Injektivität: Ist  $\gamma \in \Omega(M \setminus N, p)$  nullhomotop in  $M$ , sagen wir vermittle  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ , so läßt sich eine Homotopie mit dem konstanten Weg sicher in einem geeigneten  $(M \setminus N) \cup U_1 \cup \dots \cup U_r$  realisieren, mit plättbaren  $U_i$ , und dann nach unserer Vorüberlegung sogar in  $M \setminus N$ .  $\square$

*Übung 4.11.8.* Für  $N \triangleleft M$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension 2 ist die von der Einbettung  $M \setminus N \hookrightarrow M$  auf den Fundamentalgruppen induzierte Abbildung immer noch surjektiv.

*Übung 4.11.9.* Allgemeiner induziert unter den Voraussetzungen der Proposition sogar für jede Teilmenge  $A \subset N$  die Einbettung  $M \setminus A \hookrightarrow M$  einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen.

*Beweis des Satzes.* Wir beginnen mit dem Fall  $n = 3$  und berechnen zunächst die Fundamentalgruppe  $\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta)$  einer Überlagerung von  $X_3$ . Wir interpretieren Elemente von  $\mathbb{C}^3 \setminus \Delta$  als die Angabe von drei paarweise verschiedenen Punkten in der Ebene  $\mathbb{C}$ , wobei wir jedoch im Unterschied zu  $X_3$  noch wissen, welcher Punkt hier der Erste bzw. der Zweite bzw. der Dritte ist. Wir ändern die Fundamentalgruppe von  $\mathbb{C}^3 \setminus \Delta$  nicht, wenn wir den zweiten Punkt festhalten, formal ist also die Einbettung

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid x \neq y\} & \hookrightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \Delta \\ (x, y) & \mapsto (x, 0, y) \end{aligned}$$

eine Homotopieäquivalenz. Wir geben der linken Seite den Namen  $M$  und betrachten die Überdeckung  $M = M_+ \cup M_-$  durch die offenen Teilmengen

$$\begin{aligned} M_+ &= M \setminus \{(x, \lambda x) \mid 0 < \lambda < 1\} \\ M_- &= M \setminus \{(\lambda y, y) \mid 0 < \lambda < 1\} \end{aligned}$$

mit Schnitt  $M_+ \cap M_- = \{(x, y) \in M \mid \mathbb{R}_{>0}x \neq \mathbb{R}_{>0}y\}$ . Stellen wir uns den festen Punkt als die Sonne vor und  $x$  bzw.  $y$  als die Erde bzw. den Mond, die sich jedoch in einer Ebene völlig unabhängig voneinander bewegen dürfen, so ist  $M_+$  die Menge aller Konstellationen “ohne Sonnenfinsternis” und  $M_-$  die Menge aller Konstellationen “ohne Mondfinsternis”. Jetzt haben wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\rightarrow M_+, & (z, w) &\mapsto (z, 2w) \\ S^1 \times S^1 &\rightarrow M_-, & (z, w) &\mapsto (2z, w) \\ S^1 &\rightarrow M_+ \cap M_-, & z &\mapsto (-z, z) \end{aligned}$$

und wenn wir Basispunkte  $1 \in S^1$ ,  $(1, 1) \in S^1 \times S^1$  und  $(-1, 1) \in M$  wählen, erhalten wir mit etwas komplizierteren Ausdrücken auch basispunkterhaltende Homotopieäquivalenzen, indem “wir Erde und Mond um geeignete Punkte  $p$  auf der reellen Achse kreisen lassen”, in Formeln

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\rightarrow M_+, & (z, w) &\mapsto (-p - z(1-p), -p + w(1+p)) \\ S^1 \times S^1 &\rightarrow M_-, & (z, w) &\mapsto (p - z(1+p), p + w(1-p)) \end{aligned}$$

für beliebig fest gewähltes  $p$  mit  $0 < p < 1/2$ . Unsere dritte Homotopieäquivalenz  $S^1 \rightarrow M_+ \cap M_-$  von oben erhält schon die Basispunkte. Wie man anschaulich schnell einsieht und unschwer formalisiert, kommutieren mit unserer Wahl von Basispunkten nun die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(M_+ \cap M_-) \\ \text{diag} \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) & \xleftarrow{\sim} \pi_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\sim} & \pi_1(M_{\pm}) \end{array}$$

und wir erhalten isomorphe pushout-Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(M_+ \cap M_-) & \rightarrow & \pi_1(M_+) & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{diag}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & \text{diag} \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(M_-) & \rightarrow & \pi_1(M) & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \rightarrow & \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) \end{array}$$

Man sieht so, daß  $\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta)$  erzeugt wird von den Klassen  $g, u_+, u_-$  der drei Wege

$$\begin{aligned} \tilde{g} : t &\mapsto ( -e^{2\pi it} & , 0, & e^{2\pi it} ) \\ \tilde{u}_+ : t &\mapsto ( -1 & , 0, & p + (1-p)e^{2\pi it} ) \\ \tilde{u}_- : t &\mapsto ( -p - (1-p)e^{2\pi it} & , 0, & 1 ) \end{aligned}$$

für beliebiges festes  $p$  mit  $0 < p < 1/2$ , wo wir nur die beiden Relationen  $gu_+ = u_+g$  und  $gu_- = u_-g$  fordern müssen. Wir behaupten, daß die Bilder unserer drei Wege in der Zopfgruppe  $\pi_1(X_3)$  gegeben werden durch

$$\begin{aligned} u_+ &\mapsto s_1^2 \\ u_- &\mapsto s_2^2 \\ g &\mapsto (s_1s_2)^3 = (s_2s_1)^3 \end{aligned}$$

Das scheint mir anschaulich evident. Formal kann man zum Beispiel in  $\mathbb{C}^3 \setminus \Delta$  den Weg  $\tilde{g}_{1/2}$  von  $(-1, 0, 1)$  nach  $(1, 0, -1)$  betrachten mit  $\tilde{g}_{1/2}(t) = \tilde{g}(2t)$  sowie die Wege  $\tilde{s}_1$  und  $\tilde{s}_2$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1: t &\mapsto \left( -1/2 - e^{\pi i t} / 2, \quad -1/2 + e^{\pi i t} / 2, \quad 1 \right) \\ \tilde{s}_2: t &\mapsto \left( -1, \quad 1/2 - e^{\pi i t} / 2, \quad 1/2 + e^{\pi i t} / 2 \right) \end{aligned}$$

und linear interpolieren zwischen den Wegen  $\tilde{g}_{1/2}$  und  $(\tau \circ \tilde{s}_1) * (\sigma \circ \tilde{s}_2) * \tilde{s}_1$  für Permutationen  $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_3$  der drei Koordinaten derart, daß die Wege verknüpfbar sind. Dasselbe gilt symmetrisch, wenn wir die Indizes 1 und 2 vertauschen. Drücken wir diese linearen Homotopien dann herunter auf  $X_3$  und verknüpfen, so ergibt sich die dritte (und komplizierteste) der obigen Behauptungen, d.h.  $g \mapsto (s_1s_2)^3 = (s_2s_1)^3$ . Jetzt betrachten wir formal die Gruppe  $B_3$ , die erzeugt wird von zwei Elementen  $s$  und  $t$  mit den Relationen  $sts = tst$ . (Es tut mir leid, den Buchstaben  $t$  erst als Parameter eines Weges und nun gleich darauf in dieser völlig anderen Bedeutung zu verwenden. Beide Notationen sind jedoch derart gebräuchlich, daß diese Kollision mir ein kleineres Übel scheint, als es eine gänzlich unübliche Wahl der Bezeichnungen wäre.) Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) & \rightarrow & B_3 & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_3 \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) & \hookrightarrow & \pi_1(X_3) & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_3 \end{array}$$

mit  $s \mapsto s_1$  und  $t \mapsto s_2$  in der mittleren Vertikale und hoffentlich sonst offensichtlichen Morphismen. Als erstes folgt, daß die Horizontale oben links eine Injektion ist. Weiter ist klar, daß die Verknüpfung in der oberen Horizontale trivial ist. Als nächstes überlegt man sich explizit, daß ihr Bild genau der Kern von  $B_3 \twoheadrightarrow \mathcal{S}_3$  ist. Der wesentliche Punkt hierbei ist, zunächst die Normalität dieses Bildes nachzuweisen. Nun findet man aber in  $B_3$  in der Tat die Identität

$$ts^2t^{-1} = (st)^3s^{-2}t^{-2},$$

und mit dieser Identität folgt die Normalität ohne weitere Schwierigkeiten. Jetzt beachten wir, daß für einen Normalteiler  $N$  einer Gruppe  $G$  und  $a, b \in G$ ,  $x \in N$  gilt

$$ab \in N \Leftrightarrow axb = axa^{-1}ab \in N$$

Um zu erkennen, ob die Klasse eines Gruppenworts in  $\ker(B_3 \rightarrow \mathcal{S}_3)$  liegt, müssen wir nur alle Potenzen  $s^m$  für  $m \in \mathbb{Z}$  reduzieren zu  $s$  bzw.  $e$  falls  $m \in 2\mathbb{Z}$  bzw.  $m \notin 2\mathbb{Z}$  und analog für  $t$ , bis wir bei einem Wort ankommen, bei dem keine negativen Potenzen auftreten und bei dem die Buchstaben  $s$  und  $t$  alternieren. Unser ursprüngliches Wort war im Kern genau dann, wenn dieses alternierende Wort eine durch 6 teilbare Länge hat. Diese Beschreibung des Kerns zeigt nun, da eben das Bild von  $\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta)$  in  $B_3$  normal ist, mit unserer allgemeinen gruppentheoretischen Überlegung wie behauptet die schwierige Inklusion  $\supset$  und damit die Gleichheit

$$\pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta) = \ker(B_3 \rightarrow \mathcal{S}_3)$$

und damit folgt durch Diagrammjagd in der Tat  $B_3 \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_3)$ . Der Fall  $n = 3$  ist erledigt. Wir behandeln nun den allgemeinen Fall. Dazu halten wir  $n$  fest, schreiben kurz  $X_n = X$ , und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} k: X &\rightarrow \mathbb{N} \\ E &\mapsto n - |\operatorname{Re}(E)| \end{aligned}$$

für  $|\operatorname{Re}(E)|$  die Kardinalität der Projektion von  $E$  auf die reelle Achse. In  $X$  betrachten wir die Teilmengen  $Z_\nu = k^{-1}(\nu)$  sowie  $Z_{\leq \nu} = k^{-1}(\{0, 1, \dots, \nu\})$ . Zum Beispiel besteht  $Z_0$  aus allen  $n$ -elementigen Teilmengen von  $\mathbb{C}$  derart, daß die Realteile ihrer Elemente paarweise verschieden sind, und  $Z_1$  besteht aus allen  $n$ -elementigen Teilmengen, in denen es genau zwei Punkte gibt mit demselben Realteil. Offensichtlich ist  $Z_0$  zusammenziehbar, alle  $Z_{\leq \nu}$  sind offen, und  $Z_\nu$  ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $\nu$  in  $Z_{\leq \nu}$ . Proposition 4.11.7 und Übung 4.11.8 liefern uns damit für einen beliebigen Basispunkt in  $Z_0$  eine Surjektion und viele Isomorphismen

$$\pi_1(Z_{\leq 1}) \twoheadrightarrow \pi_1(Z_{\leq 2}) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} \pi_1(Z_{\leq n-1}) = \pi_1(X)$$

Wir untersuchen nun zunächst  $\pi_1(Z_{\leq 1})$ . Sicher zerfällt  $Z_1$  in Zusammenhangskomponenten

$$Z_1 = Z_1^1 \cup Z_1^2 \cup \dots \cup Z_1^{n-1}$$

wo  $Z_1^i$  aus allen  $n$ -elementigen Teilmengen  $E \in Z_1$  besteht derart, daß bei einer Aufzählung  $x_1, \dots, x_n$  von  $E$  mit wachsenden Realteilen gilt  $\operatorname{Re}(x_i) = \operatorname{Re}(x_{i+1})$ . Bezeichnen wir ganz allgemein mit  $X_n^{[a,b]}$  den Raum aller  $n$ -elementigen Teilmengen von  $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b\}$ , so haben wir offensichtlich Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} X_2 &\leftarrow X_2^{[i,i+1]} \hookrightarrow Z_0 \cup Z_1^i \\ &\quad \{x, y\} \mapsto \{1, \dots, i-1, x, y, i+2, \dots, n\} \end{aligned}$$



folglich ist  $\pi_1(Z_0 \cup Z_1^i)$  frei erzeugt von  $s_i$ . Mit Induktion und dem Satz von Seifert-van-Kampen folgt, daß für jede Teilmenge  $T \subset \{1, \dots, n-1\}$  die Fundamentalgruppe  $\pi_1(Z_0 \cup \bigcup_{i \in T} Z_1^i)$  frei erzeugt ist von den  $s_i$  mit  $i \in T$ . Insbesondere erzeugen die  $s_i$  schon mal unsere Zopfgruppe, und wir müssen uns nur noch um die Relationen kümmern. Sicher zerfällt auch  $Z_2$  in Zusammenhangskomponenten

$$Z_2 = \bigsqcup_{1 \leq i < j < n} Z_2^{i,j}$$

wo  $Z_2^{i,j}$  aus den  $n$ -elementigen Teilmengen  $E \in Z_2$  besteht derart, daß bei einer Aufzählung  $x_1, \dots, x_n$  von  $E$  mit wachsenden Realteilen gilt  $\text{Re}(x_i) = \text{Re}(x_{i+1})$  und  $\text{Re}(x_j) = \text{Re}(x_{j+1})$ . Wir setzen  $Z_{\leq 2}^{i,j} = Z_0 \cup Z_1^i \cup Z_1^j \cup Z_2^{i,j}$  und bemerken, daß diese Menge offen ist in  $X_n$ . Im Fall  $i < j-1$  haben wir eine Homotopieäquivalenz

$$\begin{aligned} X_2^{[i,i+1]} \times X_2^{[j,j+1]} &\hookrightarrow Z_{\leq 2}^{i,j} \\ (\{x, y\}, \{z, w\}) &\mapsto \{1, 2, \dots, i-1, x, y, \dots, j-1, z, w, \dots, n\} \end{aligned}$$

die zeigt, daß  $\pi_1(Z_{\leq 2}^{i,j})$  erzeugt wird von  $s_i$  und  $s_j$  mit der einzigen Relation  $s_i s_j = s_j s_i$ . Im Fall  $i = j-1$  haben wir Homotopieäquivalenzen

$$\begin{aligned} X_3 &\hookleftarrow X_3^{[i,i+2]} \hookrightarrow Z_{\leq 2}^{i,i+1} \\ \{x, y, z\} &\mapsto \{1, \dots, i-1, x, y, z, i+3, \dots, n\} \end{aligned}$$

die mit dem bereits behandelten Fall  $n = 3$  zeigen, daß  $\pi_1(Z_{\leq 2}^{i,i+1})$  erzeugt wird von  $s_i$  und  $s_{i+1}$  mit der einzigen Relation  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ . Sei nun  $R \subset \{(i, j) \mid 1 \leq i < j < n\}$  eine beliebige Teilmenge. Wir behaupten, daß  $\pi_1(Z_{\leq 1} \cup \bigcup_{(i,j) \in R} Z_2^{i,j})$  erzeugt ist von  $s_1, \dots, s_{n-1}$  mit den Zopfrelationen für alle  $(i, j) \in R$ . In der Tat folgt das nun mit Seifert-van-Kampen und vollständiger Induktion über  $|R|$ . Der Satz ergibt sich, wenn wir  $R$  maximal möglich wählen.  $\square$

### 4.12 Überlagerungen topologischer Gruppen\*

*Übung 4.12.1.* Jeder diskrete Normalteiler einer zusammenhängenden topologischen Gruppe ist zentral.

**Satz 4.12.2 (Überlagerungen topologischer Gruppen).** *Ist  $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$  eine zusammenhängende Überlagerung einer lokal zusammenziehbaren topologischen Gruppe, so gibt es für jedes Element  $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$  über dem neutralen*

Element genau eine stetige Verknüpfung auf  $\tilde{G}$ , die mit  $\pi$  verträglich ist und  $\tilde{e}$  als neutrales Element hat, und diese Verknüpfung macht  $\tilde{G}$  zu einer topologischen Gruppe.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit der Verknüpfung folgt aus Satz 4.4.2 über die Eindeutigkeit von Lifts, angewandt auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \rightarrow & \tilde{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times G & \rightarrow & G \end{array}$$

Für das weitere dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $G$  zusammenhängend annehmen. Da wir  $G$  lokal zusammenziehbar angenommen hatten, besitzt  $G$  dann nach 4.8.1 eine wegweise einfach zusammenhängende Überlagerung  $U$  und auch  $U \times U$  ist dann wegweise einfach zusammenhängend. Die Existenz der Verknüpfung auf  $\tilde{G} = U$  folgt so aus demselben Diagramm mit dem Satz über die Existenz von Lifts 4.7.3. Die Existenz des Inversen folgt ähnlich, und die Assoziativität der Verknüpfung folgt wieder mit dem Satz über die Eindeutigkeit von Lifts. Nun ist der Kern von  $\pi : U \rightarrow G$  aber diskret und damit zentral und kanonisch isomorph zur Fundamentalgruppe von  $G$ . Die anderen zusammenhängenden Überlagerungen sind mithin Quotienten von  $U$  nach zentralen Untergruppen, und so erhalten wir die Existenz der Gruppenstruktur für beliebige zusammenhängende Überlagerungen von  $G$ .  $\square$

### 4.13 Überlagerungen und Homotopie\*

**Satz 4.13.1.** *Sei  $Y$  einfach zusammenhängend und lokal zusammenhängend und sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum. So ist jede Überlagerung des Produkts  $X \times Y$  isomorph zum Produkt  $\tilde{X} \times Y$  einer Überlagerung  $\tilde{X}$  von  $X$  mit  $Y$ .*

*Beweis.* Sei  $p : \tilde{X}_Y \rightarrow X \times Y$  die Überlagerung des Produkts. Für jedes  $y \in Y$  setzen wir  $\tilde{X}_y = p^{-1}(X \times \{y\})$  und erhalten so für jedes  $y \in Y$  eine Überlagerung von  $X$ . Ist  $Y$  einfach zusammenhängend, so definieren wir für beliebige  $z, w \in Y$  Abbildungen  $f_{wz} : \tilde{X}_z \rightarrow \tilde{X}_w$  durch die Bedingung, daß  $\tilde{x}$  und  $f_{wz}(\tilde{x})$  im Bild desselben Lifts von  $Y \rightarrow X \times Y$ ,  $y \mapsto (p(\tilde{x}), y)$  liegen sollen. Natürlich gilt  $f_{zw} \circ f_{wy} = f_{zy}$  und  $f_{zz} = \text{id}$  für alle  $z$ . Der Satz folgt nun aus dem anschließenden präziseren Lemma.  $\square$

**Lemma 4.13.2.** *Sei  $p : \tilde{X}_Y \rightarrow X \times Y$  eine Überlagerung des Produktes von einem Raum  $X$  mit einem einfach zusammenhängenden und lokal zusammenhängenden Raum  $Y$ . So ist für jedes  $y \in Y$  die offensichtliche Abbildung*

$$f : \tilde{X}_y \times Y \rightarrow \tilde{X}_Y, \quad (\tilde{x}, z) \mapsto f_{zy}(\tilde{x})$$

ein Isomorphismus von Überlagerungen.

*Beweis.* Die Abbildung  $f$  ist sicher bijektiv. Zeigen wir auch noch die Stetigkeit von  $f$ , so ist  $f$  eine Decktransformation, also ein Isomorphismus von Überlagerungen. Für jedes  $\tilde{x} \in \tilde{X}_Y$  finden wir eine trivial überlagerte Umgebung von  $p(\tilde{x}) = (x, w)$  der Form  $V \times W$  mit  $W$  zusammenhängend, und dann induziert offensichtlich die Abbildung  $(\tilde{v}, z) \mapsto f_{zw}(\tilde{v})$  Homöomorphismen

$$p^{-1}(V \times \{w\}) \times W \xrightarrow{\sim} p^{-1}(V \times W)$$

Für festes  $\tilde{x} \in \tilde{X}_y$  betrachten wir nun in  $Y$  die Teilmengen  $Y_s, Y_u$  aller  $z \in Y$  derart, daß  $f_{zy}$  bei  $\tilde{x}$  stetig bzw. unstetig ist. Nach dem Vorhergehenden sind sowohl  $Y_s$  als auch  $Y_u$  offen. Also gilt  $Y = Y_s$  und alle  $f_{zw}$  sind stetig. Daraus folgt aber unter nochmaliger Verwendung unserer Homöomorphismen von oben, daß  $f$  selbst stetig ist.  $\square$

**Korollar 4.13.3.** *Sind  $X$  und  $Y$  einfach zusammenhängend und ist  $Y$  zusätzlich lokal zusammenhängend, so ist auch  $X \times Y$  einfach zusammenhängend.*

*Beweis.* Nach dem Satz ist ja jede Überlagerung von  $X \times Y$  das Produkt einer Überlagerung von  $X$  mit  $Y$ .  $\square$

**Korollar 4.13.4 (Liften von Homotopien).** *Sei  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $Y$  ein topologischer Raum und  $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  stetig. So läßt sich jeder Lift  $\tilde{H}_0$  von  $H_0 := H|_{Y \times \{0\}}$  auf genau eine Weise zu einem Lift  $\tilde{H}$  von  $H$  fortsetzen.*

*Bemerkung 4.13.5.* Zum besseren Verständnis des Satzes stelle ich die Räume und Abbildungen, die darin vorkommen, nochmal in einem Diagramm dar.

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{H}_0} & \tilde{X} \\ & \searrow \tilde{H} & \downarrow \\ & Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} X \end{array}$$

*Erster Beweis.* Die Eindeutigkeit von  $\tilde{H}$  ist klar nach dem Satz über Eindeutigkeit von Lifts: Man wende ihn an auf die zusammenhängenden Teilräume  $\{y\} \times [0, 1]$ . Wir zeigen die Existenz von  $\tilde{H}$ . Der pull-back der Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  mit  $H$  ist eine Überlagerung  $Z \rightarrow Y \times [0, 1]$ . Wenden wir auf diese Überlagerung Satz 4.13.1 an, so finden wir eine Überlagerung  $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$  und

einen Isomorphismus  $\tilde{Y} \times [0, 1] \simeq Z$  von von Überlagerungen von  $Y \times [0, 1]$ . Folglich gibt es eine Abbildung  $f : \tilde{Y} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} \times [0, 1] & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ q \times \text{id} \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

kartesisch ist. Dann definiert  $\tilde{H}_0$  ein Rechtsinverses  $l : Y \rightarrow \tilde{Y}$  der Überlagerung  $q$  und wir erhalten  $\tilde{H}$  als  $\tilde{H} = f \circ (l \times \text{id})$ .  $\square$

*Zweiter Beweis ohne 4.13.1.* Die Eindeutigkeit von  $\tilde{H}$  ist klar nach dem Satz über Eindeutigkeit von Lifts: Man wende ihn an auf die zusammenhängenden Teilräume  $\{y\} \times [0, 1]$ . Wir zeigen die Existenz von  $\tilde{H}$  in mehreren Schritten.

1. Der Satz gilt, falls  $X$  trivial überlagert ist, also ohne der Beschränkung der Allgemeinheit  $\tilde{X} = X \times F$  und  $p = \text{pr}_1$ . In der Tat ist in diesem Fall  $\tilde{H}(y, t) = (H(y, t), \text{pr}_2 \circ \tilde{H}_0(y))$  ein Lift von  $H$  mit den gewünschten Eigenschaften.

2. Im allgemeinen reicht es zu zeigen, daß jedes  $y \in Y$  eine offene Umgebung  $W$  besitzt derart, daß  $\tilde{H}_0|_{W \times \{0\}}$  sich zu einem Lift  $\tilde{H}$  von  $H|_{W \times [0, 1]}$  fortsetzen läßt. Denn aufgrund der Eindeutigkeit müssen diese Lifts auf den Schnitten  $(W \cap V) \times [0, 1]$  zusammenfallen, und wir definieren dann durch Verkleben den gesuchten Lift  $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ .

3. Sei nun  $y \in Y$  fest. Für jedes  $t \in [0, 1]$  besitzt  $H(y, t)$  eine trivial überlagerte Umgebung, mithin gibt es offene Umgebungen  $W_t$  von  $y$  und  $I_t$  von  $t$  derart, daß  $H(W_t \times I_t)$  in einer trivial überlagerten offenen Menge liegt. Hier ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $I_t$  ein Intervall. Die  $I_t$  für endlich viele  $t$  bedecken  $[0, 1]$ . Sei  $W = W_y$  der Schnitt der zugehörigen  $W_t$ . So ist  $W$  eine offene Umgebung von  $y$ , und es gibt  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$  derart, daß  $H(W \times [t_{i-1}, t_i])$  für alle  $i$  ganz in einer trivial überlagerten offenen Menge in  $X$  liegt. Setzen wir induktiv voraus, daß ein partieller Lift  $\tilde{H} : W \times [0, t_i] \rightarrow \tilde{X}$  schon konstruiert ist, so liefert uns Schritt 1 ein  $\tilde{H} : W \times [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \tilde{X}$ , das auf  $W \times \{t_i\}$  mit dem vorigen partiellen Lift  $\tilde{H}$  übereinstimmt und  $H$  liftet, also verkleben diese beiden  $\tilde{H}$  zu einem Lift  $\tilde{H} : W \times [0, t_{i+1}] \rightarrow \tilde{X}$  und wir sind fertig per Induktion.  $\square$

*Übung 4.13.6.* Man zeige: Sind zwei Räume homotopieäquivalent, so ist der eine einfach zusammenhängend genau dann, wenn der andere einfach zusammenhängend ist. Ist allgemeiner  $X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz, so liefert der pull-back eine Äquivalenz von Kategorien  $\text{Üb}/Y \rightarrow \text{Üb}/X$ .

# Kapitel II

## Singuläre Homologie

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Singuläre Homologie</b>	<b>135</b>
1.1	Simpliziale Homologie	135
1.2	Definition der singulären Homologie	142
1.3	Funktorialität der Homologie	149
1.4	Homotopie-Invarianz	152
1.5	Erste Homologie und Fundamentalgruppe	160
1.6	Homologie offener Teilmengen der Ebene	164
<b>2</b>	<b>Relative Homologie mit Anwendungen</b>	<b>174</b>
2.1	Relative Homologie	174
2.2	Die lange exakte Homologiesequenz	178
2.3	Ausschneidung	183
2.4	Homologie von Simplizialkomplexen	194
2.5	Endlichkeitsaussagen für Mannigfaltigkeiten	200
2.6	Variationen zur simplizialen Homologie*	201
2.7	Einbettungen von Sphären in Sphären	208
2.8	Homologie von endlichen Zellkomplexen	213
2.9	Homologie und Orientierung	217
2.10	Orientierung und Fundamentalzykel	219
<b>3</b>	<b>Homologie mit Koeffizienten und Produkte</b>	<b>232</b>
3.1	Homologie mit Koeffizienten	232
3.2	Tensorprodukte über Ringen	235

3.3	Erste Anwendungen in der Homologietheorie . . . . .	240
3.4	Torsionsprodukt von abelschen Gruppen . . . . .	241
3.5	Das universelle Koeffiziententheorem . . . . .	246
3.6	Homologie von Produkten . . . . .	248
3.7	Eine explizite Eilenberg-Zilber-Abbildung . . . . .	257
3.8	Eigenschaften des Kreuzprodukts . . . . .	260
<b>4</b>	<b>Singuläre Kohomologie . . . . .</b>	<b>264</b>
4.1	Die Kohomologiegruppen . . . . .	264
4.2	Der Kohomologiering . . . . .	267
4.3	Cup-Produkt von singulären Koketten . . . . .	272
4.4	Differentielle graduierte Algebra . . . . .	273
4.5	Die Homologie als Modul über der Kohomologie . . . . .	277
4.6	Ein Kriterium für Homotopieäquivalenzen . . . . .	281
4.7	Eigenschaften der Kohomologie . . . . .	283
4.8	Erweiterungen von abelschen Gruppen . . . . .	285
4.9	Injektive abelsche Gruppen . . . . .	287
4.10	Koeffizientenwechsel in der Kohomologie . . . . .	291
<b>5</b>	<b>Poincaré-Dualität und Schnittpaarung . . . . .</b>	<b>293</b>
5.1	Limites und Kolimites . . . . .	293
5.2	Kohomologie mit kompaktem Träger . . . . .	300
5.3	Poincaré-Dualität . . . . .	307
5.4	Schnittzahlen . . . . .	313
5.5	Anschauung im nichtkompakten Fall . . . . .	321

---

# 1 Singuläre Homologie

## 1.1 Simpliciale Homologie

**Definition 1.1.1.** Für jede Menge  $\Lambda$  betrachten wir die abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}\Lambda$  aller Abbildungen  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ , die nur auf endlich vielen Elementen von  $\Lambda$  Werte ungleich Null annehmen. In kategorientheoretischer Sprache ist das die **freie abelsche Gruppe**  $\mathbb{Z}\Lambda = \text{Ab}^\uparrow \Lambda$  über  $\Lambda$ . Die Elemente von  $\mathbb{Z}\Lambda$  fassen wir auf als endliche formale Linearkombinationen von Elementen von  $\Lambda$  und schreiben sie  $f = \sum a_\lambda \lambda$  mit  $a_\lambda = f(\lambda) \in \mathbb{Z}$  und  $\lambda \in \Lambda$ .

1.1.2. Wir haben eine offensichtliche Abbildung  $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}\Lambda$ , die eben jedem Element die charakteristische Funktion der entsprechenden einelementigen Teilmenge zuordnet. Gegeben eine weitere abelsche Gruppe  $G$  läßt sich jede Abbildung  $\varphi : \Lambda \rightarrow G$  auf genau eine Weise zu einem Gruppenhomomorphismus  $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}\Lambda \rightarrow G$  ausdehnen, den wir die **lineare Fortsetzung von  $\varphi$**  nennen.

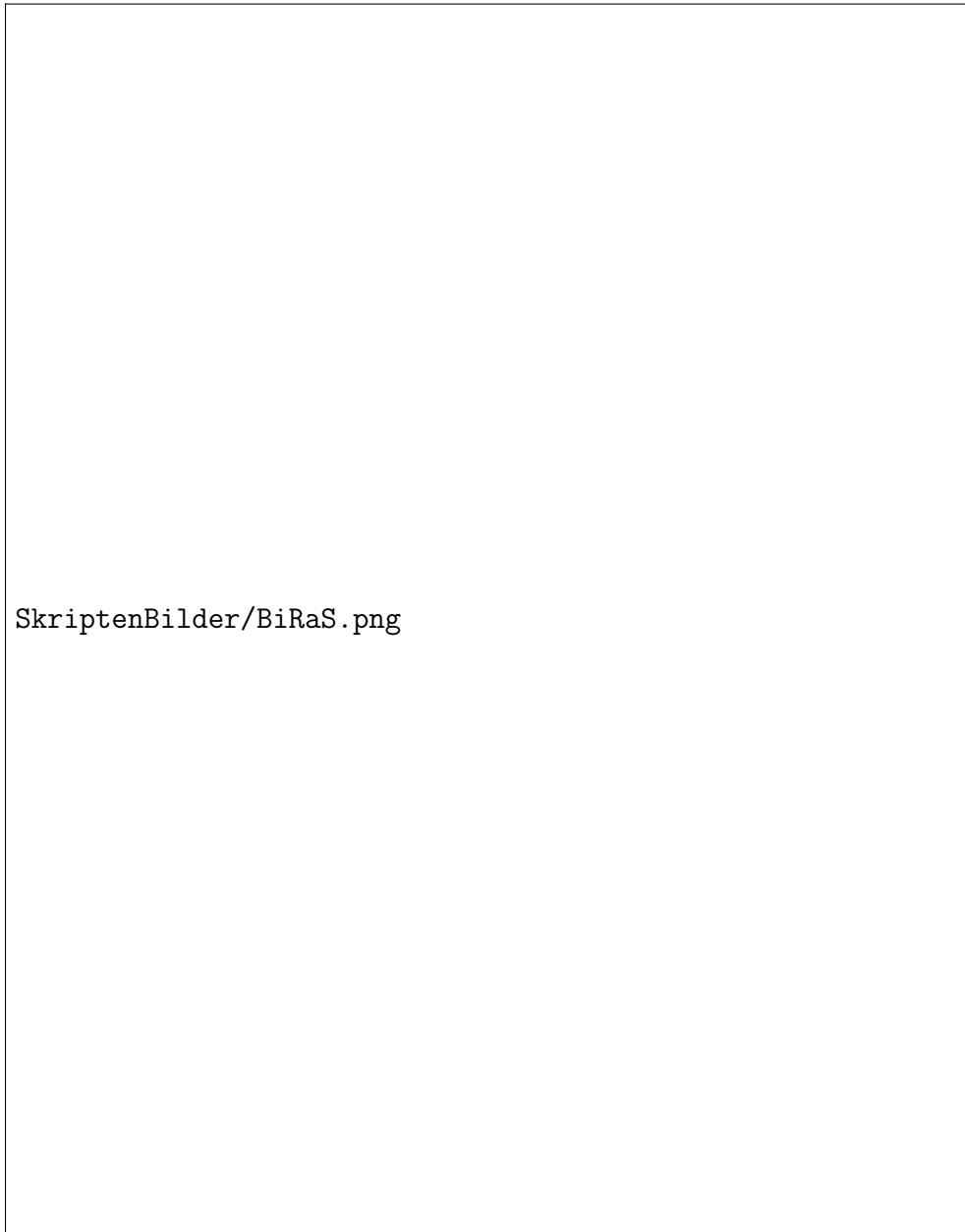
**Definition 1.1.3.** Sei  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex im Sinne unserer Definition I.3.4.5, also eine Menge  $E$  mitsamt einem System  $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$  von endlichen Teilmengen von  $E$ , das unter dem Bilden von Teilmengen stabil ist und alle einelementigen Teilmengen von  $E$  enthält. Eine geometrische Anschauung für dieses eher kombinatorische Datum mag der zugehörige Polyeder  $\Delta(\mathcal{K})$  nach I.3.4.7 geben. Gegeben  $q \in \mathbb{N}$  alias  $q \geq 0$  bilden wir erst die Menge

$$\mathcal{K}_q^{\leq} := \{\sigma : \{0, \dots, q\} \rightarrow E \mid \sigma \text{ injektiv, im } \sigma \in \mathcal{K}\}$$

aller **angeordneten  $q$ -Simplizes** in unserem Simplicialkomplex, deshalb auch der obere Index  $\leq$ . Dann bilden wir über dieser Menge die freie abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\leq}$ . Und schließlich bilden wir deren Quotienten

$$\mathcal{S}_q \mathcal{K} := \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\leq} / \langle \sigma \circ \pi - (\text{sgn } \pi)\sigma \mid \sigma \in \mathcal{K}_q^{\leq}, \pi \in \mathcal{S}_{q+1} \rangle$$

in dem je zwei angeordnete  $q$ -Simplizes, die sich nur in ihrer Anordnung und in dieser um eine Permutation  $\pi$  unterscheiden, bis auf das Signum der fraglichen Permutation  $\pi \in \mathcal{S}_{q+1}$  miteinander identifiziert werden. Diesen Quotienten  $\mathcal{S}_q \mathcal{K}$  nennen wir die **Gruppe der  $q$ -Simplizialketten von  $\mathcal{K}$** . Einen angeordneten  $q$ -Simplex  $\sigma$  notieren wir  $(v_0, \dots, v_q)$  mit  $v_i = \sigma(i)$ . Die abweichende Konvention aus I.3.4.5, wo der Buchstabe  $\sigma$  meist einen Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}$  alias eine Teilmenge der Menge  $E$  der Ecken bezeichnete, werden wir von nun an nicht mehr verwenden. Wir benutzen stattdessen für solche Teilmengen lateinische Buchstaben, etwa  $s \in \mathcal{K}$ . Die Gruppenhomomorphismen



Anschauung für den Rand einer 2-Simplizialkette. In der linken Spalte habe ich versucht, zwei Elemente der freien abelschen Gruppe über der Menge der angeordneten Simplizes graphisch darzustellen, die dieselbe Simplizialkette repräsentieren, sowie ganz unten besagte Simplizialkette selber. In der rechten Spalte werden die jeweiligen Ränder angedeutet.



$\partial^{\leq} : \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q+1}^{\leq} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\leq}$ , die auf angeordneten Simplexes durch die Formel

$$(v_0, \dots, v_q) \mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q)$$

gegeben werden mit einem Hut alias einer ‘‘Tarnkappe’’ über der wegzulassenden Komponente, induzieren Gruppenhomomorphismen

$$\partial = \partial_{q+1} : S_{q+1}\mathcal{K} \rightarrow S_q\mathcal{K}$$

auf den Simplizialketten, die **Randoperatoren**. In der Tat, da die symmetrische Gruppe durch Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt wird, müssen wir für die Wohldefiniertheit dieser Randoperatoren nur prüfen, daß die beiden Ränder  $\partial^{\leq}(v_0, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_q)$  und  $-\partial^{\leq}(v_0, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_q)$  für alle  $i$  dieselbe Simplizialkette repräsentieren, und das ist leicht einzusehen. Weiter prüft man ohne Schwierigkeiten, daß die Verknüpfung von je zwei aufeinanderfolgenden Randoperatoren Null ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Sequenz von abelschen Gruppen

$$\dots \xrightarrow{\partial} S_2\mathcal{K} \xrightarrow{\partial} S_1\mathcal{K} \xrightarrow{\partial} S_0\mathcal{K},$$

den **Komplex der Simplizialketten**. Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, setzen wir unsere Sequenz ins Negative fort durch Null und vereinbaren  $S_q\mathcal{K} = 0$  für  $q < 0$ .

*Vorschau 1.1.4.* Jeder Simplizialkomplex hat genau einen  $(-1)$ -Simplex, nämlich die leere Menge, und es mag natürlicher erscheinen, den Komplex der Simplizialketten nicht bei Null enden zu lassen, sondern ihn durch  $S_{-1}\mathcal{K} = \mathbb{Z}$  fortzusetzen und erst darunter mit Nullen fortzufahren. Diese Variante unserer bisherigen Definitionen werden wir später noch ausführlicher diskutieren, sie führt zur sogenannten ‘‘reduzierten Homologie’’.

1.1.5. Anschaulich mag man sich eine 0-Simplizialkette vorstellen als eine endliche formale Linearkombination von Ecken mit ganzzahligen Koeffizienten; eine 1-Simplizialkette als eine endliche formale Linearkombination von ‘‘gerichteten’’ Kanten, wobei wir uns einen angeordneten 1-Simplex  $\sigma : \{0, 1\} \hookrightarrow E$  als eine von  $\sigma(0)$  nach  $\sigma(1)$  gerichtete Kante denken und eine Kante mit der umgekehrten Richtung mit dem Negativen der ursprünglichen Kante zu identifizieren ist; den Rand einer orientierten Kante als Endpunkt minus Anfangspunkt; eine 2-Simplizialkette als eine endliche formale Linearkombination von ‘‘orientierten’’ Dreiecksflächen, wobei wir einen angeordneten 2-Simplex  $\sigma : \{0, 1, 2\} \hookrightarrow E$  durch einen Kreis Pfeil im Drehsinn des Weges von  $\sigma(0)$  über  $\sigma(1)$  nach  $\sigma(2)$  und wieder nach  $\sigma(0)$  andeuten, und



Ein Simplizialkomplex mit 12 Ecken, 20 Kanten und 8 Zweisimplizes. Darin eingezeichnet eine 1-Simplizialkette, bestehend aus der formalen Summe der sieben mit einem Pfeil versehenen fetten Kanten, zu verstehen mit der durch diesen Pfeil gegebenen Orientierung und jeweils mit dem Koeffizienten 8. Ebenfalls eingezeichnet der Rand dieser Simplizialkette, bestehend aus der formalen Summe der zwei besonders fetten Punkte mit den darangeschriebenen Koeffizienten  $\pm 8$ . Wenn wir unsere 1-Simplizialkette entsprechend durch die beiden Kanten zwischen diesen beiden Punkten mit geeigneter Orientierung und geeigneten Koeffizienten ergänzen, so erhalten wir einen 1-Simplizialzykel.

eine Dreiecksfläche mit umgekehrter Orientierung mit dem Negativen der ursprünglichen Dreiecksfläche zu identifizieren ist; und den Rand einer orientierten Dreiecksfläche als die Summe ihrer drei Kanten, jeweils versehen mit der Richtung, für die sie einen Rundweg in der durch die Orientierung unserer Dreiecksfläche gegebenen Laufrichtung bilden. Die Herkunft der Bezeichnung  $\partial$  für die Randoperatoren wird in ?? diskutiert.

**Definition 1.1.6.** Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex. Wir definieren

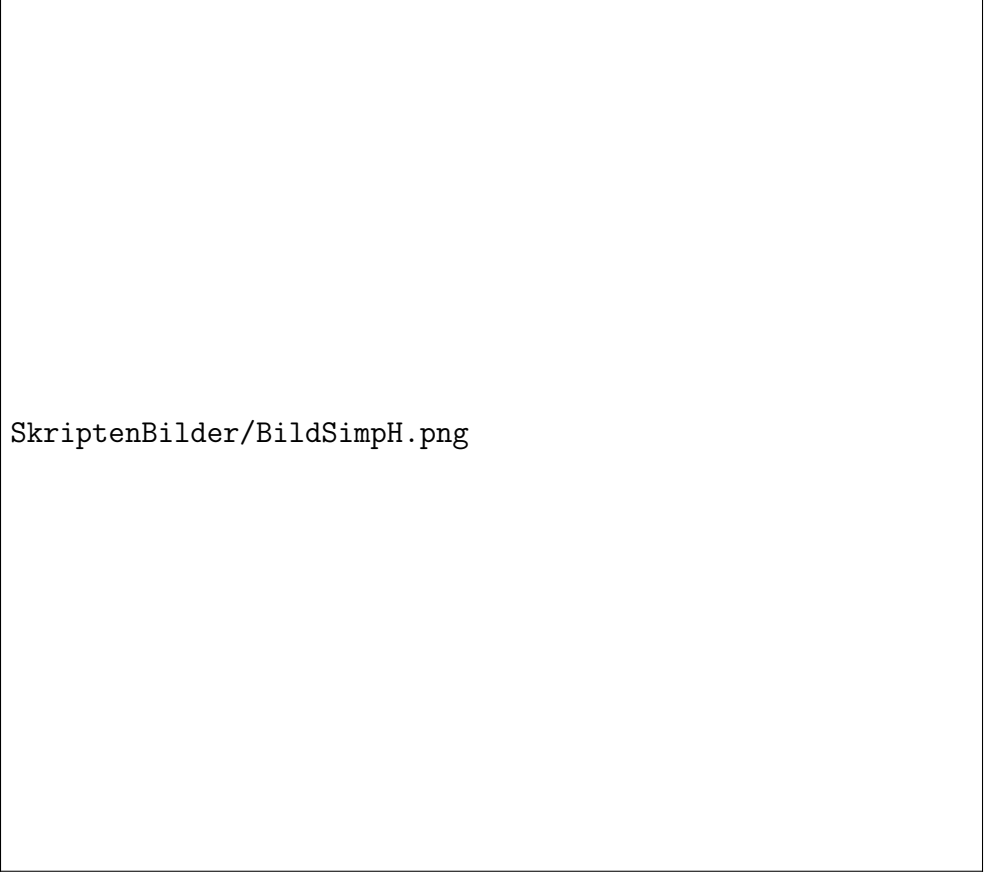
$Z_q\mathcal{K} := \ker(\partial_q : S_q\mathcal{K} \rightarrow S_{q-1}\mathcal{K})$  die Gruppe der  $q$ -**Simplizialzykel**;

$B_q\mathcal{K} := \text{im } \partial_{q+1}$  die Gruppe der  $q$ -**Simplizialränder** (engl. boundaries);

$H_q\mathcal{K} := Z_q\mathcal{K}/B_q\mathcal{K}$  die  $q$ -**te simpliziale Homologiegruppe** von  $\mathcal{K}$ .

1.1.7. Anschaulich gesprochen beschreiben die verschiedenen Homologiegruppen verschiedene Arten von Löchern des Polyeders  $\Delta(\mathcal{K})$ . Zum Beispiel liefert 1.2.11 in Verbindung mit 2.4.3 einen Isomorphismus zwischen  $H_0\mathcal{K}$  und der freien abelschen Gruppe über der Menge der Zusammenhangskomponenten von  $\Delta(\mathcal{K})$ , die ja durch eine gewisse Art von Löchern voneinander getrennt werden; der “Hurewicz-Isomorphismus” 1.5.2 in Verbindung mit 2.4.3 einen Isomorphismus zwischen  $H_1\mathcal{K}$  und dem maximalen abelschen Quotienten der Fundamentalgruppe von  $\Delta(\mathcal{K})$ , der eine andere Art von Löchern beschreibt; und die “Alexanderdualität” III.2.11.37 in Verbindung mit 2.4.3 für jeden endlichen Simplizialkomplex in  $\mathbb{R}^3$  einen Isomorphismus zwischen  $H_2\mathcal{K}$  und der freien abelschen Gruppe über der Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten des Komplements von  $\Delta(\mathcal{K})$ , d.h. mit der freien abelschen Gruppe über den “Kavitäten” unseres Polyeders, die eine wieder andere Art von Löchern beschreibt. Die höheren Homologiegruppen beschreiben ähnliche Phänomene in höheren Dimensionen, für die ich leider keine räumliche Anschauung mehr anbieten kann.

*Beispiel 1.1.8 (Simpliziale Homologie eines vollen Simplex).* Ist  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex mit  $E \neq \emptyset$  und  $\mathcal{K}$  der Menge aller endlichen Teilmengen von  $E$ , so ist der Komplex der Simplizialketten für jede Anordnung von  $E$  kanonisch isomorph in nichtnegativen Graden zum Komplex aus dem gleich anschließenden Lemma 1.1.9. Folglich liefert die Abbildung nach  $\mathbb{Z}\mathcal{K}_{-1}E$  aus Lemma 1.1.9 einen Isomorphismus  $H_0\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  und Lemma 1.1.9 zeigt weiter, daß alle anderen Homologiegruppen verschwinden. Der zugehörige Polyeder  $\Delta(\mathcal{K})$  ist für endliches  $E$  ein voller Simplex mit  $|E|$  Ecken, und unsere Erkenntnis bedeutet anschaulich, daß solch ein voller Simplex “keine Löcher hat”.



SkriptenBilder/BildSimpH.png

Zwei homologe 1-Simplizialzykel in einem zweidimensionalen Simplizialkomplex mit 12 Zwei-Simplizes, 24 Eins-Simplizes und 12 Null-Simplizes. Betrachtet man die Summe aller mit der Orientierung “im Uhrzeigersinn” versehenen Zwei-Simplizes, so ist der Rand dieser 2-Simplizialkette die Differenz der durch Doppelpfeile bzw. einfache Pfeile angedeuteten 1-Zykel.

**Lemma 1.1.9.** Für jede nichtleere angeordnete Menge  $E$  ist der Komplex

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{-1}E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_0E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_1E \leftarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_2E \leftarrow \dots$$

exakt, wo  $\mathcal{K}_qE$  das System aller  $(q+1)$ -elementigen Teilmengen von  $E$  bezeichnet und der Randoperator  $\partial = \partial^{\leq}$  durch die Formel aus 1.1.3 gegeben wird, so daß wir für  $v_0 < \dots < v_q$  haben

$$\partial : \{v_0, \dots, v_q\} \mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q\}$$

1.1.10. Wir verstehen hier Exaktheit im Sinne von 1.4.6.6. Ausgeschrieben behaupten wir also, daß an jeder Stelle der Kern des auslaufenden Pfeils mit dem Bild des einlaufenden Pfeils zusammenfällt. Eine wichtige Variante des Lemmas zeigen wir später als 2.4.8.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir  $E$  endlich annehmen. Ist dann  $v \in E$  die kleinste Ecke und definieren wir Gruppenhomomorphismen  $\delta : \mathbb{Z}\mathcal{K}_qE \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q+1}E$  durch die Vorschrift  $\delta\{v_0, \dots, v_q\} = \{v, v_0, \dots, v_q\}$  falls  $v \neq v_0$  bzw.  $\delta\{v_0, \dots, v_q\} = 0$  sonst, so prüft man leicht an jeder Stelle  $\partial\delta + \delta\partial = \text{id}$ . Also ist in unserem Komplex jeder Zykel ein Rand.  $\square$

*Beispiel 1.1.11.* Ist  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex mit  $3 \leq |E| < \infty$  und  $\mathcal{K}$  der Menge aller echten Teilmengen von  $E$ , so liefert die letzte Abbildung aus obigem Komplex wieder einen Isomorphismus  $H_0\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  und die erste einen Isomorphismus  $H_n\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  für  $n = |E| - 2$  und alle anderen Homologiegruppen verschwinden. Der zugehörige Polyeder  $\Delta(\mathcal{K})$  ist der "anschauliche Rand" eines vollen Simplex mit  $n+2$  Ecken.

*Übung 1.1.12.* Man berechne die simpliciale Homologie der "Vereinigung der Kanten eines Tetraeders", also  $|E| = 4$  und  $\mathcal{K}$  alle Teilmengen mit höchstens zwei Elementen.

*Übung 1.1.13.* Man zeige: Besitzt ein Simplicialkomplex eine Ecke mit der Eigenschaft, daß jeder Simplex bei Dazunehmen dieser Ecke ein Simplex bleibt, so verschwinden seine höheren simplicialen Homologiegruppen und seine nullte Homologiegruppe ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$ . Hinweis: 1.1.9.

*Übung 1.1.14.* Man berechne die simpliciale Homologie des "Randes eines Quadrats".

*Übung 1.1.15.* Man zeige, daß gegeben ein Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  das Bild der offensichtlichen Abbildung  $\mathcal{K}_0 \rightarrow H_0\mathcal{K}$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis ist und daß zwei Ecken aus  $\mathcal{K}_0$  dasselbe Basiselement liefern genau dann, wenn sie durch einen Kantenweg verbunden werden können.

*Übung 1.1.16.* Man fügt bei einem Simplicialkomplex eine Kante zwischen zwei bereits existierenden Ecken hinzu. Wie können sich die Homologiegruppen unseres Simplicialkomplexes dabei ändern?

1.1.17. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, daß die simplicialen Homologiegruppen eines Simplicialkomplexes  $\mathcal{K}$  bis auf Isomorphismus nur vom topologischen Raum  $\Delta(\mathcal{K})$  abhängen und nicht von der gewählten Triangulierung. Dazu erklären wir ganz allgemein für einen beliebigen topologischen Raum seine “singulären Homologiegruppen” und konstruieren ganz am Schluß dieses Abschnitts in 2.4.3 Isomorphismen zwischen den simplicialen Homologiegruppen eines Simplicialkomplexes und den singulären Homologiegruppen seines Polyeders  $\Delta(\mathcal{K})$ .

## 1.2 Definition der singulären Homologie

**Definition 1.2.1.** Sei  $q \geq 0$ . Der topologische Raum

$$\Delta_q = \left\{ (x_0, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1 \right\}$$

heißt der  $q$ -te **Standardsimplex**. Es ist also  $\Delta_0$  ein Punkt,  $\Delta_1$  ein Geraden-segment,  $\Delta_2$  eine Dreiecksfläche,  $\Delta_3$  ein massiver Tetraeder und so weiter.

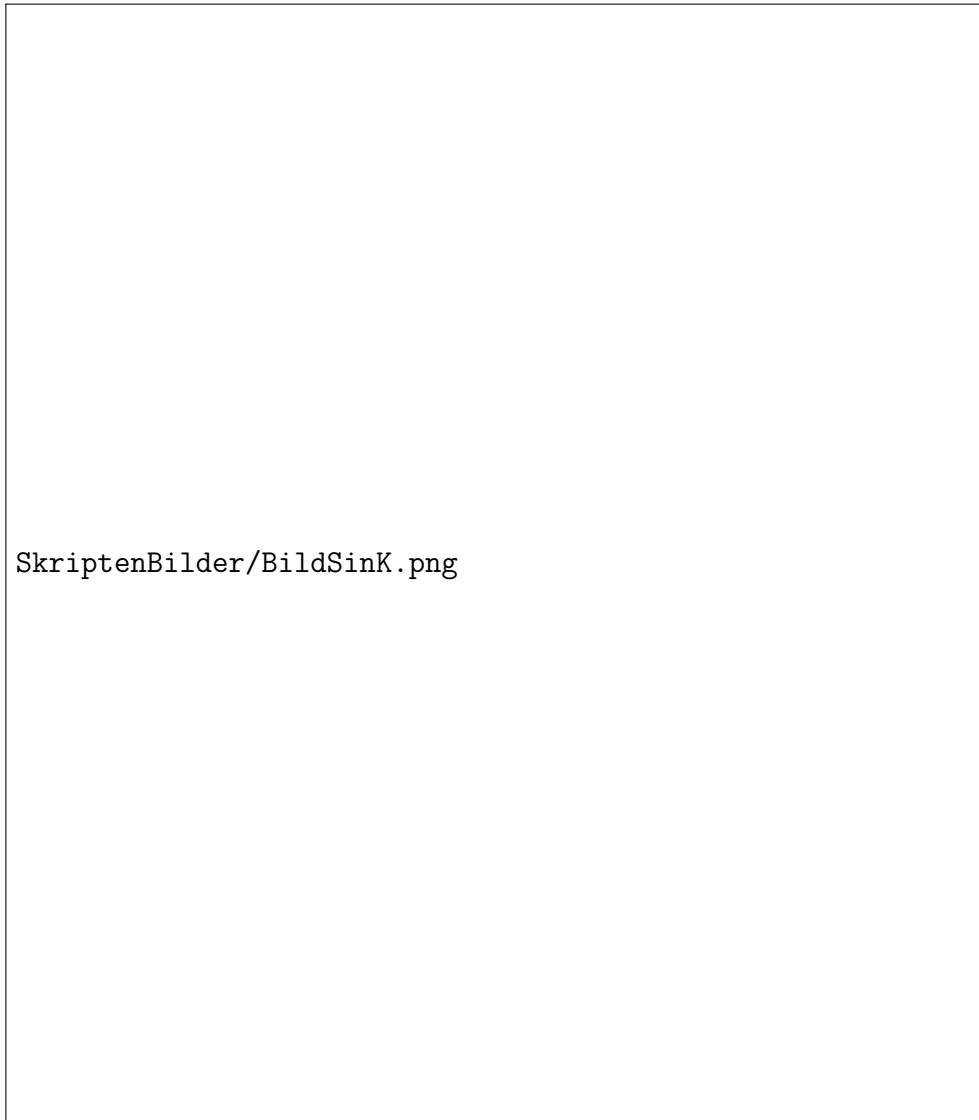
**Definition 1.2.2.** Eine stetige Abbildung  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  des  $q$ -ten Standardsimplex  $\Delta_q$  in einen topologischen Raum  $X$  heißt ein **singulärer  $q$ -Simplex von  $X$** .

1.2.3. Das Adjektiv singulär ist hier in dem Sinne zu verstehen, daß wir außer der Stetigkeit keine Forderungen an  $\sigma$  stellen. Wir erlauben also auch nicht-injektive, ja sogar konstante Abbildungen  $\sigma$  als singuläre Simplizes, so daß das Adjektiv singulär zumindest einen Teil unserer singulären Simplizes recht gut beschreibt. Der Buchstabe S bei  $S_q X$  steht jedoch für “Simplex”, nicht etwa für “singulär”.

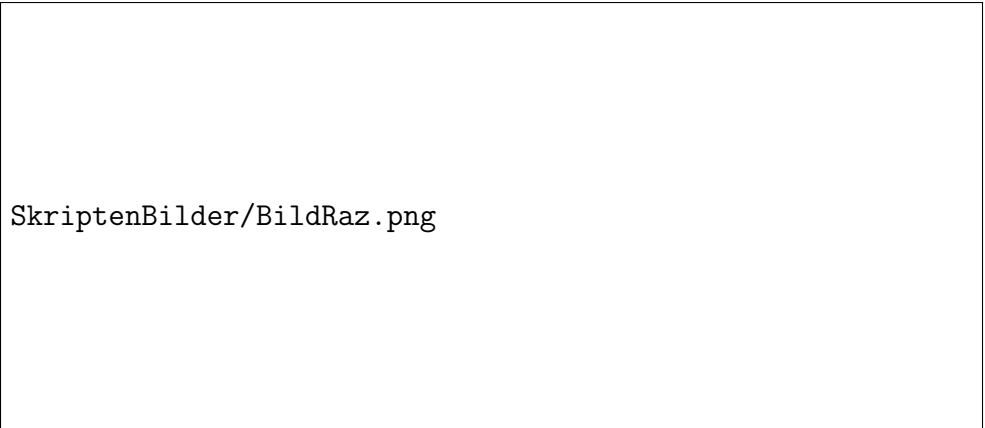
**Definition 1.2.4.** Wir bezeichnen mit

$$S_q X := \mathbb{Z} \text{Top}(\Delta_q, X) = \text{Ab}^\uparrow \text{Top}(\Delta_q, X)$$

die freie abelsche Gruppe über der Menge aller singulären  $q$ -Simplizes von  $X$  und nennen ihre Elemente **singuläre  $q$ -Ketten**. Diese Gruppe ist natürlich riesig. Zum Beispiel liefert die offensichtliche Bijektion  $\text{Top}(\Delta_0, X) \xrightarrow{\sim} X$  Gruppenisomorphismen  $S_0 X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}X$ . Um mit Beschränkungen der Indizes keinen Ärger zu kriegen, vereinbaren wir zusätzlich  $S_q X = 0$  für  $q < 0$ .



Eine singuläre 1-Kette in der Papierebene. Das Bild von  $(0, 1) \in \Delta_1$  ist jeweils durch eine Pfeilspitze kenntlich gemacht. Die Parametrisierung dieser ganzen Würmer kann ich nicht darstellen. Es werden im allgemeinen auch welche darunter sein, deren Bild beliebige Kompakta der Papierebene sind, vergleiche ???. Der Rand ist die formale Summe “Endpunkte minus Anfangspunkte”.



SkriptenBilder/BildRaz.png

Versuch der Darstellung eines singulären 2-Simplex mit seinem Rand. Die Zahlen an den Ecken der Dreiecksfläche links zeigen, wohin die Vektoren der Standardbasis  $e_0, e_1, e_2$  des  $\mathbb{R}^3$ , deren konvexe Hülle ja der Standardsimplex  $\Delta_2$  ist, abgebildet werden. Es ist in diesem Zusammenhang bequem und üblich, die Nummerierung der Standardbasis um Eins zu verschieben und den ersten Vektor der Standardbasis als  $e_0$  zu bezeichnen.



**Definition 1.2.5.** Für  $q \geq 1$  und  $0 \leq i \leq q$  erklären wir die  $i$ -te **Kantenabbildung**

$$k^i = k_q^i : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$$

dadurch, daß sie nach der  $i$ -ten Stelle die Koordinate Null einfügen soll. Dann erklären wir für alle  $q$  einen Gruppenhomomorphismus  $\partial = \partial_q : S_q X \rightarrow S_{q-1} X$ , den sogenannten **Randoperator**: Für  $q \leq 0$  setzen wir schlicht  $\partial_q = 0$  und für  $q \geq 1$  erklären wir  $\partial_q$  durch die Vorschrift, daß für jeden singulären  $q$ -Simplex  $\sigma$  gelten soll

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ k^i$$

Natürlich sind die Elemente von  $S_q X$  eigentlich formale  $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen von  $q$ -Simplexes und die Definition sagt uns, daß wir unseren auf den Simplexes definierten Randoperator  $\partial$  linear auf alle Ketten auszudehnen haben.

**Lemma 1.2.6.** *Es gilt  $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ .*

*Beweis.* Wir müssen nur für jeden  $q$ -Simplex  $\sigma$  mit  $q \geq 2$  prüfen, daß gilt  $\partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) = 0$ . Nun prüft man sofort, daß gilt  $k_q^i \circ k_{q-1}^j = k_q^j \circ k_{q-1}^{i-1}$  falls  $i > j$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q(\sigma) &= \partial_{q-1} \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ k^i \\ &= \sum_{0 \leq i \leq q, 0 \leq j \leq q-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ k^i \circ k^j \end{aligned}$$

und wir sehen, daß sich in dieser Doppelsumme die Terme mit  $i > j$  und die Terme mit  $i \leq j$  gegenseitig aufheben.  $\square$

**Definition 1.2.7.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir definieren

$Z_q X := \ker(\partial_q : S_q X \rightarrow S_{q-1} X)$ , die Gruppe der **singulären  $q$ -Zykel**;

$B_q X := \text{im } \partial_{q+1}$  die Gruppe der **singulären  $q$ -Ränder** (engl. boundaries);

$H_q X := Z_q X / B_q X$  die  **$q$ -te singuläre Homologiegruppe** von  $X$ .

Die Nebenklasse in  $H_q X$  eines Zyklus  $c \in Z_q X$  heißt seine **Homologieklass**e und wird mit  $[c] \in H_q X$  bezeichnet.

1.2.8. Die Zykel und Ränder sind natürlich Untergruppen in der Gruppe aller Ketten, nach 1.2.6 gilt genauer  $B_q X \subset Z_q X \subset S_q X$ . Deshalb ist es auch überhaupt nur möglich, die Quotientengruppe  $H_q X = Z_q X / B_q X$  zu bilden.

1.2.9. Später werden wir noch andere Homologietheorien kennenlernen. Die hier vorgestellte Theorie heißt genauer die **singuläre Homologie mit ganzzahligen Koeffizienten**. Wollen wir besonders betonen, daß wir die singuläre Homologie eines topologischen Raums meinen, schreiben wir statt  $H_q X$  genauer  $H_q^{\text{sing}} X$ . Statt Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  können wir als Koeffizienten in unseren formalen Linearkombinationen von Simplizes auch Elemente einer beliebigen abelschen Gruppe  $G$  zulassen und erhalten dann auf dieselbe Weise weitere abelsche Gruppen, die die **singulären Homologiegruppen von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$**  heißen und  $H_q(X; G)$  notiert werden.

1.2.10. Auf den ersten Blick sehen unsere Homologiegruppen recht unhandlich aus: Es sind Quotienten einer riesigen abelschen Gruppe durch eine fast ebenso riesige Untergruppe. Wir werden aber sehen, daß unsere  $H_q$  so schöne Eigenschaften haben, daß man sie dennoch für viele interessante Räume sehr explizit berechnen und verstehen kann.

*Beispiel 1.2.11 (Homologie eines Punktes).* Für den einpunktigen Raum  $X = \text{pt}$  gilt  $H_q(\text{pt}) = 0$  für  $q \neq 0$ . Des weiteren ist der einzige Nullsimplex  $\sigma : \Delta_0 \rightarrow \text{pt}$  ein Zykel und die Vorschrift  $1 \mapsto [\sigma]$  liefert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H_0(\text{pt})$$

In der Tat gibt es für jedes  $q \geq 0$  genau einen  $q$ -Simplex in  $\text{pt}$ , also gilt  $S_q(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}$  für alle  $q \geq 0$  und die Randabbildung  $\partial_q$  verschwindet für  $q$  ungerade und  $q \leq 0$ , ist aber ein Isomorphismus für  $q \geq 2$  gerade.

*Beispiel 1.2.12 (Homologie eines Koproducts).* Ist  $X = \bigsqcup X_w$  die Zerlegung eines topologischen Raums  $X$  in seine Wegzusammenhangskomponenten, so sind die hoffentlich offensichtlichen Isomorphismen  $\bigoplus S_q X_w \xrightarrow{\sim} S_q X$  verträglich mit den Randoperatoren und induzieren folglich Isomorphismen

$$\bigoplus H_q X_w \xrightarrow{\sim} H_q X$$

*Beispiel 1.2.13 (Nullte Homologie).* Für jeden topologischen Raum  $X$  faktorisiert die Abbildung  $X \rightarrow H_0 X$ , die jedem Punkt die Homologieklassse des konstanten Nullsimplex mit besagtem Punkt als Wert zuordnet, über die Menge  $\pi_0(X)$  der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  und induziert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} H_0 X$$

zwischen der freien abelschen Gruppe über der Menge  $\pi_0(X)$  der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  und der nullten Homologie von  $X$ . In der Tat reicht es nach dem vorhergehenden Beispiel 1.2.12, das für  $X$  wegzusammenhängend zu prüfen. Wir haben jedoch eine natürliche Abbildung, die

sogenannte **Augmentation**

$$\begin{aligned} \varepsilon : S_0 X &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum a_x x &\mapsto \sum a_x \end{aligned}$$

und es reicht, für wegzusammenhängendes  $X$  die Formel  $\ker \varepsilon = \operatorname{im} \partial_1$  zu zeigen. Nun wird aber im  $\partial_1$  erzeugt von allen formalen Summen  $x - y$  mit  $x, y \in X$ , denn je zwei Punkte lassen sich durch einen Weg verbinden. Daraus folgt dann sofort  $\ker \varepsilon = \operatorname{im} \partial_1$ .

**Lemma 1.2.14 (Homologie konvexer Mengen).** *Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine konvexe Teilmenge, so gilt  $H_q K = 0$  für  $q > 0$ .*

*Beweis.* Ist  $K$  leer, so ist eh nichts zu zeigen. Sonst zeichnen wir einen beliebigen Punkt  $p \in K$  aus und definieren für  $q \geq 0$  den **Prismen-Operator**

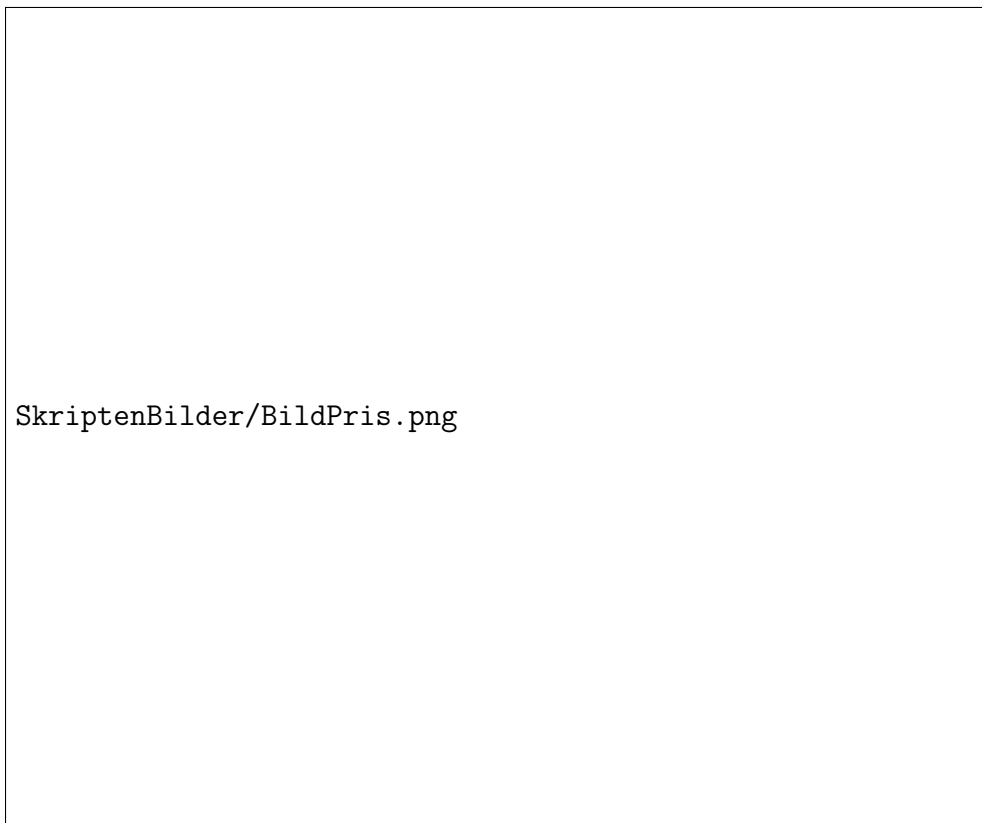
$$P = P_q : S_q K \rightarrow S_{q+1} K$$

der “jeden  $q$ -Simplex durch Verbinden mit dem ausgezeichneten Punkt  $p$  zu einem  $(q + 1)$ -Simplex erweitert,” ganz ähnlich wie beim Beweis von 1.1.9. Formal definieren wir  $P$  auf Simplizes  $\sigma : \Delta_q \rightarrow K$  dadurch, daß  $P\sigma$  der Simplex  $P\sigma : \Delta_{q+1} \rightarrow K$  sein soll mit  $(P\sigma)(1 - \tau, \tau x_0, \dots, \tau x_q) = (1 - \tau)p + \tau\sigma(x_0, \dots, x_q)$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ . Hier ist  $P\sigma$  stetig, da  $[0, 1] \times \Delta_q \rightarrow \Delta_{q+1}$ ,  $(\tau, x_0, \dots, x_q) \mapsto (1 - \tau, \tau x_0, \dots, \tau x_q)$  als stetige Surjektion eines Kompaktums auf einen Hausdorffraum nach ?? final ist. Nun setzen wir  $P$  linear auf Ketten fort und prüfen die Relation  $\partial P + P\partial = \operatorname{id} : S_q K \rightarrow S_q K$  für  $q > 0$ . In der Tat gilt ja

$$\begin{aligned} \partial(P\sigma) &= \sum_{0 \leq j \leq q+1} (-1)^j (P\sigma) \circ k_{q+1}^j \\ P(\partial\sigma) &= \sum_{0 \leq j \leq q} (-1)^j P(\sigma \circ k_q^j) \end{aligned}$$

und prüft leicht die Formeln  $(P\sigma) \circ k_{q+1}^0 = \sigma$  und  $(P\sigma) \circ k_{q+1}^j = P(\sigma \circ k_q^{j-1})$  für  $1 \leq j \leq q + 1$ . Also haben wir in der Tat  $\partial P + P\partial = \operatorname{id}$  auf  $q$ -Ketten mit  $q > 0$ , damit gilt im Fall  $q > 0$  für jeden Zykel  $z \in Z_q K$  schon  $\partial Pz = z$  und  $z$  ist ein Rand.  $\square$

*Ergänzung 1.2.15.* Wir können auch allgemeiner für eine beliebige stetige Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(0) = 0$  und  $f(1) = 1$  die Variante  $P_f$  des Prismenoperators betrachten mit  $(P_f\sigma)((1 - \tau), \tau x_0, \dots, \tau x_q) = (1 - f(\tau))p + f(\tau)\sigma(x_0, \dots, x_q)$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ . Nehmen wir für  $f$  insbesondere eine glatte Abbildung, die in einer Umgebung von  $\tau = 1$  konstant den Wert Eins annimmt, so macht diese Variante des Prismenoperators glatte Simplizes zu glatten Simplizes. Das wird uns insbesondere im Zusammenhang mit dem Beweis des Satzes von de Rham in III.2.10 helfen.



Ein 1-Simplex  $\sigma$  und der daraus durch Anwenden des Prismenoperators zu einem Punkt  $p$  entstehende 2-Simplex  $P\sigma$ .

*Ergänzung 1.2.16.* Diese Ergänzung ist für Leser gedacht, die bereits mit den Grundlagen der Funktionentheorie vertraut sind. Gegeben  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\sigma : \Delta_1 \rightarrow U$  ein 1-Simplex erklären wir das Integral  $\int_\sigma f(z) dz$ , indem wir  $\sigma$  mittels des durch die Projektion auf die zweite Koordinate gegebenen Homöomorphismus  $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$  als Weg auffassen und darüber integrieren im Sinne von ???. Lineare Fortsetzung liefert unmittelbar ein Integralbegriff für holomorphe Funktionen über 1-Ketten, und unter Beachtung der Homotopie-Invarianz des Wegintegrals ??? erhalten wir so sogar eine wohlbestimmte Paarung

$$\begin{aligned} H_1(U) \times \mathcal{O}^{\text{an}}(U) &\rightarrow \mathbb{C} \\ ([\alpha], f) &\mapsto \int_\alpha f(z) dz \end{aligned}$$

zwischen der ersten Homologiegruppe und der additiven Gruppe der holomorphen Funktionen auf  $U$ . Diese Paarung schreiben wir dann auch für jede Homologieklass  $b$  in der Form  $(b, f) \mapsto \int_b f(z) dz$ .

### 1.3 Funktorialität der Homologie

1.3.1. In diesem Abschnitt erklären wir für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  Gruppenhomomorphismen  $H_q(f) = f_* : H_q X \rightarrow H_q Y$  derart, daß unsere Homologiegruppen  $H_q$  Funktoren  $H_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen werden.

**Definition 1.3.2.** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  definieren wir Gruppenhomomorphismen  $S_q f : S_q X \rightarrow S_q Y$ , indem wir jedem Simplex  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  den Simplex  $f \circ \sigma : \Delta_q \rightarrow Y$  zuordnen, und linear auf  $S_q X$  fortsetzen.

**Lemma 1.3.3.** Gegeben  $f : X \rightarrow Y$  stetig gilt  $\partial_q \circ S_q f = S_{q-1} f \circ \partial_q$ , d.h. es kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_q X & \xrightarrow{S_q f} & S_q Y \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ S_{q-1} X & \xrightarrow{S_{q-1} f} & S_{q-1} Y \end{array}$$

*Beweis.* Wir müssen das nur auf jedem  $q$ -Simplex  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  prüfen. Es gilt aber in der Tat

$$\begin{aligned} (\partial_q \circ S_q f)(\sigma) &= \partial_q(f \circ \sigma) \\ &= \sum (-1)^i f \circ \sigma \circ k_q^i \\ &= (S_{q-1} f \circ \partial_q)(\sigma) \end{aligned} \quad \square$$

1.3.4. Das Lemma zeigt, daß  $S_q f$  Zykel auf Zykel und Ränder auf Ränder abbildet. Für einen  $q$ -Zykel  $z$  in  $X$  hängt also die Homologiekategorie seines Bildes  $(S_q f)(z)$  in  $Y$  nur von der Homologiekategorie von  $z$  ab. Wir erhalten somit einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} H_q f : H_q X &\rightarrow H_q Y \\ [z] &\mapsto [(S_q f)(z)] \end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß gilt  $H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g)$  und  $H_q(\text{id}) = \text{id}$ , also erhalten wir für alle  $q \in \mathbb{Z}$  einen Funktor  $H_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ . Oft verwenden wir auch die Abkürzung  $H_q(f) = f_*$ .

*Übung 1.3.5.* Sei  $X = \bigsqcup X_w$  eine Zerlegung von  $X$  in paarweise disjunkte offene Teilmengen und  $i_w : X_w \hookrightarrow X$  die jeweilige Einbettung. So definieren die  $H_q(i_w) : H_q(X_w) \rightarrow H_q(X)$  einen Isomorphismus  $\bigoplus H_q(X_w) \xrightarrow{\sim} H_q(X)$ .

1.3.6. Wir wiederholen die vorhergehenden Argumente noch einmal in einer ausgefeilten Sprache und führen dazu die Kategorie der ‘‘Kettenkomplexe’’ ein.

**Definition 1.3.7.** Ein **Kettenkomplex** oder **Komplex von abelschen Gruppen** ist ein Paar  $C = (C, \partial)$ , wo  $C$  eine Familie  $(C_q)_{q \in \mathbb{Z}}$  abelscher Gruppen ist und  $\partial$  eine Familie von Gruppenhomomorphismen  $\partial_q = \partial_q^C : C_q \rightarrow C_{q-1}$  für  $q \in \mathbb{Z}$  derart, daß gilt

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0 \quad \text{für alle } q.$$

Ein Morphismus  $s : C \rightarrow D$  von Kettenkomplexen, auch **Kettenabbildung** genannt, ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen  $s_q : C_q \rightarrow D_q$  derart, daß gilt  $\partial_q^D \circ s_q = s_{q-1} \circ \partial_q^C$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$  oder, etwas salopp geschrieben,  $\partial \circ s = s \circ \partial$ . Wir erhalten so die **Kategorie**  $\text{Ket} = \text{Ket}(\text{Ab})$  **aller Komplexe von abelschen Gruppen**. Darin gibt es ein finales und kofinales Objekt, den **Nullkomplex**, bei dem eben alle Gruppen und Differentiale Null sind. Analog erklärt man für einen beliebigen Ring  $R$  die Kategorie  $\text{Ket}(R\text{-Mod})$  aller Komplexe von  $R$ -Moduln.

1.3.8. Für diese Struktur ist auch noch eine andere Terminologie üblich. Ganz allgemein nennt man eine abelsche Gruppe  $C$  mit einer Zerlegung  $C = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} C_q$  eine **graduierete abelsche Gruppe** und ist zusätzlich ein Gruppenhomomorphismus  $\partial : C \rightarrow C$  gegeben mit  $\partial(C_q) \subset C_{q-1}$  und  $\partial^2 = 0$ , so nennt man das Paar  $(C, \partial)$  eine **differentielle graduierete abelsche Gruppe** oder kurz eine **dg-Gruppe** mit **Differential**  $\partial$ . Analog definieren wir die Kategorie der differentiellen graduiereten Moduln über einem Ring  $R$  und notieren sie  $\text{dgMod}_R$ , so daß also gilt  $\text{Ket}(R\text{-Mod}) = \text{dgMod}_R$ .

Manchmal arbeitet man auch allgemeiner mit dem Begriff einer **differentiellen abelschen Gruppe**, womit schlicht ein Paar  $(A, \partial)$  gemeint ist bestehend aus einer abelschen Gruppe  $A$  und einem Gruppenhomomorphismus  $\partial : A \rightarrow A$  mit der Eigenschaft  $\partial^2 = 0$ . Natürlich könnte man auch differentielle graduierte abelsche Gruppen betrachten, bei denen das Differential einen anderen "Grad" hätte als in unserer Definition, aber die kommen seltener vor und wir blenden sie deshalb vorerst einmal aus.

*Beispiel 1.3.9.* Für jeden topologischen Raum  $X$  ist der Komplex der singulären Ketten  $(SX, \partial)$  ein Kettenkomplex. Für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  bilden nach Lemma 1.2.6 die  $S_q(f)$  eine Kettenabbildung  $Sf : SX \rightarrow SY$ . Da gilt  $S(f \circ g) = S(f) \circ S(g)$  sowie  $S(\text{id}) = \text{id}$ , erhalten wir so einen Funktor

$$S : \text{Top} \rightarrow \text{Ket}$$

**Definition 1.3.10.** Für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  definieren wir einen Funktor, die  **$q$ -te Homologiegruppe eines Kettenkomplexes**

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_q : \text{Ket} &\rightarrow \text{Ab} \\ C &\mapsto \mathcal{H}_q(C) := \ker \partial_q / \text{im } \partial_{q+1} \end{aligned}$$

als den Quotienten vom Kern des Differentials nach seinem Bild. Auf den Objekten ist das schon mal in Ordnung und wir müssen nur noch erklären, wie ein Morphismus von Kettenkomplexen  $s : C \rightarrow D$  Morphismen auf der Homologie  $\mathcal{H}_q(s) : \mathcal{H}_q(C) \rightarrow \mathcal{H}_q(D)$  definiert. Aus  $\partial^D \circ s = s \circ \partial^C$  folgt aber  $s(\text{im } \partial^C) \subset \text{im } \partial^D$ ,  $s(\ker \partial^C) \subset \ker \partial^D$  und damit induziert  $s$  Morphismen  $\mathcal{H}_q(s) : \mathcal{H}_q(C) \rightarrow \mathcal{H}_q(D)$ . Wieder sieht man leicht, daß gilt  $\mathcal{H}_q(s \circ t) = \mathcal{H}_q(s) \circ \mathcal{H}_q(t)$  und  $\mathcal{H}_q(\text{id}) = \text{id}$ , unser  $\mathcal{H}_q$  ist also ein Funktor für alle  $q \in \mathbb{Z}$ . Manchmal betrachten wir auch den Funktor

$$\mathcal{H} : \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$$

der einem Komplex die Gesamtheit seiner Homologiegruppen zuordnet, aufgefaßt als Komplex mit Differential Null. Man kann auch für eine differentielle abelsche Gruppe  $(A, \partial)$  ihre Homologie betrachten, darunter versteht man dann die abelsche Gruppe  $\mathcal{H}A = \ker \partial / \text{im } \partial$ , die in diesem Fall keine Graduierung trägt.

1.3.11. Wir erhalten mit diesen Begriffsbildungen und Notationen unsere Funktoren der singulären Homologiegruppen  $H_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  als die Verknüpfungen  $H_q = H_q^{\text{sing}} = \mathcal{H}_q \circ S$  von Funktoren

$$\text{Top} \xrightarrow{S} \text{Ket} \xrightarrow{\mathcal{H}_q} \text{Ab}$$

Man überträgt die Begriffsbildungen **Zykel**, **Rand**, **Homologieklass**e auf beliebige Kettenkomplexe  $C$  und schreibt  $\ker \partial_q = \mathcal{Z}_q C$  für die Zykkel, im  $\partial_{q+1} = \mathcal{B}_q C$  für die Ränder und  $[c] \in \mathcal{H}_q C$  für die Homologieklass eines Zyklus  $c \in \mathcal{Z}_q C$ .

*Übung 1.3.12.* Ist  $\pi : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung mit endlichen Fasern, so erhält man eine Kettenabbildung  $\pi^! : SX \rightarrow SY$ , indem man jedem singulären Simplex die Summe seiner Lifts zuordnet. Man zeige, daß für die auf der Homologie induzierten **Transferabbildungen**

$$\pi^! : H_q X \rightarrow H_q Y$$

im Fall einer  $n$ -blättrigen Überlagerung gilt  $(H_q \pi) \circ \pi^! = n \cdot \text{id} : H_q X \rightarrow H_q X$ . Ist unsere Überlagerung normal und ist  $G$  ihre Gruppe von Decktransformationen, so zeige man weiter  $\pi^! \circ (H_q \pi) = \sum_{g \in G} H_q g : H_q Y \rightarrow H_q Y$ .

*Übung 1.3.13.* Man erkläre, wie für einen festen topologischen Raum  $X$  die Homologiegruppen mit Koeffizienten aus 1.2.9 als Funktoren  $\text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ ,  $M \mapsto H_q(X; M)$  aufgefaßt werden können, und wieso damit für jeden Ring  $R$  die Gruppen  $H_q(X; R)$  in natürlicher Weise zu  $R$ -Moduln werden.

## 1.4 Homotopie-Invarianz

**Satz 1.4.1 (Homotopie-Invarianz).** *Homotope stetige Abbildungen induzieren dieselbe Abbildung auf der Homologie.*

1.4.2. Dieser Satz ist schon ein sehr starkes Hilfsmittel zur Berechnung der singulären Homologiegruppen. Er impliziert zum Beispiel, daß ein zusammenziehbarer Raum dieselbe Homologie hat wie ein Punkt. Wir geben zwei Beweise: Erst einen mehr rechnerischen Beweis, und dann einen mehr konzeptionellen Beweis, der jedoch im Gegensatz zu unserem rechnerischen Beweis auf der Kenntnis der Homologie konvexer Mengen 1.2.14 aufbaut. Wir werden das im Folgenden durchgeführte konzeptionelle Beweisverfahren später formalisieren zum ‘‘Satz über azyklische Modelle’’ 3.6.15 und damit auch die sogenannte ‘‘Künneth-Formel’’ über die Homologie von Produkten zeigen. Aus dieser Formel kann die Homotopie-Invarianz im übrigen auch unschwer hergeleitet werden.

*Erster Beweis.* Bezeichnet  $f, g : X \rightarrow Y$  unsere homotopen stetigen Abbildungen, so behauptet der Satz für alle  $q$  die Gleichheit  $H_q(f) = H_q(g)$  von Abbildungen  $H_q X \rightarrow H_q Y$ . Es gilt also zu zeigen, daß für jeden Zykel  $z \in \mathcal{Z}_q X$  die Differenz  $(S_q f)(z) - (S_q g)(z)$  ein Rand in  $Y$  ist. Anschaulich ist das recht klar: Unsere Differenz ist eben ‘‘der Rand des Gebiets,





Der Transfer eines singulären Eins-Simplex unter einer zweiblättrigen  
Überlagerung der Kreislinie.

das von besagtem Zykel während der Homotopie von  $f$  nach  $g$  überstrichen wird". Etwas formaler sei  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Bezeichne  $\omega_\nu : \Delta_{q+1} \rightarrow \Delta_q \times [0, 1]$  diejenige affine Abbildung, die die Ecken  $e_0, \dots, e_{q+1}$  unseres Standardsimplex der Reihe nach abbildet auf  $(e_0, 0), \dots, (e_\nu, 0), (e_\nu, 1), \dots, (e_q, 1)$ . Bezeichne  $\delta_q : S_q X \rightarrow S_{q+1} Y$  die Abbildung, die auf Simplizes gegeben wird durch

$$\delta_q(\sigma) = \sum_{\nu=0}^q (-1)^\nu h \circ (\sigma \times \text{id}) \circ \omega_\nu$$

Nun prüfen wir für die so gegebenen Abbildungen  $\delta_q$  die Identitäten  $\partial\delta + \delta\partial = S_q g - S_q f$ . Sobald das getan ist, sind wir fertig, denn dann gilt für jeden Zykel  $z \in Z_q X$  die Formel  $(S_q g)(z) - (S_q f)(z) = \partial\delta z$  und unsere Differenz ist in der Tat ein Rand. Für den Nachweis unserer Identitäten kürzen wir  $(e_\nu, 0) = v_\nu$  und  $(e_\nu, 1) = w_\nu$  ab und vereinbaren für  $q+1$  Punkte  $a, b, \dots, c$  einer konvexen Teilmenge eines reellen Raums die Notationen  $[a, b, \dots, c]$  für die Abbildung von  $\Delta_q$  in unsere konvexe Teilmenge, die die Ecken der Reihe nach auf diese Punkte wirft. Dann haben wir also  $\omega_\nu = [v_0, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, w_q]$  und

$$\begin{aligned} \partial\delta_q(\sigma) &= \sum_{\nu \geq \mu} (-1)^\nu (-1)^\mu h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, \hat{v}_\mu, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, w_q] \\ &\quad + \sum_{\nu \leq \mu} (-1)^\nu (-1)^{\mu+1} h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, \hat{w}_\mu, \dots, w_q] \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich  $\partial(\sigma) = \sum_\mu (-1)^\mu \sigma[e_0, \dots, \hat{e}_\mu, \dots, e_q]$  und damit

$$\begin{aligned} \delta_{q-1}\partial(\sigma) &= \sum_{\nu > \mu} (-1)^\nu (-1)^{\mu+1} h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, \hat{v}_\mu, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, w_q] \\ &\quad + \sum_{\nu < \mu} (-1)^\nu (-1)^\mu h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, v_\nu, w_\nu, \dots, \hat{w}_\mu, \dots, w_q] \end{aligned}$$

Nach dem Aufaddieren bleiben nur noch die Terme mit  $\nu = \mu$  der oberen Summe übrig, und auch diese löschen sich paarweise aus bis auf den Summanden mit  $\nu = \mu = 0$  vorne und den Summanden mit  $\nu = \mu = q$  hinten. Da nun aber gilt  $h(\sigma \times \text{id})[w_0, \dots, w_q] = g\sigma$  und  $h(\sigma \times \text{id})[v_0, \dots, v_q] = f\sigma$ , folgt die Behauptung.  $\square$

1.4.3. Es mag der Anschauung helfen, sich klarzumachen, daß die Bilder der  $\omega_\nu$  die vollen Simplizes maximaler Dimension einer Triangulierung von  $\Delta_q \times [0, 1]$  sind. Für die formale Argumentation ist das jedoch belanglos.

*Zweiter Beweis.* Sei wieder  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Bezeichnen wir die Inklusionen  $X \rightarrow X \times [0, 1]$ ,  $x \mapsto (x, t)$  mit  $i_t$ , so gilt  $f = h \circ i_0$  und  $g = h \circ i_1$ . Es reicht nun,  $H_q(i_0) = H_q(i_1)$  zu zeigen, denn daraus folgt mit der Funktorialität der Homologie schon

$$H_q(f) = H_q(h) \circ H_q(i_0) = H_q(h) \circ H_q(i_1) = H_q(g)$$



Dies Bild zeigt zwei homotope Abbildungen der Kreislinie in die punktierte Ebene und die Bilder desselben aus der formalen Summe von fünf singulären Eins-Simplizes bestehenden Eins-Zykels unter diesen beiden Abbildungen. Des weiteren ist in der Abbildung eine Zweikette in der punktierten Ebene angedeutet, gegeben durch die formale Summe von insgesamt zehn singulären Zwei-Simplizes, davon die Hälfte mit dem Koeffizienten  $(-1)$ , deren Rand gerade die Differenz unserer beiden Eins-Zykel ist. So erkennt man, daß unsere beiden Eins-Zykel dieselbe Homologiekategorie in der punktierten Ebene repräsentieren.

Die Formel  $H_q(i_0) = H_q(i_1)$  bedeutet, daß für jeden Zykel  $z \in Z_q X$  die Differenz seiner Bilder  $(S_q i_0)(z) - (S_q i_1)(z)$  ein Rand ist. Um das nachzuweisen reicht es, eine Familie von Morphismen

$$\delta = \delta_q = \delta_q^X : S_q X \rightarrow S_{q+1}(X \times [0, 1])$$

für  $q \in \mathbb{Z}$  zu konstruieren derart, daß gilt  $\partial\delta + \delta\partial = S_q i_1 - S_q i_0$ , denn dann ist  $(S_q i_1)(z) - (S_q i_0)(z) = \partial\delta z$  ein Rand für jeden Zykel  $z \in Z_q X$ . Eine Möglichkeit, derartige Morphismen explizit anzugeben, liefert die explizite Formel

$$\delta_q \sigma = \sum_{\nu=0}^q (-1)^\nu (\sigma \times \text{id}) \omega_\nu$$

in den Notationen unseres ersten Beweises. Ich will jedoch auch noch einen mehr konzeptionellen Zugang erklären. Es ist bequem, solch eine Familie zu konstruieren als Transformation, wo wir beide Seiten auffassen als Funktoren in  $X$  von den topologischen Räumen in die abelschen Gruppen. Dann können wir uns nämlich stützen auf eine Variante des Yoneda-Lemmas. Bezeichne dazu  $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$  den **tautologischen  $q$ -Simplex**  $\text{id} : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ .

**Lemma 1.4.4.** *Für jeden Funktor  $G : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  liefert das Auswerten auf dem tautologischen  $q$ -Simplex eine Bijektion zwischen der Menge der natürlichen Transformationen von  $S_q$  nach  $G$  und der Menge  $G(\Delta_q)$ , in Formeln*

$$\begin{array}{ccc} \text{Trans}(S_q, G) & \xrightarrow{\sim} & G(\Delta_q) \\ \delta & \mapsto & \delta_{\Delta_q}(\tau_q) \end{array}$$

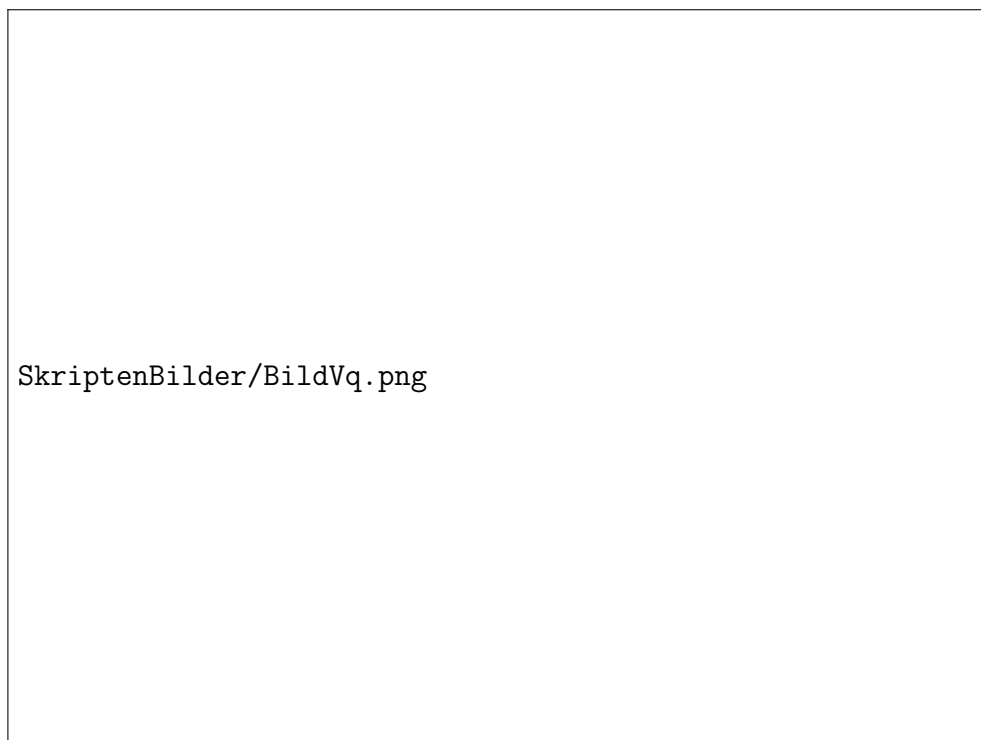
*Beispiel 1.4.5.* Der Randoperator  $\partial : S_q \rightarrow S_{q-1}$  entspricht unter dieser Bijektion der Kette  $\partial\tau_q \in S_{q-1}(\Delta_q)$ .

*Beweis.* Das gilt auch viel allgemeiner: Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\Delta \in \mathcal{C}$  ein Objekt, so können wir den Funktor  $\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, \_ ) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  bilden, und ist  $G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  ein anderer Funktor, so liefert die Abbildungsvorschrift  $\delta \mapsto \delta_\Delta(\text{id}_\Delta)$  eine Bijektion  $\text{Trans}(\mathbb{Z}\mathcal{C}(\Delta, \_ ), G) \xrightarrow{\sim} G(\Delta)$ . Wir überlassen die Details dem Leser zur Übung, man orientiere sich am Yoneda-Lemma [1.2.3.12](#).  $\square$

Wir hatten gesehen, daß wir nur für alle topologischen Räume  $X$  und alle  $q \in \mathbb{Z}$  Morphismen  $\delta = \delta_q : S_q X \rightarrow S_{q+1}(X \times [0, 1])$  konstruieren müssen derart, daß gilt

$$\partial\delta_q + \delta_{q-1}\partial = S_q i_1 - S_q i_0 \quad (*)_q$$

Wir konstruieren die  $\delta_q$  als Transformationen  $\delta_q : S_q \Rightarrow F_{q+1}$  in den Funktor  $F_{q+1} : X \mapsto S_{q+1}(X \times [0, 1])$  von oben. Sie werden dann nach [1.4.4](#) schon



Eine mögliche Wahl von  $V_0$ , die anders ist als im Beweis vorgeschlagen, und dazu eine mögliche Wahl von  $V_1$

durch die Angabe jeweils eines Elements  $\delta_q(\tau_q) = V_q \in S_{q+1}(\Delta_q \times [0, 1])$  eindeutig festgelegt und wir müssen nur unsere  $V_q$  so wählen, daß die obigen Gleichungen  $(*)_q$  erfüllt sind. Da  $(*)_q$  aber eine Gleichung von Transformationen  $S_q \Rightarrow F_q$  ist, gilt sie wieder nach dem Lemma immer, wenn sie nach Auswerten auf dem tautologischen Simplex  $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$  gilt, also genau dann, wenn gilt

$$(\partial\delta_q + \delta_{q-1}\partial)(\tau_q) = (S_q i_1 - S_q i_0)(\tau_q)$$

in  $S_q(\Delta_q \times [0, 1])$ . Für  $V_q = \delta_q(\tau_q)$  bedeutet das genau

$$\partial V_q = (S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial)(\tau_q)$$

Man beachte, daß hier die rechte Seite von  $\delta_{q-1}$ , also von  $V_{q-1}$  abhängt. Wir wählen nun mögliche  $V_q$  induktiv und nehmen an, daß die  $V_\pi$  für  $\pi \leq q-1$  schon konstruiert sind und die Gleichungen  $(*)_\pi$  für  $\pi \leq q-1$  gelten. Als Basis der Induktion dürfen wir  $V_\pi = 0$  für  $\pi < 0$  nehmen und als  $V_0$  irgendeinen singulären Simplex  $\Delta_1 \rightarrow \Delta_0 \times [0, 1]$ , der die Endpunkte des Geradensegments  $\Delta_1$  "in der richtigen Reihenfolge" auf die Endpunkte des Geradensegments  $\Delta_0 \times [0, 1]$  abbildet. Da nun nach Lemma 1.2.14 für  $q > 0$  gilt  $H_q(\Delta_q \times [0, 1]) = 0$ , können wir eine  $q$ -Kette in  $\Delta_q \times [0, 1]$  für  $q > 0$  als Rand schreiben genau dann, wenn sie ein Zykel ist. Wir finden für  $q > 0$  also unser  $V_q$  wie gewünscht genau dann, wenn gilt

$$\partial(S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial)(\tau_q) = 0$$

Das zeigen wir induktiv, indem wir unter Verwendung von  $(*)_{q-1}$  rechnen

$$\begin{aligned} \partial(S_q i_1 - S_q i_0 - \delta_{q-1}\partial) &= (S_{q-1} i_1 - S_{q-1} i_0 - \partial\delta_{q-1})\partial \\ &= \delta_{q-2}\partial\partial \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 1.4.6.** Zwei Kettenabbildungen  $f, g : A \rightarrow B$  von Kettenkomplexen heißen **kettenhomotop** oder kurz **homotop** genau dann, wenn es eine Familie  $\delta_q : A_q \rightarrow B_{q+1}$  von Gruppenhomomorphismen gibt mit  $f_q - g_q = \partial_{q+1}\delta_q + \delta_{q-1}\partial_q$  für alle  $q$ . Wir schreiben dafür auch manchmal  $\delta : f \sim g$ .

1.4.7. Eine Kettenabbildung heißt **nullhomotop** genau dann, wenn sie homotop ist zur Nullabbildung. Per definitionem sind zwei Kettenabbildungen kettenhomotop genau dann, wenn ihre Differenz nullhomotop ist. Ist weiter  $g \circ h$  eine Verknüpfung von Kettenabbildungen und ist eine der beiden nullhomotop, so auch die Verknüpfung, wie Sie in 1.4.9 selbst prüfen sollen. Wir können deshalb die **Homotopiekategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen** definieren, mit Kettenkomplexen von abelschen Gruppen

als Objekten und Homotopieklassen von Kettenabbildungen als Morphismen. Wir notieren sie  $\text{Hot}(\text{Ab})$  oder  $\text{Hot}_{\text{Ab}}$  oder auch einfach nur  $\text{Hot}$ , wenn aus dem Kontext klar sei sollte, daß nicht die Homotopiekategorie topologischer Räume gemeint ist. Isomorphismen in einer Homotopiekategorie von Komplexen nennen wir auch **Homotopieäquivalenzen** und notieren sie  $\xrightarrow{\sim}$ . Ein Komplex heißt **nullhomotop** genau dann, wenn er homotopieäquivalent ist zum Nullkomplex.

1.4.8. Unsere Argumente von eben zeigen, daß die Homologiegruppen ganz allgemein Funktoren  $\mathcal{H}_q : \text{Hot}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$  definieren. Weiter haben wir gezeigt, daß homotope Abbildungen  $f, g$  kettenhomotope Abbildungen  $Sf, Sg$  auf den singulären Ketten liefern, genauer erhalten wir für jede Homotopie  $h : f \sim g$  eine Kettenhomotopie  $Sf \sim Sg$  als  $Sh \circ \delta$  mit  $\delta$  wie im Beweis von 1.4.1. Bezeichnen wir wie bisher mit  $\text{Hot}$  die Homotopiekategorie topologischer Räume, so erhalten wir mithin ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \text{Top} & \xrightarrow{S} & \text{Ket}(\text{Ab}) & \xrightarrow{\mathcal{H}_q} & \text{Ab} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \text{Hot} & \xrightarrow{S} & \text{Hot}(\text{Ab}) & \xrightarrow{\mathcal{H}_q} & \text{Ab} \end{array}$$

Insbesondere induziert eine Homotopieäquivalenz stets Isomorphismen auf der Homologie. Nun ist die konstante Abbildung von einem topologischen Raum auf einen Punkt eine Homotopieäquivalenz genau dann, wenn unser Raum zusammenziehbar ist. Da Funktoren Isomorphismen zu Isomorphismen machen, liefert also für jeden zusammenziehbaren Raum  $X$  die konstante Abbildung Isomorphismen von seiner Homologie mit der Homologie eines Punktes. Wir folgern für  $X$  zusammenziehbar  $H_q X \cong \mathbb{Z}$  für  $q = 0$  und Null sonst.

*Übung 1.4.9.* Man zeige, daß die Verknüpfung einer nullhomotopen Kettenabbildung mit einer beliebigen Kettenabbildung wieder nullhomotop ist, und zwar sowohl für das Davorschalten wie auch für das Dahinterschalten.

*Übung 1.4.10 (Hom-Komplex).* Sind  $(C, \partial^C)$  und  $(D, \partial^D)$  Kettenkomplexe, so definieren wir einen Kettenkomplex  $\text{Hom}(C, D)$  durch die Vorschrift

$$(\text{Hom}(C, D))_i = \prod_q \text{Hom}(C_q, D_{q+i})$$

mit Differential  $\partial(f) = \partial^D \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial^C$ , wo wir  $|f| = i$  schreiben für  $f \in (\text{Hom}(C, D))_i$ . Man zeige, daß gilt  $\partial(\partial(f)) = 0$ , daß die Nullzykel des Hom-Komplexes gerade die Kettenabbildungen von  $C$  nach  $D$  sind, in Formeln  $\mathcal{Z}_0 \text{Hom}(C, D) = \text{Ket}(C, D)$ , und daß die nullte Homologie in natürlicher Weise identifiziert werden kann mit dem Raum der Morphismen

von  $C$  nach  $D$  in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, in Formeln  $\mathcal{H}_0 \text{Hom}(C, D) = \text{Hot}(C, D)$ . In dieser Weise erhalten wir natürliche Abbildungen

$$\mathcal{H} \text{Hom}(C, D) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}C, \mathcal{H}D)$$

*Ergänzung 1.4.11.* Die Wahl der Vorzeichen in unserem Hom-Komplex mag willkürlich wirken. Sie kann jedoch zurückgeführt werden auf unsere Vorzeichenwahl bei der Definition des Tensorkomplexes 3.4.1: Durch diese Definition wird der Funktor  $\text{Hom}(X, \_): \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$  festgelegt als der Rechtsadjungierte von  $\otimes X: \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$ . Nach 3.4.13 erhalten wir so gerade das Hom, das wir hier ad hoc definiert haben.

*Übung 1.4.12.* Sei  $C$  ein Komplex von Vektorräumen. Man zeige, daß es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe von Vektorräumen genau einen Isomorphismus  $C \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}C$  gibt, der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation  $\mathcal{H}C \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\mathcal{H}C)$  induziert.

## 1.5 Erste Homologie und Fundamentalgruppe

1.5.1. Der Klarheit halber schreiben wir in diesem Abschnitt anders als sonst  $[[\gamma]]$  für die Homotopieklasse mit festen Endpunkten eines Weges und wie üblich  $[z]$  für die Homologieklasse eines Zyklus. Bezeichne  $c: \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$  die Restriktion auf den Standard-1-Simplex  $\Delta_1 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y = 1\}$  der Projektion auf die zweite Koordinate.

**Satz 1.5.2.** 1. Für jeden punktierten Raum  $(X, x)$  gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus von seiner Fundamentalgruppe in seine erste singuläre Homologiegruppe  $\pi_1(X, x) \rightarrow H_1 X$  mit der Eigenschaft, daß gilt  $[[\gamma]] \mapsto [\gamma \circ c]$  für alle geschlossenen Wege  $\gamma \in \Omega(X, x)$ .

2. Für jeden wegzusammenhängenden punktierten Raum induziert dieser Gruppenhomomorphismus einen Isomorphismus zwischen der Abelisierung nach 1.3.7.2 der Fundamentalgruppe und der ersten singulären Homologiegruppe, den sogenannten **Hurewicz-Isomorphismus**

$$\pi_1(X, x)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} H_1 X$$

1.5.3. Dieser Isomorphismus hängt von der Wahl unserer Bijektion  $c: \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$  ab. Wählen wir hier statt der Projektion auf die zweite Koordinate die Projektion auf die erste Koordinate, so ändert er sein Vorzeichen. Ein geschlossener Weg, der unter der im Satz beschriebenen Abbildung zum Nullelement der ersten Homologiegruppe wird, heißt auch **nullhomolog**.





Ein geschlossener, nicht zusammenziehbarer, aber dennoch nullhomologer Weg im Komplement einer zweielementigen Teilmenge der komplexen Zahlenebene. Denken wir uns das Mittelkreuz als Basispunkt und bezeichnet  $\alpha$  bzw.  $\beta$  in der Fundamentalgruppe das Umrunden gegen den Uhrzeigersinn von  $a$  bzw.  $b$ , so ist unser Fundamentalgruppe nach [I.3.3.11](#) frei erzeugt von  $\alpha$  und  $\beta$  und unser Weg repräsentiert das Element  $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$  in der Fundamentalgruppe.

*Beweis.* 1. Offensichtlich definiert die Vorschrift  $\gamma \mapsto [\gamma \circ c]$  eine Abbildung  $\text{can} : \Omega(X, x) \rightarrow H_1 X$  vom Wegeraum in die erste Homologiegruppe. Um zu zeigen, daß sie auf Homotopieklassen von Wegen konstant ist, geben wir eine alternative Beschreibung. Bezeichne  $\text{Exp} : [0, 1] \rightarrow S^1$  unsere übliche Abbildung  $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ . Da  $\text{Exp}$  nach ?? final ist, gibt es zu jedem geschlossenen Weg  $\gamma \in \Omega(X, x)$  eine stetige Abbildung  $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow X$  mit  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \text{Exp}$ . Betrachten wir nun in der Kreislinie  $S^1$  den 1-Zykel  $z = \text{Exp} \circ c \in Z_1(S^1)$ , so können wir unsere Abbildung von  $\Omega(X, x)$  nach  $H_1 X$  auch schreiben als

$$\gamma \mapsto [\gamma \circ c] = (H_1 \tilde{\gamma})[z]$$

Sind nun  $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$  homotop mit festen Endpunkten, so sind  $\tilde{\gamma}$  und  $\tilde{\beta}$  homotope Abbildungen von  $S^1$  nach  $X$ , da wieder nach ?? auch  $\text{id} \times \text{Exp} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times S^1$  final ist. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} [\gamma] = [\beta] &\Rightarrow \tilde{\gamma} \simeq \tilde{\beta} \\ &\Rightarrow H_1 \tilde{\gamma} = H_1 \tilde{\beta} \text{ nach Homotopieinvarianz 1.4.1} \\ &\Rightarrow (H_1 \tilde{\gamma})[z] = (H_1 \tilde{\beta})[z] \\ &\Rightarrow [\gamma \circ c] = [\beta \circ c] \end{aligned}$$

Folglich definiert die Vorschrift  $[\gamma] \mapsto [\gamma \circ c]$  in der Tat eine wohlbestimmte Abbildung  $\pi_1(X, x) \rightarrow H_1 X$ . Wir müssen für den ersten Teil nur noch zeigen, daß sie ein Gruppenhomomorphismus ist. Dazu betrachten wir die affine Abbildung  $p : \Delta_2 \rightarrow [0, 1]$  mit  $(1, 0, 0) \mapsto 0$ ,  $(0, 1, 0) \mapsto 1/2$  und  $(0, 0, 1) \mapsto 1$ . Offensichtlich gilt für beliebige  $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$ , ja sogar für zwei beliebige verknüpfbare nicht notwendig geschlossene Wege in  $S_1 X$  die Identität

$$\partial((\beta * \gamma) \circ p) = \gamma \circ c - (\beta * \gamma) \circ c + \beta \circ c$$

als da heißt  $(\beta * \gamma) \circ c$  ist homolog zu  $\gamma \circ c + \beta \circ c$ , und für  $\gamma, \beta \in \Omega(X, x)$  folgt daraus in  $H_1 X$  die Gleichung  $[(\beta * \gamma) \circ c] = [\gamma \circ c] + [\beta \circ c]$ .

2. Da  $H_1 X$  abelsch ist, definiert die Abbildung aus Teil 1 nach 1.3.7.4 einen Gruppenhomomorphismus

$$\overline{\text{can}} : \pi_1(X, x)^{\text{ab}} \rightarrow H_1 X$$

Wir nehmen nun  $X$  wegzusammenhängend an und wählen für jeden Punkt  $y \in X$  einen Weg  $\alpha_y \in \Omega(X, y, x)$  von  $x$  nach  $y$ . Dann definieren wir einen Gruppenhomomorphismus

$$w : S_1 X \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

durch die Vorschrift, daß er einen 1-Simplex  $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$  abbilden möge auf die Klasse des geschlossenen Weges  $w(\sigma) = \bar{\alpha}_z * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_y$  für  $z = \sigma(0, 1)$



Der tautologische Zwei-Simplex mit seinem Rand sowie der Zwei-Simplex  
 $p : \Delta_2 \rightarrow [0, 1]$  und sein Rand in  $S_1([0, 1])$ .

und  $y = \sigma(1, 0)$  die Enden unseres 1-Simplex. Wir zeigen nun, daß dieser Gruppenhomomorphismus alle Ränder in  $B_1X$  auf das neutrale Element von  $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$  wirft. In der Tat, der Rand eines 2-Simplex  $\tau : \Delta_2 \rightarrow X$  wird unter unserem Gruppenhomomorphismus abgebildet auf  $\llbracket \bar{\alpha}_u * (\tau \circ k) * \alpha_u \rrbracket$ , wo  $u = \tau(0, 0, 1)$  das Bild einer Ecke von  $\Delta_2$  ist und  $k : [0, 1] \rightarrow \Delta_2$  den Weg mit Anfangs- und Endpunkt in dieser Ecke bezeichnet, der einmal auf dem Rand von  $\Delta_2$  umläuft in einer Richtung, die der Leser sich selber überlegen möge. Da aber schon  $k$  selbst homotop ist zum konstanten Weg, gilt dasselbe für die obige Verknüpfung. Folglich definiert unsere Vorschrift einen Gruppenhomomorphismus in der umgekehrten Richtung

$$\bar{w} : H_1X \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

Es bleibt zu zeigen, daß er invers ist zu dem in Teil 1 konstruierten Homomorphismus  $\text{can}$ . Um  $\bar{w} \circ \text{can} = \text{id}$  nachzuweisen, wählen wir einen geschlossenen Weg  $\gamma \in \Omega(X, x)$  und erkennen, daß unter unserer Verknüpfung seine Klasse abgebildet wird auf die Klasse von  $\bar{\alpha}_x * \gamma * \alpha_x$  in  $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ . Das zeigt  $\bar{w} \circ \text{can} = \text{id}$ . Um  $\text{can} \circ \bar{w} = \text{id}$  nachzuweisen bemerken wir, daß für jeden 1-Simplex  $\sigma$  unser  $w(\sigma)$  durch den Weg  $\bar{\alpha}_{\sigma(1,0)} * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_{\sigma(0,1)}$  repräsentiert wird. Nach dem Schluß des vorhergehenden Beweises ist damit  $\text{can}(w(\sigma))$  homolog zur 1-Kette  $\sigma + \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c - \alpha_{\sigma(0,1)} \circ c$ . Definieren wir also  $\delta : S_0X \rightarrow S_1X$  durch  $y \mapsto \alpha_y \circ c$ , so ist  $\text{can}(w(\sigma)) - \sigma$  homolog zu  $\delta\sigma$  für jeden 1-Simplex  $\sigma$  und nullhomolog für jeden 1-Zykel  $a \in Z_1X$ , in Formeln  $[\text{can}(w(a))] = [a] \quad \forall a \in Z_1X$ .  $\square$

**Definition 1.5.4.** Zwei normierte geschlossene Wege  $\alpha, \beta$  in einem topologischen Raum heißen **frei homotop** genau dann, wenn es eine durch  $\tau \in [0, 1]$  parametrisierte Familie geschlossener normierter Wege  $\gamma_\tau$  gibt mit  $\gamma_0 = \alpha$ ,  $\gamma_1 = \beta$  und so, daß  $(t, \tau) \mapsto \gamma_\tau(t)$  stetig ist auf  $[0, 1]^2$ .

*Übung 1.5.5.* Man zeige, daß je zwei frei homotope geschlossene Wege unter dem Hurewitz-Homomorphismus auf dieselbe Homologiekategorie abgebildet werden.

## 1.6 Homologie offener Teilmengen der Ebene

1.6.1. Gegeben  $w, z \in \mathbb{C}$  zwei verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene spezialisiert der Hurewitz-Isomorphismus 1.5.2 zu einem Isomorphismus

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus w, z) \xrightarrow{\sim} H_1(\mathbb{C} \setminus w)$$

Wir notieren den durch die Umlaufzahl  $\gamma \mapsto \text{Um}(\gamma, w)$  aus 1.1.6.7 gegebenen Isomorphismus  $\text{Um}(\cdot, w) : \pi_1(\mathbb{C} \setminus w, z) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ . Man kann leicht zeigen, daß die



Dies Bild soll illustrieren, warum für einen Zwei-Simplex  $\tau : \Delta_2 \rightarrow X$  sein Rand unter unserem Gruppenhomomorphismus abgebildet auf  $[[\bar{\alpha}_u * (\tau \circ k) * \alpha_u]]$ , wo  $u = \tau(0, 0, 1)$  das Bild einer Ecke von  $\Delta_2$  ist und  $k : [0, 1] \rightarrow \Delta_2$  den Weg mit Anfangs- und Endpunkt in dieser Ecke bezeichnet, der einmal auf dem Rand von  $\Delta_2$  umläuft.

auf der Homologie induzierte Abbildung nicht von  $z$  abhängt und folglich mit

$$\text{Um}(\cdot, w) : H_1(\mathbb{C} \setminus w) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

bezeichnet werden kann. Für eine Homologieklassse  $\alpha \in H_1(\mathbb{C} \setminus w)$  notieren wir ihr Bild unter dieser Abbildung mit  $\text{Um}(\alpha, w)$  und nennen diese Zahl die **Umlaufzahl unserer Klasse**  $\alpha$  um den Punkt  $w$ . Für einen 1-Zykel  $\sigma \in Z_1(\mathbb{C} \setminus w)$  notieren wir das Bild seiner Homologieklassse unter dieser Abbildung wieder mit  $\text{Um}(\sigma, w) := \text{Um}([\sigma], w)$  und nennen diese Zahl die **Umlaufzahl des Zyklus**  $\sigma$  um den Punkt  $w$ .

*Ergänzung 1.6.2.* Bei unserer Definition 1.2.16 des Integrals holomorpher Funktionen über 1-Zykel haben wir mit Vorbedacht dieselbe durch die Projektion auf die zweite Koordinate gegebene Identifikation  $c : \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$  zugrundegelegt wie bei der Konstruktion des Hurewitz-Isomorphismus. Ist also  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg und  $\gamma \circ c : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{C}$  der zugehörige 1-Simplex, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{[\gamma \circ c]} f(z) dz$$

Der mit den Grundlagen der Funktionentheorie vertrauten Leser wird nun leicht einsehen können, daß für jeden Punkt  $w \in \mathbb{C}$  und jede Homologieklassse  $\gamma \in H_1(\mathbb{C} \setminus w)$  ihre Umlaufzahl um den Punkt  $w$  auch durch die Formel

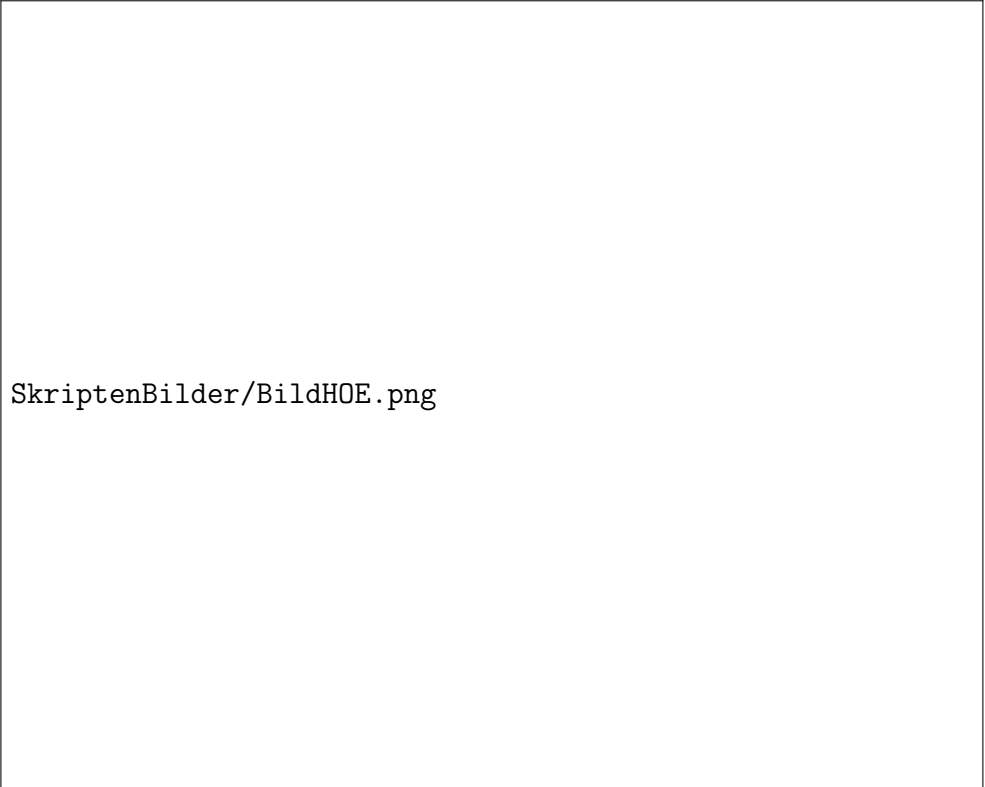
$$\text{Um}(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} dz$$

beschrieben werden kann, mit dem in 1.2.16 erklärten Integralbegriff. Für im Sinne von 1.2.16 “geschlossene” 1-Simplizes folgt das unmittelbar aus dem Residuensatz oder auch direkter aus dem Beweis von ??, und im allgemeinen folgt es dann aus der Erkenntnis, daß jeder 1-Zykel homolog ist zu einer Linearkombination geschlossener 1-Simplizes.

**Satz 1.6.3 (Homologie offener Teilmengen der Ebene).** *Ist  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene, so liefert die durch das Bilden der Umlaufzahlen gegebene Abbildung  $H_1(U) \times (\mathbb{C} \setminus U) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(\sigma, w) \mapsto \text{Um}(\sigma, w)$  einen Gruppenisomorphismus*

$$H_1(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_c(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$$

*zwischen der ersten Homologiegruppe von  $U$  und der Gruppe der stetigen  $\mathbb{Z}$ -wertigen Funktionen mit kompaktem Träger auf dem Komplement von  $U$ .*



SkriptenBilder/BildHOE.png

Illustration zum Satz über die Homologie offener Teilmengen der Ebene 1.6.3. Die Ebene  $\mathbb{C}$  habe ich hier ersetzt durch eine “eiförmige” konvexe offene nichtleere Teilmenge derselben, die ja homöomorph ist. Das Komplement von  $U$  ist schraffiert eingezeichnet und besteht aus vier Zusammenhangskomponenten, von denen eine nicht kompakt ist. In die kompakten Zusammenhangskomponenten habe ich Zahlen geschrieben, die die Werte einer Funktion aus  $\mathcal{C}_c(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$  meinen, und darüber hinaus habe ich einen Eins-Zykel in  $U$  angegeben, der unter dem Isomorphismus aus unserem Satz auf besagte Funktion abgebildet wird.

1.6.4. Die Injektivität unserer Abbildung bedeutet in anderen Worten, daß ein Zykel in einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene in unserer Teilmenge nullhomolog ist genau dann, wenn er keinen Punkt außerhalb besagter Teilmenge umläuft. In 2.10.20 wird erklärt, wie sich unser Satz auf offene Teilmengen beliebiger endlichdimensionaler Vektorräume verallgemeinern läßt.

*Übung* 1.6.5. Man zeige, daß eine zusammenhängende offene Teilmenge der Ebene  $\mathbb{R}^2$  genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn ihre erste Homologiegruppe verschwindet.

*Ergänzung* 1.6.6. Für Zykel in nicht notwendig offenen Teilmengen der komplexen Zahlenebene gilt die Aussage von Satz vorhergehenden Satzes im allgemeinen nicht mehr, wie nebenstehendes Beispiel illustriert.

*Ergänzung* 1.6.7. Umläuft ein geschlossener Weg in einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene  $U \subseteq \mathbb{C}$  keinen Punkt des Komplements  $\mathbb{C} \setminus U$ , so ist er nach 1.6.3 insbesondere nullhomolog, und nach 1.2.16 verschwindet folglich das Integral jeder auf unserer Teilmenge holomorphen Funktion über besagten Weg. Diese Aussage ist in der Funktionentheorie bekannt als die **Umlaufzahlversion des Integralsatzes von Cauchy**.

*Ergänzung* 1.6.8 (**Residuensatz, homologische Version**). Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $P \subset U$  eine endliche Teilmenge und  $f : U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma$  ein Zykel in  $U \setminus P$ , der in  $U$  nullhomolog ist. So gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \in P} \text{Um}(\gamma, p) \text{Res}(f, p)$$

Wir könnten das genauso herleiten wie den Residuensatz ?? . Stattdessen führen wir hier einen alternativen Beweis vor, der von der Laurententwicklung unabhängig ist und die Nützlichkeit unserer neuen Sprache zeigen soll. Wählen wir um jede der Singularitäten  $w \in P$  einen Kreisweg  $\gamma_w$  mit so kleinem Radius, daß die ganze abgeschlossene Kreisscheibe innerhalb dieses Weges in  $U$  enthalten ist und keine andere Singularität enthält, so gilt  $\text{Um}(\gamma_w, w) = 1$  und  $\text{Um}(\gamma_w, v) = 0$  für alle  $v \in P \setminus w$  und für alle  $v \in \mathbb{C} \setminus U$ . Die Zykel  $\gamma$  und  $\sum_w \text{Um}(\gamma, w) \gamma_w$  haben also dieselben Umlaufzahlen um alle Punkte des Komplements von  $U \setminus P$  in  $\mathbb{C}$ , als da heißt, ihre Differenz ist in  $U \setminus P$  nullhomolog. Daraus folgt wegen der Homologieinvarianz des Wegintegrals ?? aber sofort

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{w \in P} \text{Um}(\gamma, w) \int_{\gamma_w} f(z) dz$$

und die Formel aus der Definition des Residuums ?? zeigt dann den Residuensatz.



SkriptenBilder/BildGZy.png

Ist unsere Teilmenge nicht offen, so gilt die Aussage von Satz 1.6.3 im allgemeinen nicht mehr. Betrachten wir etwa die stetige Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f(x) = x \sin(\pi x^{-1})$  für  $x \neq 0$  und  $f(x) = 0$  für  $x = 0$ . Betrachten wir in der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  die Wege

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= t \\ \gamma_2(t) &= t + if(t) \\ \gamma_3(t) &= t + i \sup(f(t), 0) \\ \gamma_4(t) &= t + i \inf(f(t), 0)\end{aligned}$$

Der Zykel  $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$  hat dann Umlaufzahl Null um jeden Punkt im Komplement seiner Spur. Dennoch ist er in seiner Spur nicht nullhomolog, was ich hier nur heuristisch begründen will: Wie fein ich eine endliche Zerstückelung auch wähle, die Situation in der Nähe des Ursprungs bleibt einfach zu verworren.



Anschauliche Darstellung zum Beweis von Satz 1.6.3. Als  $A_0$  ist hier die Vereinigung der zwei eng schraffierten Stücke gemeint.

*Beweis von 1.6.3.* Jeder Zykel  $\sigma \in Z_1(U)$  wird in  $S_1(\mathbb{C})$  ein Rand,  $\sigma = \partial\alpha$  für  $\alpha \in S_2(\mathbb{C})$ . Liegt  $w$  auf keinem Simplex von  $\alpha$ , so gilt sicher  $\text{Um}(\sigma, w) = 0$ . Folglich verschwindet  $\text{Um}(\sigma, w)$  bei festem  $\sigma$  für alle  $w$  außerhalb eines geeigneten Kompaktums. Daß  $w \mapsto \text{Um}(\sigma, w)$  auch stetig von  $w$  abhängt, also eine lokal konstante Funktion ist, wird sich der Leser leicht selbst überlegen können. Damit liefert unsere Abbildungsvorschrift schon einmal einen Gruppenhomomorphismus

$$H_1(U) \rightarrow \mathcal{C}_c(\mathbb{C} \setminus U, \mathbb{Z})$$

und es bleibt, dessen Injektivität und Surjektivität zu zeigen. Wir beginnen mit der Surjektivität. Es reicht sicher zu zeigen, daß alle Funktionen im Bild liegen, die nur die Werte Null und Eins annehmen. Dann zerfällt aber das Komplement in die disjunkte Vereinigung  $\mathbb{C} \setminus U = A_0 \sqcup A_1$  einer kompakten Teilmenge  $A_1$ , auf der der Wert Eins ist, und einer in  $\mathbb{C} \setminus U$  und  $\mathbb{C}$  abgeschlossenen Teilmenge, auf der der Wert Null ist. Nach ?? existiert ein  $\delta > 0$  mit  $|x_1 - x_0| > \delta \quad \forall x_1 \in A_1, x_0 \in A_0$ . Wir können also auf unsere Ebene ein "Rechenpapier-Raster" legen, das so fein ist, daß keines der Rechenkästchen sowohl  $A_0$  als auch  $A_1$  trifft. Zu jedem Rechenkästchen erklären wir seinen "Kantenzykel", der anschaulich der Summe seiner vier mit konstanter Geschwindigkeit im Gegenuhrzeigersinn zu durchlaufenden Kanten entspricht, in hoffentlich offensichtlicher Weise. Dann betrachten wir die Summe  $\sigma$  aller "Kantenzykel" zu Rechenkästchen, die  $A_1$  treffen, und behaupten, daß dieser Zykel  $\sigma$  in  $U$  liegt und jeden Punkt von  $A_1$  einmal umläuft, jeden Punkt von  $A_0$  dahingegen keinmal. Letzteres scheint mir offensichtlich. Ersteres scheint mir auch offensichtlich für Punkte, die auf keiner Kante eines Kästchens liegen. Für Punkte auf Kanten und Ecken unseres Rechenpapiers ist es aber auch leicht zu sehen. Damit ist die Surjektivität bewiesen, und es gilt, auch noch die Injektivität zu zeigen. Dazu unterbrechen wir den Beweis und zeigen zunächst einige Hilfsaussagen.

**Lemma 1.6.9.** *Jeder Zykel in einer offenen Teilmenge der Ebene ist in dieser offenen Teilmenge homolog zu einer formalen Summe von Kanten von Kästchen auf einem hinreichend feinen Rechenpapier.*

*Beweis.* Nach dem Satz von Hurwitz 1.5.2, genauer der leicht zu zeigenden Surjektivität des Hurwitz-Isomorphismus, ist jeder Zykel in einem wegzusammenhängenden Raum homolog zu einem geschlossenen Weg oder präziser zu einem Zykel, der durch einen einzigen singulären Simplex gegeben wird. Jeder Zykel in einem beliebigen Raum ist folglich homolog zu einer endlichen Linearkombination von derartigen "geschlossenen" Simplizes. Jeder geschlossene Weg in einer offenen Teilmenge der Ebene ist weiter homolog, ja nach ??



Ein Zykel und eine dazu homologe Summe von Kanten in einer ringförmigen offenen Teilmenge der komplexen Zahlenebene.

sogar homotop zu einem geschlossenen polygonalen Weg und dann sogar frei homotop zu einem geschlossenen polygonalen Weg mit Ecken aus  $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ . Jedes der Geradensegmente dieser polygonalen Wege ist hinwiederum homotop in unserer offenen Teilmenge zu einem "Treppenweg" mit Ecken in  $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ , und der Hauptnenner aller Koordinaten aller Ecken aller dieser Treppenwege gibt uns dann eine mögliche Feinheit für unser Rechenpapier.  $\square$

Für den Beweis des Satzes reicht es also zu zeigen, daß jeder solche "Kantenzzykel", der keinen Punkt außerhalb unserer offenen Teilmenge umläuft, bereits in unserer offenen Teilmenge nullhomolog ist. Dazu beachten wir zunächst, daß die Umlaufzahl auf dem Komplement der Spur unseres Kantenzykels in der Ebene lokal konstant ist. Liegt also der Abschluß eines unserer Rechenkästchen nicht ganz in unserer offenen Teilmenge, so verschwindet dort die Umlaufzahl an allen Stellen, die nicht gerade zu Kanten unseres Kantenzykels gehören, und insbesondere im Innern des besagten Kästchens. Die Umlaufzahl unseres Kantenzykels kann nun nur auf dem Innern von endlich vielen Rechenkästchen von Null verschieden sein, und diese gehören nach dem Vorhergehenden mit ihrem Abschluß zu unserer offenen Teilmenge. Wir können also einen weiteren Kantenzzykel in unserer offenen Menge konstruieren, der zu unserem ursprünglichen Kantenzzykel homolog ist und bei dem die Umlaufzahl um jeden Punkt im Innern jedes Rechenkästchens verschwindet, indem wir bei jedem Rechenkästchen mit von Null verschiedener Umlaufzahl ein geeignetes Vielfaches seines "Randzykels" zu unserem ursprünglichen Zykel addieren. Auf diese Weise töten wir auf dem entsprechenden Kästchen die Umlaufzahl und auf den anderen Kästchen ändert sich nichts und wir erhalten einen zu unserem ursprünglichen Zykel homologen Kantenzzykel, der überhaupt keinen Punkt im Innern irgendeines Rechenkästchens umläuft. Das anschließende Lemma beendet dann den Beweis.  $\square$

**Lemma 1.6.10.** *In einem Kantenzzykel, der keinen Punkt aus dem Innern irgendeines Kästchens umläuft, kommt jede Kante gleich oft in beiden Richtungen vor.*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit argumentieren wir nur für senkrechte Kanten. Nehmen wir also an, eine senkrechte Kante käme  $a$ -mal in der Richtung nach oben und  $b$ -mal in die Gegenrichtung vor. Ziehen wir von unserem Kantenzzykel den Randzykel des Kästchens links neben unserer Kante ab, und zwar  $a$ -mal im Gegenuhrzeigersinn und  $b$ -mal im Uhrzeigersinn, so erhalten wir einen neuen Kantenzzykel mit Umlaufzahl  $b - a$  auf diesem Kästchen und Umlaufzahl null auf dem Kästchen rechts daneben. Diese Kante selbst gehört aber gar nicht mehr zur Spur unseres Zyklus, und weil die Umlaufzahl lokal konstant ist folgt  $b - a = 0$ .  $\square$

## 2 Relative Homologie mit Anwendungen

In diesem Abschnitt führen wir eine Verallgemeinerung unserer singulären Homologiegruppen ein, die sogenannten “relativen Homologiegruppen” eines topologischen Raums relativ zu einer Teilmenge. Man mag sich fragen, ob es nicht sinnvoller wäre, erst einmal die bisher eingeführten gewöhnlichen Homologiegruppen so eingehend zu studieren, daß wir sie für einige elementare Beispiele auch berechnen könnten, anstatt gleich zu verallgemeinern. Es erweist sich jedoch, daß diese Verallgemeinerung bei der Berechnung der gewöhnlichen Homologiegruppen entscheidend hilft, sobald wir (1) die lange exakte Homologiesequenz hergeleitet haben, die die relative mit der gewöhnlichen Homologie in Beziehung setzt, und (2) den Satz über die Ausschneidung gezeigt haben, der sich nur für die relative Homologie überhaupt formulieren läßt.

### 2.1 Relative Homologie

**Definition 2.1.1.** Ist  $(X, A)$  ein **Raumpaar**, als da heißt ein topologischer Raum  $X$  mit einer Teilmenge  $A$ , so liefert die Einbettung  $A \hookrightarrow X$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$  Inklusionen  $S_q A \hookrightarrow S_q X$  auf den Gruppen der singulären  $q$ -Ketten. Die Quotientengruppe bezeichnen wir mit

$$S_q(X, A) := S_q X / S_q A$$

und nennen ihre Elemente **relative  $q$ -Ketten**. Wir geben der Quotientenabbildung  $S_q X \rightarrow S_q(X, A)$  keinen Namen.

2.1.2. Die Quotientenabbildung liefert einen Isomorphismus zwischen der freien Gruppe über der Menge aller der  $q$ -Simplizes  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ , deren Bild nicht in  $A$  enthalten ist, und der Gruppe der relativen  $q$ -Ketten  $S_q(X, A)$ . Diese Sichtweise zeigt, daß auch die relativen Ketten eine freie abelsche Gruppe bilden.

**Definition 2.1.3.** Man überzeugt sich leicht, daß es eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismen  $\bar{\partial}_q : S_q(X, A) \rightarrow S_{q-1}(X, A)$  gibt derart, daß auch das rechte Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} S_q A & \hookrightarrow & S_q X & \twoheadrightarrow & S_q(X, A) \\ \partial_q \downarrow & & \partial_q \downarrow & & \bar{\partial}_q \downarrow \\ S_{q-1} A & \hookrightarrow & S_{q-1} X & \twoheadrightarrow & S_{q-1}(X, A) \end{array}$$

Es ist klar, daß die  $S_q(X, A)$  mit diesem Differential einen Kettenkomplex bilden, d.h. es gilt  $\bar{\partial} \circ \partial = 0$ . Wir notieren ihn  $S(X, A)$  und definieren die

**relativen Homologiegruppen** von unserem Raumpaars als die Homologie dieses Kettenkomplexes, in Formeln

$$H_q(X, A) := \mathcal{H}_q(S(X, A)) = \ker \bar{\partial}_q / \text{im } \bar{\partial}_{q+1}$$

Die Elemente von  $\ker \bar{\partial}_q$  heißen auch die **relativen  $q$ -Zykel**, die Elemente von  $\text{im } \bar{\partial}_{q+1}$  die **relativen  $q$ -Ränder** und für einen relativen Zykel  $c$  bezeichnet wieder  $[c]$  seine Homologiekategorie.

*Ergänzung 2.1.4.* In 2.3.22 wird klar werden, daß wir unter geeigneten Annahmen an unser Raumpaars  $(X, A)$  die relative Homologie  $H_q(X, A)$  für  $q > 0$  identifizieren können mit der Homologie  $H_q(X/A)$  des Raums  $X/A$ , der aus  $X$  entsteht durch die Identifikation der Teilmenge  $A$  zu einem Punkt.

*Beispiel 2.1.5.* Wir haben  $H_1([x, y], \{x, y\}) \cong \mathbb{Z}$ , für  $x < y$  in  $\mathbb{R}$ . Diese Aussage können Sie sich als Übung hier schon überlegen, wir erhalten sie später auch als einen Spezialfall von 2.3.3. Wir haben nach 2.3.5 auch  $H_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Einen Erzeuger dieser relativen Homologie kann man wie folgt finden: Man schneidet den Kuchen  $D^2$  wie üblich in Stücke und betrachtet jedes der Stücke mit einer geeigneten Orientierung als 2-Simplex. Die formale Summe dieser Simplizes hat dann als Rand nur den Rand des Kuchens selber und bildet folglich einen relativen Zykel, von dem man mithilfe des zweiten Teils von 2.3.3 zeigen kann, daß seine Klasse in der Tat die relative Homologie erzeugt. Die erste relative Homologie des Möbiusbands  $M$  aus ?? relativ zu seinem Randkreis  $S^1$  hat genau zwei Elemente,  $H_1(M, S^1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , und ein nichttriviales Element wird repräsentiert durch den 1-Zykel, der "in der Mitte des Möbiusbands einmal umläuft". Um das präzise zu zeigen, benötigen wir jedoch die lange exakte Homologiesequenz 2.2.1.

**Definition 2.1.6.** Ein **Morphismus von Raumpaars**  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist per definitionem schlicht eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  mit  $f(A) \subset B$ . So ein  $f$  induziert eine Abbildung  $H_q f$  auf der relativen Homologie. Genauer definiert man zunächst  $S_q f : S_q(X, A) \rightarrow S_q(Y, B)$  durch die Bedingung, daß auch das rechte Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} S_q A & \hookrightarrow & S_q X & \twoheadrightarrow & S_q(X, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_q B & \hookrightarrow & S_q Y & \twoheadrightarrow & S_q(Y, B) \end{array}$$

Dann prüft man, daß diese  $S_q f$  sogar mit den Differentialen kommutieren und so einen Morphismus von Kettenkomplexen

$$Sf : S(X, A) \rightarrow S(Y, B)$$



Ein Erzeuger der relativen Homologie  $H_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z}$



definieren. Dieser Morphismus liefert dann schließlich auf der Homologie die gewünschten Morphismen  $H_q f : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$ .

2.1.7. Man prüft, daß wir auf diese Weise sogar einen Funktor

$$S : \{\text{Raumpaare}\} \rightarrow \{\text{Kettenkomplexe}\}$$

erhalten. Durch Verknüpfung mit den Homologie-Funktoren

$$\mathcal{H}_q : \{\text{Kettenkomplexe}\} \rightarrow \{\text{Abelsche Gruppen}\}$$

können wir also unsere relativen Homologiegruppen verstehen als Funktoren

$$H_q : \{\text{Raumpaare}\} \rightarrow \{\text{Abelsche Gruppen}\}$$

Die Definition der relativen Ketten schenkt uns natürliche Morphismen  $SX \rightarrow S(X, A)$  und damit  $H_q X \rightarrow H_q(X, A)$ . Es ist klar nach den Definitionen, daß  $H_q X \rightarrow H_q(X, \emptyset)$  stets ein Isomorphismus ist.

2.1.8. Ich notiere die Kategorie der Raumpaare  $\text{Top}^c$ . Die in der Literatur verbreitete alternative Notation  $\text{Top}^2$  gefällt mir nicht, da sie in wieder anderen Konventionen das kartesische Produkt der Kategorie  $\text{Top}$  mit sich selber bedeuten sollte, und wir diese Begriffsbildung auch benötigen werden.

*Übung 2.1.9.* Man konstruiere eine Isotransformation zwischen den beiden folgenden Funktoren von den Raumpaaren in die abelschen Gruppen:

1.  $(X, A) \mapsto H_0(X, A)$
2.  $(X, A) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Die freie abelsche Gruppe über der Menge aller Wegzu-} \\ \text{-sammenhangskomponenten von } X, \text{ die } A \text{ nicht treffen} \end{array} \right\}$

**Definition 2.1.10.** Seien  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  zwei Morphismen zwischen Raumpaaren. Eine **Homotopie von  $f$  nach  $g$**  ist ein Morphismus von Raumpaaren  $h : (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B)$  derart, daß gilt  $h \circ i_0 = f$  und  $h \circ i_1 = g$ .

*Übung 2.1.11.* Man zeige: Sind zwei Morphismen  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotop, so induzieren sie dieselben Abbildungen  $H_q f = H_q g : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$  auf den relativen Homologiegruppen. Hinweis: Man wiederholt den alten Beweis. Man zeige durch ein Beispiel, daß es nicht ausreicht nur vorauszusetzen, daß  $f$  und  $g$  als Abbildungen  $X \rightarrow Y$  sowie als Abbildungen  $A \rightarrow B$  jeweils zueinander homotop sind.

## 2.2 Die lange exakte Homologiesequenz

2.2.1. Wir werden im folgenden zu jedem Raumpaars  $(X, A)$  Homomorphismen  $\hat{\partial} = \hat{\partial}_q : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$  konstruieren derart, daß die Sequenz

$$\dots \rightarrow H_{q+1}(X, A) \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

exakt ist, wenn wir als Morphismen diese  $\hat{\partial}$  und die von den Einbettungen  $(A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$  induzierten Abbildungen nehmen. Ist genauer  $[c] \in H_q(X, A)$  eine relative Homologiekategorie, so repräsentieren wir  $[c]$  durch einen relativen  $q$ -Zykel  $c \in S_q(X, A)$  und diesen durch eine  $q$ -Kette  $\tilde{c} \in S_q X$ . Dann ist  $\partial \tilde{c} \in S_{q-1} A$  ein  $(q-1)$ -Zykel und wir nehmen als  $\hat{\partial}[c]$  seine Homologiekategorie, in Formeln  $\hat{\partial}[c] := [\partial \tilde{c}]$ . Daß wir so eine wohldefinierte Abbildung erhalten und daß mit diesen Abbildungen die oben angegebene Sequenz exakt ist, folgt aus dem anschließenden Satz 2.2.2, angewandt auf die "kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen"

$$SA \hookrightarrow SX \rightarrow S(X, A)$$

Unsere Sequenz heißt die **lange exakte Homologiesequenz des Raumpaares**  $(X, A)$ .

**Satz 2.2.2.** *Sei  $C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C''$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, als da heißt  $C'_q \hookrightarrow C_q \rightarrow C''_q$  soll für alle  $q$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen sein. So gilt:*

1. *Es gibt für jedes  $q$  genau einen Gruppenhomomorphismus*

$$\hat{\partial} : \mathcal{H}_q C'' \rightarrow \mathcal{H}_{q-1} C'$$

*derart, daß gilt  $\hat{\partial}[c''] = [c']$  für Zykel  $c'' \in \mathcal{Z}_q C''$  und  $c' \in \mathcal{Z}_{q-1} C'$  genau dann, wenn es ein  $c \in C_q$  gibt mit  $pc = c''$  und  $\partial c = ic'$ .*

2. *Mit diesen Homomorphismen erhalten wir eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen, die **abstrakte lange exakte Homologiesequenz***

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_{q+1} C'' \rightarrow \mathcal{H}_q C' \rightarrow \mathcal{H}_q C \rightarrow \mathcal{H}_q C'' \rightarrow \mathcal{H}_{q-1} C' \rightarrow \dots$$

*Beweis.* Das folgende Diagramm stellt alle im Beweis benötigten Gruppen



Dieses Bild soll den Randoperator der langen exakten Homologiesequenz anschaulich machen. Es stellt einen zweidimensionalen Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  mit 18 Zwei-Simplizes dar und darin schraffiert einen Teilkomplex  $\mathcal{A}$ . Die Summe der sieben durch einen Kreis Pfeil mit einer Orientierung versehenen Zwei-Simplizes ist ein relativer Zwei-Zykel aus  $S\mathcal{K}/S\mathcal{A}$  und repräsentiert eine relative simpliziale Homologiekategorie in  $\mathcal{H}_2(S\mathcal{K}/S\mathcal{A})$ . Sein Rand ist die Summe der im Bild durch Pfeile gerichteten Kanten, ein simplizialer Eins-Zykel aus  $S\mathcal{A}$ , dessen Homologiekategorie in  $\mathcal{H}_1(S\mathcal{A})$  das Bild unserer relativen simplizialen Homologiekategorie unter dem Randoperator der langen exakten Homologiesequenz repräsentiert.

und Abbildungen dar:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_{q+1} & \twoheadrightarrow & C''_{q+1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 C'_q & \hookrightarrow & C_q & \twoheadrightarrow & C''_q \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C'_{q-1} & \hookrightarrow & C_{q-1} & \twoheadrightarrow & C''_{q-1} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 C'_{q-2} & \hookrightarrow & C_{q-2} & & 
 \end{array}$$

Jetzt beginnen wir mit der eigentlichen Argumentation. Ist  $c'' \in C''_q$  ein Zykel und  $c \in C_q$  ein Urbild, in Formeln  $pc = c''$ , so folgt  $p\partial c = \partial c'' = 0$  und mit Exaktheit bei  $C_{q-1}$  gibt es  $c' \in C'_{q-1}$  mit  $ic' = \partial c$ . Dies  $c'$  muß sogar ein Zykel sein, denn es gilt  $i\partial c' = \partial ic' = \partial^2 c = 0$  und  $i_{q-2}$  ist injektiv.

Wir wollen gerne  $\hat{\partial}[c''] = [c']$  setzen und müssen zeigen, daß die Homologieklassse  $[c']$  weder von der Wahl von  $c''$  noch von der Wahl von  $c$  abhängt. Aber sei sonst  $b'' \in C''_{q+1}$  gegeben und sei  $c''$  abgeändert zu  $c'' + \partial b''$ . Wir finden  $b \in C_{q+1}$  mit  $pb = b''$ . Wählen wir  $\tilde{c} \in C_q$  mit  $p\tilde{c} = c'' + \partial b''$ , so folgt  $p(\tilde{c} - c - \partial b) = 0$ , also  $\tilde{c} - c - \partial b = ib'$  für  $b' \in C'_q$ . Ist nun  $\partial \tilde{c} = ic'$  so folgt  $i(\tilde{c}' - c') = i\partial b'$  und somit  $[\tilde{c}'] = [c']$  wie gewünscht.

Damit ist also  $\hat{\partial}$  definiert und wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß dies  $\hat{\partial}$  durch die im ersten Teil des Satzes angegebene Eigenschaft charakterisiert wird. Es bleibt nur die Exaktheit unserer Sequenz nachzuweisen. Man folgert mühelos aus den Definitionen daß die Verknüpfung je zweier aufeinanderfolgender Morphismen verschwindet, also  $\ker \supset \text{im}$ . Wir müssen noch  $\ker \subset \text{im}$  an jeder Stelle zeigen.

Bei  $\mathcal{H}_q C$  folgt aus  $[c] \mapsto 0$  für  $c \in \mathcal{Z}_q C$  sofort  $pc = \partial b''$  und die Surjektivität von  $C_{q+1} \rightarrow C''_{q+1}$  liefert uns  $b \in C_{q+1}$  mit  $pb = b''$ , also  $p(c - \partial b) = 0$ . Dann gibt es aber nach der Exaktheit von  $C'_q \hookrightarrow C_q \twoheadrightarrow C''_q$  ein  $c' \in C'_q$  mit  $ic' = c - \partial b$  und notwendig ist  $c'$  ein Zykel und  $[c'] \mapsto [c - \partial b] = [c]$ . Bei  $\mathcal{H}_q C''$  folgt aus  $[c''] \mapsto 0$ , daß für jedes Urbild  $c \in C_q$  mit  $c \mapsto c''$  gilt  $\partial c = ic'$  für einen Rand  $c' = \partial b'$  in  $C'_{q-1}$ . Dann ist aber  $c - ib' \in C_q$  ein Zykel und  $[c'']$  das Bild von  $[c - ib'] \in \mathcal{H}_q C$ . Bei  $\mathcal{H}_{q-1} C'$  folgt aus  $[c'] \mapsto 0$  ja  $ic' = \partial c$  für  $c \in C_q$  und dann muß  $pc \in C''_q$  ein Zykel sein mit  $[pc] \mapsto [c']$ . Der Satz ist bewiesen.  $\square$

2.2.3. Gegeben ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
 C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 D' & \hookrightarrow & D & \twoheadrightarrow & D''
 \end{array}$$

ist auch das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & \mathcal{H}_q C' & \rightarrow & \mathcal{H}_q C & \rightarrow & \mathcal{H}_q C'' & \rightarrow & \mathcal{H}_{q-1} C' & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & \mathcal{H}_q D' & \rightarrow & \mathcal{H}_q D & \rightarrow & \mathcal{H}_q D'' & \rightarrow & \mathcal{H}_{q-1} D' & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Das folgt aus der Funktorialität von  $\mathcal{H}_q$  für die ersten beiden Quadrate und aus der Konstruktion von  $\hat{\partial}$  für das dritte Quadrat. Insbesondere kommutieren für jeden Morphismus  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Raumpaaren mit den Randabbildungen der jeweiligen langen exakten Homologiesequenzen die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_q(X, A) & \rightarrow & \mathrm{H}_{q-1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}_q(Y, B) & \rightarrow & \mathrm{H}_{q-1}(B) \end{array}$$

**Korollar 2.2.4.** *Sei  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ein Morphismus von Raumpaaren. Induziert  $f$  Isomorphismen  $\mathrm{H}_q f : \mathrm{H}_q X \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q Y$  und  $\mathrm{H}_q f : \mathrm{H}_q A \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q B$  für alle  $q$ , so induziert  $f$  auch auf der relativen Homologie Isomorphismen*

$$\mathrm{H}_q f : \mathrm{H}_q(X, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_q(Y, B)$$

*Beweis.* Das folgt aus der langen exakten Homologiesequenz mit dem anschließenden Fünferlemma.  $\square$

2.2.5. Induziert  $f$  Homotopieäquivalenzen  $X \rightarrow Y$  und  $A \rightarrow B$ , so induziert  $f$  insbesondere Isomorphismen auf der relativen Homologie, ohne daß es deshalb eine Homotopieäquivalenz von Raumpaaren sein müßte.

**Lemma 2.2.6 (Fünferlemma).** *Wir betrachten ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & D & \rightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & \rightarrow & D' & \rightarrow & E' \end{array}$$

*Sind die beiden Horizontalen exakte Sequenzen und sind alle Vertikalen bis auf die mittlere Isomorphismen, so ist auch die mittlere Vertikale ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Diese Diagrammjagd überlassen wir dem Leser. Man bemerke, daß wir sogar bei der Vertikale ganz links nur die Surjektivität verwenden und bei der Vertikale ganz rechts nur die Injektivität.  $\square$

2.2.7. Sind  $X \supset Y \supset Z$  topologische Räume, so erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\dots H_{q+1}(X, Y) \rightarrow H_q(Y, Z) \rightarrow H_q(X, Z) \rightarrow H_q(X, Y) \rightarrow H_{q-1}(Y, Z) \dots$$

die **lange exakte Homologiesequenz des Tripels**  $(X, Y, Z)$ , aus der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$SY/SZ \hookrightarrow SX/SZ \twoheadrightarrow SX/SY$$

die wiederum eine Konsequenz des noetherschen Isomorphiesatzes ist.

*Übung 2.2.8. (Neunerlemma).* Sei gegeben ein kommutatives Diagramm von (kommutativen) Gruppen mit kurzen exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} A_3 & \hookrightarrow & B_3 & \twoheadrightarrow & C_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_2 & \hookrightarrow & B_2 & \twoheadrightarrow & C_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \hookrightarrow & B_1 & \twoheadrightarrow & C_1 \end{array}$$

und seien die senkrechten Kompositionen jeweils Null. Sind zwei der Spalten kurze exakte Sequenzen, so auch die Dritte. Hinweis: Man benutze die lange exakte Homologiesequenz. Im Fall nichtkommutativer Gruppen bleibt allerdings nur die Diagrammjagd, vergleiche ???. Man folgere auch aus dem Neunerlemma den noetherschen Isomorphiesatz.

*Übung 2.2.9.* Eine kurze exakte Sequenz  $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$  von abelschen Gruppen heißt **spaltend** genau dann, wenn es einen Isomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} A' \oplus A''$  gibt derart, daß das folgende Diagramm kommutiert, mit  $a' \mapsto (a', 0)$  und  $(a', a'') \mapsto a''$  in der unteren Horizontalen:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \parallel & & \downarrow \wr & & \parallel \\ A' & \hookrightarrow & A' \oplus A'' & \twoheadrightarrow & A'' \end{array}$$

Man zeige, daß für eine kurze exakte Sequenz  $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$  von abelschen Gruppen gleichbedeutend sind: (1) Die Sequenz spaltet; (2) Die Surjektion  $A \twoheadrightarrow A''$  besitzt ein Rechtsinverses; (3) Die Injektion  $A' \hookrightarrow A$  besitzt ein Linksinverses.

2.2.10. Man nennt ganz allgemein eine Surjektion von Gruppen, die ein Rechtsinverses besitzt eine **spaltende Surjektion** und eine Injektion von Gruppen, die ein Linksinverses besitzt, eine **spaltende Injektion**. Dieselbe

Terminologie verwendet man bei Moduln über Ringen und auch in noch größerer Allgemeinheit. In welcher Bedeutung das jeweils gemeint ist, ob also die fraglichen Halbinversen Gruppenhomomorphismen, Modulhomomorphismen oder irgendeine andere Art von Morphismen sein sollen, gilt es jeweils aus dem Kontext zu erschließen.

*Übung 2.2.11.* Eine abelsche Gruppe  $F$  heißt **frei** genau dann, wenn sie isomorph ist zur freien abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}M$  über einer Menge  $M$ . Man zeige, daß jede Surjektion von einer beliebigen abelschen Gruppe auf eine freie abelsche Gruppe spaltet.

*Übung 2.2.12.* Sei gegeben ein kommutatives  $3 \times 3$ -Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccc} A' & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & A'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C' & \hookrightarrow & C & \twoheadrightarrow & C'' \end{array}$$

So kommutiert das Diagramm der Randoperatoren der zugehörigen langen exakten Homologiesequenzen bis auf ein Vorzeichen, genauer kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q C'' & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1} C' \\ \partial \downarrow & & \downarrow -\partial \\ H_{q-1} A'' & \xrightarrow{\partial} & H_{q-2} A' \end{array}$$

## 2.3 Ausschneidung

**Satz 2.3.1 (Ausschneidung).** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar und  $L \subset A$  eine Teilmenge von  $A$ , deren Abschluß im Inneren von  $A$  liegt, in Formeln  $\bar{L} \subset A^\circ$  oder noch genauer  $\text{Cl}_X(L) \subset \text{Of}_X(A)$ . So liefert die Einbettung  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen

$$H_q(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{\sim} H_q(X, A)$$

2.3.2. Der Satz besagt salopp gesprochen, daß sich die relative Homologie nicht ändert, wenn wir die Menge  $L$  gleichzeitig sowohl aus  $X$  als auch aus  $A$  ausschneiden. Wir stellen den Beweis zurück und geben zunächst einige Anwendungen. Bezeichne  $\partial\Delta_n \subset \Delta_n$  den anschaulichen Rand  $\partial\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \text{ für mindestens ein } i\}$  des  $n$ -ten Standardsimplex.

**Satz 2.3.3.** Die Homologiegruppen  $H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n)$  der Standardsimplizes relativ zu ihrem Rand werden gegeben durch

$$H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Klasse  $[\tau_n]$  des tautologischen Simplex  $\tau_n$  ist ein Erzeuger der relativen Homologiegruppe  $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ .

2.3.4. Einen meiner Ansicht nach anschaulicheren Zugang zur Berechnung dieser Homologiegruppen vermittelt der ‘‘Mayer-Vietoris-Sequenz’’ erklären wir in 2.3.20. Er liefert jedoch keine explizite Beschreibung eines Erzeugers, und diese explizite Beschreibung werden wir brauchen, um den Zusammenhang zwischen simplizialer und singulärer Homologie zu klären.

*Beweis.* Für  $n = 0$  ist  $\Delta_n$  ein Punkt und  $\partial\Delta_n$  die leere Menge und der Satz ist unsere Aussage 1.2.11 über die Homologie eines Punktes. Den allgemeinen Fall folgern wir durch vollständige Induktion. Dazu betten wir  $\Delta_n$  ein in  $\Delta_{n+1}$ , indem wir als letzte Koordinate eine Null anfügen, und betrachten in  $\Delta_{n+1}$  die Spitze  $p = (0, 0, 0, \dots, 1)$ , die der Seitenfläche  $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$  gegenüberliegt. Weiter betrachten wir die Vereinigung  $\Lambda_{n+1} \subset \Delta_{n+1}$  aller Seitenflächen, die  $p$  enthalten, und die Isomorphismen

$$H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1} \setminus p, \Lambda_{n+1} \setminus p) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

die von den Einbettungen aufgrund der Homotopieinvarianz und der Ausschneidung von  $p$  induziert werden. Die Randabbildung zur langen exakten Homologiesequenz des Tripels  $(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$  liefert weiter Isomorphismen

$$H_{q+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

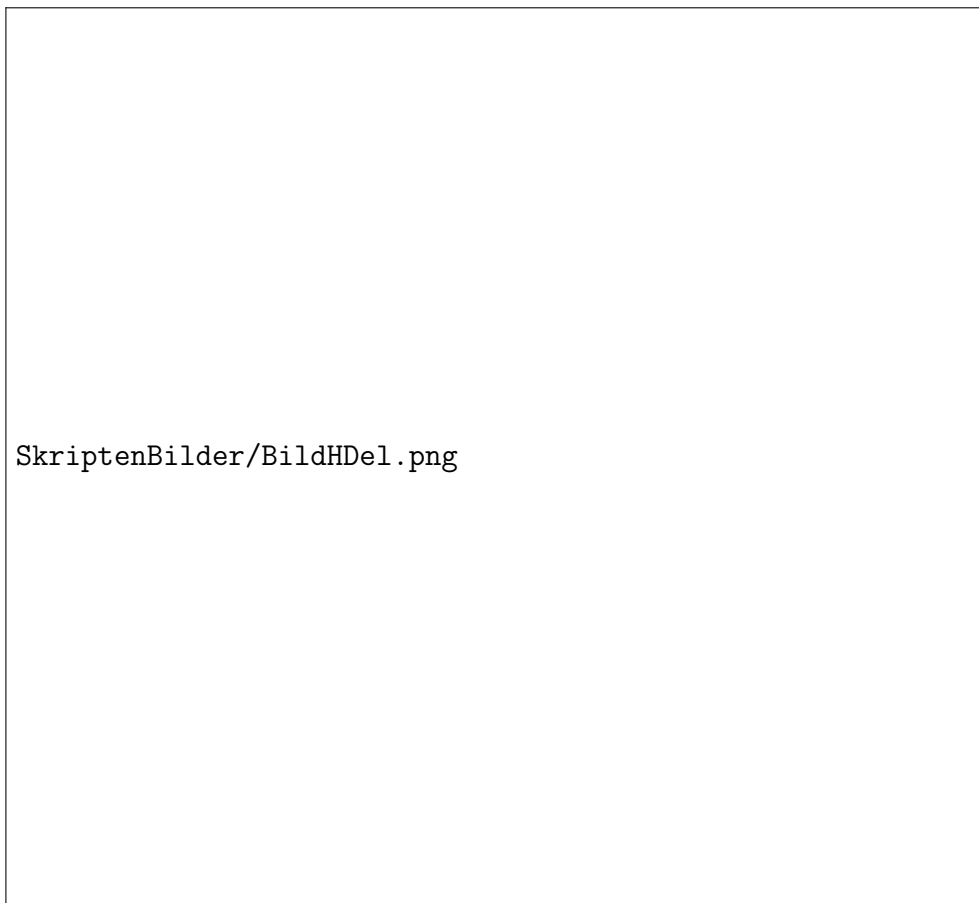
und damit folgt die erste Behauptung durch Induktion. Unter diesen Isomorphismen geht die Klasse  $[\tau_{n+1}] \in H_{n+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1})$  über in  $(-1)^{n+1}[\tau_n] \in H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ , und so ergibt sich auch die zweite Behauptung mit vollständiger Induktion.  $\square$

**Korollar 2.3.5.** Für  $n \geq 0$  wird die Homologie des  $n$ -Balls relativ zu seinem Rand gegeben durch die Formeln

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Das folgt sofort aus 2.3.3, da es etwa nach ?? einen Homöomorphismus  $\Delta_n \xrightarrow{\sim} D^n$  gibt, der eine Bijektion  $\partial\Delta_n \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$  induziert. Alternativ folgt es auch aus dem anschließenden Satz.  $\square$





Die Raumpaare und das Raumtripel aus dem Beweis von [2.3.3](#) im Fall  $n = 1$ .

**Satz 2.3.6.** Die Homologiegruppen der Sphären  $S^n$  werden für  $n \geq 1$  gegeben durch

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \text{ oder } q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Nullsphäre  $S^0$  besteht schlicht aus zwei Punkten, wir haben in diesem Fall also  $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sowie  $H_q(S^0) = 0$  für  $q > 0$ .

*Beweis.* Das ergibt sich aus dem vorhergehenden Korollar 2.3.5 mit der langen exakten Homologiesequenz des Raumpaars  $(D^{n+1}, S^n)$ . Einen alternativen und vielleicht anschaulicheren Beweis mithilfe der sogenannten “Mayer-Vietoris-Sequenz” geben wir in 2.3.20. Er hat allerdings den Nachteil, keinen expliziten Erzeuger der Homologie zu liefern.  $\square$

**Korollar 2.3.7.** Für  $n \geq 0$  und jeden Punkt  $p \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  für  $n \neq m$  nicht homöomorph.

*Beweis.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $p = 0$  annehmen. Die Einbettung  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$  induziert nun aufgrund der Homotopieinvarianz 2.2.4 Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen und die Aussage folgt so aus 2.3.5.  $\square$

**Korollar 2.3.8.** Sei  $n \geq -1$ . Es gibt keine stetige Abbildung  $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$ , deren Einschränkung auf  $S^n$  die Identität ist.

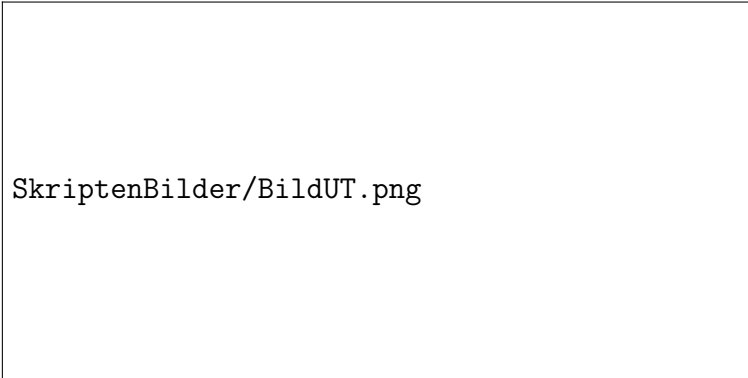
*Beweis.* Sei  $i : S^n \hookrightarrow D^{n+1}$  die Einbettung. Aus  $r \circ i = \text{id}$  folgt, daß die Verknüpfung

$$H_n S^n \rightarrow H_n D^{n+1} \rightarrow H_n S^n$$

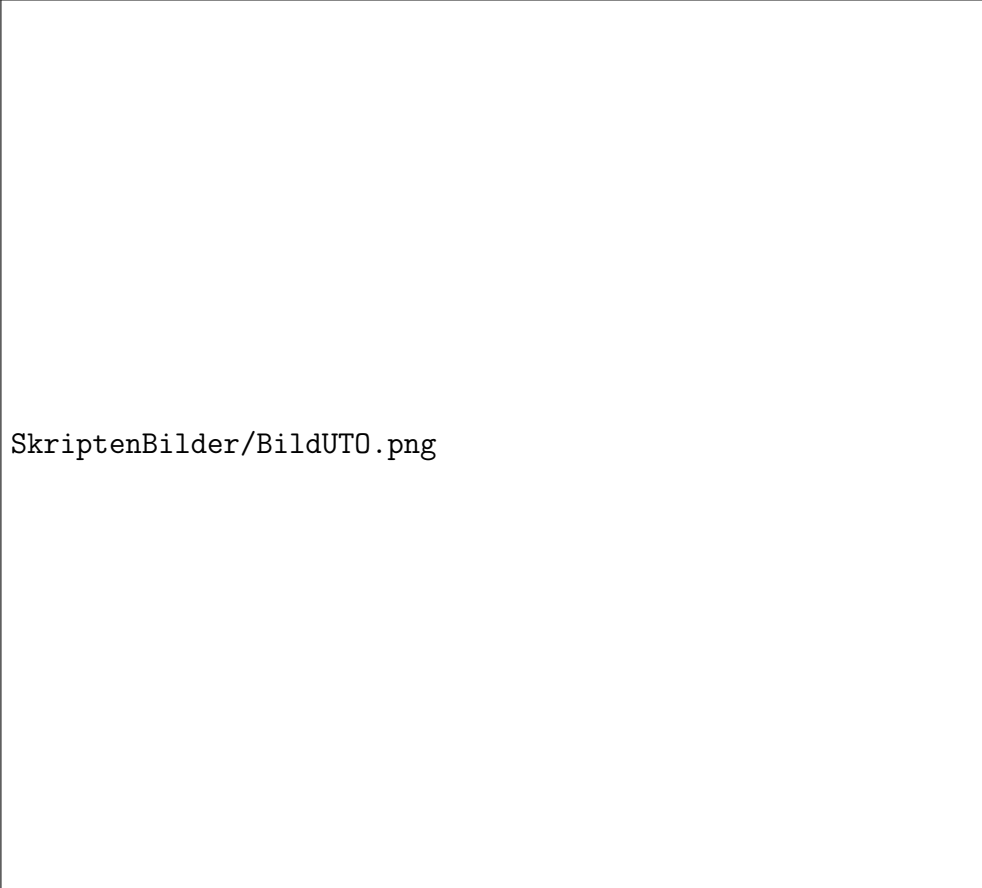
von  $Hr$  mit  $Hi$  die Identität ist. Die Identität auf  $\mathbb{Z}$  kann aber nicht über 0 faktorisieren und das erledigt den Fall  $n \geq 1$ . Im Fall  $n = 0$  argumentiert man analog, daß die Identität auf  $\mathbb{Z}^2$  nicht über  $\mathbb{Z}$  faktorisieren kann. Der Fall  $n = -1$  ist eh klar.  $\square$

**Satz 2.3.9 (Fixpunktsatz von Brouwer).** Jede stetige Abbildung  $f : D^n \rightarrow D^n$  des abgeschlossenen  $n$ -Balls auf sich selber besitzt einen Fixpunkt.

*Beweis.* Sonst könnte man eine stetige Abbildung  $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$  konstruieren durch die Vorschrift, daß  $r(x)$  der Punkt ist, in dem der Strahl, der von  $r(x)$  ausgeht und durch  $x$  läuft, die Sphäre  $S^{n-1}$  trifft. Das stände jedoch im Widerspruch zum vorhergehenden Korollar 2.3.8.  $\square$



SkriptenBilder/BildUT.png



SkriptenBilder/BildUTO.png

Der Effekt der Unterteilungsoperatoren  $U_1$  und  $U_2$  auf Simplizes. Die Zahlen an den Ecken der Dreiecksflächen zeigen wieder, wohin die Vektoren der Standardbasis  $e_1, e_2, e_3$  des  $\mathbb{R}^3$ , deren konvexe Hülle ja der Standardsimplex  $\Delta_2$  ist, abgebildet werden.

2.3.10. Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen zum Beweis des Ausschneidungssatzes. Die zentrale Rolle spielen hier die **Unterteilungsoperatoren**  $U_q : S_q X \rightarrow S_q X$ , die jeden Simplex “baryzentrisch unterteilen”. Wir konstruieren sie als natürliche Transformationen  $U_q : S_q \rightarrow S_q$ . Um solche natürlichen Transformationen festzulegen, brauchen wir ja nach Lemma 1.4.4 nur  $U_q(\tau_q) \in S_q(\Delta_q)$  anzugeben. Für jede konvexe Teilmenge  $K$  eines  $\mathbb{R}^n$  und jeden Punkt  $p \in K$  erinnern wir dazu an den Prismen-Operator  $P = P_p : S_q K \rightarrow S_{q+1} K$  aus dem Beweis von 1.2.14. Dann setzen wir  $U_q = 0$  für  $q < 0$  und definieren wir  $U_q$  für  $q \geq 0$  induktiv mittels der Vorschrift  $U_0(\tau_0) = \tau_0$  und  $U_q(\tau_q) = P U_{q-1}(\partial\tau_q)$  falls  $q > 0$ , wo  $P$  den Prismenoperator bezüglich des Schwerpunkts  $\frac{1}{q+1}(1, 1, \dots, 1)$  von  $\Delta_q$  bezeichnet.

**Lemma 2.3.11.** *Die Unterteilung  $U : SX \rightarrow SX$  ist eine Kettenabbildung.*

*Beweis.* Es gilt zu zeigen  $\partial U_q = U_{q-1} \partial$  für alle  $q$ . Wir zeigen die Gleichheit durch Induktion über  $q$ . Natürlich reicht es, die Gleichheit auf  $\tau_q$  zu zeigen. Die Fälle  $q = 0, 1$  überlassen wir dem Leser. Für  $q \geq 2$  haben wir

$$\begin{aligned} \partial U_q(\tau_q) &= \partial P U_{q-1} \partial(\tau_q) \\ &= (-P \partial + \text{id}) U_{q-1} \partial(\tau_q) \\ &= U_{q-1} \partial(\tau_q) \end{aligned}$$

die erste Gleichung nach Definition, die Zweite da  $\partial P + P \partial = \text{id}$  auf  $S_q \Delta_q$  für  $q \geq 1$ , die Dritte da  $\partial U_{q-1} = U_{q-2} \partial$  nach Induktion.  $\square$

**Lemma 2.3.12.** *Die Unterteilung ist in natürlicher Weise kettenhomotop zur Identität, es gibt in anderen Worten natürliche Transformationen*

$$T_q : S_q \Rightarrow S_{q+1}$$

mit  $\partial T_q + T_{q-1} \partial = U_q - \text{id}$  für alle  $q$ . Insbesondere induziert  $U$  die Identität auf der Homologie.

2.3.13. Dies Lemma wird sich später als eine Konsequenz des Satzes über azyklische Modelle 3.6.15 erweisen.

*Beweis.* Wir versuchen induktiv mögliche natürliche Transformationen  $T_q$  zu finden und müssen nur  $T_q(\tau_q) \in S_{q+1}(\Delta_q)$  angeben. Wir können mit  $T_{-1} = T_0 = 0$  beginnen und müssen dann induktiv die Gleichungen

$$\partial T_q(\tau_q) = -T_{q-1} \partial(\tau_q) + U_q(\tau_q) - \tau_q$$

lösen. Da  $H_q(\Delta_q) = 0$  für  $q \geq 1$  geht das, wenn die rechte Seite ein Zykel ist. Dazu rechnen wir stur mit der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} -\partial T_{q-1}(\partial\tau_q) + \partial U_q(\tau_q) - \partial\tau_q &= \\ &= (T_{q-2} \partial - U_{q-1} + \text{id})(\partial\tau_q) + \partial U_q(\tau_q) - \partial\tau_q = 0 \end{aligned}$$

$\square$

**Definition 2.3.14.** Gegeben eine Überdeckung  $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$  eines topologischen Raums  $X$  bezeichne  $S_q^\mathcal{V}X \subset S_qX$  die freie Gruppe über allen denjenigen Simplizes, die ganz in einem der  $V \in \mathcal{V}$  liegen. Wir nennen  $S_q^\mathcal{V}X$  die Gruppe der  $\mathcal{V}$ -feinen Ketten.

**Satz 2.3.15 (über feine Ketten).** Sei  $\mathcal{V}$  eine Überdeckung eines Raums  $X$  derart, daß selbst die offenen Kerne der Mengen aus  $\mathcal{V}$  schon  $X$  überdecken, in Formeln  $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V^\circ$ . So induziert die Einbettung  $S^\mathcal{V}X \hookrightarrow SX$  vom Komplex der  $\mathcal{V}$ -feinen Ketten in den Komplex aller singulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.

2.3.16. Mit 4.6.3 wird aus diesem Resultat sogar folgen, daß diese Einbettung eine Homotopieäquivalenz  $S^\mathcal{V}X \xrightarrow{\simeq} SX$  ist.

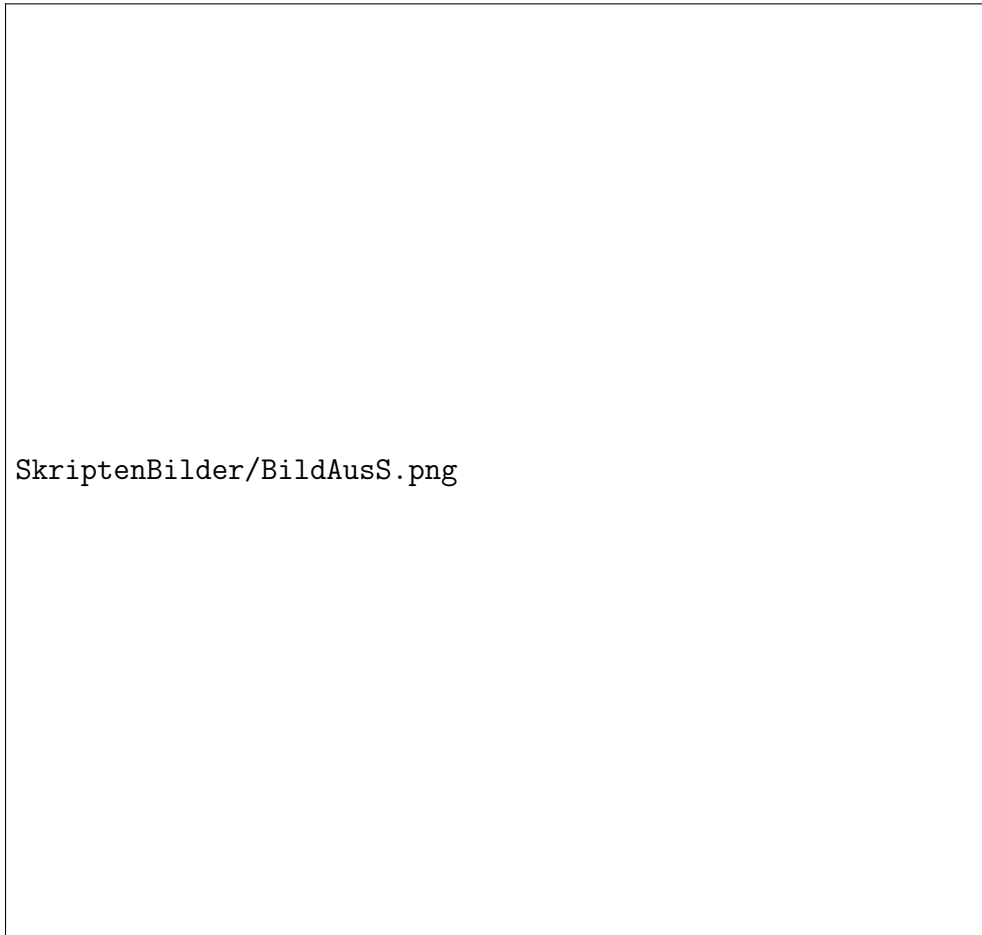
*Beweis.* Mit der langen exakten Homologiesequenz müssen wir nur zeigen, daß die Homologie von  $SX/S^\mathcal{V}X$  verschwindet. Nun bilden unsere Abbildungen  $U$  und  $T$  sicher  $S^\mathcal{V}X$  auf sich selber ab und induzieren also Operatoren  $\bar{U}, \bar{T}$  auf dem Quotienten. Offensichtlich ist auch  $\bar{U}$  homotop zur Identität vermittelt  $\bar{T}$  und liefert also die Identität auf den Homologiegruppen von  $SX/S^\mathcal{V}X$ . Für jedes  $q$  und jede Kette  $\gamma \in S_qX$  gibt es aber nach dem anschließenden Lemma 2.3.17 ein  $n \gg 0$  mit  $U^n\gamma \in S_q^\mathcal{V}X$ , also  $\bar{U}^n\bar{\gamma} = 0$  für  $\bar{\gamma} \in S_qX/S_q^\mathcal{V}X$  die Nebenklasse von  $\gamma$ . Wir folgern  $\mathcal{H}_q(SX/S^\mathcal{V}X) = 0$ .  $\square$

**Lemma 2.3.17.** Sei  $\mathcal{V}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Für jedes  $q$  und jede Kette  $\gamma \in S_qX$  gibt es  $n \gg 0$  mit  $U^n\gamma \in S_q^\mathcal{V}X$ .

*Beweis.* Es reicht sicher, das Lemma für jeden Simplex  $\gamma : \Delta_q \rightarrow X$  zu zeigen. Nun sieht man, daß der maximale Durchmesser eines Simplex, der mit von Null verschiedenem Koeffizienten in  $U^n(\tau_q)$  vorkommt, für  $n \rightarrow \infty$  beliebig klein wird. Insbesondere ist für  $n \gg 0$  nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue jeder solche Simplex ganz in einer der Mengen  $\gamma^{-1}(V^\circ)$  mit  $V \in \mathcal{V}$  enthalten. Das bedeutet aber gerade  $U^n\gamma \in S_q^\mathcal{V}X$ .  $\square$

**Satz 2.3.18 (Ausschneidung).** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaars und  $L \subset A$  eine Teilmenge, deren Abschluß im Inneren von  $A$  liegt, in Formeln  $\bar{L} \subset A^\circ$ . So liefert die Einbettung  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen auf den relativen Homologiegruppen, in Formeln

$$H_q(X \setminus L, A \setminus L) \xrightarrow{\simeq} H_q(X, A)$$



SkriptenBilder/BildAusS.png

Dieses Bild soll Anschauung für den Ausschneidungsisomorphismus geben.  $X$  ist darin die Papierebene,  $A$  alles außerhalb des kleinen Eis und  $L$  alles außerhalb der Zackenlinie. Das große Dreieck stellt einen singulären Zweisimplex in  $X$  dar, der relativ zu  $A$  ein Zykel ist, da eben sein Rand in  $A$  liegt. Nach zweimaliger baryzentrischer Unterteilung entsteht diese Art Spinnennetz, eine zu unserem Zweisimplex homologe singuläre Zweikette. Lassen wir aus dieser Zweikette alle Simplizes fort, die nicht in  $X \setminus L$  liegen, die also aus unserer Zackenlinie herauspieken, so repräsentiert der Rest immer noch dieselbe Homologiekategorie in der relativen Homologie  $H_2(X, A)$ , die folglich herkommt von einer Homologiekategorie in  $H_2(X \setminus L, A \setminus L)$ . Damit sollte zumindest die Surjektivität der von der Einbettung  $(X \setminus L, A \setminus L) \hookrightarrow (X, A)$  auf der Homologie induzierten Abbildung anschaulich klar werden.

*Beweis.* Wir betrachten die Überdeckung  $X = A \cup (X \setminus L)$ , geben ihr den Namen  $\mathcal{V}$  und bilden ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} S(A \setminus L) & \hookrightarrow & SA \oplus S(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & S^{\mathcal{V}}X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(X \setminus L) & \hookrightarrow & SX \oplus S(X \setminus L) & \twoheadrightarrow & SX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(X \setminus L, A \setminus L) & \twoheadrightarrow & S(X, A) & \twoheadrightarrow & SX/S^{\mathcal{V}}X \end{array}$$

Hier ist zu verstehen, daß die beiden oberen horizontalen Inklusionen die “diagonalen” Einbettungen  $z \mapsto (z, z)$  sein sollen und die folgenden Surjektionen die Differenzen  $(x, y) \mapsto x - y$ . Nach dem Neunerlemma ist die untere Horizontale dann auch exakt, und da nach dem Satz über feine Ketten 2.3.15 die Homologie von  $SX/S^{\mathcal{V}}X$  verschwindet, folgt unser Satz aus der langen exakten Homologiesequenz.  $\square$

2.3.19. Sei  $X = X_1 \cup X_2$  ein topologischer Raum mit einer Überdeckung  $\mathcal{V}$  durch zwei offene Teilmengen. Wir betrachten die Einbettungen

$$(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{\nu}} X_{\nu} \xrightarrow{j_{\nu}} X$$

und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$S(X_1 \cap X_2) \hookrightarrow SX_1 \oplus SX_2 \twoheadrightarrow S^{\mathcal{V}}X$$

Hier fassen wir die Elemente der direkten Summe als Spaltenvektoren auf, die erste Abbildung wird gegeben durch die Spaltenmatrix  $(Si_1, Si_2)^{\top}$ , und die zweite durch die Zeilenmatrix  $(Sj_1, -Sj_2)$ . Nehmen wir dazu die lange exakte Homologiesequenz und verwenden die von der Einbettung  $S^{\mathcal{V}}X \hookrightarrow SX$  induzierten Identifikationen  $\mathcal{H}_q(S^{\mathcal{V}}X) \xrightarrow{\sim} H_q X$ , so erhalten wir die sogenannte **Mayer-Vietoris-Sequenz**, eine lange exakte Sequenz der Gestalt

$$\dots H_q(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \dots$$

Die ersten beiden Abbildungen dieser Sequenz werden gegeben durch die Spaltenmatrix  $(H_q i_1, H_q i_2)^{\top}$  und die Zeilenmatrix  $(H_q j_1, -H_q j_2)$ , die dritte Abbildung ist nicht ganz so leicht explizit anzugeben.

*Beispiel 2.3.20.* Mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz 2.3.19 bestimmen wir ein weiteres Mal die Homologie der Sphären. Man schreibt für diesen Beweis die Kugelschale als die Vereinigung zweier offener etwas über den Äquator hinaus verdickter Hemisphären  $S^n = U^+ \cup U^-$  und erhält nach 2.3.19 eine lange exakte Sequenz

$$\dots H_q(U^+) \oplus H_q(U^-) \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow H_{q-1}(U^+ \cap U^-) \rightarrow H_{q-1}(U^+) \oplus H_{q-1}(U^-) \dots$$



Berechnung der Homologie der Sphäre mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz.



Der Schnitt  $U^+ \cap U^-$  ist homotopieäquivalent zum Äquator  $S^{n-1}$  und die Hemisphären sind beide zusammenziehbar und haben folglich dieselbe Homologie wie ein Punkt. Man sieht nun explizit leicht ein, daß wir für  $n = 0, 1$  das behauptete Ergebnis erhalten, und für  $n \geq 2$  folgt durch Betrachten der obigen Sequenz

$$H_q(S^n) \xrightarrow{\sim} H_{q-1}(U^+ \cap U^-) \cong H_{q-1}(S^{n-1})$$

für  $q \geq 2$  und  $H_1(S^n) = 0$  und  $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ . Die Homologie der Sphären ergibt sich durch vollständige Induktion. Diese Herleitung gefällt mir eigentlich besser als die Herleitung aus 2.3.3, sie liefert jedoch nicht unmittelbar die Beschreibung eines Erzeugers der Homologie.

*Übung 2.3.21 (Relative Mayer-Vietoris-Sequenz).* Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $U, V \subseteq X$  zwei offene Teilmengen. Betrachten wir die offene Überdeckung von  $U \cup V$  durch  $U$  und  $V$  und bilden das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S(U \cap V) & \hookrightarrow & SU \oplus SV & \twoheadrightarrow & S^{\vee}(U \cup V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ SX & \hookrightarrow & SX \oplus SX & \twoheadrightarrow & SX \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(X, U \cap V) & \hookrightarrow & S(X, U) \oplus S(X, V) & \twoheadrightarrow & S(X)/S^{\vee}(U \cup V) \end{array}$$

mit "diagonalen" Abbildungen in den linken Horizontalen und "Differenzen von erstem minus zweitem Term" in den rechten Horizontalen, so entsteht in der unteren Zeile eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Die natürliche Surjektion  $S(X)/S^{\vee}(U \cup V) \twoheadrightarrow S(X, U \cup V)$  induziert weiter Isomorphismen auf der Homologie, und so erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_q(X, U) \oplus H_q(X, V) \rightarrow H_q(X, U \cup V) \rightarrow H_{q-1}(X, U \cap V) \rightarrow \dots$$

und die Randoperatoren dieser Sequenz bilden mit den Randoperatoren der Mayer-Vietoris-Sequenz und den Randoperatoren der langen exakten Homologiesequenzen nach 2.2.12 ein bis auf Vorzeichen kommutierendes Viereck.

*Ergänzende Übung 2.3.22.* Sei  $(X, A)$  ein Raumpaars. Bezeichne  $X/A$  den Raum mit Quotiententopologie, der entsteht, wenn man  $A$  zu einem Punkt identifiziert. Man zeige: Gibt es  $U$  mit  $A \subset U \subset X$  derart, daß die Einbettungen  $A \hookrightarrow U$  und  $A/A \hookrightarrow U/A$  Homotopieäquivalenzen sind, so liefert die offensichtliche Abbildung Isomorphismen

$$H_q(X, A) \xrightarrow{\sim} H_q(X/A, A/A)$$

## 2.4 Homologie von Simplizialkomplexen

**Definition 2.4.1.** Seien  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex und  $\Delta(\mathcal{K})$  der zugehörige Polyeder. Im Komplex  $S\Delta(\mathcal{K})$  der singulären Ketten unseres Polyeders betrachten wir den Unterkomplex

$$S^s\Delta(\mathcal{K})$$

aller **simplizialen Ketten**, wo  $S_q^s\Delta(\mathcal{K}) \subset S_q\Delta(\mathcal{K})$  definiert ist als das Erzeugnis aller im Sinne von I.3.4.10 simplizialen Abbildungen  $\Delta_q \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$ . Derartige simpliziale Abbildungen brauchen keineswegs injektiv zu sein, zum Beispiel ist die konstante Abbildung eines Standardsimplex auf eine Ecke durchaus auch simplizial.

2.4.2. Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex. Die Gruppenhomomorphismen  $S_q^s\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S_q\mathcal{K}$  von den simplizialen Ketten in die Simplizialketten, die auf injektiven simplizialen Abbildungen  $\Delta_q \hookrightarrow \Delta(\mathcal{K})$  in der offensichtlichen Weise erklärt sind und auf nichtinjektiven simplizialen Abbildungen  $\Delta_q \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$  den Wert Null annehmen, definieren eine Kettenabbildung  $S^s\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S\mathcal{K}$ . Um das zu sehen, muß man nur die Verträglichkeit mit den Randoperatoren nachzuweisen. Das ist nicht weiter schwierig und sei dem Leser überlassen.

**Satz 2.4.3 (Simpliziale als singuläre Homologie).** *Für jeden Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  induzieren die Kettenabbildung aus 2.4.2 von den simplizialen Ketten in die Simplizialketten sowie die Einbettung von den simplizialen Ketten in die singulären Ketten  $S\mathcal{K} \leftarrow S^s\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S\Delta(\mathcal{K})$  Isomorphismen auf allen Homologiegruppen*

$$H_q\mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}_q(S^s\Delta(\mathcal{K})) \xrightarrow{\sim} H_q(\Delta(\mathcal{K}))$$

*Ergänzung 2.4.4.* Aus 4.6.3 und 2.4.2 wird im übrigen sogar folgen, daß die fraglichen Kettenabbildungen sämtlich Homotopieäquivalenzen sind.

*Beweis.* Wir wählen eine Anordnung  $\leq$  der Menge  $E$  der Ecken von  $\mathcal{K}$ , was nach ?? stets möglich ist. Diese Wahl liefert uns auch eine Anordnung auf jedem Simplex, die wir verwenden, um jedem Simplex  $s \in \mathcal{K}_q$  denjenigen angeordneten Simplex  $\langle s \rangle = \langle s \rangle^\leq \in \mathcal{K}_q^\leq$ ,  $\langle s \rangle : \{0, \dots, q\} \hookrightarrow E$  zuzuordnen, der Bild  $s$  hat und streng monoton wächst. Zu jedem angeordneten Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}_q^\leq$  definieren wir dann weiter in  $S_q^s\Delta(\mathcal{K})$  den simplizialen  $q$ -Simplex

$$\sigma = [\sigma(0), \dots, \sigma(q)] : \Delta_q \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$$

durch die Vorschrift  $(x_0, \dots, x_q) \mapsto x_0\widetilde{\sigma(0)} + \dots + x_q\widetilde{\sigma(q)}$  in den Notationen aus I.3.4.7 und machen in der Notation keinen Unterschied zwischen einem

angeordneten Simplex und der zugehörigen simplizialen Kette. Insbesondere ist für jeden  $q$ -Simplex  $s \in \mathcal{K}_q$  also  $\langle s \rangle$  ein Homöomorphismus  $\Delta_q \xrightarrow{\sim} \Delta(s)$ . Die von allen  $\langle s \rangle$  mit  $s \in \mathcal{K}_q$  erzeugte Untergruppe von  $S_q^s \Delta(\mathcal{K})$  notieren wir

$$S_q^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$$

und nennen sie die Gruppe der **ordnungsverträglichen simplizialen  $q$ -Ketten von  $\mathcal{K}$** . Offensichtlich bilden die ordnungsverträglichen simplizialen Ketten einen Unterkomplex  $S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) \subset S^s \Delta(\mathcal{K})$  im Komplex aller simplizialen Ketten von  $\Delta(\mathcal{K})$ , und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S\mathcal{K} & \leftarrow & S^s \Delta(\mathcal{K}) & \hookrightarrow & S\Delta(\mathcal{K}) \\ & \swarrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

Der schräge Pfeil nach links oben ist offensichtlich ein Isomorphismus von Kettenkomplexen. Nun zeigen wir in den anschließenden Propositionen 2.4.5 und 2.4.7, daß die beiden anderen Pfeile nach oben beide Isomorphismen auf der Homologie induzieren. Daraus folgt dann der Satz.  $\square$

**Proposition 2.4.5.** *Für jede Anordnung der Ecken eines Simplizialkomplexes  $\mathcal{K}$  liefert die Einbettung  $S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S\Delta(\mathcal{K})$  der ordnungsverträglichen simplizialen Ketten in alle singulären Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

*Beweis.* Wir schreiben kurz  $\Delta(\mathcal{K}) = X$  und setzen für  $k \in \mathbb{Z}$

$$X_k = \bigcup_{s \in \mathcal{K}_q, q \leq k} \Delta(s)$$

Dieser Raum heißt das  **$k$ -Skelett** von  $\mathcal{K}$ . Nun betrachten wir für alle  $k$  das folgende kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit kurzen exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} S^{\text{os}} X_k & \hookrightarrow & S^{\text{os}} X_{k+1} & \twoheadrightarrow & S^{\text{os}} X_{k+1} / S^{\text{os}} X_k & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ S X_k & \hookrightarrow & S X_{k+1} & \twoheadrightarrow & S X_{k+1} / S X_k & & \end{array}$$

Das zugehörige Diagramm von langen exakten Homologiesequenzen schreiben wir

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H_{q+1}^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) & \rightarrow & H_q^{\text{os}} X_k & \rightarrow & H_q^{\text{os}} X_{k+1} & \rightarrow & H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dots & H_{q+1}(X_{k+1}, X_k) & \rightarrow & H_q X_k & \rightarrow & H_q X_{k+1} & \rightarrow & H_q(X_{k+1}, X_k) & \dots \end{array}$$

und werden nun durch Induktion über  $k$  zeigen, daß  $H_q^{\text{os}} X_k \rightarrow H_q X_k$  ein Isomorphismus ist für alle  $k$  und  $q$ . Für  $k < 0$  ist das klar. Im anschließenden Lemma 2.4.6 werden wir zeigen, daß  $H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) \rightarrow H_q(X_{k+1}, X_k)$  ein Isomorphismus ist für alle  $q$  und alle  $k$ . Der Induktionsschritt besteht dann im Anwenden des Fünferlemmas, und unter der Zusatzannahme  $X = X_k$  für  $k \gg 0$  ist unser Satz damit bereits bewiesen. Im allgemeinen bemerken wir zusätzlich, daß nach 1.3.4.15 jede singuläre Kette von  $X$  schon in einem  $X_k$  liegt, und überlassen den Rest des Beweises dem Leser zur Übung. Später wird er den Beweis auch mithilfe des Satzes über die Exaktheit filtrierender Kolimites 5.1.28 direkt beenden können.  $\square$

**Lemma 2.4.6.** *Die offensichtlichen Abbildungen auf den relativen Ketten liefern Isomorphismen  $H_q^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k) \xrightarrow{\sim} H_q(X_{k+1}, X_k)$ .*

*Beweis.* Die linke Seite ist hier die Homologie eines Komplexes, der nur im Grad  $k+1$  lebt. Genauer ist  $H_{k+1}^{\text{os}}(X_{k+1}, X_k)$  frei erzeugt von den Nebenklassen der ordnungstretäglichen simplizialen Ketten  $\langle s \rangle$  für  $s \in \mathcal{K}_{k+1}$ , und bei  $q \neq k+1$  verschwindet unser Komplex mitsamt seiner Homologie. Wir untersuchen nun die rechte Seite  $H_q(X_{k+1}, X_k)$  und betrachten dazu das ‘‘verdickte  $k$ -Skelett’’  $U_k \subset X_{k+1}$ , das wir erhalten, indem wir aus  $X_{k+1}$  die Schwerpunkte aller  $(k+1)$ -Simplizes entfernen. Die beiden Einbettungen

$$(X_{k+1}, X_k) \hookrightarrow (X_{k+1}, U_k) \hookrightarrow (X_{k+1} \setminus X_k, U_k \setminus X_k)$$

induzieren Isomorphismen auf der relativen Homologie: Die Linke nach 2.2.4 und 1.4.1, da  $X_k \hookrightarrow U_k$  eine Homotopieäquivalenz ist und die Rechte mit Ausschneidung des  $k$ -Skeletts  $X_k$ . Das Raumpaars rechts ist aber schlicht die disjunkte unzusammenhängende Vereinigung über alle  $(k+1)$ -Simplizes  $s \in \mathcal{K}_{k+1}$  der Raumpaare  $(\Delta^\circ(s), \Delta^\circ(s) \setminus b(s))$ , wo wir  $\Delta^\circ(s)$  für den ‘‘offenen’’ Simplex schreiben und mit  $b(s) = \frac{1}{k+1}(p_0 + \dots + p_k)$  den Schwerpunkt von  $\Delta(s)$  bezeichnen. Zusammenfassend erhalten wir also mit den offensichtlichen Abbildungen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(X_{k+1}, U_k) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_s H_q(\Delta^\circ(s), \Delta^\circ(s) \setminus b(s)) \\ \parallel & & \downarrow \wr \\ H_q(X_{k+1}, U_k) & \leftarrow & \bigoplus_s H_q(\Delta(s), \Delta(s) \setminus b(s)) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ H_q(X_{k+1}, X_k) & \leftarrow & \bigoplus_s H_q(\Delta(s), \partial\Delta(s)) \end{array}$$

wo die Summen jeweils über alle  $(k+1)$ -Simplizes  $s \in \mathcal{K}_{k+1}$  laufen und wir mit  $\partial\Delta(s)$  ähnlich wie in 2.3.3 das  $k$ -Skelett von  $\Delta(s)$  bezeichnen. Die mit  $\sim$  bezeichneten Pfeile darin sind offensichtlich Isomorphismen, und die übrigen Pfeile folglich auch. Nach 2.3.3 wissen wir aber, daß  $H_q(\Delta(s), \partial\Delta(s))$

verschwindet für  $q \neq k + 1$  und daß es für  $q = k + 1$  frei ist vom Rang 1 und erzeugt wird von der Klasse von  $\langle s \rangle$ . Das zeigt das Lemma.  $\square$

**Proposition 2.4.7.** *Für jede Anordnung der Ecken eines Simplicialkomplexes  $\mathcal{K}$  liefert die Einbettung  $S^{\text{os}}\Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S^s\Delta(\mathcal{K})$  der ordnungsverträglichen simplicialen Ketten in alle simplicialen Ketten Isomorphismen auf allen Homologiegruppen.*

*Beweis.* Den Fall, daß unser Simplicialkomplex nur aus einem Simplex besteht, erledigen 1.1.9 und das anschließende Lemma 2.4.8. Den Fall, daß unser Simplicialkomplex endlich ist, folgern wir induktiv: Bezeichne in der Tat  $H_q^s\mathcal{K} = \mathcal{H}_q(S^s\Delta(\mathcal{K}))$  die Homologie des Komplexes der simplicialen Ketten im Polyeder eines Simplicialkomplexes  $\mathcal{K}$ . Ist  $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$  eine Darstellung unseres Simplicialkomplexes als Vereinigung zweier Unterkomplexe, so liefert der Beweis der Mayer-Vietoris-Sequenz auch in dieser Situation Mayer-Vietoris-Sequenzen für  $H^{\text{os}}$  und  $H^s$ . Mit dem Fünferlemma und Induktion über die Zahl der Simplexe unseres Simplicialkomplexes sehen wir so, daß die Proposition für endliche Simplicialkomplexe folgt, sobald wir sie für Simplexe kennen. Der Fall beliebiger Simplicialkomplexe hinwiederum folgt aus dem Fall endlicher Simplicialkomplexe mit etwas Nachdenken oder formal mit der Exaktheit filtrierender Kolimites 5.1.28.  $\square$

**Lemma 2.4.8.** *Für jede nichtleere Menge  $E$  ist der Komplex von freien abelschen Gruppen  $0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}E \leftarrow \mathbb{Z}E^2 \leftarrow \mathbb{Z}E^3 \leftarrow \dots$  exakt, wo der Randoperator gegeben wird durch*

$$\partial(v_0, \dots, v_q) = \sum (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q)$$

2.4.9. Dieser Komplex ist kanonisch isomorph zu dem um die Augmentation nach  $\mathbb{Z}$  erweiterten Komplex der simplicialen Ketten  $S^s\Delta(E)$  des Simplex  $\Delta(E)$  mit Ecken  $E$ .

*Beweis.* Halten wir eine Ecke  $v \in E$  fest und definieren  $\delta : \mathbb{Z}E^q \rightarrow \mathbb{Z}E^{q+1}$  durch die Vorschrift  $\delta(v_0, \dots, v_q) = (v, v_0, \dots, v_q)$ , so prüft man leicht an jeder Stelle  $\partial\delta + \delta\partial = \text{id}$ . Also ist unser Komplex sogar nullhomotop.  $\square$

**Korollar 2.4.10.** *Ist  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex, so benötigt man höchstens  $|\mathcal{K}_q|$  Erzeuger für die Gruppe  $H_q(\Delta(\mathcal{K}))$ .*

*Beweis.* Hierzu braucht man außer 2.4.3 nur noch die Erkenntnis ??, daß man für eine Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe höchstens soviel Erzeuger benötigt wie für die ursprüngliche Gruppe.  $\square$

*Ergänzung 2.4.11.* Wenn wir Homologie mit Koeffizienten betrachten wie in 1.2.9, so bleiben alle bisherigen Resultate und Beweise mit den hoffentlich offensichtlichen Modifikationen gültig, insbesondere auch Satz 2.4.3 über die Beziehung zwischen singulärer und simplizialer Homologie.

**Definition 2.4.12.** Für einen beliebigen topologischen Raum  $X$  setzt man

$$b_q(X) := \dim_{\mathbb{Q}} H_q(X; \mathbb{Q}) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

und nennt diese Zahl die  $q$ -te **Betti-Zahl** von  $X$ . Sind alle Betti-Zahlen endlich und verschwinden sie für  $q \gg 0$ , so heißt ihre alternierende Summe

$$\chi(X) = \sum (-1)^q b_q(X) \in \mathbb{Z}$$

die **Euler-Charakteristik** von  $X$  und wir sagen, unser Raum “habe eine wohldefinierte Eulercharakteristik”.

2.4.13. Wir haben  $\chi(X) = |X|$  für einen endlichen diskreten Raum mit  $|X|$  Punkten. Es ist auch für allgemeinere Räume oft sinnvoll,  $\chi(X)$  als eine Verallgemeinerung der “Zahl der Punkte von  $X$ ” aufzufassen. Eine mögliche Begründung wird in 2.4.20 skizziert, eine weitere in 3.6.1 in Gestalt der Formel  $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ . Wir schreiben bei einem beliebigen Körper

$$\chi(X; k) = \sum (-1)^q \dim_k H_q(X; k)$$

wann immer dieser Ausdruck sinnvoll ist, d.h. alle Summanden endlich sind und fast alle Summanden verschwinden.

**Korollar 2.4.14 (Eulercharakteristik von Simplizialkomplexen).** *Die Eulercharakteristik des Polyeders eines endlichen Simplizialkomplexes  $\mathcal{K}$  wird für jeden Körper  $k$  gegeben durch die der Zahl der Simplizes gerader Dimension abzüglich der Zahl der Simplizes ungerader Dimension, in Formeln*

$$\chi(\Delta(\mathcal{K}); k) = \sum (-1)^q |\mathcal{K}_q|$$

*Beweis.* Wir wenden das anschließende Lemma 2.4.15 an auf den Komplex  $S(\mathcal{K}; k)$  der Simplizialketten mit Koeffizienten in  $k$ , dessen Homologie ja nach 2.4.3 genau die Homologie von  $\Delta(\mathcal{K})$  mit Koeffizienten in  $k$  ist.  $\square$

**Lemma 2.4.15.** *Ist  $A$  ein Komplex endlichdimensionaler  $k$ -Vektorräume und verschwinden von den  $A_i$  alle bis auf endlich viele, so gilt*

$$\sum (-1)^i \dim_k A_i = \sum (-1)^i \dim_k \mathcal{H}_i A$$

2.4.16. Man nennt die linke Seite hier auch die **Eulercharakteristik** des Kettenkomplexes  $A$  und die Gleichung besagt dann, daß ein Kettenkomplex dieselbe Eulercharakteristik hat wie seine Homologie.

*Beweis.* Das folgt sofort aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\dim A_i &= \dim(\ker \partial_i) + \dim(\operatorname{im} \partial_i) \\ \dim \mathcal{H}_i A &= \dim(\ker \partial_i) - \dim(\operatorname{im} \partial_{i+1})\end{aligned}\quad \square$$

**Korollar 2.4.17 (Euler'scher Polyedersatz).** *Ist  $\Delta(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} S^2$  eine Triangulierung der Kugelschale, so gilt  $|\mathcal{F}_0| - |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = 2$ , in Worten*

$$|\text{Ecken}| - |\text{Kanten}| + |\text{Flächen}| = 2$$

2.4.18. Dies Resultat von Euler, ein Vorläufer der Homologietheorie, hat der Euler-Charakteristik ihren Namen gegeben. Man folgert es auch allgemeiner für in geeigneter Weise definierte "polyedrische" Zerlegungen der Kugelschale wie sie etwa die platonischen Körper liefern, indem man derartige polyedrische Zerlegungen zu Triangulierungen verfeinert. Zum Beispiel hat ein Würfel 6 Flächen, 12 Kanten und 8 Ecken, und in der Tat gilt  $6 - 12 + 8 = 2$ .

*Übung 2.4.19.* Man bestimme die Eulercharakteristik des Torus  $S^1 \times S^1$ .

*Übung 2.4.20.* Ein topologischer Raum  $X$  werde von zwei offenen Teilmengen überdeckt,  $X = U \cup V$ , und beide sowie ihr Schnitt mögen im Sinne von 2.4.12 eine wohldefinierte Eulercharakteristik besitzen. Man zeige, daß dann auch der ursprüngliche Raum eine wohldefinierte Eulercharakteristik besitzt und daß gilt

$$\chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$$

**Lemma 2.4.21.** *Ist  $A$  ein Komplex endlichdimensionaler  $k$ -Vektorräume und  $\varphi : A \rightarrow A$  ein Homomorphismus von Komplexen und verschwinden von den  $A_i$  alle bis auf endlich viele, so gilt für die Spuren*

$$\sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi|A_i) = \sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi|\mathcal{H}_i A)$$

2.4.22. Der Übersichtlichkeit halber haben wir die von  $\varphi$  auf den  $A_i$  und den  $\mathcal{H}_i A$  induzierten Abbildungen auch kurzerhand  $\varphi$  notiert. Ist  $\varphi$  die Identität, so erhalten wir zumindest im Fall eines Körpers  $k$  der Charakteristik Null unser Lemma 2.4.15 als Spezialfall.

*Beweis.* Das folgt sofort aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\varphi|A_i) &= \operatorname{tr}(\varphi| \ker \partial_i) + \operatorname{tr}(\varphi| \operatorname{im} \partial_i) \\ \operatorname{tr}(\varphi|\mathcal{H}_i A) &= \operatorname{tr}(\varphi| \ker \partial_i) - \operatorname{tr}(\varphi| \operatorname{im} \partial_{i+1})\end{aligned}$$

die man hinwiederum aus der Additivität der Spur ?? folgert. □

**Satz 2.4.23 (Simplizialer Fixpunktsatz).** Sei  $\varphi : (E, \mathcal{K}) \rightarrow (E, \mathcal{K})$  eine simpliziale Selbstabbildung eines endlichen Simplizialkomplexes mit  $\varphi(s) \neq s$  für alle Simplizes mit mindestens zwei Ecken. So gilt für die Zahl der Fixpunkte von  $\varphi$  die Formel

$$|E^\varphi| = \sum (-1)^i \operatorname{tr}(H_i \varphi | H_i \mathcal{K})$$

*Beweis.* Beide Seiten stimmen aufgrund von Lemma 2.4.21 und aufgrund unserer Annahmen überein mit  $\sum (-1)^i \operatorname{tr}(S_i \varphi | S_i \mathcal{K})$   $\square$

Jetzt sollte simpliziale Approximationen diskutieren und zeigen, daß stetige Selbstabbildungen der Sphären  $S^n$  mit von  $-(-1)^n$  verschiedenem Abbildungsgrad stets einen Fixpunkt haben.

## 2.5 Endlichkeitsaussagen für Mannigfaltigkeiten

**Satz 2.5.1 (Wilder).** Die Homologiegruppen von kompakten Mannigfaltigkeiten sind stets endlich erzeugt. Ist allgemeiner  $X$  eine Mannigfaltigkeit und  $K \subset X$  eine kompakte Teilmenge, so ist das Bild von  $H_n K \rightarrow H_n X$  endlich erzeugt für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Ergänzung 2.5.2.* Der Satz gilt mit demselben Beweis auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand und für Homologie mit Koeffizienten in einem beliebigen noetherschen Ring.

*Beweis.* Per Induktion über  $n$  mithilfe des anschließenden Lemmas.  $\square$

**Lemma 2.5.3.** Sei  $X$  ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und  $n \geq 0$  eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß gilt:

1. Für jedes Paar  $M \subset W$  von Teilmengen von  $X$  mit  $M$  kompakt und  $W$  offen in  $X$  ist das Bild von  $H_{n-1} M \rightarrow H_{n-1} W$  endlich erzeugt;
2. Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine Umgebung mit endlich erzeugter  $n$ -ter Homologie.

So ist  $\operatorname{im}(H_n K \rightarrow H_n X)$  endlich erzeugt für jedes Kompaktum  $K \subset X$ .

*Beweis.* Wir betrachten in der Potenzmenge von  $X$  die Teilmenge

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_n = \left\{ K \subset X \mid \begin{array}{l} K \text{ ist kompakt und besitzt eine offene} \\ \text{Umgebung } U \Subset X \text{ derart, daß das Bild} \\ \text{von } H_n U \rightarrow H_n X \text{ endlich erzeugt ist} \end{array} \right\}$$



Nach unseren Annahmen besitzt jeder Punkt von  $X$  eine Umgebung aus  $\mathcal{E}$ . Aus  $K \in \mathcal{E}$  und  $L \supset K$  folgt ohne Schwierigkeiten  $L \in \mathcal{E}$ . Können wir zeigen, daß mit zwei Kompakta  $L$  und  $K$  stets auch ihre Vereinigung zu  $\mathcal{E}$  gehört, so gehört offensichtlich jede kompakte Teilmenge von  $X$  zu  $\mathcal{E}$  und wir sind fertig. Seien also  $K, L \in \mathcal{E}$  und  $U, V \subseteq X$  offen mit  $K \subset U$  und  $L \subset V$  und  $\text{im}(H_n U \rightarrow H_n X)$  und  $\text{im}(H_n V \rightarrow H_n X)$  endlich erzeugt. Da  $X$  nach Voraussetzung lokal kompakt ist, finden wir sicher auch  $U_1 \subseteq U, V_1 \subseteq V$  mit  $K \subset U_1 \subset \bar{U}_1 \subset U$  und  $L \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V$  und  $\bar{U}_1, \bar{V}_1$  kompakt. Dann betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(U_1 \cup V_1) & \rightarrow & H_{n-1}(U_1 \cap V_1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_n U \oplus H_n V & \rightarrow & H_n(U \cup V) & \rightarrow & H_{n-1}(U \cap V) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 H_n X \oplus H_n X & \rightarrow & H_n X & & 
 \end{array}$$

Das Bild der linken Vertikale ist endlich erzeugt nach Wahl von  $U$  und  $V$ . Das Bild der rechten Vertikalen ist endlich erzeugt nach Annahme 1, angewandt auf  $M = \bar{U}_1 \cap \bar{V}_1$  und  $W = U \cap V$ . Die mittlere Horizontale ist exakt als Teil einer Mayer-Vietoris-Sequenz. Dann muß aber nach dem anschließenden Lemma auch das Bild der Komposition in der mittleren Vertikalen endlich erzeugt sein und es folgt  $L \cup K \in \mathcal{E}$ .  $\square$

**Lemma 2.5.4.** *Sei gegeben ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & \rightarrow & B \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 C & \rightarrow & D & \rightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 F & \rightarrow & G & & 
 \end{array}$$

*Ist das Bild der beiden äußeren Vertikalen  $CF$  und  $BE$  endlich erzeugt und ist die mittlere Horizontale exakt bei  $D$ , so ist auch das Bild der Komposition  $AG$  in der mittleren Vertikalen endlich erzeugt.*

*Beweis.* Dem Leser überlassen.  $\square$

## 2.6 Variationen zur simplizialen Homologie\*

2.6.1. Will man explizite Rechnungen durchführen, so ist es oft hilfreich, mit einem etwas allgemeineren Begriff von Triangulierung zu arbeiten, bei dem man weniger Simplexe benötigt. Auch für theoretische Überlegungen sind die im folgenden erklärten Begriffsbildungen oft nützlich, wir werden uns bei der weiteren Entwicklung der Homologietheorie jedoch nicht darauf stützen.

**Definition 2.6.2.** Gegeben  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne  $[n]$  die Menge

$$[n] = \{0, 1, \dots, n\}$$

Bezeichne  $\Delta^<$  die Kategorie mit Objekten  $[n]$  für  $n \in \mathbb{N}$  und streng monoton wachsenden Abbildungen als Morphismen und  ${}^<\Delta := (\Delta^<)^{\text{opp}}$  ihre opponierte Kategorie. Eine **semisimpliziale Menge**  $X$ , bei Hatcher [?] auch  **$\Delta$ -Komplex** genannt, ist ein kontravarianter Funktor  $X$  von der Kategorie  $\Delta^<$  in die Kategorie der Mengen, in Formeln

$$X : {}^<\Delta \rightarrow \text{Ens}$$

Gegeben eine semisimpliziale Menge  $X$  bilden wir den zugehörigen topologischen Raum

$$\Delta(X) = \left( \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X[n] \times \Delta_n \right) / \sim$$

wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  erzeugt wird durch die Bedingungen


$$((Xb)(x), t) \sim (x, (\Delta b)(t)) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, b : [n] \rightarrow [m], x \in X[m], t \in \Delta_n$$

und wir  $(Xb) : X[m] \rightarrow X[n]$  die zu  $b$  gehörige Abbildung von Mengen notieren sowie  $(\Delta b) : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$  die durch  $b$  induzierte Abbildung zwischen den entsprechenden Standardsimplizes.

*Ergänzung 2.6.3.* Jede Transformation  $X \rightarrow Y$  von Funktoren im Sinne einer Sammlung von verträglichen Abbildungen  $X[n] \rightarrow Y[n]$  liefert eine stetige Abbildung  $\Delta(X) \rightarrow \Delta(Y)$ . Wir erhalten so aber nur Abbildungen, die auf dem Inneren aller Simplizes injektiv sind. Größere Flexibilität, allerdings um den Preis geringerer Anschaulichkeit, bieten die sogenannten **simplizialen Mengen**, d.h. Funktoren

$$\leq\Delta \rightarrow \text{Ens}$$

wo  $\Delta^{\leq}$  die Kategorie mit Objekten  $[n]$  für  $n \in \mathbb{N}$  bezeichnet, diesmal mit beliebigen monoton wachsenden Abbildungen als Morphismen, und analog wie zuvor  $\leq\Delta := (\Delta^{\leq})^{\text{opp}}$  deren opponierte Kategorie. Wir diskutieren sie noch etwas im Anschluß. Was man heute eine simpliziale Menge nennt, hieß früher eine **vollständige semisimpliziale Menge**, und manche Autoren, etwa [?], lassen dann das Adjektiv “vollständig” auch schon mal weg und bezeichnen als “semisimpliziale Menge” das, wofür heutzutage die Bezeichnung als “simpliziale Menge” üblich ist.



SkriptenBilder/BildFacht.png

Anschaulich mag man bei einer semisimplizialen Menge  $X$  die Elemente der Menge  $X[0]$  als Punkte denken; die Elemente der Menge  $X[1]$  als Pfeile zwischen diesen Punkten, wobei auch Pfeile erlaubt sind, die beim selben Punkt beginnen und enden; die Elemente der Menge  $X[2]$  als Häute, die zwischen "Dreiecken aus Pfeilen eingespannt sind", wobei es eben auch erlaubt ist, daß in dasselbe Dreieck mehrere Häute eingespannt werden, als Dreiecke gewisse geordnete Tripel von Pfeilen zu verstehen sind, und im Fall "entarteter Dreiecke" jede Haut zusätzlich erinnern muß, "in welcher Reihenfolge sie ihre Randpfeile denkt". Besteht  $X[0]$  aus einem Element und  $X[1]$  aus zweien und alle anderen  $X[n]$  sind leer, so ist  $\Delta(X)$  eine Acht, dargestellt als zwei 1-Simplizes, bei denen man alle vier Endpunkte identifiziert hat.

*Beispiel 2.6.4.* Gegeben ein Simplicialkomplex  $(E, \mathcal{K})$  mit einer Anordnung seiner Eckenmenge können wir einen semisimpliziale Menge  $X$  bilden, indem wir als  $X[n]$  alle streng monoton wachsenden Abbildungen  $[n] \rightarrow E$  nehmen, deren Bild in  $\mathcal{K}_n$  liegt, und jeder streng monotonen Abbildung  $b: [m] \rightarrow [n]$  die durch das Vorschalten von  $b$  gegebene Abbildung  $X(b) = (\circ b): X[n] \rightarrow X[m]$ . Es reicht hier sogar, eine partielle Ordnung der Eckenmenge vorzugeben, die auf jedem Simplex eine Anordnung induziert. Wir erhalten dann Bijektionen  $X[n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_n$  und einen Homöomorphismus  $\Delta(X) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$ .

*Beispiel 2.6.5.* Eine semisimpliziale Menge  $X$  mit  $X[n] = \emptyset$  für  $n \geq 2$  ist “dasselbe” wie ein Köcher im Sinne von III.4.1.1.

*Beispiel 2.6.6.* Betrachten wir die semisimpliziale Menge  $X$  eines 2-Simplex im Sinne des vorhergehenden Beispiels und “verdoppeln darin  $X[2]$  zu einer zweielementigen Menge”, so erhalten wir eine semisimpliziale Menge  $Y$ , deren topologischer Raum  $\Delta(Y)$  aus zwei längs ihres Randes verklebten Dreiecksflächen besteht, in Formeln  $\Delta(Y) \cong S^2$ .

*Übung 2.6.7.* Man gebe eine semisimpliziale Menge mit zwei 2-Simplizes, vier 1-Simplizes und zwei 0-Simplizes an, dessen zugehöriger topologischer Raum das Möbiusband ist.

**Lemma 2.6.8.** *Bezeichnet  $\Delta_n^\circ = \Delta_n \setminus \partial\Delta_n$  das anschauliche Innere des Standardsimplex, so liefert für jede semisimpliziale Menge  $X$  die offensichtliche Abbildung eine Bijektion von Mengen*

$$\bigsqcup X[n] \times \Delta_n^\circ \xrightarrow{\sim} \Delta(X)$$

*Beweis.* Bezeichne  $X_k$  das  $k$ -Skelett von  $X$ , gegeben durch  $X_k[n] = X[n]$  für  $n \leq k$  und  $X_k[n] = \emptyset$  für  $n > k$ . Man zeigt das Lemma durch Induktion über  $k$  für alle  $X_k$  und folgert es dann für  $X$  selbst.  $\square$

**Satz 2.6.9 (Simpliziale gleich singuläre Homologie, Variante).** *Sei  $X$  eine semisimpliziale Menge. Für jedes  $x \in X[q]$  betrachten wir die Abbildung  $\Delta_q \rightarrow \Delta(X)$ ,  $t \mapsto (x, t) / \sim$ . Bezeichne  $S_q^{\text{os}}\Delta(X) \subset S_q\Delta(X)$  die von diesen Simplizes erzeugte Untergruppe. So induziert die Einbettung von Kettenkomplexen  $S_q^{\text{os}}\Delta(X) \hookrightarrow S_q\Delta(X)$  Isomorphismen auf der Homologie.*

*Beweis.* Mutatis mutandis identisch zum Beweis von 2.4.3 und dem Leser überlassen.  $\square$

*Ergänzung 2.6.10.* Simpliciale Mengen sind nur schwer explizit anzugeben. Fast gleichbedeutend können wir auch kontravariante Funktoren von der Kategorie aller nichtleeren endlichen angeordneten Mengen mit monoton wachsenden Abbildungen als Morphismen in die Kategorie der Mengen betrachten. Wir werden diese insbesondere für die kombinatorische Formulierung

der Homotopietheorie wichtige Begriffsbildung hier jedoch nicht weiter entwickeln. Eine bemerkenswerte Realisierung solch einer simplizialen Menge  $X$  gibt Drinfeld in [?]: Er erweitert  $X$  in der kanonischen Weise zu einem Funktor auf der Kategorie aller endlichen angeordneten Mengen, ordnet einem derartigen Funktor die Menge  $\varinjlim_F X(\pi_0([0, 1] \setminus F))$  zu, wo der Limes über alle endlichen Teilmengen  $F \subset [0, 1]$  läuft, und versieht diese Menge dann mit einer geeigneten Topologie.

*Ergänzung 2.6.11.* Gegeben eine semisimpliziale Menge  $X : \Delta^< \rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}}$  bilden wir eine simpliziale Menge  $\tilde{X} : \Delta^{\leq} \rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}}$  durch die Vorschrift

$$\tilde{X}[n] = \bigsqcup_{l \geq 0} X[l] \times \{\lambda \in \Delta^{\leq}([n], [l]) \mid \lambda \text{ surjektiv}\}$$

und indem wir für  $\kappa : [m] \rightarrow [n]$  monoton die Abbildung  $\tilde{X}(\kappa) : \tilde{X}[n] \rightarrow \tilde{X}[m]$  dadurch erklären, daß sie dem Paar  $(x, \lambda)$  das Paar  $((X(\kappa_i))(x), \kappa_s \circ \lambda)$  zuordnet für die eindeutige Zerlegung  $\kappa = \kappa_i \circ \kappa_s$  in  $\Delta^{\leq}$  in eine Surjektion gefolgt von einer Injektion als  $[m] \twoheadrightarrow [a_\kappa] \hookrightarrow [n]$ .

*Ergänzung 2.6.12.* Auch jede Transformation  $X \rightarrow Y$  von simplizialen Mengen im Sinne einer Sammlung von verträglichen Abbildungen  $X[n] \rightarrow Y[n]$  liefert eine stetige Abbildung  $\Delta(X) \rightarrow \Delta(Y)$ . Wir erhalten nun auch etwa die konstante Abbildung auf einen Punkt. Gegeben zwei Transformationen  $Z \rightarrow X$  und  $Z \rightarrow Y$  können wir ihren Pushout  $X \sqcup_Z Y$  bilden durch die Vorschrift  $(X \sqcup_Z Y)[n] = X[n] \sqcup_{Z[n]} Y[n]$ . Man kann (?) zeigen, daß diesem Pushout auch ein Pushout topologischer Räume entspricht. Führen wir diese Konstruktion etwa mit  $Z \hookrightarrow X$  einem Unterfunktor und  $Y$  einem Punkt durch, so erhalten wir eine simpliziale Menge, deren zugehöriger Raum aus  $\Delta(X)$  entsteht durch die Identifikation des Teilraums  $\Delta(Z)$  zu einem Punkt.

2.6.13. Nach 5.1.10 können wir in analoger Weise zu jedem Funktor in die Kategorie der simplizialen Mengen den Kolimes bilden. Zum Beispiel kann jede semisimpliziale Menge als solch ein Funktor aufgefaßt werden, indem man jeden ihrer Simplex als simpliziale Menge versteht, und dann ist der Kolimes gerade die unserer semisimplizialen Menge zugeordnete simpliziale Menge aus 2.6.11.

*Ergänzung 2.6.14.* Wir sagen, eine simpliziale Menge  $X$  habe eine **Dimension**  $\leq k$  genau dann, wenn jeder Simplex aus einem Simplex von  $X[l]$  mit  $l \leq k$  hervorgeht unter einer monoton wachsenden Abbildung  $[n] \rightarrow [l]$ .

*Ergänzung 2.6.15.* Eine simpliziale Menge einer Dimension  $\leq 0$  ist im Wesentlichen eine endliche Menge, eben die Menge  $X[0]$ .

*Ergänzung 2.6.16.* Eine simpliziale Menge einer Dimension  $\leq 1$  ist im wesentlichen dasselbe wie ein “Diagrammschema” oder “Köcher” im Sinne von III.4.1.1.

*Ergänzung 2.6.17.* Eine simpliziale Menge einer Dimension  $\leq 2$  kann ähnlich als ein “Diagrammschema für 2-Kategorien” gelesen werden, wo bei einer Realisierung in einer 2-Kategorie jedem Element von  $X[2]$  ein 2-Morphismus zuzuordnen ist vom einkantigen Weg zur zweikantigen Komposition, und wo zu verstehen ist, daß den Pfeilen aus  $X[2]$ , die von  $X[1]$  herkommen, die 2-Identität zugeordnet werden soll.

*Ergänzung 2.6.18.* Eine simpliziale Menge  $X$  einer Dimension  $\leq 2$  kann auch als ein “Diagrammschema für 2-Kategorien” gelesen werden. Gegeben  $x \in X[n]$  und  $b : [m] \rightarrow [n]$  vereinbaren wir dazu für  $X(b) : X[n] \rightarrow X[m]$  die Notation

$$X(b) : x \mapsto x_{b(m), \dots, b(1), b(0)}$$

Eine Realisierung  $A$  eines derartigen Schemas in einer 2-Kategorie  $\mathcal{C}$  wäre in dieser Interpretation zu verstehen als eine Zuordnung, die

1. jedem Element  $x \in X[0]$  ein Objekt  $A(x)$  zuordnet;
2. jedem Element  $p \in X[1]$  einen Morphismus  $A(p) : A(p_0) \rightarrow A(p_1)$  derart, daß jedem ausgearteten Pfeil  $p = x_{0,0}$  die Identität auf  $A(x)$  zugeordnet wird;
3. jedem Element  $c \in X[2]$  einen 2-Morphismus  $A(c_{2,1})A(c_{1,0}) \Rightarrow A(c_{0,2})$  derart, daß jedem ausgearteten 2-Simplex  $c = p_{1,0,0}$  oder  $c = p_{1,1,0}$  der Identitäts-Zweimorphismus auf  $A(p)$  zugeordnet wird;


Fassen wir eine Kategorie als Zweikategorie auf, indem wir nur Identitäten als Zweimorphismen erlauben, so spezialisiert diese Interpretation zu einem Diagrammschema mit Kommutativitätsbedingungen. Die Assoziativität der Verknüpfung in einer Kategorie sorgt dafür, daß sich für den Tetraeder  $\Delta_3$  mit  $t = \text{id} : [3] \rightarrow [3]$  die Vorgabe von  $A(t_{1,0})$  und  $A(t_{2,1})$  und  $A(t_{3,2})$  stets eindeutig zu einer Realisierung des durch die simpliziale Menge  $\Delta_3$  gegebenen Diagramm-Schemas ergänzen läßt.

*Ergänzung 2.6.19.* Eine simpliziale Menge  $X$  einer Dimension  $\leq 3$  wird dann wohl analog als ein “Diagrammschema für 3-Kategorien” gelesen werden können. Jedenfalls kann man sie speziell als “Diagrammschema mit Kommutativitätsbedingungen für 2-Kategorien” lesen in der Weise, daß zusätzlich zu obigen Forderungen

4. für jedes Element  $t \in X[3]$  die Gleichheit

$$A(t_{3,2,0}) \circ A(t_{3,2})A(t_{2,1,0}) = A(t_{3,1,0}) \circ A(t_{3,2,1})A(t_{1,0})$$

von Kompositionen von Zweimorphismen erfüllt ist.



SkriptenBilder/BildDiS.png

Eine simpliziale Menge, entstehend aus dem im Bild dargestellten semisimplizialen Menge durch Identifikation der gestrichelten Kante zu einem Punkt. Eine Realisierung in einer Kategorie würde bedeuten, daß man an alle vier Ecken Objekte setzt und an alle vier Kanten Morphismen derart, daß die Verknüpfung “links oben beginnend einmal im Kreis herum” die Identität ist. Formal wäre das als Kolimes im Sinne von [2.6.13](#) zu verstehen.

2.6.20. Bezeichne schließlich  $\Delta$  die Kategorie mit Objekten  $[n]$  für  $n \in \mathbb{N}$  und beliebigen Abbildungen als Morphismen. Jeder topologische Raum  $X$  definiert einen Funktor

$$\underline{X} : \Delta \rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}}$$

vermittels  $\underline{X}[n] = \text{Top}(\Delta_n, X)$ , indem wir zu  $a : [n] \rightarrow [m]$  erst durch affine Fortsetzung der entsprechenden Abbildung auf den Ecken eine stetige Abbildung  $a : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$  konstruieren und dann durch Vorschalten  $\underline{X}[a] : \underline{X}[m] \rightarrow \underline{X}[n]$  bilden. Wir nennen  $\underline{X}$  den **Funktor der singulären Simplizes in  $X$** . Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  definiert durch Nachschalten eine Transformation  $f : \underline{X} \Rightarrow \underline{Y}$ . Vermittels der Einbettungen  $\Delta^< \hookrightarrow \Delta^{\leq} \hookrightarrow \Delta$  können wir den Funktor der singulären Simplizes in  $X$  zu einem semisimplizialen Komplex  $\underline{X}$  einschränken, dessen simpliziale Homologie dann genau die singuläre Homologie unseres ursprünglichen Raums  $X$  ist.

2.6.21. Eine merkwürdige weitere Variante ist die **zyklische Kategorie** von Connes. Ihre Objekte sind gewisse angeordnete Mengen mit einem ausgezeichneten Automorphismus, und zwar bezeichnet  $[n]$  nun die angeordnete Menge  $\mathbb{Z}$  mit dem Automorphismus

$$(n+1)+ : \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

Morphismen sind Klassen monotoner Abbildungen, die mit den jeweiligen Automorphismen verträglich sind, modulo dem Vor- oder Nachschalten der besagten Automorphismen. So gibt es etwa  $(n+1)$  Morphismen  $[0] \rightarrow [n]$  in der zyklischen Kategorie ebenso wie in  $\Delta^{\leq}$ , aber in der zyklischen Kategorie gibt es auch ebensoviele Morphismen in der Gegenrichtung.

## 2.7 Einbettungen von Sphären in Sphären

**Satz 2.7.1 (Jordan-Brouwer).** *Seien  $n, r \geq -1$  und sei  $s^r \subset S^n$  eine Teilmenge der  $n$ -Sphäre, die homöomorph ist zur  $r$ -Sphäre  $S^r$ . So haben wir:*

- $r > n$       *Unmöglich;*
- $r = n$       *Impliziert  $S^n = s^r$ ;*
- $r = n - 1$    *Dann hat  $S^n \setminus s^r$  genau zwei Zusammenhangskomponenten, und der Rand jeder dieser beiden Komponenten ist  $s^r$ ;*
- $r \leq n - 2$    *Dann ist  $S^n \setminus s^r$  zusammenhängend.*

2.7.2. Hier ist die  $(-1)$ -Sphäre wie in I.1.1 als die leere Menge zu verstehen. Im Rahmen der Garbentheorie werden wir in III.2.11.40 einen kürzeren Beweis für den zentralen Schritt 2.7.10 unserer Argumentation geben können. Der elementarere Beweis hier wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts



beschäftigen. Als Vorbereitung auf den Beweis beginnen wir mit einer Diskussion der sogenannten “reduzierten Homologie”. Diese Variante der Homologie hilft auch sonst oft, Sonderbetrachtungen im Grad Null zu vermeiden.

*Ergänzung 2.7.3.* Im Fall  $r = n - 1$  induziert für eine zweipunktige Teilmenge  $Z$  bestehend aus einem Punkt in jeder Komponente des Komplements  $S^n \setminus s^{n-1}$  die Einbettung  $s^{n-1} \hookrightarrow S^n \setminus Z$  einen Isomorphismus auf der Homologie. Im Fall  $n = 2$  folgt das etwa aus I.1.6.10, im allgemeinen zeigen wir es erst als Übung III.2.11.26.

**Definition 2.7.4.** Für jeden Raum  $X$  kann man den Komplex  $SX$  der singulären Ketten verlängern zu einem Komplex  $\tilde{S}X$  mit  $\tilde{S}_q X = S_q X$  für  $q \neq -1$  und  $\tilde{S}_{-1} X = \mathbb{Z}$ , wo  $\partial_0 : \tilde{S}_0 X \rightarrow \tilde{S}_{-1} X$  gegeben wird durch die sogenannte **Augmentation**  $\epsilon : \sum n_x x \mapsto \sum n_x$ . Offensichtlich erhalten wir so wieder einen Funktor  $\tilde{S} : \text{Top} \rightarrow \text{Ket}$  und definieren dann die **reduzierten Homologiegruppen** von  $X$  durch die Vorschrift

$$\tilde{H}_q(X) = \mathcal{H}_q(\tilde{S}X)$$

2.7.5. Diese Definition weicht im Fall  $X = \emptyset$  von der in der Literatur gebräuchlichen Konvention ab, bei der—so will mir scheinen—das Widerstreben gegenüber Homologie in negativen Graden die Oberhand gewonnen hat über das Streben nach Klarheit des Formalismus.

2.7.6. Für  $X \neq \emptyset$  gilt  $\tilde{H}_q(X) = 0$  für  $q < 0$ , für die leere Menge erhalten wir jedoch  $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$ . Gegeben eine abelsche Gruppe  $G$  bezeichne ganz allgemein  $G[q]$  den Komplex mit  $G$  im Grad  $q$  und Nullen sonst. Speziell meint also  $\mathbb{Z}[-1]$  den Kettenkomplex mit  $\mathbb{Z}$  im Grad  $-1$  und Nullen sonst. Wir haben eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen  $\mathbb{Z}[-1] \hookrightarrow \tilde{S}X \twoheadrightarrow SX$ . Mit der zugehörigen langen Homologiesequenz erhalten wir  $H_q X = \tilde{H}_q X$  für  $q > 0$  und im Fall  $X \neq \emptyset$  eine kurze exakte Sequenz  $\tilde{H}_0 X \hookrightarrow H_0 X \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ , mithin nach 2.2.11 und 2.2.9 einen allerdings nicht kanonischen Isomorphismus  $H_0 X \cong \tilde{H}_0 X \oplus \mathbb{Z}$ . Es gilt also  $\tilde{H}_0 X = 0$  genau dann, wenn  $X$  leer oder wegzusammenhängend ist, und die reduzierte Homologie von Sphären wird für alle  $n \geq -1$  gegeben durch

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = q; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.7.7. Für ein Raumpaar  $(X, A)$  folgt aus der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen  $\tilde{S}A \hookrightarrow \tilde{S}X \twoheadrightarrow \tilde{S}X/\tilde{S}A$  auch eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_q(A) \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

für Raumpaare in der reduzierten Homologie, wobei natürlich gilt  $\tilde{S}X/\tilde{S}A = SX/SA$  und folglich  $\tilde{H}_q(X, A) = H_q(X, A)$ . Für jeden Punkt  $p \in X$  erhalten wir so insbesondere einen kanonischen Isomorphismus  $\tilde{H}_q(X) \rightarrow H_q(X, p)$ . Homotope Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  induzieren auch auf der reduzierten Homologie dieselben Abbildungen: Um das zu sehen reicht es, unsere Kettenhomotopie  $Sf \simeq Sg$  durch Null auf  $\tilde{S}_{-1}X = \mathbb{Z}$  fortzusetzen. Die Mayer-Vietoris-Sequenz und ihr Beweis übertragen sich ebenso ohne Schwierigkeiten in die reduzierte Homologie. Der folgende Beweis ist eine erste Illustration für die Nützlichkeit der reduzierten Homologie.

**Proposition 2.7.8.** *Gegeben eine stetige Injektion eines Hyperkubus in eine Sphäre beliebiger Dimension verschwinden die reduzierten Homologiegruppen des Komplements des Bildes in allen Graden.*

*Beweis.* Sei also in Formeln  $r \geq 0$  und  $\varphi : [0, 1]^r \rightarrow S^n$  eine stetige Injektion mit Bild  $\text{im } \varphi = \varphi([0, 1]^r)$ . Unsere Proposition behauptet in Formeln  $\tilde{H}_q(S^n \setminus \text{im } \varphi) = 0$  für alle  $q$ . Als stetige Injektion von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum ist  $\varphi$  nach ?? ein Homöomorphismus auf sein Bild. Da  $S^n$  nie zusammenziehbar ist, folgt  $S^n \neq \text{im } \varphi$ . Wir können uns also auf  $q \geq 0$  beschränken. Dafür machen wir eine Induktion über  $r$  und geben dazu der Aussage der Proposition den Namen  $P(r)$ . Nach Konvention ist  $[0, 1]^0$  ein Punkt und  $S^n \setminus x$  ist zusammenziehbar, ja sogar homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  für alle  $x \in S^n$ . Das liefert unsere Induktionsbasis  $P(0)$ .

Sei nun  $P(r-1)$  bekannt, sei  $\varphi : [0, 1]^r \rightarrow S^n$  eine stetige Injektion und sei  $z \in \tilde{S}_q(S^n \setminus \text{im } \varphi)$  ein  $q$ -Zykel,  $q \geq 0$ . Es gilt zu zeigen, daß  $z$  ein Rand ist. Für  $I \subset [0, 1]$  setzen wir

$$U_I = S^n \setminus \varphi(I \times [0, 1]^{r-1})$$

und kürzen  $U_{\{t\}} = U_t$  ab. Nach unserer Induktionsannahme  $P(r-1)$  gibt es für alle  $t \in [0, 1]$  ein  $w_t \in S_{q+1}U_t$  mit  $\partial w_t = z$ . Mit Kompaktheitsargumenten folgt, daß sogar gilt  $w_t \in S_{q+1}U_B$  für eine geeignete Umgebung  $B$  von  $t$  in  $[0, 1]$ . Mit zusätzlichen Kompaktheitsargumenten gibt es dann eine Folge  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  derart, daß für alle  $i$  ein  $w_i \in S_{q+1}U_{[t_{i-1}, t_i]}$  existiert mit  $\partial w_i = z$ . Die Aussage  $P(r)$  folgt nun mit Induktion über  $i$ , wenn wir noch die anschließende Folgerung aus unserer Induktionsannahme  $P(r-1)$  bemerken.  $\square$

**Lemma 2.7.9.** *Sei  $r \geq 1$  und es gelte  $P(r-1)$ . Sei  $\varphi : [0, 1]^r \rightarrow S^n$  eine stetige Injektion. Seien  $0 \leq a < b < c \leq 1$ . Gegeben Ketten  $u \in S_{q+1}U_{[a,b]}$  und  $v \in S_{q+1}U_{[b,c]}$  mit  $\partial u = \partial v$  gibt es dann auch eine Kette  $w \in S_{q+1}U_{[a,c]}$  mit  $\partial w = \partial u = \partial v$ .*

*Beweis.* Sicher gilt

$$U_{[a,b]} \cup U_{[b,c]} = U_b \text{ und } U_{[a,b]} \cap U_{[b,c]} = U_{[a,c]}$$

Die Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie liefert uns nun

$$\tilde{H}_{q+1}U_b \rightarrow \tilde{H}_qU_{[a,c]} \rightarrow \tilde{H}_qU_{[a,b]} \oplus \tilde{H}_qU_{[b,c]} \rightarrow \tilde{H}_qU_b$$

Da hier das rechte und linke Ende verschwindet nach  $P(r-1)$ , steht in der Mitte ein Isomorphismus. Schreiben wir also  $\partial u = \partial v = z$ , so ist  $z$  ein Zykel in  $\tilde{S}_qU_{[a,c]}$ , der ein Rand wird in  $\tilde{S}_qU_{[a,b]} \oplus \tilde{S}_qU_{[b,c]}$ . Also muß  $z$  auch in  $\tilde{S}_qU_{[a,c]}$  bereits ein Rand gewesen sein.  $\square$

**Satz 2.7.10.** *Seien  $r, n \geq -1$  und sei  $s^r \subset S^n$  eine Teilmenge der  $n$ -Sphäre, die homöomorph ist zur  $r$ -Sphäre  $S^r$ . So gilt*

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus s^r) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - r - 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Wir machen wieder eine Induktion über  $r$ . Für  $r = -1$  ist die Aussage schon aus 2.7.6 bekannt. Ist nun  $r \geq 0$ , so schreiben wir  $s^r = s_+ \cup s_-$  als Vereinigung von zwei abgeschlossenen Hemisphären mit Schnitt  $s_+ \cap s_- = s^{r-1} \cong S^{r-1}$ . Wir wenden die reduzierte Mayer-Vietoris-Sequenz an auf  $X_{\pm} = S^n \setminus s_{\pm}$ , es ist also  $X_+ \cup X_- = S^n \setminus s^{r-1}$  und  $X_+ \cap X_- = S^n \setminus s^r$  und wir erhalten mit 2.7.8 Isomorphismen  $\tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus s^{r-1}) \cong \tilde{H}_q(S^n \setminus s^r)$ , also induktiv  $\tilde{H}_q(S^n \setminus s^r) \cong \tilde{H}_{q+r+1}(S^n \setminus s^{-1}) = \tilde{H}_{q+r+1}(S^n)$ .  $\square$

*Beweis von Jordan-Brouwer 2.7.1.* Der Fall  $r > n$  ist unmöglich, da  $\tilde{H}_q$  stets verschwindet für  $q < -1$ . Im Fall  $r = n$  haben wir  $S^n = s^r$ , denn  $\tilde{H}_{-1}(X) \neq 0$  bedeutet  $X = \emptyset$ . Im Fall  $r \leq n-2$  haben wir  $\tilde{H}_0(S^n \setminus s^r) = 0$  aber  $S^n \setminus s^r \neq \emptyset$ . Es folgt  $H_0(S^n \setminus s^r) \cong \mathbb{Z}$ , und damit hat  $S^n \setminus s^r$  nach 1.2.13 genau eine Wegzusammenhangskomponente, die auch die einzige Zusammenhangskomponente sein muß. Im Fall  $r = n-1$  haben wir  $\tilde{H}_0(S^n \setminus s^r) \cong \mathbb{Z}$ , also  $H_0(S^n \setminus s^r) \cong \mathbb{Z}^2$  und damit hat  $S^n \setminus s^r$  nach 1.2.13 genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Da bei einer offenen Teilmenge von  $S^n$  jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung hat, sind das auch die Zusammenhangskomponenten von  $S^n \setminus s^r$ . Jetzt müssen wir nur noch im Fall  $r = n-1$  zusätzlich zeigen, daß  $s^{n-1}$  im Abschluß jeder der beiden Zusammenhangskomponenten von  $S^n \setminus s^{n-1}$  liegt. Für jedes  $x \in s^{n-1}$  und eine beliebige offene Umgebung  $U$  von  $x$  in  $S^n$  finden wir eine Teilmenge  $A \subset s^{n-1}$  mit  $x \in A$  derart, daß gilt  $\bar{A} \subset U$  und  $s^{n-1} \setminus A \cong [0, 1]^{n-1}$ . Wir setzen  $s^{n-1} \setminus A = e$ . Nach 2.7.8 ist  $S^n \setminus e$  wegzusammenhängend. Verbinden wir nun zwei Punkte aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $S^n \setminus s^{n-1}$  in  $S^n \setminus e$  durch einen Weg  $\sigma$ , so

muß  $\sigma$  durch  $A$  laufen. Ist  $\sigma(t)$  bzw.  $\sigma(s)$  der erste bzw. letzte Punkt von  $\sigma$  in  $\bar{A}$ , so liegen für kleines  $\epsilon > 0$  notwendig  $\sigma(t - \epsilon)$ ,  $\sigma(s + \epsilon)$  in  $U$ , aber in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von  $S^n \setminus s^{n-1}$ . Jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  trifft also beide Komponenten von  $S^n \setminus s^{n-1}$ .  $\square$

**Korollar 2.7.11.** *Sei  $n \geq 2$  und sei  $s^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge, die homöomorph ist zur  $(n-1)$ -Sphäre  $S^{n-1}$ . So zerfällt ihr Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus s^{n-1}$  in zwei Zusammenhangskomponenten, deren Rand jeweils  $s^{n-1}$  ist.*

*Beweis.* Man fasse  $\mathbb{R}^n$  auf als das Komplement eines Punktes in  $S^n$ .  $\square$

2.7.12. Der Spezialfall  $n = 2$  des vorhergehenden Korollars heißt der **Jordan'sche Kurvensatz**. Er besagt grob gesprochen, daß jede geschlossene Kurve in der Ebene die Ebene in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt.

*Ergänzende Übung 2.7.13 (Invarianz von Gebieten).* Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  zwei Teilmengen, die homöomorph sind als topologische Räume. Man zeige: Ist  $U$  offen, so ist auch  $V$  offen. In der Funktionentheorie nennt man offene Teilmengen der komplexen Zahlenebene auch Gebiete, daher die Terminologie. Hinweis: Es reicht, wenn wir für jede Einbettung  $f : E \hookrightarrow S^n$  der abgeschlossenen Einheitskugel  $E \subset \mathbb{R}^n$  in die  $S^n$  zeigen, daß ihr Inneres  $E^\circ$  offenes Bild hat. Das Komplement des Bildes der Randsphäre  $f(\partial E)$  besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten  $W_1, W_2$  nach dem Satz von Jordan-Brouwer 2.7.1 und wir erhalten eine disjunkte Zerlegung in zusammenhängende Teilmengen  $S^n = W_1 \cup f(\partial E) \cup W_2$ . Das Komplement des Bildes  $f(E)$  besteht aus einer Zusammenhangskomponente nach 2.7.8, somit erhalten wir auch eine disjunkte Zerlegung in zusammenhängende Teilmengen  $S^n = (S^n \setminus f(E)) \cup f(\partial E) \cup f(E^\circ)$ . Gilt nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $(S^n \setminus f(E)) \subset W_1$ , so folgt  $W_2 \subset f(E^\circ)$  und Zusammenhangsargumente zeigen, daß beide Inklusionen Gleichheiten sein müssen.

*Übung 2.7.14.* Eine injektive stetige Abbildung zwischen zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension ist stets surjektiv. Hinweis: 2.7.13.

2.7.15. Sind  $s, s' \subset S^n$  disjunkte Teilmengen, die homöomorph sind zu  $S^p$  bzw.  $S^q$  mit  $p+q = n-1$ , so kann man ihre **Verschlingungszahl**  $v(s, s') \in \mathbb{N}$  definieren als den Betrag des Bildes der Eins unter  $\mathbb{Z} \cong \tilde{H}_p(s) \rightarrow \tilde{H}_p(S^n \setminus s') \cong \mathbb{Z}$ . Der Spezialfall  $q = 0$  wird in 2.7.3 diskutiert. Mehr dazu findet man in [SZ94a].

*Ergänzende Übung 2.7.16.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$  erklärt man seine **Suspension** als den Raum

$$\Sigma X = X \times [0, 1] / \sim$$

wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  alle Punkte von  $X \times \{0\}$  und alle Punkte von  $X \times \{1\}$  zu jeweils einem Punkt identifiziert. Die lange exakte Sequenz der reduzierten Homologie zum Raumpaard  $(\tilde{\Sigma}X, X \times \{1\})$  mit  $\tilde{\Sigma}X = X \times [0, 1]/X \times \{0\}$  liefert dann Isomorphismen  $\tilde{H}_{i+1}(\tilde{\Sigma}X, X \times \{1\}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(X \times \{1\})$  für  $X \neq \emptyset$ , und mit 2.3.22 erhalten wir wieder für  $X \neq \emptyset$  und alle  $i$  kanonische Isomorphismen

$$\tilde{H}_{i+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(X)$$

## 2.8 Homologie von endlichen Zellkomplexen

**Definition 2.8.1.** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : A \rightarrow X$  erklärt man ihren **Abbildungskegel** als den topologischen Raum

$$K(f) = (X \sqcup (A \times [0, 1]) \sqcup \text{pt}) / \sim$$

wobei  $\text{pt} = \{*\}$  den einpunktigen Raum bezeichnet und die Äquivalenzrelation  $\sim$  erzeugt sei durch  $f(a) \sim (a, 0)$  sowie  $(a, 1) \sim *$  für alle  $a \in A$ .

*Beispiel 2.8.2.* Ist  $n \geq 0$  und  $f : S^{n-1} \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so sagt man auch, der Abbildungskegel  $K(f)$  entstehe aus  $X$  durch **Ankleben einer  $n$ -Zelle** mittels  $f$ . Im Fall  $n = 0$  alias  $A = \emptyset$  ist  $K(f)$  schlicht die disjunkte Vereinigung von  $X$  mit einem Punkt; im Fall  $n = 1$  das Ankleben einer Kante, indem ihre beiden Endpunkte mit Punkten des Ausgangsraums identifiziert werden; im Fall  $n = 2$  das Ankleben einer Kreisscheibe längs ihres Randkreises etc.

**Satz 2.8.3 (Anklebesequenz).** *Ist  $f : A \rightarrow X$  stetig und  $K(f)$  der Abbildungskegel von  $f$ , so gibt es in der reduzierten Homologie eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q A \rightarrow \tilde{H}_q X \rightarrow \tilde{H}_q K(f) \rightarrow \tilde{H}_{q-1} A \rightarrow \dots$$

deren erste Abbildung von  $f$  induziert wird und deren zweite von der Einbettung  $X \hookrightarrow K(f)$ .

2.8.4. Es können also anschaulich gesprochen beim Ankleben einer  $n$ -Zelle im Wesentlichen zwei Dinge passieren: Entweder die angeklebte Zelle “füllt ein  $(n-1)$ -Loch”, als da heißt  $\tilde{H}_{n-1} S^{n-1} \rightarrow \tilde{H}_{n-1} X$  ist eine Injektion und die Homologie von  $X$  im Grad  $n-1$  wird beim Ankleben entsprechend kleiner; Oder die angeklebte Zelle “schafft ein  $n$ -Loch”, als da heißt  $\tilde{H}_{n-1} S^{n-1} \rightarrow \tilde{H}_{n-1} X$  ist keine Injektion und die Homologie von  $X$  im Grad  $n$  wird beim Ankleben entsprechend größer. In diesem Fall kann sich natürlich die Homologie im Grad  $n-1$  auch noch etwas verkleinern, es wird eben eine endliche Untergruppe daraus weggeteilt, und das ist dann nicht mehr so leicht anschaulich zu machen. In jedem Fall gilt jedoch  $\tilde{H}_q X \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_q K(f)$  für  $q \neq n, n-1$ .



Der Abbildungskegel der Abbildung, die eine Kreislinie  $A$  zu einer Acht  $X$  zusammenwickelt. Die hier zu sehende Kreislinie in mittlerer Höhe ist das Bild von  $A \times \{1/2\}$  oder vielleicht auch eher von  $A \times \{1/4\}$  im Abbildungskegel.



Zwei Fälle des Anklebens einer Eins-Zelle, hier gezackt eingezeichnet. Im ersten Fall wird ein Eins-Loch geschaffen, im zweiten Fall ein Null-Loch geschlossen.

*Beweis.* Das Bild der ausgezeichneten einpunktigen Menge  $\text{pt}$  im Abbildungskegel bezeichnen wir wieder mit  $\text{pt}$  und das Bild von  $X$  wieder mit  $X$ . Wir erhalten so zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen des Abbildungskegels  $K(f) = K$ , deren Komplemente eine offene Überdeckung bilden. Von diesen offenen Mengen ist die eine zusammenziehbar, nämlich das Komplement von  $X$ , und der Schnitt unserer beiden offenen Mengen kann identifiziert werden mit  $A \times (0, 1)$ . Die zugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz der reduzierten Homologie hat also die Gestalt

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(A \times (0, 1)) \rightarrow \tilde{H}_q(K \setminus \text{pt}) \rightarrow \tilde{H}_q(K) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(A \times (0, 1)) \rightarrow \dots$$

Wendet man 2.8.5 auf  $Z = [0, 1]$  und die die Topologie des Abbildungskegels definierende finale Abbildung an, so erkennt man leicht, daß die Einbettung  $X \hookrightarrow (K \setminus \text{pt})$  eine Homotopieäquivalenz ist, und es bleibt uns nur, im homotopiekommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} a & \mapsto & (a, 1/2) \\ A & \hookrightarrow & A \times (0, 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & K \setminus \text{pt} \end{array}$$

mit Homotopieäquivalenzen in den Horizontalen zur reduzierten Homologie überzugehen und so in unserer Mayer-Vietoris-Sequenz  $\tilde{H}_q(A \times (0, 1)) \rightarrow \tilde{H}_q(K \setminus \text{pt})$  durch  $\tilde{H}_q A \rightarrow \tilde{H}_q X$  zu ersetzen.  $\square$

**Proposition 2.8.5.** *Ist  $p : X \rightarrow Y$  final und surjektiv und  $Z$  lokal kompakt, so ist auch  $p \times \text{id} : X \times Z \rightarrow Y \times Z$  final und surjektiv.*

*Beweis.* Sei  $W \subset Y \times Z$  eine Teilmenge mit offenem Urbild  $U \subseteq X \times Z$ . Es gilt zu zeigen, daß  $W$  selbst offen ist. Sei dazu  $(y, z) \in W$  ein Punkt und  $(x, z)$  eines seiner Urbilder. Sicher gibt es eine kompakte Umgebung  $K$  von  $z$  mit  $\{x\} \times K \subset U$ . Man überlegt sich leicht, daß dann

$$A = \{a \in X \mid \{a\} \times K \subset U\}$$

offen ist in  $X$  und daß gilt  $A = p^{-1}(p(A))$ . Folglich ist  $p(A)$  offen in  $Y$  und wir haben  $(y, z) \in p(A) \times K \subset W$ . Mithin liegt mit jedem Punkt auch eine ganze offene Umgebung des besagten Punktes in  $W$  und  $W$  ist offen.  $\square$

*Alternativer Beweis mit ??.* Sei  $W$  ein topologischer Raum und  $g : Y \times Z \rightarrow W$  eine Abbildung. Ist  $g \circ (p \times \text{id}) : X \times Z \rightarrow W$  stetig, so nach ?? auch die induzierte Abbildung  $X \rightarrow \mathcal{C}(Z, W)$ . Diese Abbildung faktorisiert jedoch als  $X \rightarrow Y \rightarrow \mathcal{C}(Z, W)$  mit  $p$  als erstem Pfeil und der von  $g$  induzierten Abbildung als zweitem Pfeil, da wir  $p$  surjektiv vorausgesetzt hatten. Ist zusätzlich  $p$  final, so ist folglich mit  $g \circ (p \times \text{id})$  auch die von  $g$  induzierte Abbildung  $Y \rightarrow \mathcal{C}(Z, W)$  stetig und damit nach ?? wiederum  $g$  selbst.  $\square$

**Korollar 2.8.6 (Homologie von Zellkomplexen).** *Entsteht  $X$  aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften endlich vieler Zellen und heften wir dabei keine Zellen der Dimension  $> d$  an, so gilt  $H_q X = 0$  für  $q > d$  und  $H_q X$  ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe für alle  $q \in \mathbb{Z}$ .*

*Beweis.* Man benutze für die zweite Aussage, daß bei einer kurzen exakten Sequenz abelscher Gruppen  $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$  die Mitte endlich erzeugt ist genau dann, wenn die Enden es sind.  $\square$

**Beispiel 2.8.7 (Homologie der komplex projektiven Räume).** Der  $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$  ergibt sich aus dem  $\mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}$  durch Anheften einer  $2n$ -Zelle. Eine solche Anheftung ist zum Beispiel die Abbildung  $F : D^{2n} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$  gegeben durch die Abbildungsvorschrift  $z = (z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto \langle z_0, \dots, z_{n-1}, 1 - \|z\| \rangle$ . Wir erhalten also

$$H_q(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, 2, \dots, 2n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entsteht allgemeiner  $X$  aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von Zellen gerader Dimension, so verschwindet  $H_q X$  für ungerades  $q$  und für gerades  $q$  ist  $H_q X$  eine freie abelsche Gruppe, deren Rang gerade die Anzahl der angehefteten  $q$ -Zellen ist.

*Übung 2.8.8.* Man zeige, daß die Homologie der quaternionalen projektiven Räume gegeben wird durch  $H_q(\mathbb{P}^n \mathbb{H}) \cong \mathbb{Z}$  für  $q = 0, 4, \dots, 4n$  und Null sonst.

**Satz 2.8.9 (Eulercharakteristik von Zellkomplexen).** *Der Raum  $X$  entstehe aus der leeren Menge durch sukzessives Anheften von endlich vielen Zellen. Sei  $c_q$  die Zahl der verwendeten  $q$ -Zellen und sei  $k$  ein Körper. So wird die Eulercharakteristik von  $X$  gegeben durch die Formel*

$$\chi(X; k) = \sum (-1)^q c_q$$

*Beweis.* Ist  $\dots \rightarrow A_i \xrightarrow{\partial_i} A_{i-1} \rightarrow \dots$  eine lange exakte Sequenz von endlichdimensionalen Vektorräumen und verschwinden von den  $A_i$  alle bis auf endlich viele, so gilt für die Eulercharakteristik unseres Komplexes

$$\sum (-1)^i \dim A_i = \sum (-1)^i \dim \mathcal{H}_i A = 0$$

nach 2.4.15. Schreiben wir unsere Sequenz in der Gestalt

$$\dots \rightarrow D_{q+1} \rightarrow B_q \rightarrow C_q \rightarrow D_q \rightarrow B_{q-1} \rightarrow \dots$$

so folgt natürlich

$$\sum (-1)^q \dim C_q = \sum (-1)^q \dim B_q + \sum (-1)^q \dim D_q$$



Nun läßt sich die Eulercharakteristik natürlich auch mithilfe der reduzierten Homologie darstellen als  $\chi(X; k) - 1 = \sum (-1)^q \dim_k \tilde{H}_q(X; k)$ . Mit unserer Anklebesequenz folgt  $\chi(X; k) - 1 = \chi(Y; k) - 1 + (-1)^n$ , wenn  $X$  aus  $Y$  durch Ankleben einer  $n$ -Zelle entsteht. Der Satz ergibt sich nun mit Induktion.  $\square$

2.8.10. Der vorhergehende Beweis könnte alternativ auch auf unserer Formel  $\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$  aus 2.4.20 aufgebaut werden: Diese Formel liefert sogar allgemeiner unter den offensichtlichen Endlichkeitsannahmen für  $f : A \rightarrow X$  stetig mit den im Beweis der Anklebesequenz diskutierten Argumenten die Formel

$$\chi(K(f)) = \chi(X) + 1 - \chi(A)$$

Man diese Formel jedoch auch direkt aus der Anklebesequenz folgern.

## 2.9 Homologie und Orientierung

**Satz 2.9.1 (Homologie und Orientierung).** *Ist  $n \geq 0$  eine natürliche Zahl und  $g \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$  eine invertierbare reelle Matrix, so induziert die stetige Abbildung  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf der reduzierten Homologiegruppe  $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$  die Multiplikation mit dem Vorzeichen der Determinante von  $g$ , in Formeln*

$$\tilde{H}_{n-1}g = \left( \frac{\det g}{|\det g|} \right) : \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$$

2.9.2. Wir verwenden hier die Konvention, nach der die Identität auf dem Nullvektorraum die Determinante 1 hat.

*Beweis.* Etwa nach ?? bilden für  $n \geq 1$  die Elemente von  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$  mit positiver bzw. negativer Determinante gerade die beiden Wegzusammenhangskomponenten von  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ . Elemente  $g, h$  aus derselben Wegzusammenhangskomponente liefern homotope Abbildungen  $g, h : (\mathbb{R}^n \setminus 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ . Wenn wir also den Satz für *ein*  $g$  mit  $\det g < 0$  zeigen, so folgt er in voller Allgemeinheit. Nun betrachten wir den anschaulichen Rand  $\partial\Delta_n$  des  $n$ -ten Standardsimplex wie in 2.3.2 und die Homotopieäquivalenzen

$$(\mathbb{R}^n \setminus 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}(1, 1, \dots, 1)) \hookrightarrow \partial\Delta_n$$

wo die linke Einbettung als letzte Koordinate eine Null anfügt und in der Mitte die Gerade durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor  $(1, 1, \dots, 1)$  herausgenommen wird. Nehmen wir  $n \geq 2$  an, so hält die Vertauschung der ersten beiden Koordinaten unsere beiden Teilräume fest. Der Satz folgt so für  $n \geq 2$  mit dem kanonischen Isomorphismus  $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta_n)$  aus dem anschließenden Lemma 2.9.3. Die Fälle  $n = 0, 1$  überlassen wir dem Leser.  $\square$

**Lemma 2.9.3.** Sei  $n \geq 2$  und sei  $g : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$  die stetige Abbildung, die gegeben wird durch die Vertauschung der beiden ersten Koordinaten. So induziert  $g$  auf der relativen Homologie  $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$  die Multiplikation mit  $-1$ , in Formeln

$$H_n g = (-1) : H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n) \rightarrow H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$$

*Beweis.* Wir betrachten in  $\Delta_n$  den singulären  $(n+1)$ -Simplex

$$\sigma = [e_0, e_1, e_0, e_2, \dots, e_n] : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$$

der die Ecken von  $\Delta_{n+1}$  in der angegebenen Reihenfolge auf die Ecken von  $\Delta_n$  abbildet und der auf ganz  $\Delta_{n+1}$  affin ist. Wir erinnern, daß der tautologische Simplex  $\tau_n = \text{id}$  unsere relative Homologiegruppe erzeugt und erkennen durch explizite Rechnung

$$\partial\sigma \in \tau_n + (S_n g)(\tau_n) + S_n(\partial\Delta_n)$$

Daraus folgt  $[\tau_n] + (H_n g)[\tau_n] = 0$  in  $H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ .  $\square$

**Korollar 2.9.4 (Vektorfelder auf Sphären).** Genau dann gibt es auf der  $n$ -Sphäre  $S^n$  ein nirgends verschwindendes stetiges Vektorfeld, wenn ihre Dimension  $n$  ungerade ist.

*Beweis.* Ein Vektorfeld ist für uns eine stetige Abbildung  $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  derart, daß  $v(x)$  senkrecht steht auf  $x$  für alle  $x$ , in Formeln  $x \perp v(x) \forall x \in S^n$ . Ist  $n$  ungerade, so können wir ein mögliches  $v$  angeben durch

$$v(x_0, \dots, x_n) = (x_1, -x_0, x_2, -x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

In jedem Fall können wir ein nirgends verschwindendes Vektorfeld  $v$  auf Länge Eins normieren. Es definiert dann eine Familie von Abbildungen  $\varphi_t : S^n \rightarrow S^n$ , wo  $\varphi_t(x)$  der Punkt ist, an dem man landet, wenn man von  $x$  in Richtung  $v(x)$  für die Zeit  $t$  auf dem entsprechenden Großkreis um die Sphäre läuft, in Formeln  $\varphi_t(x) = (\cos t)x + (\sin t)v(x)$ . So erhalten wir nun offensichtlich eine Homotopie zwischen der Identität und der Antipodenabbildung  $a = \varphi_\pi : S^n \rightarrow S^n$ ,  $x \mapsto -x$  und folgern  $\tilde{H}_n(a) = \text{id}$  auf  $\tilde{H}_n(S^n)$ . Da aber die Einbettung  $S^n \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$  eine Homotopieäquivalenz ist und da folglich gilt  $\tilde{H}_n(a) = (-1)^{n+1} \text{id}$  auf  $\tilde{H}_n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ , kann es eine derartige Homotopie nur für ungerades  $n$  geben.  $\square$

*Übung 2.9.5.* Gegeben  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Umgebungen des Ursprungs und  $g : A \xrightarrow{\sim} B$  ein Diffeomorphismus mit  $g(0) = 0$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(A, A \setminus \{0\}) & \rightarrow & H_n(B, B \setminus \{0\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \rightarrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \end{array}$$

mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante  $\det(d_0g)$  als unterer Horizontale. Hinweis: Für vom Ursprung verschiedene Punkte  $p$  nahe am Ursprung gilt  $\|g(p) - (d_0g)(p)\| < \|(d_0g)(p)\|$ .

## 2.10 Orientierung und Fundamentalzykel

2.10.1. Unter einer  $d$ -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit ohne Rand oder kurz  $d$ -Mannigfaltigkeit verstehen wir wie in ?? einen topologischen Hausdorffraum  $X$  derart, daß jeder Punkt  $p \in X$  eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph ist zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ . Viele Autoren fordern von einer Mannigfaltigkeit zusätzlich, daß sie “parakompakt” sein soll, oder sogar noch stärker, daß ihre Topologie “eine abzählbare Basis” haben soll. Wir werden solche Bedingungen stets explizit erwähnen, vorerst sind sie für uns belanglos.

2.10.2. Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit. Für jeden Punkt  $x \in M$  ist die relative Homologie  $H_n(M, M \setminus x)$  frei vom Rang Eins nach Ausschneidung 2.3.18 und den Resultaten 2.3.7 über die Homologie von Sphären.

**Definition 2.10.3.** Eine **Orientierung** einer  $n$ -Mannigfaltigkeit ist eine Zuordnung  $\omega$ , die jedem Punkt  $x \in M$  einen Erzeuger  $\omega_x$  von  $H_n(M, M \setminus x)$  zuordnet und zwar so, daß gilt: Für alle  $x \in M$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x$  und ein Element  $\omega_U \in H_n(M, M \setminus U)$  derart, daß für alle  $y \in U$  gilt  $\omega_U \mapsto \omega_y$  unter der natürlichen Abbildung  $H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus y)$ .

2.10.4. Gegeben Räume  $M \supset U \supset V$  notieren wir die natürliche Abbildung  $H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus V)$  im weiteren Verlauf kurz  $\eta \mapsto \eta|_V$ , so daß wir etwa statt  $\omega_U \mapsto \omega_y$  auch  $\omega_U|_y = \omega_y$  schreiben können.

2.10.5. In ?? hatten wir eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit, genauer einer eingebetteten  $n$ -dimensionalen  $C^1$ -Mannigfaltigkeit, anders definiert: Als eine Vorschrift, die an jedem Punkt jeder angeordneten Basis des Tangentialraums ein Vorzeichen zuordnet und die noch gewisse zusätzliche Eigenschaften hat. Um eine Orientierung in diesem Sinne mit einer Orientierung im hier erklärten topologischen Sinne zu identifizieren, müssen wir zunächst einen Erzeuger der relativen Homologie  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$  auszeichnen. Durch Verschieben und Ausschneidung erhalten wir daraus Erzeuger der relativen Homologie  $H_n(W, W \setminus p)$  für  $p \in W \subseteq \mathbb{R}^n$ . Gegeben eine Karte  $(W, \varphi)$  der Orientierung  $\varepsilon$  im Sinne von ?? wählen wir dann die Bilder der  $\varepsilon$ -fachen dieser Erzeuger unter den von  $\varphi$  induzierten Abbildungen  $H_n(W, W \setminus p) \rightarrow H_n(M, M \setminus \varphi(p))$  als Erzeuger auf der rechten Seite, und führen wir das für alle zusammenhängenden Karten durch, so erhalten wir wegen 2.9.5 eine wohldefinierte Orientierung im topologischen Sinne.

**Definition 2.10.6.** Eine Mannigfaltigkeit, die mindestens eine Orientierung besitzt, heißt **orientierbar**. Unter einer **orientierten Mannigfaltigkeit** verstehen wir eine Mannigfaltigkeit mit einer ausgezeichneten Orientierung. Eine Orientierung auf  $M$  induziert in offensichtlicher Weise eine Orientierung auf jeder offenen Teilmenge von  $M$ .

**Lemma 2.10.7.** *Stimmen zwei Orientierungen einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit in einem Punkt überein, so sind sie gleich.*

*Beweis.* Seien  $M$  unsere zusammenhängende Mannigfaltigkeit und  $\omega, \eta$  unsere beiden Orientierungen. Sei  $x \in M$  gegeben mit  $\omega_x = \eta_x$ . Wir zeigen, daß es eine Umgebung  $U$  von  $x$  gibt mit  $\omega_y = \eta_y \quad \forall y \in U$ . Sicher dürfen wir dazu annehmen  $M = \mathbb{R}^n$ . Per definitionem gibt es einen offenen Ball  $U$  um  $x$  und Elemente  $\omega_U, \eta_U \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U)$  mit  $\omega_U \mapsto \omega_y$  und  $\eta_U \mapsto \eta_y \quad \forall y \in U$ . Da aber für so ein  $U$  die Einbettung Isomorphismen

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus y)$$

induziert für alle  $y \in U$ , folgt aus  $\omega_x = \eta_x$  bereits  $\omega_U = \eta_U$  und dann  $\omega_y = \eta_y \quad \forall y \in U$ . Die Mengen  $M_{\pm}$  aller  $x \in M$  mit  $\omega_x = \pm \eta_x$  sind folglich offen. Damit ist  $M = M_+ \sqcup M_-$  eine Zerlegung in zwei disjunkte offene Teilmengen. Da nach Annahme  $M_+$  nicht leer ist und  $M$  zusammenhängend, folgt  $\omega = \eta$ .  $\square$

**Definition 2.10.8.** Etwas formaler betrachten wir die Menge

$$\text{or} = \text{or}_M = \bigsqcup_{x \in M} H_n(M, M \setminus x)$$

und versehen sie mit der Topologie, die erzeugt wird von allen Teilmengen der Gestalt  $\mathcal{O}(U, \omega) = \{\omega|_x \mid x \in U\}$  für  $U \subseteq M$  und  $\omega \in H_n(M, M \setminus U)$ . Wir nennen  $\text{or}_M$  die **Orientierungsgarbe** von  $M$ . Die offensichtliche Abbildung  $p : \text{or}_M \rightarrow M$  ist stetig, denn das Urbild von  $U \subseteq M$  kann beschrieben werden als die Vereinigung aller  $\mathcal{O}(V, \omega)$  mit  $V \subseteq U$ .

2.10.9. Nach dem anschließenden Lemma 2.10.11 ist  $\text{or}_M \rightarrow M$  eine Überlagerung und damit in der Terminologie, wie wir sie in III.1.4 einführen, der “étale Raum einer Garbe auf  $M$ ”. In dieser Terminologie bedeutet unsere Konstruktion der Orientierungsgarbe übrigens genau die “Garbifizierung der Prägarbe  $U \mapsto H_n(M, M \setminus U)$ ”.

*Beispiel 2.10.10.* Wir konstruieren einen Homöomorphismus  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}^n}$  oder vielmehr noch natürlicher einen Homöomorphismus

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}^n}$$

indem wir jedem Paar  $(\omega_0, x)$  das  $\omega_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$  zuordnen mit der Eigenschaft, daß es für einen und jeden Ball  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  mit Zentrum im Ursprung und  $x \in B$  ein  $\omega_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$  gibt mit  $\omega_B|_0 = \omega_0$  und  $\omega_B|_x = \omega_x$ . Wegen der für alle  $x \in B$  von der Einbettung induzierten Isomorphismen  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$  ist damit  $\omega_x$  wohldefiniert, und daß unsere Abbildung eine Bijektion ist scheint mir offensichtlich. Sie ist stetig, da das Urbild jedes  $\mathcal{O}(U, \omega)$  für einen Ball  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen ist, und da diese Mengen auch schon die Topologie der Orientierungsgarbe erzeugen. Sie ist offen, da diese Urbilder sogar die Topologie der linken Seite erzeugen, wie der Leser unschwer einsehen wird.

**Lemma 2.10.11.** *Ist  $V \subseteq M$  eine offene Teilmenge, so haben wir mit den offensichtlichen Abbildungen ein kartesisches Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \text{or}_V & \rightarrow & \text{or}_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \rightarrow & M \end{array}$$

als da heißt, die obere Horizontale liefert einen Homöomorphismus von  $\text{or}_V$  mit dem Urbild von  $V$  in  $\text{or}_M$ . Insbesondere ist also nach dem vorhergehenden Beispiel 2.10.10 die natürliche Projektion  $\text{or}_M \rightarrow M$  eine Überlagerungsabbildung.

*Beweis.* Mit der offensichtlichen Abbildung  $\text{or}_V \rightarrow \text{or}_M$  meinen wir die durch die natürlichen Abbildungen  $H_n(V, V \setminus x) \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus x)$  definierte Injektion  $\text{can} : \text{or}_V \hookrightarrow \text{or}_M$ . Wir zeigen zunächst, daß sie stetig ist. Es gilt also zu zeigen, daß die Urbilder aller  $\mathcal{O}(U, \omega_U)$  offen sind. In der Tat können wir das Urbild einer solchen Menge aber schreiben als

$$\text{can}^{-1}(\mathcal{O}(U, \omega_U)) = \bigcup_{W \subseteq U \cap V, \bar{W} \subset V} \mathcal{O}_V(W, \omega_U|_W)$$

wo wir mit  $\omega_U|_W$  das Bild von  $\omega_U$  unter

$$H_n(M, M \setminus U) \rightarrow H_n(M, M \setminus W) \xleftarrow{\sim} H_n(V, V \setminus W)$$

meinen und mit  $\mathcal{O}_V(, )$  die definitionsgemäßen Erzeuger der Topologie auf  $\text{or}_V$  bezeichnen. Ähnlich aber einfacher erkennt man, daß unsere Injektion  $\text{can} : \text{or}_V \rightarrow \text{or}_M$  offen ist. Mithin trägt  $\text{or}_V$  die von  $\text{or}_M$  induzierte Topologie, und dann folgt ohne weitere Schwierigkeiten, daß unser Diagramm kartesisch ist.  $\square$

*Übung 2.10.12.* Die faserweise Addition  $\text{or}_M \times_M \text{or}_M \rightarrow \text{or}_M$  sowie das faserweise Negative  $\text{or}_M \rightarrow \text{or}_M$  sind stetig, und der **Nullschnitt**  $M \rightarrow \text{or}_M$  ist auch stetig.

2.10.13. Die Teilmenge  $\text{or}_M^\times \subset \text{or}_M$ , die gerade aus allen Erzeugern von  $H_n(M, M \setminus x)$  für die verschiedenen  $x \in M$  besteht, ist eine zweiblättrige Überlagerung von  $M$  und eine Orientierung von  $M$  ist nichts anderes als ein Lift  $M \rightarrow \text{or}_M^\times$  der Identität auf  $M$  alias ein Schnitt dieser Überlagerung. Insbesondere ist  $M$  orientierbar genau dann, wenn  $\text{or}_M^\times \rightarrow M$  eine triviale Überlagerung ist, und 2.10.7 ist auch eine Konsequenz aus dem Satz 1.4.4.2 über die Eindeutigkeit von Lifts. Ist  $M$  zusammenhängend und  $x \in M$  fest gewählt, so liefert diese Überlagerung eine Operation der Fundamentalgruppe  $\pi_1(M, x)$  auf einer zweielementigen Menge alias einen Homomorphismus  $\pi_1(M, x) \rightarrow \{\pm 1\}$  und  $M$  ist orientierbar genau dann, wenn diese **Orientierungsdarstellung** konstant ist.

*Übung 2.10.14.* Eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist stets orientierbar, und sogar allgemeiner jede Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe keinen Normalteiler vom Index zwei besitzt.

*Übung 2.10.15.* Für jede Mannigfaltigkeit  $M$  ist der Raum  $\text{or}_M^\times$  eine orientierbare, ja sogar eine in natürlicher Weise orientierte Mannigfaltigkeit.

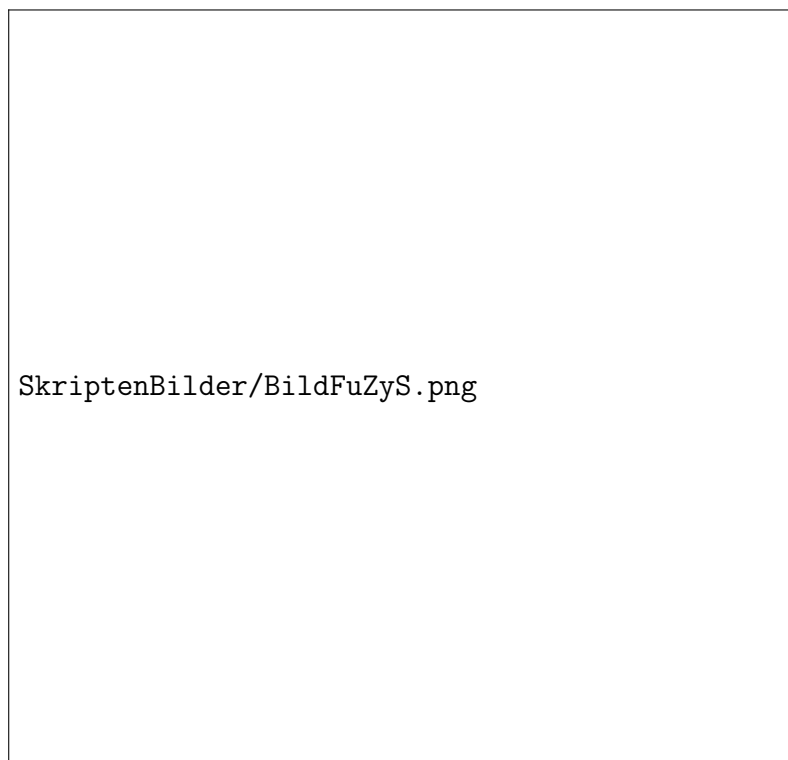
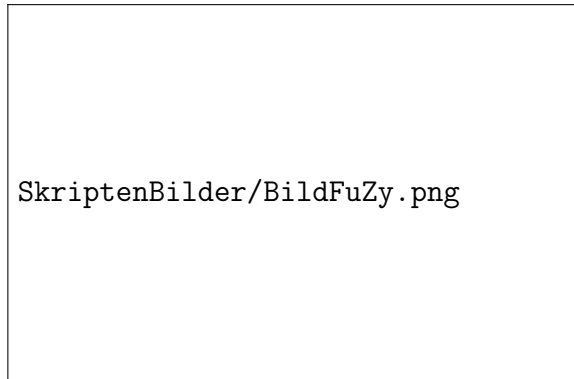
**Satz 2.10.16** ( *$n$ -te Homologie orientierbarer  $n$ -Mannigfaltigkeiten*).  
Gegeben eine kompakte zusammenhängende orientierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist ihre  $n$ -te Homologiegruppe  $H_n M$  frei vom Rang Eins und die offensichtliche Abbildung definiert für alle  $x \in M$  Isomorphismen

$$H_n M \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus x)$$

*Beweis.* Um beim Beweis dieses Satzes die nötige Flexibilität zu haben, zeigen wir im folgenden gleich die allgemeinere Aussage 2.10.20.  $\square$

**Definition 2.10.17.** Ist  $(M, \omega)$  eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach dem Satz genau ein  $\omega_M \in H_n M$  mit  $\omega_M \mapsto \omega_x \quad \forall x \in M$ . Dies  $\omega_M$  heißt der **Fundamentalzykel** der orientierten Mannigfaltigkeit  $M$ , obwohl es genau genommen eigentlich gar kein Zykel ist, sondern vielmehr eine Homologieklassse.

*Übung 2.10.18.* Man folgere aus 2.10.16: Ist eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit  $M$  mit einer Triangulierung  $M \cong \Delta(\mathcal{K})$  versehen, so können wir jedem  $n$ -Simplex ein Vorzeichen und eine Anordnung zuordnen derart, daß die Summe der entsprechenden mit Vorzeichen simplizialen  $n$ -Simplizes ein Zykel ist. Ist  $M$  auch noch zusammenhängend, so gibt es genau zwei derartige Zyklen und ihre Homologieklassen sind genau die beiden Erzeuger von  $H_n M$ , also die beiden Fundamentalzykel zu den beiden möglichen Orientierungen.



Versuch einer graphischen Darstellung jeweils eines Repräsentanten eines der beiden Fundamentalzykel der Kreislinie und der Sphäre.

**Definition 2.10.19.** Gegeben eine Mannigfaltigkeit  $M$  und eine Teilmenge  $A \subset M$  nennen wir einen Lift  $A \rightarrow \text{or}_M$  der Einbettung  $A \hookrightarrow M$  auch einen **Schnitt über  $A$  der Orientierungsgarbe**. Die Gruppe der Schnitte über  $A$  notieren wir

$$\Gamma(A; \text{or}_M) = \Gamma A$$

Der **Träger** eines Schnitts  $s \in \Gamma A$  ist die Menge  $\text{supp } s \subset A$  aller derjenigen Punkte, an denen er von Null verschieden ist. Dieser Träger ist stets abgeschlossen in  $A$ . Wir bezeichnen mit  $\Gamma_1 A \subset \Gamma A$  die Untergruppe aller Schnitte mit kompaktem Träger.

**Satz 2.10.20 (Hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten).** *Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $A \subset M$  eine abgeschlossene Teilmenge. So haben wir  $H_q(M, M \setminus A) = 0$  für  $q > n$  und für  $q = n$  induziert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus zwischen der  $n$ -ten relativen Homologie des Komplements von  $A$  und der Gruppe der Schnitte mit kompaktem Träger von  $A$  in die Orientierungsgarbe, in Formeln*

$$j = j_A : H_n(M, M \setminus A) \xrightarrow{\sim} \Gamma_1 A$$

2.10.21. Einen Spezialfall dieser Aussage haben wir bereits in 1.6.6 diskutiert.

*Beweis.* Um Schreibarbeit zu sparen kürzen wir  $H_q(M, M \setminus A) = H_q(\setminus A)$  ab und bemerken zunächst:

**Lemma 2.10.22.** *Sind  $A_1, A_2$  abgeschlossen in  $M$  und gilt der Satz für  $A_1, A_2$  und  $A_1 \cap A_2$ , so gilt er auch für  $A_1 \cup A_2$ .*

*Beweis.* Das folgt mit dem Fünferlemma aus dem kommutativen Diagramm


$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H_{n+1}(\setminus A_1 \cap A_2) & \rightarrow & H_n(\setminus A_1 \cup A_2) & \rightarrow & H_n(\setminus A_1) \oplus H_n(\setminus A_2) & \rightarrow & H_n(\setminus A_1 \cap A_2) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & 0 & \rightarrow & \Gamma_1(A_1 \cup A_2) & \rightarrow & \Gamma_1 A_1 \oplus \Gamma_1 A_2 & \rightarrow & \Gamma_1(A_1 \cap A_2) \end{array}$$

mit exakten Zeilen, wo wir oben die relative Mayer-Vietoris-Sequenz 2.3.21 benutzt haben.  $\square$

Jetzt gehen wir in mehreren Schritten von Spezialfällen bis zur allgemeinen Situation.

1. Ist  $M = \mathbb{R}^n$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter Quader, dem wir auch Seiten der Länge Null erlauben, so gilt der Satz ganz offensichtlich, da für jeden Punkt  $p \in A$  die Einbettung  $\mathbb{R}^n \setminus A \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus p$  eine Homotopieäquivalenz ist.





SkriptenBilder/BildHoMa.png

Diese Bild soll den Satz über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten illustrieren. In der großen offenen Ellipse  $M$  betrachten wir die abgeschlossene Teilmenge  $A$ , die aus den beiden kompakten kleinen schraffierten Eiern und einer ebenfalls eingezeichneten nichtkompakten Zusammenhangskomponente besteht. Die Orientierungsgarbe ist in diesem Fall isomorph zu  $M \times \mathbb{Z}$ , ihre Schnitte über  $A$  müssen auf allen drei Zusammenhangskomponenten von  $A$  konstant sein, und die Schnitte mit kompaktem Träger sind genau die Schnitte, die auf der nichtkompakten Komponente verschwinden. Der ebenfalls eingezeichnete singuläre Zweisimplex ist ein Zykel in  $M$  relativ zu  $M \setminus A$ . Seine Homologiekategorie entspricht dem Schnitt aus  $\Gamma_1 A$ , der auf der entsprechenden Komponente von  $A$  den Wert plus oder Minus Eins annimmt, je nach Wahl der Identifikation unserer Orientierungsgarbe mit  $M \times \mathbb{Z}$ , und der auf dem Rest von  $A$  den Wert Null annimmt.

2. Ist  $M = \mathbb{R}^n$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, so gilt der Satz. In der Tat, gegeben  $z \in S_q \mathbb{R}^n$  mit  $\partial z \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$  finden wir  $\epsilon > 0$  und  $E \subset \mathbb{R}^n$  endlich mit

$$A \subset A' = \bigcup_{v \in E} v + [-\epsilon, \epsilon]^n$$

und  $\partial z \in S_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A')$ . Es folgt, daß unser  $[z] \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$  das Bild von  $[z] \in H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A')$  ist. Nun gilt der Satz für unsere "Würfelmenge"  $A'$  nach Schritt 1 und dem Lemma. Das zeigt unsere Behauptung im Fall  $q > n$ . Im Fall  $q = n$  zeigen wir zunächst die Injektivität  $j_A[z] = 0 \Rightarrow [z] = 0$ . Dazu wählen wir unsere Würfelmenge  $A'$  zusätzlich so, daß jeder Würfel von  $A'$  die Menge  $A$  trifft, etwa indem wir  $E \subset A$  wählen. Dann ist die Restriktion  $\Gamma A' \rightarrow \Gamma A$  injektiv und aus  $j_A[z] = 0$  folgt  $j_{A'}[z] = 0$  und damit  $[z] = 0$  sogar in  $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A')$ . Das zeigt die Injektivität von  $j_A$ . Um die Surjektivität von  $j_A$  zu zeigen, argumentieren wir ähnlich: Jeder stetige Schnitt  $s \in \Gamma A$  ist lokal konstant und gleichmäßig stetig, läßt sich also stetig auf eine geeignete kompakte Würfelmenge  $A'$  ausdehnen und kommt damit sogar von einer Klasse aus  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A')$  her.

3. Sei  $A$  kompakt und  $M$  beliebig. So können wir  $A$  schreiben als eine endliche Vereinigung von Kompakta, die jeweils ganz in einer Karte enthalten sind. Dann sind wir fertig mit Induktion nach Schritt 2 und dem Lemma.

4. Sei  $A$  abgeschlossen und  $M$  lasse sich einbetten als offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß in eine größere  $n$ -Mannigfaltigkeit  $X$ , in Formeln  $M \subsetneq X$  mit  $\bar{M}$  kompakt. So bezeichnen wir den Rand von  $M$  in  $X$  mit  $\partial M = \bar{M} \setminus M$ , betrachten die lange exakte Sequenz des Tripels

$$(X, X \setminus \partial M, X \setminus (\partial M \cup A))$$

und beachten, daß  $\partial M$  und  $\partial M \cup A$  kompakt sind. Mit dem bereits Bewiesenen folgt für  $q > n$  schon  $0 = H_q(X \setminus \partial M, X \setminus (\partial M \cup A))$  und durch Ausschneiden von  $X \setminus \bar{M}$  auch  $0 = H_q(M, M \setminus A)$ . Im Fall  $q = n$  erhalten wir mit derselben Ausschneidung ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_n(M, M \setminus A) & \rightarrow & H_n(X, X \setminus (\partial M \cup A)) & \rightarrow & H_n(X, X \setminus \partial M) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Gamma_1 A & \rightarrow & \Gamma_1(\partial M \cup A) & \rightarrow & \Gamma_1(\partial M) \end{array}$$

mit exakten Zeilen, wo die zweite horizontale Abbildung der unteren Zeile einen Schnitt mit kompaktem Träger fortsetzt durch Null. Die Behauptung folgt mit dem Fünferlemma.

5. Der allgemeine Fall. Sei zunächst  $q > n$  und  $z \in S_q M$  ein Repräsentant

von  $\omega \in H_q(M, M \setminus A)$ . So finden wir  $U \Subset M$  mit  $z \in S_q U$  und  $\bar{U}$  kompakt. Nach dem vorhergehenden Punkt verschwindet die Klasse von  $z$  schon in  $H_q(U, U \setminus A)$ , also erst recht in  $H_q(M, M \setminus A)$  und es folgt  $H_q(M, M \setminus A) = 0$  für  $q > n$ . Im Fall  $q = n$  beachten wir für  $U \Subset M$  das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U \setminus A) & \rightarrow & H_n(M, M \setminus A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_1(A \cap U) & \rightarrow & \Gamma_1 A \end{array}$$

wo die untere Horizontale ausdehnt durch Null. Ist  $\bar{U}$  kompakt, so ist die linke Vertikale ein Isomorphismus nach dem vorigen Schritt. Aber jedes  $\omega \in H_n(M, M \setminus A)$  wird repräsentiert von einem  $z \in S_n M$ , wir finden dann  $U \Subset M$  mit  $\bar{U}$  kompakt und  $z \in S_n U$  und so kommt  $\omega$  schon her von einem  $[z] \in H_n(U, U \setminus A)$ . Das zeigt die Injektivität von  $j_A$ . Die Surjektivität zeigen wir ähnlich: Für jedes  $s \in \Gamma_1 A$  gibt es  $U \Subset M$  mit  $\bar{U}$  kompakt und  $s \in \Gamma_1(A \cap U)$  und dann kommt  $s$  sogar schon her von  $H_n(U, U \setminus A)$ .  $\square$

**Korollar 2.10.23.** *Ist  $M$  eine zusammenhängende aber nicht kompakte oder nicht orientierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit, so gilt  $H_n M = 0$ .*

**Korollar 2.10.24.** *Ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen mit endlich vielen kompakten Zusammenhangskomponenten, so gilt  $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \mathbb{Z}^k$  für  $k$  die Zahl der kompakten Zusammenhangskomponenten.*

2.10.25. Hier ist nicht gemeint, daß alle Zusammenhangskomponenten notwendig kompakt sein sollen.

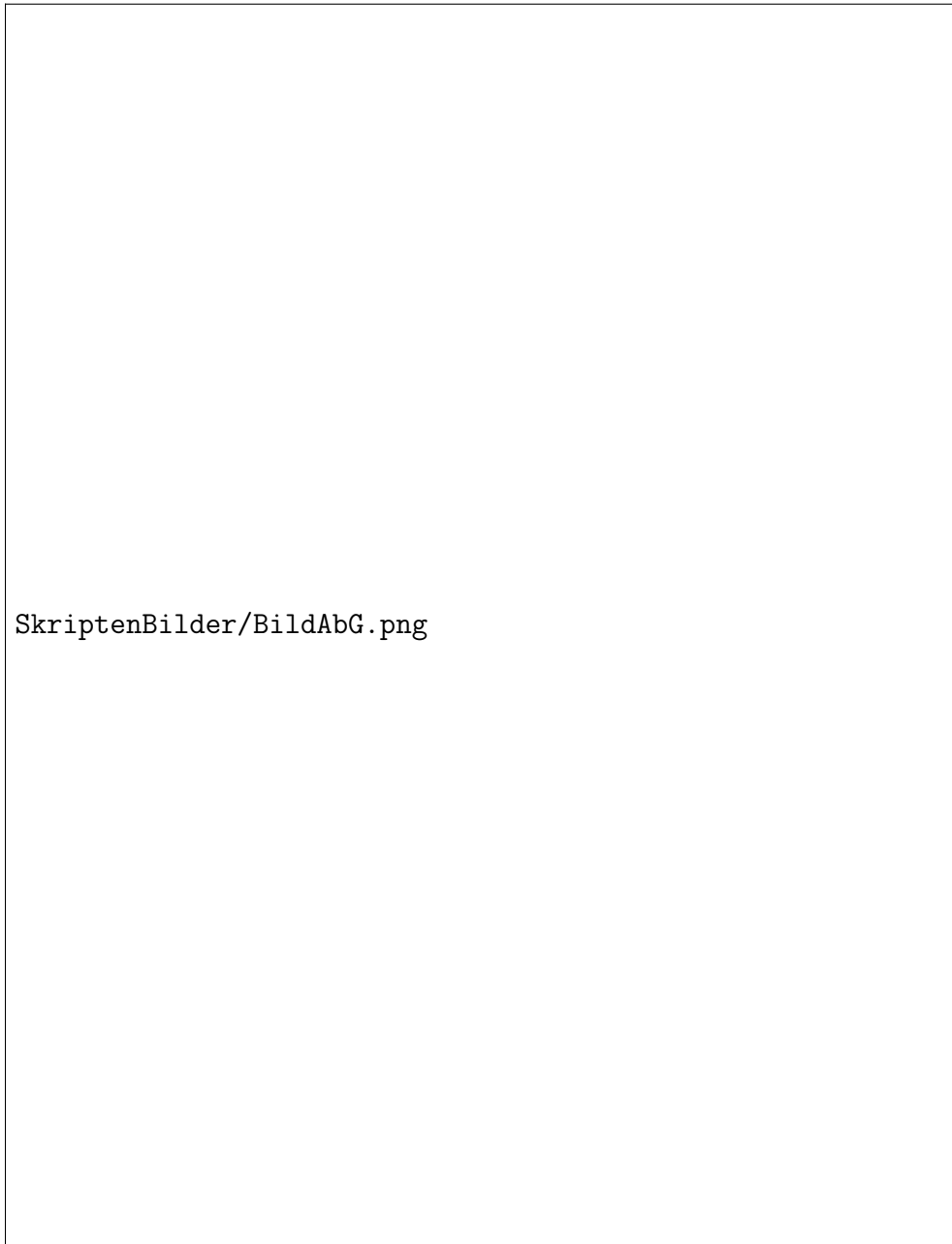
*Beweis.* Wir haben  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$  nach der langen exakten Homologiesequenz und der linke Raum ist isomorph zu  $\Gamma_1 A \cong \mathbb{Z}^k$  nach unserem Satz 2.10.20.  $\square$

2.10.26. Dies letzte Korollar 2.10.24 ist ein Spezialfall der sogenannten "Alexander-Dualität" III.2.11.37.

2.10.27. Sind wir im Spezialfall  $M = \mathbb{C}$  und benutzen die kanonische Orientierung von  $\mathbb{C}$ , um  $\Gamma_1 A$  zu identifizieren mit stetigen Abbildungen  $A \rightarrow \mathbb{Z}$  mit kompaktem Träger, so ordnet unser Isomorphismus

$$H_1(\mathbb{C} \setminus A; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \Gamma_1 A$$

der Klasse  $[\gamma]$  eines Zyklus  $\gamma$  diejenige Funktion  $A \rightarrow \mathbb{Z}$  zu, deren Wert an einer Stelle  $z \in A$  die Umlaufzahl im Sinne von 1.6.2 des Zyklus  $\gamma$  um den Punkt  $z$  ist.



Eine Abbildung einer Kreislinie auf sich selbst vom Abbildungsgrad Zwei. Die Orientierungen sind durch Pfeilspitzen angedeutet. An den Punkten des Urbilds zweier Punkte sind auch die lokalen Abbildungsgrade eingetragen, unter Verwendung der Abkürzungen  $\pm$  für  $\pm 1$ .

**Definition 2.10.28.** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine stetige Abbildung von kompakten orientierten zusammenhängenden  $n$ -Mannigfaltigkeiten. Seien  $\omega_M \in H_n M$  und  $\omega_N \in H_n N$  die Fundamentalzykel. Der **Abbildungsgrad**  $\text{grad } f$  von  $f$  ist die ganze Zahl, die gegeben wird durch die Gleichung

$$f_* \omega_M = (\text{grad } f) \omega_N$$

2.10.29. Insbesondere ist eine Abbildung wie in der Definition mit von Null verschiedenem Abbildungsgrad stets surjektiv, da nach 2.10.23 gilt  $H_n(N \setminus p) = 0 \quad \forall p \in N$  und da jede Abbildung, deren Bild einen Punkt  $p$  nicht enthält, faktorisiert als  $M \rightarrow (N \setminus p) \hookrightarrow N$ . Des weiteren haben homotope Abbildungen nach 1.4.1 denselben Abbildungsgrad.

**Definition 2.10.30.** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine stetige Abbildung von orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeiten. Ist  $q \in M$  ein isolierter Punkt der Faser über  $f(q)$ , gibt es in anderen Worten eine offene Umgebung  $U \subseteq M$  von  $q$  mit  $U \cap f^{-1}(f(q)) = \{q\}$ , so definieren wir den **lokalen Abbildungsgrad von  $f$  bei  $q$**  als die ganze Zahl  $\text{grad}_q f \in \mathbb{Z}$ , die gegeben wird durch die Gleichung

$$f_* \omega_M|_q = (\text{grad}_q f) \omega_N|_{f(q)}$$

für  $f_* : H_n(U, U \setminus q) \rightarrow H_n(N, N \setminus f(q))$  die auf der Homologie induzierte Abbildung und  $\omega_M$  bzw.  $\omega_N$  die entsprechenden Fundamentalzykel. Diese Abbildung hängt offensichtlich nicht von der Wahl von  $U$  ab.

*Beispiel 2.10.31.* In Übung 2.9.5 haben Sie gezeigt, daß der lokale Grad im Fall eines lokalen Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  gerade das Vorzeichen der Funktionaldeterminante ist.

**Satz 2.10.32 (über den Abbildungsgrad).** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow N$  von kompakten orientierten zusammenhängenden  $n$ -Mannigfaltigkeiten und ein Punkt  $p \in N$  mit endlichem Urbild ist der Abbildungsgrad von  $f$  die Summe der lokalen Abbildungsgrade an den Urbildern unseres Punktes  $p$ , in Formeln

$$\text{grad } f = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \text{grad}_q f$$

*Beweis.* Wir nummerieren die Punkte aus der Faser über  $p$  als  $q_1, \dots, q_r$  und wählen für sie paarweise disjunkte offene Umgebungen  $U_1, \dots, U_r$ . Dann betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n M & \xrightarrow{\sim} & H_n(M, M \setminus q_i) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_i, U_i \setminus q_i) \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ H_n M & \rightarrow & H_n(M, M \setminus \{q_1, \dots, q_r\}) & \xleftarrow{\sim} & \bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus q_i) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n N & \xrightarrow{\sim} & H_n(N, N \setminus p) & = & H_n(N, N \setminus p) \end{array}$$

wobei der letzte Isomorphismus der mittleren Horizontalen durch Ausschneidung und einer relative Version der Zerlegung der Homologie 1.3.5 entsteht. Gehen wir von der Mitte der linken Vertikalen direkt nach unten, so wird der Fundamentalzykel  $\omega_M$  abgebildet auf  $(\text{grad } f)\omega_N$ . Gehen wir dahingegen in der mittleren Horizontale nach rechts, so erhalten wir das Tupel der  $\omega_M|_{q_i}$ , wie die obere Hälfte des Diagramms zeigt, gehen wir dann nach unten, so erhalten wir die Summe der lokalen Abbildungsgrade multipliziert mit  $\omega_N|_p$ , und gehen wir wieder nach links, so folgt die Behauptung.  $\square$

*Übung 2.10.33.* Man bestimme die lokalen Abbildungsgrade der nichtkonstanten Polynomfunktionen  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

*Übung 2.10.34.* Ist  $f : M \rightarrow N$  eine étale Abbildung von  $n$ -Mannigfaltigkeiten und  $x \in M$  ein Punkt, so gibt es genau einen Isomorphismus  $H_n(M, M \setminus x) \xrightarrow{\sim} H_n(N, N \setminus f(x))$ , der für alle Umgebungen  $U$  von  $x$ , die homöomorph auf ihr Bild abgebildet werden, verträglich ist mit den von  $f$  induzierten Isomorphismen  $H_n(U, U \setminus x) \xrightarrow{\sim} H_n(f(U), f(U) \setminus f(x))$ . Wir erhalten so ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{or}_M & \rightarrow & \text{or}_N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \rightarrow & N \end{array}$$

Insbesondere läßt sich jede Orientierung von  $N$  “zurückziehen” zu einer Orientierung von  $M$ .

*Übung 2.10.35.* Jede Operation einer Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit induziert eine Operation auf der Orientierungsgarbe, die verträglich ist mit der faserweisen Addition. Operiert eine Gruppe  $D$  topologisch frei auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ , so ist auch  $M/D$  eine Mannigfaltigkeit und die obere Horizontale aus 2.10.34 induziert einen Homöomorphismus

$$(\text{or}_M)/D \xrightarrow{\sim} \text{or}_{(M/D)}$$

*Übung 2.10.36.* Die Kugelschalen  $S^r$  sind orientierbar für alle  $r \geq 0$ . Für  $r \geq 1$  sind sie auch zusammenhängend und die Antipodenabbildung  $S^r \xrightarrow{\sim} S^r$  bildet einen Fundamentalzykel ab auf sich selber für  $r$  ungerade und auf sein Negatives für  $r$  gerade. Der reell projektive Raum  $\mathbb{P}^r \mathbb{R}$  ist orientierbar für  $r = 0$  und  $r \geq 1$  ungerade, jedoch nicht für  $r \geq 1$  gerade.

**Satz 2.10.37 (Helly).** *Seien  $K_1, \dots, K_r$  konvexe Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Ist der Schnitt von je  $(n + 1)$  unserer  $K_i$  nicht leer, so haben alle  $K_i$  einen Punkt gemeinsam.*

2.10.38. Im Fall von kompakten konvexen Teilmengen folgt das sogar für beliebige Familien mit ???. Im allgemeinen ist es für unendliche Familien falsch,

wie etwa die Familie aller Intervalle  $[a, \infty)$  in  $\mathbb{R}$  zeigt. Man findet einen sehr elementaren Beweis dieser Aussage etwa in Wikipedia. Ich gebe im folgenden einen homologischen Beweis, der zwar einerseits unnötig kompliziert ist, andererseits aber auch die Bedeutung unserer homologischen Sätze illustriert.

*Homologischer Beweis.* Wir überlegen uns zunächst, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle  $K_i$  offen annehmen dürfen. In jedem nichtleeren Schnitt einer Auswahl der  $K_i$  wählen wir dazu einen Punkt. Ersetzen wir nun  $K_i$  durch die konvexe Hülle aller derjenigen eben gewählten Punkte, die in  $K_i$  liegen, so erkennen wir, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle  $K_i$  kompakt annehmen dürfen. Wäre der Schnitt aller  $K_i$  leer, so auch der Schnitt aller  $K_i + \overline{B(0; \epsilon)}$  über alle  $i$  und alle  $\epsilon > 0$ . Dann wäre dieser Schnitt aber nach ?? bereits für ein festes  $\epsilon > 0$  leer und dasselbe gälte für den Schnitt der offenen Mengen  $K_i + B(0; \epsilon)$ . Damit erkennen wir, daß wir auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle  $K_i$  offen annehmen dürfen. Nach dem Satz über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten wissen wir  $H_q(U) = 0$  für  $q \geq n$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß jede echte Teilfamilie der  $K_i$  nichtleeren Schnitt hat. Setzen wir nun  $U = \bigcup K_i$  und bezeichnen mit  $\mathcal{V}$  diese offenen Überdeckung von  $U$ , so haben wir eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\tilde{S}\left(\bigcap K_i\right) \hookrightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{i < j} \tilde{S}(K_i \cap K_j) \rightarrow \bigoplus \tilde{S}K_i \rightarrow \tilde{S}^{\mathcal{V}}U$$

mit Abbildungen gegeben durch Matrizen mit Einträgen

$$\tilde{S}(K_{i_0} \cap \dots \cap K_{i_\nu} \cap \dots \cap K_{i_q}) \xrightarrow{(-1)^\nu} \tilde{S}(K_{i_0} \cap \dots \cap \hat{K}_{i_\nu} \cap \dots \cap K_{i_q})$$

In der Tat ist das “für jeden singulären Simplex so”, im wesentlichen nach 1.1.9, angewandt auf die angeordnete Menge aller Indizes  $i$  mit der Eigenschaft, daß unser singulärer Simplex in der Menge  $K_i$  liegt. Wäre  $\bigcap K_i = \emptyset$ , so hätten wir für den ersten Komplex unserer Sequenz  $\mathcal{H}_{-1} \neq 0$ . Da nach Annahme alle anderen Komplexe bis auf  $\tilde{S}^{\mathcal{V}}U$  exakt sind, folgte mit der Notation  $C_k$  für den Kokern des  $(k+1)$ -ten Pfeils, aufgefaßt als Kettenkomplex, für  $k = 0, 1, \dots$  aus der langen exakten Homologiesequenz induktiv  $\mathcal{H}_k(C_k) \neq 0$  und schließlich  $\mathcal{H}_r(\tilde{S}^{\mathcal{V}}U) \neq 0$  im Widerspruch zu  $H_r(U) = 0$ .  $\square$

2.10.39. Ich wüßte gerne, warum ein Simplicialkomplex, der sich als Triangulierung einer konvexen Teilmenge eines affinen Raums über einem beliebigen angeordneten Körper realisieren läßt, azyklisch ist.

### 3 Homologie mit Koeffizienten und Produkte

#### 3.1 Homologie mit Koeffizienten

**Definition 3.1.1.** Sei  $G$  eine abelsche Gruppe. In unseren bisherigen Argumenten können wir stets  $G$  statt  $\mathbb{Z}$  schreiben und erhalten so allgemeinere Funktoren von topologischen Räumen oder Raumpaaren in die abelschen Gruppen. Sie heißen die **Homologie** bzw. **reduzierte Homologie mit Koeffizienten in  $G$** . Zum Beispiel definieren wir die  $q$ -te Homologie

$$H_q(X; G)$$

eines Raums  $X$  mit Koeffizienten in  $G$ , indem wir die Homologie des Komplexes  $S(X; G)$  der singulären Ketten mit Koeffizienten in  $G$  nehmen, wobei  $S_q(X; G)$  schlicht die Menge aller endlichen formalen Ausdrücke  $\sum n_\sigma \sigma$  bezeichnet mit  $n_\sigma \in G$  und  $n_\sigma = 0$  für alle bis auf endlich viele Simplizes  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ . Wir schreiben  $\tilde{H}_q(X; G)$  für die reduzierten Homologiegruppen und  $H_q(X, A; G)$  für die relativen Homologiegruppen mit Koeffizienten in  $G$ .

3.1.2. Es wird auch andersherum ein Schuh daraus: Halten wir den Raum  $X$  fest, so wird  $G \mapsto H_q(X; G)$  ein Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in sich selber. Ist insbesondere  $R$  ein Ring und  $G$  ein  $R$ -Modul, so werden die Homologiegruppen mit Koeffizienten in  $G$  auch  $R$ -Moduln in natürlicher Weise.

*Übung 3.1.3.* Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen  $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$  und ein topologischer Raum  $X$  zeige man, wie in natürlicher Weise Randoperatoren definiert werden können derart, daß eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_q(X; G') \rightarrow H_q(X; G) \rightarrow H_q(X; G'') \rightarrow H_{q-1}(X; G') \rightarrow \dots$$

entsteht. Diese Randoperatoren heißen die **Bockstein-Homomorphismen**.

3.1.4. Die meisten der bisher bewiesenen allgemeinen Aussagen, insbesondere Homotopieinvarianz, lange exakte Homologiesequenz, Ausschneidung, Mayer-Vietoris-Sequenz und Anklebesequenz gelten in der Homologie mit Koeffizienten genauso mit demselben oder fast demselben Beweis. Bei den bisherigen speziellen Resultaten zur Homologie und reduzierten Homologie von Punkten und Sphären kann man direkt prüfen, daß alle Argumente ebenso mit Koeffizienten  $G$  funktionieren und wir nur im Endresultat jeweils  $G$  statt  $\mathbb{Z}$  erhalten. Wir werden in 3.5.2 zeigen, daß Ähnliches allgemein gilt, solange die Homologiegruppen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  alle frei sind über  $\mathbb{Z}$ .



*Beispiel 3.1.5.* Wir behaupten, daß sich ein Landkarte, bei der an jedem “Mehrländereck” eine gerade Anzahl von Grenzen beginnt, stets so mit zwei Farben färben läßt, daß keine zwei benachbarten Staaten dieselbe Farbe haben. Staaten, die nur Grenzsteine gemeinsam haben, gelten hierbei nicht als benachbart! Um das zu zeigen, ergänzen wir die Anschauungsebene durch einen Punkt im Unendlichen zu einer Sphäre und unterteilen unsere Staaten durch zusätzliche Grenzen aber ohne zusätzliche Mehrländerecken in Bundesländer, bis wir eine Triangulierung der Sphäre erhalten. Die Summe der Staatsgrenzen ist dann ein simplizialer Einszykel mit  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Koeffizienten, der also der Rand einer Zweikette sein muß, und diese ist dann die gesuchte Färbung.

3.1.6. Ganz genauso wie in 2.10 definieren wir für jede  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  und jede abelsche Gruppe  $G$  die **Orientierungsgarbe mit Koeffizienten in  $G$**  und zeigen für jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subsetneq M$ , daß gilt  $H_q(M, M \setminus A; G) = 0$  für  $q > n$  und daß die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$j = j_A : H_n(M, M \setminus A; G) \xrightarrow{\sim} \Gamma_! A$$

induziert, wobei rechts die Schnitte mit kompaktem Träger von  $A$  in die Orientierungsgarbe mit Koeffizienten in  $G$  zu verstehen sind. Man erkennt ohne Schwierigkeiten, daß die fragliche Orientierungsgarbe gerade die Überlagerung ist, die von der Operation der Fundamentalgruppe auf  $G$  mittels der Orientierungsdarstellung aus 2.10.13 herkommt. Daraus folgt, daß für eine kompakte zusammenhängende  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  und einen beliebigen Punkt  $x \in M$  die kanonische Abbildung

$$H_n(M; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus x; G)$$

ein Isomorphismus ist für  $M$  orientierbar und eine Injektion mit Bild die Fixpunkte der Multiplikation mit  $(-1)$  für  $M$  nicht orientierbar.

**Satz 3.1.7.** *Gegeben eine abelsche Gruppe  $G$  verwenden wir im folgenden die Notation  $G_2 = \{a \in G \mid a + a = 0\}$  für die Fixpunkte der Multiplikation mit  $(-1)$ . Die **Homologie der reell projektiven Räume  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  mit Koeffizienten in  $G$  wird in dieser Notation gegeben durch***

$$H_q(\mathbb{P}^n \mathbb{R}; G) \cong \begin{cases} G & q = 0; \\ G/2G & 0 < q < n, \quad q \text{ ungerade}; \\ G_2 & 0 < q < n, \quad q \text{ gerade}; \\ G & 0 < q = n, \quad n \text{ ungerade}; \\ G_2 & 0 < q = n, \quad n \text{ gerade}; \\ 0 & q > n. \end{cases}$$



Eine Zweifärbung einer ebenen "geraden" Karte



Eine nicht zweifärbbare "gerade" Karte auf dem Torus

*Beweis.* Wir kürzen für diesen Beweis  $H_q(X; G) = H_q X$  und  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} = \mathbb{P}^n$  ab. Für  $n \geq 0$  geht  $\mathbb{P}^{n+1}$  aus  $\mathbb{P}^n$  hervor durch Ankleben einer  $(n+1)$ -Zelle und die verklebende Abbildung ist schlicht die offensichtliche zweifache Überlagerung  $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Wir haben also  $\tilde{H}_q \mathbb{P}^{n+1} = \tilde{H}_q \mathbb{P}^n$  für  $q \neq n+1, n$  und  $\tilde{H}_q \mathbb{P}^{n+1} = 0$  für  $q > n+1$  sowie eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{n+1} \mathbb{P}^{n+1} \rightarrow \tilde{H}_n S^n \rightarrow \tilde{H}_n \mathbb{P}^n \rightarrow \tilde{H}_n \mathbb{P}^{n+1} \rightarrow 0$$

Es reicht zu zeigen, daß hier der mittlere Pfeil die Nullabbildung ist für  $n$  gerade bzw. unter geeigneter Identifikation der Enden die Multiplikationsabbildung  $(2 \cdot) : G \rightarrow G$  für  $n > 0$  ungerade. Der Fall  $n = 0$  ist eh klar. Für  $n > 0$  betrachten wir nun das kommutative Diagramm aus dem Beweis von 2.10.32 mit Koeffizienten in  $G$ . Genauer betrachten wir um  $p \in \mathbb{P}^n$  eine trivial überlagerte offene Umgebung  $U$ , die homöomorph ist zu einem offenen Ball. Wir haben dann  $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$  und  $\pi^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2$  für geeignete offene Umgebungen  $U_i$  von  $p_i$  in  $S^n$ . Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n S^n & \rightarrow & H_n(S^n, S^n \setminus \pi^{-1}(p)) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_1, U_1 \setminus p_1) \oplus H_n(U_2, U_2 \setminus p_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n \mathbb{P}^n & \hookrightarrow & H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus p) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U, U \setminus p) \end{array}$$

Mit  $a : S^n \rightarrow S^n$  der Antipoden-Abbildung kommutiert nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_n S^n & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n, S^n \setminus p_1) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_1, U_1 \setminus p_1) & \xrightarrow{\sim} & H_n(U, U \setminus p) \\ \downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow a & & \parallel \\ H_n S^n & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n, S^n \setminus p_2) & \xleftarrow{\sim} & H_n(U_2, U_2 \setminus p_2) & \xrightarrow{\sim} & H_n(U, U \setminus p) \end{array}$$

Da aber nach 2.9.1 die Antipodenabbildung auf der  $n$ -ten reduzierten Homologie der Sphäre  $S^n$  die Multiplikation mit  $(-1)^{n+1}$  induziert, ist die Verknüpfung  $H_n S^n \rightarrow H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \setminus p)$  das  $(1 + (-1)^{n+1})$ -fache eines Isomorphismus.  $\square$

### 3.2 Tensorprodukte über Ringen

**Definition 3.2.1.** Gegeben  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $N$  ein  $R$ -Linksmodul definieren wir eine abelsche Gruppe  $M \otimes_R N$ , das **Tensorprodukt** von  $M$  mit  $N$  über  $R$ , als den Quotienten der freien abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}(M \times N)$  über dem kartesischen Produkt  $M \times N$  durch die von allen Ausdrücken

$$\begin{aligned} (mr, n) & - (m, rn) \\ (m + m', n) & - (m, n) - (m', n) \\ (m, n + n') & - (m, n) - (m, n') \end{aligned}$$

mit  $m, m' \in M$ ,  $n, n' \in N$  und  $r \in R$  erzeugte Untergruppe. Die Nebenklasse von  $(m, n)$  schreiben wir  $m \otimes n$ . Wenn wir erwarten, daß der Leser den Grundring  $R$  aus dem Kontext erschließen soll, und insbesondere im Fall  $R = \mathbb{Z}$  kürzen wir auch gerne  $\otimes_R$  zu  $\otimes$  ab.

*Ergänzung 3.2.2.* Prinzipiell könnten wir auch für zwei  $R$ -Linksmoduln  $M, N$  in ähnlicher Weise eine abelsche Gruppe  $T(M, N)$  definieren als einen Quotienten wie eben mit  $(rm, n) - (m, rn)$  anstelle von  $(mr, n) - (m, rn)$ . Diese Konstruktion erweist sich jedoch für nichtkommutative Ringe—und nur für diese unterscheidet sie sich von der zuvor gegebenen Konstruktion—als wenig hilfreich, da sie keine vergleichbar guten Eigenschaften hat: Als Illustration mag der Leser prüfen, daß in dem Fall, daß  $R$  der Schiefkörper der Quaternionen ist, alle in dieser Weise gebildeten  $T(M, N)$  schlicht Null sind.

**Definition 3.2.3.** Sei  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul,  $N$  ein  $R$ -Linksmodul und  $A$  eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung  $b : M \times N \rightarrow A$  heißt  **$R$ -bilinear** genau dann, wenn für alle  $m, m' \in M$ ,  $n, n' \in N$  und  $r \in R$  gilt:

$$\begin{aligned} b(mr, n) &= b(m, rn) \\ b(m + m', n) &= b(m, n) + b(m', n) \\ b(m, n + n') &= b(m, n) + b(m, n') \end{aligned}$$

**Satz 3.2.4 (Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts).** Sei  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $N$  ein  $R$ -Linksmodul.

1. Die Abbildung  $M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ ,  $(m, n) \mapsto m \otimes n$  ist  $R$ -bilinear.
2. Wann immer  $b : M \times N \rightarrow A$  eine  $R$ -bilineare Abbildung in eine abelsche Gruppe  $A$  ist, gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus  $\tilde{b} : M \otimes_R N \rightarrow A$  derart, daß gilt  $\tilde{b}(m \otimes n) = b(m, n)$  für alle  $m \in M$ ,  $n \in N$ .

*Beweis.* Vollständig analog zum Fall des Tensorprodukts über einem Körper ?? und dem Leser überlassen.  $\square$

3.2.5. Keineswegs jedes Element eines Tensorprodukts ist von der Form  $m \otimes n$ , die Elemente dieser Gestalt erzeugen jedoch das Tensorprodukt als abelsche Gruppe. Besitzt weiter ein Element eines Tensorprodukts eine Darstellung der Gestalt  $m \otimes n$ , so besitzt es meist sogar viele verschiedene Darstellungen dieser Gestalt. Geben wir dennoch eine Abbildung von einem Tensorprodukt in eine abelsche Gruppe  $A$  an durch eine Vorschrift der Gestalt  $m \otimes n \mapsto b(m, n)$ , so ist der Leser implizit gefordert, die Bilinearität der Abbildung  $b : M \times N \rightarrow A$  zu prüfen, und gemeint ist die durch die universelle Eigenschaft 3.2.4 definierte Abbildung  $\tilde{b} : M \otimes_R N \rightarrow A$ .

*Beispiel 3.2.6.* Es gilt  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ , denn wir haben für jeden Tensor  $a \otimes q = a \otimes 5(q/5) = 5a \otimes (q/5) = 0 \otimes (q/5) = 0$ .

3.2.7. Aufgrund der universellen Eigenschaft definieren je zwei  $R$ -lineare Abbildungen  $f : M \rightarrow M'$  und  $g : N \rightarrow N'$  einen Gruppenhomomorphismus  $f \otimes g : M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$ ,  $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$  und wir erhalten so einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} (\text{Mod-}R) \times (R\text{-Mod}) & \rightarrow & \text{Ab} \\ (M, N) & \mapsto & M \otimes_R N \end{array}$$

3.2.8. Sind  $S, R$  Ringe, so versteht man unter einem  $S$ - $R$ -**Bimodul** eine abelsche Gruppe  $M$  mit einer Struktur als  $S$ -Linksmodul und einer Struktur als  $R$ -Rechtsmodul derart, daß gilt

$$(sm)r = s(mr) \quad \forall s \in S, m \in M, r \in R$$

Wir notieren die Kategorie aller  $S$ - $R$ -Bimoduln als  $S\text{-Mod-}R$ . Aufgrund seiner Funktorialität ist das Tensorprodukt automatisch auch ein Funktor

$$(S\text{-Mod-}R) \times (R\text{-Mod-}T) \rightarrow (S\text{-Mod-}T)$$

für beliebige Ringe  $S, R, T$ , die Operation von  $S$  bzw.  $T$  geschieht schlicht durch  $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$ ,  $(m \otimes n)t = m \otimes (nt)$ . Ist speziell  $R$  ein kommutativer Ring, so ist das Tensorprodukt von zwei  $R$ -Moduln in natürlicher Weise wieder ein  $R$ -Modul. Diesen Fall lernt man oft zuerst kennen.

3.2.9 (**Tensorieren mit dem Grundring**). Ist  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul, so ist  $R \otimes_R M \rightarrow M$ ,  $r \otimes m \mapsto rm$  ein Isomorphismus mit Inversem  $m \mapsto 1 \otimes m$ . Für diese Eigenschaft wesentlich ist, daß in unseren Konventionen Ringe stets eine Eins haben und Moduln stets unitär sind.

**Lemma 3.2.10 (Tensorprodukte vertauschen mit Summen).** *Gegeben ein Ring  $R$  definiert die offensichtliche Abbildung für einen  $R$ -Rechtsmodul  $M$  und eine beliebige Familie von  $R$ -Moduln  $(N_i)$  einen Isomorphismus*

$$M \otimes_R \left( \bigoplus N_i \right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus (M \otimes_R N_i)$$

*Beweis.* In der Tat haben wir sowohl für die linke als auch für die rechte Seite  $S$  offensichtliche bilineare Abbildungen  $\text{can}_i : M \times N_i \rightarrow S$  und diese sind universell: Ist irgendeine abelsche Gruppe  $A$  gegeben und eine Familie von bilinearen Abbildungen  $b_i : M \times N_i \rightarrow A$ , so gibt es jeweils genau einen Gruppenhomomorphismus  $\tilde{b} : S \rightarrow A$  mit  $b_i = \tilde{b} \circ \text{can}_i$ .  $\square$

*Beispiel 3.2.11.* Wir haben  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}^7 \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^7$ .

3.2.12. Das Tensorprodukt vertauscht keineswegs mit beliebigen Produkten, es vertauscht jedoch mit beliebigen "Kolimites", vergleiche 5.1.30.

**Definition 3.2.13.** Eine Sequenz  $A' \rightarrow A \rightarrow A''$  von abelschen Gruppen heißt **rechtsexakt** genau dann, wenn sie exakt ist bei  $A$  und wenn zusätzlich  $A \rightarrow A''$  eine Surjektion ist. Wir schreiben rechtsexakte Sequenzen meist  $A' \rightarrow A \twoheadrightarrow A''$ .

**Lemma 3.2.14 (Das Tensorprodukt ist rechtsexakt).** *Ist  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $N' \rightarrow N \twoheadrightarrow N''$  eine rechtsexakte Sequenz von  $R$ -Linksmoduln, so entsteht durch Darantensorieren von  $M$  eine rechtsexakte Sequenz von abelschen Gruppen  $M \otimes_R N' \rightarrow M \otimes_R N \twoheadrightarrow M \otimes_R N''$ .*

*Beweis.* Daß hier die Surjektivität erhalten bleibt, ist offensichtlich. Daß die Verknüpfung auch nach dem Tensorieren verschwindet ebenso. Wir kürzen für diesen Beweis  $\otimes_R = \otimes$  ab und haben also eine Surjektion

$$\text{cok}(M \otimes N' \rightarrow M \otimes N) \twoheadrightarrow M \otimes N''$$

Wir müssen zeigen, daß sie eine Injektion ist. Nun ist aber  $M \times N'' \rightarrow \text{cok}$ ,  $(m, \bar{n}) \mapsto \overline{m \otimes n}$  für  $n \in N$  eine wohldefinierte  $R$ -bilineare Abbildung und induziert folglich eine Abbildung  $M \otimes N'' \rightarrow \text{cok}$ . Man sieht, daß wir so eine inverse Abbildung zu unserer Surjektion  $\text{cok} \twoheadrightarrow M \otimes N''$  erhalten haben.  $\square$

3.2.15. Die drei vorstehenden Lemmata gelten analog auch für den anderen Tensorfaktor.

*Beispiel 3.2.16.* Wir erhalten  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , indem wir die Sequenz  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mit der Multiplikation  $(2\cdot)$  als erster Abbildung tensorieren mit  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und die Rechtsexaktheit des Tensorprodukts ausnutzen.

**Lemma 3.2.17.** *Ist  $M$  ein  $R$ -Rechtsmodul und  $\mathfrak{m} \subset R$  ein Rechtsideal, d.h. ein Untermodul des  $R$ -Rechtsmoduls  $R$ , und betrachten wir in  $M$  den Untermodul  $\mathfrak{m}M = \{\sum a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{m}, m_i \in M\}$ , so induziert die Multiplikation einen natürlichen Isomorphismus*

$$(R/\mathfrak{m}) \otimes_R M \cong M/\mathfrak{m}M$$

*Beweis.* Das folgt, indem wir auf  $\mathfrak{m} \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$  den Funktor  $\otimes_R M$  anwenden.  $\square$

*Beispiel 3.2.18.* Das Tensorprodukt ist im allgemeinen nicht linksexakt: Wendet man auf die Multiplikation  $(2\cdot) : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$  den Funktor  $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  an, so erhält man die Nullabbildung  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Definition 3.2.19.** Eine abelsche Gruppe heißt **torsionsfrei** genau dann, wenn die Multiplikation mit jeder von Null verschiedenen ganzen Zahl auf unserer Gruppe eine Injektion induziert. Allgemeiner heißt ein Modul über einem Ring **torsionsfrei** genau dann, wenn die Multiplikation mit jedem von Null verschiedenen Ringelement auf unserem Modul eine Injektion induziert.

**Lemma 3.2.20.** Aus einer Injektion  $N' \hookrightarrow N$  von abelschen Gruppen entsteht durch Darantensorieren einer torsionsfreien abelschen Gruppe  $M$  eine Injektion  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N' \hookrightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ .

*Beweis.* Ist  $M$  endlich erzeugt, so ist  $M$  frei nach ?? und das Lemma folgt aus 3.2.10. Wir führen nun den allgemeinen Fall darauf zurück. Jedes Element  $t \in M \otimes_{\mathbb{Z}} N'$  ist ja Bild eines  $t_1 \in M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} N'$  für eine geeignete endlich erzeugte Untergruppe  $M_1 \subset M$ . Geht  $t$  nach Null in  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ , so auch in  $M_2 \otimes_{\mathbb{Z}} N$  für eine geeignete endlich erzeugte Untergruppe  $M_2 \subset M$  mit  $M_1 \subset M_2$ . Nach dem bereits behandelten Fall verschwindet damit  $t_1$  schon in  $M_2 \otimes_{\mathbb{Z}} N'$  und erst recht in  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N'$  und es folgt  $t = 0$ .  $\square$

3.2.21. In einer Sprache, die wir später einführen werden, hört sich dieser Beweis so an: Für endlich erzeugte Gruppen gilt das Lemma, da sie frei sind. Eine beliebige torsionsfreie Gruppe ist der filtrierende direkte Limes ihrer endlich erzeugten Untergruppen, das Tensorprodukt kommutiert nach 5.1.30 mit direkten Limites, und filtrierende direkte Limites sind nach 5.1.28 exakt.

*Übung 3.2.22.* Ist  $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$  eine spaltende kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln, so bleibt die Sequenz exakt unter  $M \otimes_R$ . Insbesondere ist also das Tensorieren über einem Körper stets exakt.

*Übung 3.2.23.* Seien  $R, S$  Ringe und  $M \in \text{Mod-}S$ ,  $N \in S\text{-Mod-}R$  und  $L \in R\text{-Mod}$  Moduln. So ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus  $(M \otimes_S N) \otimes_R L \xrightarrow{\sim} M \otimes_S (N \otimes_R L)$ .

*Übung 3.2.24.* Sei  $S \rightarrow R$  ein Ringhomomorphismus. Ist  $M$  ein  $S$ -Modul und  $(m_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $M$ , so bilden die  $1 \otimes m_i$  eine Basis des  $R$ -Moduls  $R \otimes_S M$ .

*Übung 3.2.25.* Ist  $\varphi : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus derart, daß  $S$  als Ring erzeugt wird vom Bild  $\varphi(R)$  von  $R$  mitsamt den Inversen der Elemente aus  $\varphi(R) \cap S^\times$ , so ist für  $M \in \text{Mod-}S$  und  $N \in S\text{-Mod}$  die kanonische Abbildung eine Bijektion

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} M \otimes_S N$$

Speziell liefert für ein Ideal  $\mathfrak{m} \subset R$  und  $M \in \text{Mod-}R/\mathfrak{m}$  sowie  $N \in R/\mathfrak{m}\text{-Mod}$  die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus  $M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{R/\mathfrak{m}} N$ , und für je zwei  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume  $M, N$  liefert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathbb{Q}} N$ .

*Übung 3.2.26.* Genau dann besteht eine abelsche Gruppe  $M$  nur aus Elementen endlicher Ordnung, wenn gilt  $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ . Etwas allgemeiner wird das auch aus ?? folgen.

*Übung 3.2.27.* Sind  $M' \rightarrow M \rightarrow M''$  und  $N' \rightarrow N \rightarrow N''$  rechtsexakte Sequenzen von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring  $R$ , so ist auch die Sequenz  $(M' \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N') \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow M'' \otimes_R N''$  rechtsexakt.

*Übung 3.2.28.* Gegeben ein Rechtsmodul  $M$  über einem Ring  $R$  erhalten wir aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts ein adjungiertes Paar von Funktoren  $(M \otimes_R, \text{Ab}(M, \ ))$  zwischen den Kategorien  $R\text{-Mod}$  und  $\text{Ab}$ . In größerer Allgemeinheit wird das in ?? diskutiert.

*Ergänzende Übung 3.2.29.* Man zeige: Gegeben  $A \supset k$  ein Ring mit einem Teiling und  $M$  ein  $A$ -Linksmodul ist der Komplex

$$\dots \rightarrow A \otimes_k A \otimes_k M \rightarrow A \otimes_k M \rightarrow M$$

mit dem Randoperator

$$\begin{aligned} a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes m &\mapsto a_0 a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes m \\ &\quad - a_0 \otimes a_1 a_2 \otimes \dots \otimes a_n \otimes m \\ &\quad \dots \\ &\quad \pm a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n m \end{aligned}$$

exakt, ja sogar nullhomotop. Er heißt der **Bar-Komplex** oder präziser der **nicht normalisierte Bar-Komplex**. Hinweis: Das Davorschreiben von  $1 \otimes$  ist eine Homotopie der Identität mit der Nullabbildung.

### 3.3 Erste Anwendungen in der Homologietheorie

**Proposition 3.3.1.** *Ist  $C \in \text{Ket}$  ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen und  $M$  eine abelsche Gruppe, so definiert die Vorschrift  $m \otimes [c] \mapsto [m \otimes c]$  Homomorphismen*

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{H}_q C) \rightarrow \mathcal{H}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} C)$$

*Ist  $M$  torsionsfrei, so sind diese Homomorphismen sogar Isomorphismen.*

*Beweis.* Die offensichtlichen vertikalen Abbildungen liefern ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{B}_q C) & \rightarrow & M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{Z}_q C) & \rightarrow & M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{H}_q C) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{B}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} C) & \hookrightarrow & \mathcal{Z}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} C) & \rightarrow & \mathcal{H}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} C) \end{array}$$



in dem auch die obere Horizontale rechtsexakt ist nach 3.2.14 rechtsexakt ist und das deshalb die behauptete Abbildung auf der Homologie induziert. Ist  $M$  torsionsfrei, so ist die obere Horizontale auch exakt und bei Vertikalen sind Isomorphismen und induzieren deshalb einen Isomorphismus auf der Homologie.  $\square$

*Übung 3.3.2.* Für jede abelsche Gruppe  $M$  und jeden topologischen Raum  $X$  und jedes  $m \in M$  und jede  $q$ -Kette  $c \in S_q X$  erklären wir die  $q$ -Kette  $mc \in S_q(X; M)$  mit Koeffizienten in  $M$  in der hoffentlich offensichtlichen Weise. Dann liefert die Abbildung  $m \otimes c \mapsto mc$  Isomorphismen  $M \otimes_{\mathbb{Z}} S_q X \xrightarrow{\sim} S_q(X; M)$  für alle  $q$  und sogar einen Isomorphismus  $M \otimes_{\mathbb{Z}} S X \xrightarrow{\sim} S(X; M)$  von Komplexen.

**Korollar 3.3.3.** *Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $M$  eine abelsche Gruppe, so liefert die Vorschrift  $m \otimes [c] \mapsto [mc]$  natürliche Homomorphismen*

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(X) \rightarrow H_q(X; M)$$

*Ist  $M$  torsionsfrei, so sind diese Homomorphismen sogar Isomorphismen.*

*Beweis.* Die vorhergehende Proposition 3.3.1 liefert uns Homomorphismen  $M \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(X) \rightarrow \mathcal{H}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} S X)$ ,  $m \otimes [c] \mapsto [m \otimes c]$ , und Übung 3.3.2 liefert uns weiter Isomorphismen  $\mathcal{H}_q(M \otimes_{\mathbb{Z}} S X) \xrightarrow{\sim} H_q(X; M)$ ,  $[m \otimes c] \mapsto [mc]$ .  $\square$

### 3.4 Torsionsprodukt von abelschen Gruppen

**Definition 3.4.1 (Tensorprodukt von Komplexen).** Sind  $C, D$  Komplexe von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring  $R$ , so bildet man einen Komplex von abelschen Gruppen  $C \otimes_R D$ , ihr **Tensorprodukt** alias den **Tensorkomplex**, durch die Vorschrift  $(C \otimes_R D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R D_q$  mit dem Differential

$$\partial(c \otimes d) = \partial c \otimes d + (-1)^{|c|} c \otimes \partial d$$

3.4.2. Ob mit dem Symbol  $\otimes$  das Tensorprodukt zweier Moduln oder vielmehr das Tensorprodukt zweier Komplexe gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen. Da das Tensorprodukt mit direkten Summen vertauscht, kommt es darauf auch nicht so wesentlich an.

3.4.3. Offensichtlich ist das Tensorprodukt von Kettenkomplexen auch ein Funktor  $\text{Ket}(\text{Mod-}R) \times \text{Ket}(R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Ket}(\text{Ab})$ . Er geht sogar auf die Homotopie-Kategorien über: Sind  $f, g : C \rightarrow C'$  Kettenhomomorphismen und ist  $\delta$  eine Kettenhomotopie zwischen  $f$  und  $g$ , in Formeln  $\delta\partial + \partial\delta = f - g$ , so ist  $\delta \otimes \text{id}$  eine Kettenhomotopie zwischen  $f \otimes \text{id}$  und  $g \otimes \text{id}$ . Analoges gilt

für den zweiten Tensorfaktor, und das Tensorprodukt definiert damit in der Tat auch einen Funktor

$$\text{Hot}(\text{Mod-}R) \times \text{Hot}(R\text{-Mod}) \rightarrow \text{Hot}(\text{Ab})$$

**Definition 3.4.4.** Gegeben eine abelsche Gruppe  $M$  betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \rightarrow M$$

Mit  $\mathbb{Z}M$  meinen wir hier die freie abelsche Gruppe über der Menge  $M$  und mit  $KM$  schlicht den Kern der offensichtlichen Surjektion  $\mathbb{Z}M \rightarrow M$ . Wir notieren  $\mathcal{P}M$  das Anfangsstück dieser kurzen exakten Sequenz, also den Komplex mit  $\mathcal{P}_1M = KM$  und  $\mathcal{P}_0M = \mathbb{Z}M$  und  $\mathcal{P}_qM = 0$  für  $q \neq 0, 1$ , und nennen ihn die **Standardauflösung von  $M$** . Gegeben zwei abelsche Gruppen  $M, N$  definiert man eine dritte abelsche Gruppe  $M * N$ , ihr **Torsionsprodukt**, als die erste Homologiegruppe des Tensorprodukts ihrer Standardauflösungen, in Formeln

$$M * N := M *_Z N := \mathcal{H}_1(\mathcal{P}M \otimes_Z \mathcal{P}N)$$

Wir erhalten so in offensichtlicher Weise einen Funktor  $*$  :  $\text{Ab} \times \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ .

3.4.5. Diese Definition mag auf den ersten Blick bizarr wirken. Erst das gleich folgende Beispiel 3.4.8 und die Anwendung im universellen Koeffiziententheorem 3.5.2 zeigen ihre Sinnhaftigkeit. Vom höheren Standpunkt aus betrachtet ist das Torsionsprodukt unser erstes Beispiel für einen “derivierten Funktor”, genauer haben wir hier den “ersten derivierten Funktor des Tensorprodukts” vor uns, vergleiche III.3.2.19.

3.4.6. Wir kürzen im folgenden  $\otimes_Z = \otimes$  ab. Bezeichnet  $M[0]$  die Gruppe  $M$ , aufgefaßt als Komplex mit einem einzigen Eintrag im Grad Null, so erhalten wir eine surjektive Kettenabbildung  $\mathcal{P}M \twoheadrightarrow M[0]$ . Wir behaupten, daß für jedes weitere  $N$  die induzierte Abbildung  $\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M[0] \otimes \mathcal{P}N$  Isomorphismen auf der Homologie

$$\mathcal{H}_i(\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_i(M[0] \otimes \mathcal{P}N)$$

liefert. In der Tat ist der Kern unserer surjektiven Kettenabbildung  $\mathcal{P}M \twoheadrightarrow M[0]$  der Komplex  $K^2M$  mit  $KM$  in den Graden Null und Eins, der Identität dazwischen als Randoperator und Nullen sonst. Dieser Komplex  $K^2M$  ist nun offensichtlich nullhomotop. Da  $\mathcal{P}N$  aus torsionsfreien Gruppen besteht, erhalten wir mit 3.2.20 eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$K^2M \otimes \mathcal{P}N \hookrightarrow \mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \twoheadrightarrow M[0] \otimes \mathcal{P}N$$

und da darin der erste Komplex nullhomotop ist, muß nach der langen exakten Homologiesequenz die zweite Abbildung Isomorphismen auf der Homologie liefern. Ist insbesondere von zwei abelschen Gruppen  $M, N$  eine torsionsfrei, so gilt  $M * N = 0$ . In der Tat folgt für  $M$  torsionsfrei sofort

$$M * N = \mathcal{H}_1(\mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_1(M[0] \otimes \mathcal{P}N) = 0$$

mit 3.2.20 für die letzte Gleichung. Den Fall von torsionsfreiem  $N$  behandelt man analog.

3.4.7. Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen  $M' \hookrightarrow M \rightarrow M''$  erhält man nach 3.2.20 für alle  $N$  eine kurze exakte Sequenz von Komplexen  $M' \otimes \mathcal{P}N \hookrightarrow M \otimes \mathcal{P}N \rightarrow M'' \otimes \mathcal{P}N$  und daraus mit 3.4.6 eine exakte Sequenz, die sogenannte **Torsionssequenz** oder genauer **Torsionssequenz im ersten Eintrag**

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M' * N & \hookrightarrow & M * N & \rightarrow & M'' * N & \rightarrow \\ & & \rightarrow & & M' \otimes N & \rightarrow & M \otimes N & \rightarrow \\ & & & & \rightarrow & & M'' \otimes N & \rightarrow 0 \end{array}$$

die natürlich ist in der kurzen exakten Sequenz  $M' \hookrightarrow M \rightarrow M''$  und in  $N$ . Analog konstruieren wir die **Torsionssequenz im zweiten Eintrag**.

3.4.8. Für jede abelsche Gruppe  $N$  und jede natürliche Zahl  $m \neq 0$  liefert der Randoperator der Torsionssequenz zur offensichtliche kurzen exakten Sequenz  $\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  einen Isomorphismus

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * N \xrightarrow{\sim} \{a \in N \mid ma = 0\}$$

Die Gruppe auf der rechten Seite würde man in Worten die “Gruppe aller Elemente von  $N$  mit  $m$ -Torsion” nennen, daher wohl auch die Bezeichnung der linken Seite als “Torsionsprodukt”.

*Übung 3.4.9.* Man zeige, daß das Torsionsprodukt mit beliebigen direkten Summen vertauscht.

*Ergänzende Übung 3.4.10.* Das Torsionsprodukt  $M * N$  von zwei abelschen Gruppen besitzt keine Elemente unendlicher Ordnung. Hinweis: Man zeige  $(M * N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ .

3.4.11. Sind  $C, D$  Komplexe von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring  $R$ , so ist  $v : C \otimes_R D \rightarrow D \otimes_R C$ ,  $c \otimes d \mapsto (-1)^{|c||d|} d \otimes c$  ein Isomorphismus von Kettenkomplexen. Speziell erhalten wir so für  $C, D \in \text{Ket}$  einen natürlichen Isomorphismus

$$v : C \otimes D \xrightarrow{\sim} D \otimes C$$

In der Tat prüfen wir die Bedingung  $\partial v(c \otimes d) = v\partial(c \otimes d)$  durch die Umformungen

$$\begin{aligned} \partial v(c \otimes d) &= (-1)^{|c||d|} \partial(d \otimes c) \\ &= (-1)^{|c||d|} \partial d \otimes c + (-1)^{|c||d|+|d|} d \otimes \partial c \\ v\partial(c \otimes d) &= v(\partial c \otimes d) + (-1)^{|c|} v(c \otimes \partial d) \\ &= (-1)^{|d||c|+|d|} d \otimes \partial c + (-1)^{|c|} (-1)^{|c||d|+|c|} \partial d \otimes c \end{aligned}$$

*Ergänzende Übung 3.4.12.* Man zeige, daß unser  $v : \mathcal{P}M \otimes \mathcal{P}N \rightarrow \mathcal{P}N \otimes \mathcal{P}M$  aus 3.4.11 Isomorphismen  $v_{M,N} : M * N \xrightarrow{\sim} N * M$  liefert mit  $v_{M,N} \circ v_{N,M} = \text{id}$ . Man zeige weiter, daß für  $M' \hookrightarrow M \rightarrow M''$  eine kurze exakte Sequenz sogar das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M'' * N & \longrightarrow & M' \otimes N \\ \downarrow & & \downarrow \\ N * M'' & \longrightarrow & N \otimes M' \end{array}$$

kommutiert mit den Randabbildungen der entsprechenden Torsionssequenzen in den Horizontalen und unseren Vertauschungen in den Vertikalen.

*Ergänzende Übung 3.4.13.* Seien  $A, B$  Ringe und  $M \in \text{Ket}(\text{Mod-}A)$ ,  $X \in \text{Ket}(A\text{-Mod-}B)$  und  $N \in \text{Ket}(\text{Mod-}B)$  Komplexe. So erhalten wir mit dem Hom aus 1.4.10 einen Isomorphismus von Komplexen

$$\text{Hom}_{-B}(M \otimes_A X, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{-A}(M, \text{Hom}_{-B}(X, N))$$

gegeben durch  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  mit  $\tilde{\varphi}(m)(x) = \varphi(m \otimes x)$ , und der induzierte Isomorphismus auf den Nullzykeln liefert ein adjungiertes Paar  $(\otimes_A X, \text{Hom}_{-B}(X, \ ))$  von Funktoren zwischen  $\text{dgMod}_{-A}$  und  $\text{dgMod}_{-B}$ . Speziell erhalten wir so eine Adjunktion

$$(\otimes_A X, \text{Hom}(X, \ ))$$

von Funktoren  $\text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$  von der Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen in sich selber.

*Ergänzung 3.4.14.* Arbeiten wir in Übung 3.4.13 statt mit Rechts- mit Linksmoduln  $M \in \text{Ket}(A\text{-Mod})$ ,  $X \in \text{Ket}(B\text{-Mod-}A)$  und  $N \in \text{Ket}(B\text{-Mod})$ , so haben wir analog

$$\text{Hom}_B(X \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_B(X, N))$$

vermittels  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  mit  $\tilde{\varphi}(m)(x) = (-1)^{|m||x|} \varphi(x \otimes m)$ . Daraus erhalten wir insbesondere ein adjungiertes Paar  $(X \otimes_A \ , \text{Hom}_B(X, \ ))$  von Funktoren zwischen  $\text{dgMod}_A$  und  $\text{dgMod}_B$ .

3.4.15. Bezeichne  $\text{Ket}$  die Kategorie der Komplexe abelscher Gruppen oder allgemeiner der Komplexe von Moduln über einem kommutativen Ring  $k$ . Wir werden im folgenden einer Vielzahl von natürlichen Kettenabbildungen begegnen, die alle aus den folgenden drei Grundkonstruktionen entstehen:

1. Dem Funktor  $\otimes : \text{Ket} \times \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$  aus 3.4.1;
2. Der Isotransformation  $a : \otimes(\otimes \times \text{Id}) \xrightarrow{\cong} \otimes(\text{Id} \times \otimes)$  von Funktoren  $\text{Ket} \times \text{Ket} \times \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$  alias der Sammlung von natürlichen Isomorphismen  $a : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C)$  mit  $(a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes (b \otimes c)$  nach 3.8.4, genannt "Assoziatoren";
3. Der Isotransformation von Funktoren  $v : \otimes\tau \xrightarrow{\cong} \otimes$  für die Vertauschung  $\tau : \text{Ket} \times \text{Ket} \rightarrow \text{Ket} \times \text{Ket}$  alias unserer Wahl von natürlichen Isomorphismen  $v : C \otimes D \xrightarrow{\cong} D \otimes C$  aus 3.4.11, genannt "Kommutatoren".

Die Vorzeichenwahlen in diesen Konstruktionen haben wir in der Weise verträglich gewählt, daß gegeben eine endliche Familie von Komplexen und zwei Tensorausdrücke, in denen jeder unserer Komplexe genau einmal vorkommt, je zwei mit unseren Assoziatoren  $a$  und Kommutatoren  $v$  gebildeten Morphismen zwischen unseren beiden Tensorausdrücken übereinstimmen. Ist etwa unsere Familie  $A, B, C$  und betrachten wir die beiden Tensorausdrücke  $A \otimes (B \otimes C)$  und  $(C \otimes A) \otimes B$ , so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (B \otimes C) \otimes A & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 A \otimes (B \otimes C) & & & & B \otimes (C \otimes A) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 (A \otimes B) \otimes C & & & & (C \otimes A) \otimes B \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & C \otimes (A \otimes B) & & 
 \end{array}$$

in dem alle Pfeile abwechselnd als Kommutatoren und Assoziatoren in hoffentlich offensichtlicher Weise zu verstehen sind. Im allgemeinen sieht man unschwer ein, daß jede derartige Verknüpfung auf Tensoren von homogenen Elementen, unabhängig von der Klammerung, durch eine Vorschrift der Art  $a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto \pm a_{\sigma(1)} \otimes a_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(n)}$  gegeben wird, mit einem Vorzeichen, das der Parität der Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren  $a_i$  von ungeradem Grad in unserem Tensor entspricht. Salopp gesprochen gilt es

also, “ein Vorzeichen  $(-1)^{|a||b|}$  einzuführen, wann immer zwei homogene Tensorfaktoren  $a, b$  der Grade  $|a|, |b|$  vertauscht werden”. Im übrigen liegt man mit dieser Faustregel auch richtig bei der Formel  $\partial(c \otimes d) = \partial c \otimes d + (-1)^{|c|} c \otimes \partial d$  aus 3.4.1 für das Differential homogener Tensoren, wenn man sich  $\partial$  als “homogen von ungeradem Grad” denkt.

3.4.16. In ?? bzw. ?? werden wir ganz allgemein eine “symmetrische Tensor-kategorie” erklären als ein Datum dieser Art mit gewissen Eigenschaften, die in der hier vorliegenden Situation unter anderem deshalb erfüllt sind, weil wir “die Vorzeichen bei allen drei Grundkonstruktionen kompatibel gewählt haben.” Es sind jedoch im hier vorliegenden Fall der Kettenkomplexe durchaus auch andere “kompatible Vorzeichenwahlen” denkbar.

3.4.17. Nach 3.4.13 besitzt für alle  $X \in \text{Ket}$  der Funktor  $\otimes X : \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}$  einen Rechtsadjungierten in der Gestalt des Funktors  $\text{Hom}(X, \_)$  mitsamt den in 3.4.13 beschriebenen Adjunktionsabbildungen. In dieser Weise werden also die Funktoren  $\text{Hom}(X, \_)$  oder präziser diese Funktoren zusammen mit den fraglichen Adjunktionen durch den Funktor  $\otimes$  aus unseren Grundkonstruktionen bereits eindeutig festgelegt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

### 3.5 Das universelle Koeffiziententheorem

3.5.1. In diesem Abschnitt kürzen wir systematisch  $\otimes_{\mathbb{Z}} = \otimes$  und  $*_{\mathbb{Z}} = *$  ab.

**Satz 3.5.2 (Universelles Koeffiziententheorem der Homologie).** *Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und eine abelsche Gruppe  $G$  gibt es Isomorphismen*

$$H_q(X; G) \cong (H_q(X) \otimes G) \oplus (H_{q-1}(X) * G)$$

3.5.3. Dasselbe gilt für relative Homologie und mit Koeffizienten in einem beliebigen Hauptidealring  $R$ , für den wir allerdings erst noch das Torsionsprodukt  $*_R$  einführen müßten. Der Satz behauptet nur die Existenz solcher Isomorphismen. Inwieweit sie natürlich sind, wird im Beweis genauer diskutiert werden.

*Beispiel 3.5.4.* Wir haben einerseits  $H_2(\mathbb{P}^2\mathbb{R}; \mathbb{Z}) = 0$  nach 2.10.23 oder 3.1.7 und  $H_2(\mathbb{P}^2\mathbb{R}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  nach 3.1.6 oder 3.1.7. In diesem Fall behauptet unser Theorem die Existenz eines Isomorphismus

$$H_2(\mathbb{P}^2\mathbb{R}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H_1(\mathbb{P}^2\mathbb{R}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Das mag der Leser auch direkt prüfen, zum Beispiel mithilfe des Hurwitz-Isomorphismus und I.4.6.17.

*Beweis.* Tensorieren wir die kurze exakte Sequenz  $KG \hookrightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow G$  über  $\mathbb{Z}$  mit dem Komplex von freien abelschen Gruppen  $SX$ , so erhalten wir mit 3.3.2 eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$SX \otimes KG \hookrightarrow SX \otimes \mathbb{Z}G \rightarrow S(X; G)$$

Bilden wir die exakte Homologiesequenz und beachten die Isomorphismen  $(\mathcal{H}_q SX) \otimes \mathbb{Z}G \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q(SX \otimes \mathbb{Z}G)$  und  $(\mathcal{H}_q SX) \otimes KG \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q(SX \otimes KG)$  nach 3.3.1, so ergibt sich mit der Abkürzung  $\mathcal{H}_q(SX) = H_q$  die lange exakte Sequenz

$$H_q \otimes KG \rightarrow H_q \otimes \mathbb{Z}G \rightarrow H_q(X; G) \rightarrow H_{q-1} \otimes KG \rightarrow H_{q-1} \otimes \mathbb{Z}G$$

und dann mit der Rechtsexaktheit von  $\otimes$  und der Definition von  $*$  und 3.5.6 eine kurze exakte Sequenz

$$H_q(X) \otimes G \hookrightarrow H_q(X; G) \rightarrow H_{q-1}(X) * G$$

Es bleibt zu zeigen, daß sie spaltet. Aber die kurze exakte Sequenz  $Z_q X \hookrightarrow S_q X \rightarrow B_{q-1} X$  spaltet, da  $B_{q-1} X \subset S_{q-1} X$  frei ist nach 3.5.7, wir finden nach 2.2.9 also ein Linksinverses  $S_q X \rightarrow Z_q X$  der Einbettung der Zykel in die Ketten und das induziert die gesuchte Spaltung  $H_q(X; G) \rightarrow H_q(X) \otimes G$ .  $\square$

3.5.5. Die Spaltung im vorhergehenden Beweis ist für festes  $X$  natürlich in  $G$ . Sie kann aber nicht bei festem  $G \neq 0$  natürlich in  $X$  gewählt werden. Dazu hätte ich gerne ein gut zugängliches Beispiel etwa eines Raums  $X$  mit einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow X$ , die die Identität auf  $H_1(X)$  und  $H_2(X)$  induziert, nicht aber auf  $H_2(X; G)$ .

3.5.6. Ist  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$  eine exakte Sequenz, so ist  $(\text{cok}(A \rightarrow B)) \rightarrow C \rightarrow (\text{ker}(D \rightarrow E))$  eine kurze exakte Sequenz.

**Satz 3.5.7.** *Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei.*

3.5.8. Der anschließende Beweis zeigt allgemeiner: Jeder Untermodul eines freien Moduls über einem Hauptidealring ist frei. Für endlich erzeugte Gruppen folgt das aus ?? in Verbindung mit ??, für endlich erzeugte Moduln analog aus ?? in Verbindung mit ?. Die Hauptarbeit besteht darin, auch nicht notwendig endlich erzeugte Gruppen bzw. Moduln zu behandeln.

*Beweis.* Sei  $I$  eine Menge und  $U \subset \mathbb{Z}I$  eine Untergruppe. Wir betrachten die Menge aller Paare  $(J, B)$  wo  $J \subset I$  eine Teilmenge ist und  $B$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis des Schnitts  $U \cap \mathbb{Z}J$ . Diese Menge ist nicht leer und ist induktiv geordnet. Sie besitzt also nach Zorns Lemma ?? ein maximales Element  $(J_m, B_m)$  und es

gilt zu zeigen  $J_m = I$ . Aber sonst sei  $i \in I \setminus J_m$ . Das Bild von  $U \cap \mathbb{Z}(J_m \cup \{i\})$  in  $\mathbb{Z}i$  unter der offensichtlichen Projektion ist von der Form  $r\mathbb{Z}i$  für ein  $r \in \mathbb{Z}$ . Ist  $r \neq 0$ , so wählen wir ein Urbild  $u$  von  $ri$  in  $U$  und  $(J_m \cup \{i\}, B_m \cup \{u\})$  wäre ein größeres Paar. Ist  $r = 0$ , so wäre schon  $(J_m \cup \{i\}, B_m)$  ein größeres Paar. In jedem Fall steht  $J_m \neq I$  im Widerspruch zur Maximalität von  $(J_m, B_m)$ .  $\square$

### 3.6 Homologie von Produkten

3.6.1. Gegeben topologische Räume  $X, Y$  scheint mir anschaulich klar, daß man natürliche Produktabbildungen

$$(H_p X) \times (H_q Y) \rightarrow H_{p+q}(X \times Y)$$

erwarten darf. Suchen wir zum Beispiel das Produkt von zwei Homologieklassen vom Grad 1, und werden diese Klassen repräsentiert durch geschlossene Wege in  $X$  bzw.  $Y$ , so liefern unsere beiden Wege zusammen eine Abbildung des 2-Torus nach  $X \times Y$ , und jede Triangulierung dieses 2-Torus liefert einen 2-Zykel im Produkt, der dann das Produkt unserer beiden 1-Klassen repräsentieren soll. Diese Anschauung werden wir im folgenden zur Definition des "Kreuzprodukts der Homologie" formalisieren und zeigen, wie uns die "Künneth-Formel" erlaubt, die Homologie eines Produkts aus der Homologie seiner Faktoren zu berechnen. Arbeiten wir zur Vereinfachung mit Koeffizienten in einem Körper  $k$ , so liefert nach dieser Formel das Kreuzprodukt sogar Isomorphismen

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X; k) \otimes_k H_q(Y; k) \xrightarrow{\sim} H_n(X \times Y; k)$$

Besitzen insbesondere  $X$  und  $Y$  eine im Sinne von 2.4.12 wohldefinierte Eulercharakteristik, so auch  $X \times Y$  und es gilt  $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ . Der Fall ganzzahliger Koeffizienten ist nur unwesentlich komplizierter. Nach diesen Vorbemerkungen beginnen wir nun die formale Arbeit.

**Satz 3.6.2 (Eilenberg-Zilber).** *Von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe betrachte man die beiden Funktoren  $S(\times) : (X, Y) \mapsto S(X \times Y)$  und  $S \otimes S : (X, Y) \mapsto SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY$ .*

1. *Es gibt eine Transformation von Funktoren  $\eta : S \otimes S \Rightarrow S(\times)$ , die auf der nullten Homologie dieselben Abbildungen induziert wie die offensichtlichen Isomorphismen  $S_0 X \otimes_{\mathbb{Z}} S_0 Y \xrightarrow{\sim} S_0(X \times Y)$ .*
2. *Für jede solche Transformation sind die Kettenabbildungen  $\eta_{(X,Y)}$  für alle  $X, Y$  Homotopieäquivalenzen.*



3. Je zwei solche Transformationen  $\eta$  und  $\eta'$  bestehen aus homotopieäquivalenten Kettenabbildungen, d.h. gegeben zwei solche Transformationen  $\eta$  und  $\eta'$  haben wir  $\eta_{(X,Y)} \simeq \eta'_{(X,Y)}$  für alle  $X, Y$ .

3.6.3. Ich gebe zu, daß die in diesem Text gewählte Terminologie zu Verwechslungen der Kategorie  $\text{Top}^2 = \text{Top} \times \text{Top}$  aller Paare topologischer Räume mit der Kategorie  $\text{Top}^c$  aller Raumpaare aus 2.1.6 einläßt. Mir ist leider keine bessere Terminologie eingefallen.

3.6.4. Der vorstehende Satz liefert uns eine wohlbestimmte Isotransformation zwischen Funktoren von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, die **Eilenberg-Zilber-Transformation**

$$S \otimes S \xrightarrow{\simeq} S(\times)$$

Eine Kettenabbildung  $\eta_{(X,Y)} : SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY \rightarrow S(X \times Y)$ , die diese Äquivalenz “materialisiert”, nennen wir eine **Eilenberg-Zilber-Abbildung**. Will man ihre anschauliche Bedeutung verstehen, so mag das in 3.7.3 gegebene explizite Beispiel helfen. Wir wollen den Satz abstrakt mithilfe der Methode der “azyklischen Modelle” beweisen und führen dazu nun die nötige Terminologie ein. Zum Aufwärmen beweisen wir erst einmal eine einfachere Aussage, das sogenannte “Hauptlemma der homologischen Algebra”.

*Übung 3.6.5.* Man zeige, daß für je zwei topologische Räume  $X, Y$  der offensichtliche Isomorphismus  $S_0 X \otimes_{\mathbb{Z}} S_0 Y \xrightarrow{\sim} S_0(X \times Y)$  einen Isomorphismus  $\mathcal{H}_0(SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0 S(X \times Y)$  induziert.

**Definition 3.6.6.** Sei  $R$  ein Ring. Ein  $R$ -Modul  $P$  heißt **projektiv** genau dann, wenn jeder surjektive Homomorphismus  $A \twoheadrightarrow A''$  von  $R$ -Moduln eine Surjektion  $\text{Mod}_R(P, A) \twoheadrightarrow \text{Mod}_R(P, A'')$  induziert.

*Beispiel 3.6.7.* Ist  $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$  eine kurze exakte Sequenz von Moduln über einem Ring  $R$  und ist  $M$  ein weiterer  $R$ -Modul, so ist die induzierte Sequenz

$$\text{Mod}_R(M, A') \hookrightarrow \text{Mod}_R(M, A) \twoheadrightarrow \text{Mod}_R(M, A'')$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß keineswegs wieder eine Surjektion sein. Für die kurze exakte Sequenz  $2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  etwa kommt die Identität  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  nicht von einem Morphismus  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  her.

*Beispiele 3.6.8.* Gegeben ein Ring  $R$  ist jeder freie  $R$ -Modul projektiv. Sind  $P', P''$  zwei  $R$ -Moduln und ist ihre Summe  $P' \oplus P''$  projektiv, so auch die Summanden  $P'$  und  $P''$ . Über einem Ring der Gestalt  $R = R' \times R''$  für zwei Ringe  $R', R''$  ist also  $R' \times 0$  ein projektiver Modul, der jedoch nicht frei ist, falls  $R'$  und  $R''$  verschieden sind von Null.

**Lemma 3.6.9.** *Ein Modul über einem Ring ist projektiv genau dann, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist.*

*Beweis.* Natürlich ist jeder direkte Summand eines freien Moduls projektiv. Ist umgekehrt  $P$  ein projektiver  $R$ -Modul, so finden wir einen freien Modul  $F$  und eine Surjektion  $F \twoheadrightarrow P$ . Nach Annahme induziert sie eine Surjektion  $\text{Mod}_R(P, F) \twoheadrightarrow \text{Mod}_R(P, P)$  und jedes Urbild der Identität auf  $P$  ist dann eine Spaltung der Surjektion  $F \twoheadrightarrow P$ .  $\square$

**Satz 3.6.10 (Hauptlemma der homologischen Algebra).** *Seien gegeben  $R$  ein Ring,  $P$  ein Komplex projektiver  $R$ -Moduln mit  $P_q = 0$  für  $q < 0$  und  $C$  ein Komplex von  $R$ -Moduln mit  $\mathcal{H}_q(C) = 0$  für  $q > 0$ . So induziert das Bilden der nullten Homologie eine Bijektion zwischen Homotopieklassen von Kettenabbildungen und  $R$ -linearen Abbildungen auf der nullten Homologie*

$$\text{Hot}_R(P, C) \xrightarrow{\sim} \text{Mod}_R(\mathcal{H}_0 P, \mathcal{H}_0 C)$$

*Beweis.* Als erstes zeigen wir die Surjektivität. Sei  $\tau : \mathcal{H}_0 P \rightarrow \mathcal{H}_0 C$  gegeben. Wir beginnen unsere Konstruktion einer Kettenabbildung  $f : P \rightarrow C$ , indem wir notgedrungen setzen  $f_q = 0$  für  $q < 0$ . Wegen der Projektivität von  $P_0$  finden wir  $f_0 : P_0 \rightarrow \mathcal{Z}_0 C$  derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{f_0} & \mathcal{Z}_0 C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_0 P & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{H}_0 C \end{array}$$

kommutiert. Dann landet die Verknüpfung  $f_0 \partial : P_1 \rightarrow \mathcal{Z}_0 C$  sogar in  $\mathcal{B}_0 C$  und wegen der Projektivität von  $P_1$  finden wir  $f_1 : P_1 \rightarrow C_1$  mit  $\partial f_1 = f_0 \partial : P_1 \rightarrow C_0$ . Haben wir bis zu einem  $q \geq 1$  induktiv  $f_q$  bereits gefunden mit  $\partial f_q = f_{q-1} \partial$ , so gilt  $\partial f_q \partial = 0$ , wegen  $\mathcal{H}_q C = 0$  landet also  $f_q \partial$  in  $\mathcal{B}_q C$  und wegen der Projektivität von  $P_{q+1}$  finden wir  $f_{q+1} : P_{q+1} \rightarrow C_{q+1}$  mit  $\partial f_{q+1} = f_q \partial$  und die Induktion läuft. Das zeigt die Surjektivität. Um die Injektivität zu zeigen müssen wir prüfen, daß der Kern unserer Surjektion verschwindet, daß also eine Kettenabbildung  $f : P \rightarrow C$ , die auf der nullten Homologie die Nullabbildung induziert, schon nullhomotop ist. Wir suchen also unter dieser Voraussetzung  $s_q : P_q \rightarrow C_{q+1}$  mit  $f_q = s_{q-1} \partial + \partial s_q$  für alle  $q$ . Wieder beginnen wir notgedrungen mit  $s_q = 0$  für  $q < 0$ . Da  $f_0$  nach Annahme in  $\mathcal{B}_0 C$  landet finden wir auch sofort  $s_0$  mit  $f_0 = \partial s_0$ . Haben wir bis zu einem  $q \geq 0$  induktiv  $s_q$  bereits gefunden mit  $f_q = \partial s_q + s_{q-1} \partial$ , so folgt  $\partial(f_{q+1} - s_q \partial) = (f_q - \partial s_q) \partial = 0$  und  $f_{q+1} - s_q \partial$  landet in  $\mathcal{B}_{q+1} C$  als da heißt, es gibt  $s_{q+1}$  mit  $f_{q+1} - s_q \partial = \partial s_{q+1}$ . Das zeigt die Injektivität.  $\square$

**Definition 3.6.11.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Eine **Basis** eines Funktors

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$$

ist eine Familie  $(M_i, m_i)_{i \in I}$  von Paaren bestehend aus jeweils einem Objekt  $M_i \in \mathcal{C}$  und einem Element  $m_i \in F(M_i)$  seines Bildes unter unserem Funktor derart, daß für jedes  $X \in \mathcal{C}$  die  $(Ff)(m_i)$  mit  $i \in I$  und  $f \in \mathcal{C}(M_i, X)$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $F(X)$  bilden.

*Beispiel 3.6.12.* Für alle  $q \geq 0$  ist die einelementige Familie  $(\Delta_q, \tau_q)$  bestehend aus dem  $q$ -ten Standardsimplex  $\Delta_q$  und dem tautologischen singulären Simplex  $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$  eine Basis des Funktors der  $q$ -Ketten  $S_q : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ .

**Proposition 3.6.13.** Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  zwei Funktoren und  $(M_i, m_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $F$ . So haben wir eine Bijektion

$$\begin{aligned} \text{Trans}(F, G) &\xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} G(M_i) \\ \eta &\mapsto (\eta_{M_i}(m_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

*Beweis.* Den Beweis dieser Verallgemeinerung von 1.4.4 überlassen wir dem Leser.  $\square$

**Definition 3.6.14.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\mathcal{M} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Teilmenge. Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  heißt **frei mit Modellen in  $\mathcal{M}$**  genau dann, wenn er eine Basis  $(M_i, m_i)_{i \in I}$  besitzt derart, daß alle  $M_i$  zu  $\mathcal{M}$  gehören.

**Satz 3.6.15 (über azyklische Modelle).** Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ket}$  zwei Funktoren von einer Kategorie  $\mathcal{C}$  in die Kategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen und bezeichne  $F_q, G_q : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  die homogenen Komponenten der jeweiligen Komplexe. Sei  $\mathcal{M}$  eine Menge von Objekten von  $\mathcal{C}$ . Wir nehmen an, daß gilt  $F_q = 0$  für  $q < 0$  und daß alle  $F_q$  frei sind mit Modellen in  $\mathcal{M}$ . Wir nehmen weiter an, daß für alle  $M \in \mathcal{M}$  die Homologie  $\mathcal{H}_q(GM)$  verschwindet für alle  $q > 0$ . So gilt:

1. Für jede Transformation  $h : \mathcal{H}_0 F \Rightarrow \mathcal{H}_0 G$  gibt es eine Transformation  $f : F \Rightarrow G$  mit  $h = \mathcal{H}_0 f$ .
2. Sind  $f, f' : F \Rightarrow G$  zwei Transformationen mit  $\mathcal{H}_0 f = \mathcal{H}_0 f'$ , so sind  $f$  und  $f'$  "natürlich kettenhomotop", als da heißt, es gibt Transformationen  $\delta_q : F_q \Rightarrow G_{q+1}$  mit  $f - f' = \partial\delta + \delta\partial$ .

3.6.16. Ein topologischer Raum, dessen reduzierte Homologie identisch verschwindet, heißt **azyklisch**. Übertragen nennt man manchmal auch Komplexe azyklisch, deren Homologie vom Grad Null abgesehen identisch verschwindet. Die wesentliche Voraussetzung des vorhergehenden Satzes läßt sich dahingehend formulieren, daß " $G$  in echt positiven Graden azyklisch ist auf den

Modellen von  $F''$ . Spezialisiert man den Satz über azyklische Modelle auf den Fall einer Kategorie  $\mathcal{C}$  mit nur einem Objekt und einem Morphismus, eben der Identität dieses einzigen Objekts, so erhält man dieselbe Aussage wie bei der Spezialisierung des Hauptlemmas der homologischen Algebra 3.6.10 auf den Fall freier statt projektiver Moduln.

*Beweis.* 1. Notgedrungen setzen wir  $f_q = 0$  für  $q < 0$ . Um eine Transformation  $f_0 : F_0 \Rightarrow G_0$  anzugeben reicht es, die Bilder  $z_i \in G_0(M_i)$  von  $m_i \in F_0(M_i)$  anzugeben, für  $(M_i, m_i)$  eine Basis von  $F_0$ . Diese Bilder können wir sicher als Zykel wählen derart, daß auf der Homologie gilt  $h : [m_i] \mapsto [z_i]$ . Dann kommutiert notwendig das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{f_0} & \mathcal{Z}_0 G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_0 F & \xrightarrow{h} & \mathcal{H}_0 G \end{array}$$

und darüber hinaus gilt  $\partial f_q = f_{q-1} \partial$  für alle  $q \leq 0$ . Jetzt müssen wir nur noch für  $q > 0$  Transformationen  $f_q : F_q \Rightarrow G_q$  konstruieren derart, daß gilt  $\partial f_q = f_{q-1} \partial$ . Das gelingt induktiv. Ist  $(M_j, m_j)$  eine Basis von  $F_q$ , so reicht es aus,  $f_q(m_j) \in G_q(M_j)$  so festzulegen, daß gilt

$$\partial f_q m_j = f_{q-1} \partial m_j \quad \forall j$$

Im Fall  $q = 1$  finden wir solche  $f_1(m_j)$ , da nach Konstruktion von  $f_0$  alias wegen der Kommutativität obigen Diagramms die Verknüpfung  $f_0 \partial : F_1 M_j \rightarrow G_0 M_j$  faktorisiert über  $\mathcal{B}_0 G M_j$ . Für  $q > 1$  folgt aus unserer Azyklizitätsannahme  $\mathcal{H}_{q-1} G M_j = 0$ , so daß wir solche  $f_q(m_j)$  finden können, wenn nur gilt  $\partial f_{q-1} \partial m_j = 0$ . Das folgt hinwiederum aus der per Induktion bereits bekannten Formel  $\partial f_{q-1} = f_{q-2} \partial$ .

2. Ähnlich wie im Beweis des ersten Teils konstruieren wir beginnend mit  $\delta_q = 0$  für  $q < 0$  induktiv Lösungen  $\delta_q$  der Gleichungen

$$\partial \delta_q = f_q - f'_q - \delta_{q-1} \partial$$

Wir finden solche Lösungen für  $q = 0$ , da  $f_0 - f'_0$  in den Rändern  $\mathcal{B}_0 G$  landet, und für  $q > 0$ , da wir induktiv haben

$$\begin{aligned} \partial(f_q - f'_q - \delta_{q-1} \partial) &= (f_{q-1} - f'_{q-1} - \partial \delta_{q-1}) \partial \\ &= \delta_{q-2} \partial \partial \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

*Beweis von Eilenberg-Zilber.* Der Funktor  $(X, Y) \mapsto S_n(X \times Y)$  ist offensichtlich frei mit Basis  $((\Delta_n, \Delta_n), \text{diag})$ , wobei  $\text{diag} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n \times \Delta_n$  die diagonale Einbettung  $\text{diag} \in S_n(\Delta_n \times \Delta_n)$  bezeichnet. Der Funktor  $(X, Y) \mapsto (SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY)_n$  ist frei mit Basis  $((\Delta_p, \Delta_q), \tau_p \otimes \tau_q)_{p+q=n}$  den Tensorprodukten der tautologischen Simplizes. Wir zeigen als nächstes, daß beide Funktoren auf ihren eigenen Modellen und den Modellen des anderen Funktors azyklisch sind, daß also die höheren Homologiegruppen der Komplexe  $S(\Delta_p \times \Delta_q)$  und  $S\Delta_p \otimes_{\mathbb{Z}} S\Delta_q$  verschwinden. Die erste Aussage folgt daraus, daß  $\Delta_p \times \Delta_q$  konvex ist. Um die zweite Aussage einzusehen, bilden wir den Kettenkomplex  $\mathbb{Z}[0]$ , der nur im Grad Null lebt und dort  $\mathbb{Z}$  ist. Nun betrachtet man die Folge von Kettenabbildungen  $S(\Delta_p) \rightarrow S(\text{pt}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}[0]$  und erkennt, daß alle diese Abbildungen Homotopieäquivalenzen sind, zum Beispiel mit 1.4.8 für die erste Abbildung und expliziter Rechnung für die zweite, oder mit 4.6.3. Es folgt eine Homotopieäquivalenz  $S\Delta_p \otimes_{\mathbb{Z}} S\Delta_q \rightarrow \mathbb{Z}[0] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[0]$  und so die Azyklizität dieses Komplexes. Der Satz über azyklische Modelle in Verbindung mit 3.6.5 liefert uns also Transformationen  $\eta : S \otimes S \Rightarrow S(\times)$  und  $\alpha : S(\times) \Rightarrow S \otimes S$  von Funktoren  $\text{Top}^2 \rightarrow \text{Ket}$  die auf der nullten Homologie die durch 3.6.5 gegebene Abbildung bzw. ihre Inverse induzieren. Weiter liefert er, daß alle möglichen Wahlen von  $\eta$  bzw.  $\alpha$  dieselbe Transformation von Funktoren  $\text{Top}^2 \rightarrow \text{Hot}$  liefern. Und schließlich liefert er, daß  $\eta \circ \alpha$  bzw.  $\alpha \circ \eta$  die Identität auf den durch  $S \otimes S$  bzw.  $S(\times)$  gegebenen Funktoren  $\text{Top}^2 \rightarrow \text{Hot}$  induzieren, da sie nämlich beide auf der nullten Homologie die Identität liefern.  $\square$

3.6.17. Sind  $C, D$  Komplexe von Rechts- bzw. Linksmoduln über einem Ring  $R$ , so haben wir offensichtliche Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_p C \otimes_R \mathcal{H}_q D &\rightarrow \mathcal{H}_{p+q}(C \otimes_R D) \\ [c] \otimes [d] &\mapsto [c \otimes d] \end{aligned}$$

Verschwinden unsere beiden Komplexe in allen Graden, die man von Null aus in Richtung der Pfeile erreicht, so liefert die natürliche Abbildung sogar einen Isomorphismus  $\mathcal{H}_0 C \otimes_R \mathcal{H}_0 D \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(C \otimes_R D)$  als Konsequenz aus der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts, vergleiche 3.2.27.

**Definition 3.6.18.** Gegeben topologische Räume  $X, Y$  induziert jede Eilenberg-Zilber-Abbildung in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe denselben Isomorphismus

$$SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY \xrightarrow{\sim} S(X \times Y)$$

Die nach 3.6.17 auf der Homologie induzierten Abbildungen schreibt man in der Form

$$\begin{aligned} H_p X \times H_q Y &\rightarrow H_{p+q}(X \times Y) \\ (c, d) &\mapsto c \times d \end{aligned}$$

und nennt sie das **Kreuzprodukt der Homologie**. Ist allgemeiner  $R$  ein Ring, so liefert die Vorschrift  $(c \otimes d) \otimes r \mapsto c \otimes rd$  Isomorphismen von  $R$ -Bimoduln  $(SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY) \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\sim} S(X; R) \otimes_R S(Y; R)$ . In der Tat kann man zum Beispiel argumentieren, daß die so definierte Abbildung eine Basis für die Linksoperation von  $R$  in eine ebensolche überführt. Damit definiert jede Eilenberg-Zilber-Abbildung bis auf Homotopie wohlbestimmte Kettenabbildungen, ja sogar Homotopieäquivalenzen  $S(X; R) \otimes_R S(Y; R) \xrightarrow{\sim} S(X \times Y; R)$ . Die nach 3.6.17 auf der Homologie induzierten Abbildungen schreibt man in der Form

$$\begin{array}{ccc} H_p(X; R) \times H_q(Y; R) & \rightarrow & H_{p+q}(X \times Y; R) \\ (c, d) & \mapsto & c \times d \end{array}$$

und nennt sie das **Kreuzprodukt der Homologie mit Koeffizienten**.

**Lemma 3.6.19.** *Sind  $C, D$  Kettenkomplexe von Vektorräumen über einem Körper  $k$ , so liefern die natürlichen Abbildungen Isomorphismen*

$$\bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_p(C) \otimes_k \mathcal{H}_q(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_n(C \otimes_k D)$$

*Beweis.* Nach 1.4.12 gibt es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe von  $k$ -Vektorräumen eindeutig bestimmte Isomorphismen  $\mathcal{H}C \xrightarrow{\sim} C$  und  $\mathcal{H}D \xrightarrow{\sim} D$ , die auf der Homologie die offensichtlichen Identifikationen induzieren. Mit 3.4.3 folgt eine Homotopieäquivalenz  $\mathcal{H}C \otimes \mathcal{H}D \xrightarrow{\sim} C \otimes D$ , die dann den gewünschten Isomorphismus  $\mathcal{H}C \otimes \mathcal{H}D \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(C \otimes D)$  induziert.  $\square$

**Satz 3.6.20 (Künneth-Formel mit Koeffizienten in einem Körper).** *Für zwei beliebige topologische Räume  $X, Y$  und Homologie mit Koeffizienten in einem Körper  $k$  definiert das Kreuzprodukt der Homologie Isomorphismen*

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X; k) \otimes_k H_q(Y; k) \xrightarrow{\sim} H_n(X \times Y; k)$$

*Beweis.* Für diesen Beweis vereinbaren wir die Abkürzungen  $H(X; k) = HX$  und  $S(X; k) = SX$  sowie  $\otimes_k = \otimes$ . Unser Lemma 3.6.19 und die Homotopieäquivalenz  $SX \otimes SY \xrightarrow{\sim} S(X \times Y)$  liefern in der Tat auf der Homologie Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} HX \otimes HY & & H(X \times Y) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{H}(SX) \otimes \mathcal{H}(SY) & \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(SX \otimes SY) \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}(S(X \times Y)) \end{array} \quad \square$$

**Satz 3.6.21 (Künneth-Formel).** *Gegeben topologische Räume  $X$  und  $Y$  liefert das Kreuzprodukt der Homologie die erste Abbildung einer natürlichen kurzen exakten Sequenz*

$$\bigoplus_{p+q=n} (H_p X \otimes H_q Y) \hookrightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} (H_p X * H_q Y)$$

die in unnatürlicher Weise spaltet und deren zweite Abbildung im Beweis explizit angegeben wird.

3.6.22. Die von der Vertauschung  $X \times Y \rightarrow Y \times X$  auf der Homologie induzierte Abbildung läßt sich zu einem Morphismus der entsprechenden Künneth-Sequenzen ergänzen. Wie die zugehörige Abbildung auf dem Tensorprodukt der Homologien aussieht, erklärt die "graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts" nach 3.8.2. Wie die zugehörige Abbildung auf dem Torsionsprodukt der Homologien aussieht, habe ich mir nicht so genau überlegt. Wer hilft?

3.6.23. Arbeitet man mit Koeffizienten in einem Hauptidealring, so gilt dieselbe Formel mit demselben Beweis. Insbesondere erhalten wir so die Künneth-Formel mit Koeffizienten in einem Körper als Korollar. Ich habe nur deshalb einen separaten Beweis für Körper gegeben, da mir dieser sehr viel einfacher schien als der Beweis im allgemeinen.

3.6.24 (**Verschieben von Komplexen**). Ist  $C$  ein Komplex, so bezeichnen wir mit

$$C[1]$$

den "um eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex", in Formeln  $(C[1])_q = C_{q-1}$  bzw. bei Kokettenkomplexen  $(C[1])^q = C^{q+1}$ . Jedes Element  $c \in C$  liefert ein Element  $c[1] \in C[1]$ . Entgegen leider üblichen Konventionen führe ich hier beim Randoperator *kein* Vorzeichen ein. Bezeichnet also  $\mathbb{Z}[1]$  den um eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex  $\mathbb{Z}[0]$  und ist  $C$  ein Komplex von abelschen Gruppen, so definiert die Abbildung  $c \otimes 1[1] \mapsto c[1]$  einen Isomorphismus von Komplexen  $C \otimes \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{\sim} C[1]$ . Dahingegen bezeichne

$$[1]C$$

den um eins gegen die Richtung der Pfeile verschobenen Komplex, bei dem zusätzlich der Randoperator  $\partial$  durch  $-\partial$  ersetzt wird. Jedes Element  $c \in C$  liefert auch ein Element  $[1]c \in [1]C$ , und in diesen Notationen haben wir  $\partial([1]c) = -[1](\partial c)$ . Wieder liefert  $1[1] \otimes c \mapsto [1]c$  einen Isomorphismus von Komplexen  $\mathbb{Z}[1] \otimes C \xrightarrow{\sim} [1]C$ . Die offensichtliche Abbildung induziert dann einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$(C \otimes D)[1] \xrightarrow{\sim} C \otimes (D[1])$$

und die Abbildung  $[1]c \mapsto (-1)^{|c|}c[1]$  mit  $|c| = q$  für  $c \in C^q$  ist ein Isomorphismus  $[1]C \xrightarrow{\sim} C[1]$ .

*Beweis.* Sicher haben wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$ZX \hookrightarrow SX \twoheadrightarrow BX[1]$$

wobei vorne und hinten Komplexe mit Differential Null stehen. Tensorieren wir über  $\mathbb{Z}$  mit dem aus freien abelschen Gruppen bestehenden Komplex  $SY$ , so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$ZX \otimes SY \hookrightarrow SX \otimes SY \twoheadrightarrow BX[1] \otimes SY$$

Da  $ZX$  und  $BX$  auch aus freien abelschen Gruppen bestehen und Differential Null haben, hat die zugehörige lange exakte Homologiesequenz die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & (BX[1] \otimes HY)_{n+1} & \rightarrow & \\ \rightarrow & (ZX \otimes HY)_n & \rightarrow & \mathcal{H}_n(SX \otimes SY) & \rightarrow & (BX[1] \otimes HY)_n & \rightarrow \\ \rightarrow & (ZX \otimes HY)_{n-1} & \rightarrow & & & & \end{array}$$

Man überzeugt sich mühelos, daß die Randabbildungen hier schlicht von den Einbettungen der Ränder in die Zykel induziert werden, so daß sich aufgrund der kurzen exakten Sequenz  $BX \hookrightarrow ZX \twoheadrightarrow HX$  und der exakten Tor-Sequenz eine natürliche kurze exakte Sequenz der Gestalt

$$(HX \otimes HY)_n \hookrightarrow H_n(X \times Y) \twoheadrightarrow (HX * HY)_{n-1}$$

ergibt. Um eine Spaltung dieser Sequenz anzugeben, wählen wir einfach Linksinverse der Einbettungen  $ZX \hookrightarrow SX$ ,  $ZY \hookrightarrow SY$ , und solche Linksinversen existieren, da ja die jeweiligen Kokerne  $BX$ ,  $BY$  nach 3.5.7 frei sind als Untergruppen der freien abelschen Gruppen  $SX$ ,  $SY$ .  $\square$

*Übung 3.6.25.* Man berechne die Homologie von  $\mathbb{P}^2\mathbb{R} \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ .

*Ergänzende Übung 3.6.26 (Verschieben und Hom-Komplexe).* Gegeben Komplexe  $X, Y$  liefern die offensichtlichen, ohne alle Vorzeichen erklärten Identifikationen Isomorphismen von Komplexen

$$\begin{array}{lcl} \text{Hom}(X, Z) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(X[1], Z[1]) \\ \text{Hom}([1]X, Z) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(X, Z)[-1] \\ \text{Hom}(X, [1]Z) & \xrightarrow{\sim} & [1]\text{Hom}(X, Z) \end{array}$$



### 3.7 Eine explizite Eilenberg-Zilber-Abbildung

3.7.1. Um zusätzliche Anschauung bereitzustellen, gebe ich eine mögliche Eilenberg-Zilber-Abbildung auch noch explizit an. Wir werden diese explizite Form nicht benötigen, deshalb führe ich den Beweis nicht aus. Wir betrachten für  $n = p + q$  alle affinen injektiven Abbildungen

$$\omega : \Delta_n \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q$$

die Ecken auf Paare von Ecken werfen und die "in jeder Komponente monoton wachsen auf den Ecken". So eine Abbildung entspricht eindeutig einer Injektion

$$\omega = (\alpha, \beta) : \{0, \dots, n\} \hookrightarrow \{0, \dots, p\} \times \{0, \dots, q\}$$

mit monoton wachsenden  $\alpha$  und  $\beta$ . Man erkennt, daß für solch ein  $\omega$  notwendig gilt  $\omega(0) = (0, 0)$ ,  $\omega(n) = (p, q)$  und daß beim Übergang von  $i$  zu  $i + 1$  entweder  $\alpha$  oder  $\beta$  aber nicht beide um 1 wachsen. Man kann sich so ein  $\omega$  vorstellen als einen Weg von  $(0, 0)$  nach  $(p, q)$ , der in jedem von  $n$  Zeitschritten entweder eins nach oben oder eins nach rechts gehen darf. Die Fläche unterhalb dieses Weges im Quadrat  $[0, p] \times [0, q]$  notieren wir  $n(\omega)$ , in Formeln

$$n(\omega) = \sum_{0 \leq i < j < p+q} (\beta(i+1) - \beta(i))(\alpha(j+1) - \alpha(j))$$

Unsere  $\omega : \Delta_n \rightarrow \Delta_p \times \Delta_q$  sind die  $n$ -Simplizes einer Triangulierung von  $\Delta_p \times \Delta_q$ , aber diese Erkenntnis ist nur für die Anschauung von Belang. Jetzt definieren wir Homomorphismen

$$\begin{aligned} S_p X \otimes_{\mathbb{Z}} S_q Y &\rightarrow S_{p+q}(X \times Y) \\ \sigma \otimes \tau &\mapsto \sum_{\omega} (-1)^{n(\omega)} (\sigma \times \tau) \circ \omega \end{aligned}$$

und erhalten so eine Transformation von Funktoren von der Kategorie aller Paare topologischer Räume in die Kategorie der Gruppen.

*Ergänzung 3.7.2.* Im übrigen entsprechen unsere Wege auch eineindeutig den sogenannten  $(p, q)$ -Shuffles aus dem Beweis von ???. Des weiteren entsprechen sie Wege auch eineindeutig den Worten, die man durch das Hintereinanderschreiben von  $p$  Einsen und  $q$  Nullen bilden kann und die wir etwa in ??? betrachtet hatten.

**Lemma 3.7.3.** *Die in 3.7.1 angegebenen Homomorphismen definieren eine mögliche Eilenberg-Zilber-Abbildung*

$$SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY \rightarrow S(X \times Y)$$



Graphische Darstellung einer unserer in beiden Komponenten monotonen Injektionen  $\omega$  im Fall  $p = 5, q = 3$ .

*Beweis.* Unsere Abbildung ist offensichtlich funktoriell und tut das Richtige in der nullten Homologie. Nach dem Satz über azyklische Modelle 3.6.15 und dem Beweis des Satzes von Eilenberg-Zilber müssen also nur prüfen, daß sie wirklich für alle  $X, Y$  eine Kettenabbildung ist. Das überlassen wir dem Leser.  $\square$

3.7.4. Als nächstes beschreiben wir eine Homotopieinverse der Eilenberg-Zilber-Abbildung.

**Definition 3.7.5.** Die Abbildungen

$$\lambda_{p+q}^p = \lambda^p : \Delta_p \rightarrow \Delta_{p+q} \text{ und } \rho_{p+q}^q = \rho^q : \Delta_q \rightarrow \Delta_{p+q},$$

die hinten  $q$  Nullen anhängen bzw. vorne  $p$  Nullen davorschieben, heißen die  $p$ -**Vorderseite** bzw. die  $q$ -**Hinterseite** unseres Standardsimplex. Hier steht  $\lambda$  für "links" und  $\rho$  für "rechts".

**Lemma 3.7.6.** *Schreiben wir einen beliebigen  $n$ -Simplex  $\Delta_n \rightarrow X \times Y$  in der Form  $(\sigma, \tau)$  mit  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X, \tau : \Delta_n \rightarrow Y$  und definieren Abbildungen*

$$\begin{aligned} A : S_n(X \times Y) &\rightarrow (SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY)_n \\ (\sigma, \tau) &\mapsto \sum_{p+q=n} \sigma \lambda^p \otimes \tau \rho^q \end{aligned}$$

so erhalten wir eine natürliche Kettenabbildung  $A : S(X \times Y) \rightarrow SX \otimes_{\mathbb{Z}} SY$ , die **Alexander-Whitney-Abbildung**, und diese Abbildung repräsentiert das Homotopie-Inverse zu einer und jeder Eilenberg-Zilber-Abbildung.

*Beweis.* Die im Lemma definierte Abbildung ist offensichtlich funktoriell und tut das Richtige in der nullten Homologie. Nach dem Satz über azyklische Modelle 3.6.15 und dem Beweis des Satzes von Eilenberg-Zilber müssen wir also nur prüfen, daß sie für alle  $X, Y$  eine Kettenabbildung ist. Dazu rechnen wir

$$\partial A(\sigma, \tau) = \sum_{p+q=n} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \lambda^p k^i \otimes \tau \rho^q + (-1)^p \sum_{j=0}^q (-1) \sigma \lambda^p \otimes \tau \rho^q k^j \right)$$

wobei wir die a priori undefinierten Ausdrücke  $\sigma \lambda^0 k^0$  und  $\tau \rho^0 k^0$  als Null interpretieren. Ebenso finden wir auch

$$A \partial(\sigma, \tau) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \sum_{a+b=n-1} \sigma k^\nu \lambda^a \otimes \tau k^\nu \rho^b$$

Für die entsprechenden Abbildungen mit Werten in  $\Delta_n$  für  $n = a + b + 1$  gilt nun

$$k^\nu \lambda^a = \begin{cases} \lambda^{a+1} k^\nu & \text{falls } 0 \leq \nu \leq a + 1; \\ \lambda^a & \text{falls } a + 1 \leq \nu \leq n; \end{cases}$$

$$k^\nu \rho^b = \begin{cases} \rho^b & \text{falls } 0 \leq \nu \leq a; \\ \rho^{b+1} k^{\nu-a} & \text{falls } a \leq \nu \leq n. \end{cases}$$

Damit können wir  $A\partial(\sigma, \tau)$  umschreiben zu

$$\sum_{a+b+1=n} \left( (-1)^\nu \sum_{\nu=0}^a \sigma \lambda^{a+1} k^\nu \otimes \tau \rho^b + (-1)^{a+1+\mu} \sum_{\mu=0}^b \sigma \lambda^a \otimes \tau \rho^{b+1} k^{\mu+1} \right)$$

und wenn wir in der ersten Summe  $p = a + 1$ ,  $q = b$ ,  $i = \nu$  substituieren und in der Zweiten  $p = a$ ,  $q = b + 1$ ,  $j = \mu + 1$  ergibt sich

$$A\partial(\sigma, \tau) = \sum_{p+q=n} \left( \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \sigma \lambda^p k^i \otimes \tau \rho^q + (-1)^p \sum_{j=1}^q (-1)^j \sigma \lambda^p \otimes \tau \rho^q k^j \right)$$

wobei wir die erste Summe im Fall  $p = 0$  und die zweite im Fall  $q = 0$  als Null zu verstehen haben. Es folgt  $\partial A(\sigma, \tau) = A\partial(\sigma, \tau)$ .  $\square$

### 3.8 Eigenschaften des Kreuzprodukts

3.8.1. Sei für diesen Abschnitt  $R$  ein beliebiger Koeffizientenring. Der Übersichtlichkeit halber kürzen wir  $H(X; R) = HX$  und  $\otimes_R = \otimes$  ab.

#### Proposition 3.8.2 (Eigenschaften des Kreuzprodukts).

**Natürlichkeit:** Gegeben stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow X'$  und  $g : Y \rightarrow Y'$  gilt für beliebige  $c \in H_p X$  und  $d \in H_q Y$  in  $H_{p+q}(X' \times Y')$  die Formel

$$(f_* c) \times (g_* d) = (f \times g)_*(c \times d)$$

**Einheit:** Bezeichnet  $1 \in H_0(\text{pt})$  den kanonischen Erzeuger der Homologie eines Punktes, so gelten unter Unterdrückung der Notation für die von den offensichtlichen Identifikationen  $\text{pt} \times X \xrightarrow{\sim} X \xrightarrow{\sim} X \times \text{pt}$  auf der Homologie induzierten Isomorphismen die Gleichungen

$$1 \times c = c = c \times 1$$

**Assoziativität:** Gegeben  $X, Y, Z$  topologische Räume und  $a, b, c$  zugehörige Homologieklassen gilt in der Homologie von  $X \times Y \times Z$  unter Unterdrückung der Notation für die von den natürlichen Identifikationen

$(X \times Y) \times Z \xrightarrow{\sim} X \times Y \times Z \xrightarrow{\sim} X \times (Y \times Z)$  auf der Homologie induzierten Isomorphismen die Gleichung

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

**Graduierte Kommutativität:** Gegeben topologische Räume  $X, Y$  bezeichne  $\tau : X \times Y \xrightarrow{\sim} Y \times X$  die Vertauschung  $(x, y) \mapsto (y, x)$ . Für beliebige homogene Homologieklassen  $c \in HX$  und  $d \in HY$  gilt in  $H(Y \times X)$  bei kommutativem Koeffizientenring  $R$  die Formel

$$\tau_*(c \times d) = (-1)^{|c||d|} d \times c$$

*Beweis. Natürlichkeit:* Das folgt aus dem anschließenden kommutativen Diagramm in der Kategorie der Kettenkomplexe

$$\begin{array}{ccc} SX \otimes SY & \rightarrow & S(X \times Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SX' \otimes SY' & \rightarrow & S(X' \times Y') \end{array}$$

mit Eilenberg-Zilber-Abbildungen in den Horizontalen und hoffentlich offensichtlichen Abbildungen in den Vertikalen.

*Einheit:* Wir zeigen nur die erste Gleichung  $1 \times c = c$ . Bezeichnet  $\text{pr} : \text{pt} \times X \rightarrow X$  die Projektion auf die zweite Koordinate, so lautet die präzise Formulierung unserer Behauptung ja  $\text{pr}_*(1 \times c) = c$ . Um das zu zeigen, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S(\text{pt}) \otimes SX & \rightarrow & S(\text{pt} \times X) \\ \epsilon \otimes \text{id} \downarrow & & \wr \downarrow \text{pr} \\ R[0] \otimes SX & \xrightarrow{\text{mult}} & SX \end{array}$$

und behaupten, daß es kommutiert in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe für alle  $X$ . Dazu hinwiederum fassen wir alle Ecken des Diagramms auf als Funktoren von den topologischen Räumen in die Kettenkomplexe und alle Pfeile als Transformationen und müssen mit dem Satz über azyklische Modelle 3.6.15.2 nur zeigen, daß das induzierte Diagramm in der nullten Homologie kommutiert für alle  $X$ . Das ist aber klar.

*Assoziativität, erster Beweis:* Nach 3.8.4 ist für drei Kettenkomplexe  $A, B, C$  die offensichtliche Abbildung  $(A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$  ein Isomorphismus. Wir dürfen deshalb bei solchen Tensorprodukten die Klammern weglassen, ebenso wie bei Produkten topologischer Räume. Dann betrachten wir das

durch Eilenberg-Zilber-Abbildungen gegebene Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc}
 & & SX \otimes S(Y \times Z) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 SX \otimes SY \otimes SZ & & & & S(X \times Y \times Z) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & S(X \times Y) \otimes SZ & & 
 \end{array}$$

Aus dem Satz über azyklische Modelle folgt ähnlich wie im vorhergehenden Punkt, daß unser Diagramm kommutiert in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe. Gehen wir zur Homologie über, so folgt die behauptete Assoziativität des Kreuzprodukts.

*Assoziativität, zweiter Beweis:* Um zu zeigen, daß unser Diagramm aus dem ersten Beweis homotopiekommutativ ist, reicht es zu zeigen, daß das andersherum gerichtete durch Alexander-Whitney-Abbildungen gegebene Diagramm homotopiekommutativ ist. Nehmen wir speziell unsere Alexander-Whitney-Abbildungen  $A$  aus 3.7.6, so ist dies Diagramm jedoch offensichtlich sogar kommutativ als Diagramm von Kettenkomplexen.

*Graduierte Kommutativität:* Wir erinnern an unseren Vertauschungsmorphismus  $C \otimes D \xrightarrow{\sim} D \otimes C$ ,  $c \otimes d \mapsto (-1)^{|c||d|} d \otimes c$  aus 3.4.11 und betrachten das folgende Diagramm von Funktoren aus der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe:

$$\begin{array}{ccc}
 SX \otimes SY & \rightarrow & S(X \times Y) \\
 v \downarrow & & \downarrow S\tau \\
 SY \otimes SX & \rightarrow & S(Y \times X)
 \end{array}$$

Hier sind mit  $X, Y$  variable topologische Räume gemeint und die Horizontalen sind Eilenberg-Zilber-Abbildungen. Um zu zeigen, daß dies Diagramm für beliebige Räume  $X, Y$  kommutiert in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, müssen wir wie beim ersten Punkt nach dem Satz über azyklische Modelle 3.6.15.2 nur zeigen, daß es kommutiert in der nullten Homologie. Das ist jedoch offensichtlich. Die graduierte Kommutativität des Kreuzprodukts folgt durch Übergang zur Homologie.  $\square$

*Übung 3.8.3.* Man zeige, daß sich jede Eilenberg-Zilber-Transformation auf genau eine Weise zu einer Transformation

$$S(X, A) \otimes S(Y, B) \rightarrow S(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

zwischen Funktoren auf Paaren von Raumpaaren fortsetzen läßt, und daß jede solche Fortsetzung eine von allen Wahlen unabhängige Äquivalenz von

Funktoren in die Homotopiekategorie liefert. Wir erhalten so das Kreuzprodukt der relativen Homologie

$$H(X, A) \otimes H(Y, B) \rightarrow H(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

Bei Koeffizienten in einem Körper ist das Kreuzprodukt auf der relativen Homologie wieder ein Isomorphismus. Man folgere, daß es für ungerades  $n$  keinen topologischen Raum  $X$  geben kann derart, daß  $X \times X$  homöomorph ist zu  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere gibt es salopp gesagt **keine Wurzel aus dem  $\mathbb{R}^3$** .

3.8.4. Man sieht ohne Mühe, daß ganz allgemein die offensichtliche Abbildung  $c \otimes (d \otimes e) \mapsto (c \otimes d) \otimes e$  einen Isomorphismus von Kettenkomplexen  $C \otimes_R (D \otimes_S E) \mapsto (C \otimes_R D) \otimes_S E$  liefert, wobei  $R, S$  Ringe sind und wir für  $C$  einen Komplex in  $\text{Mod-}R$ , für  $D$  einen Komplex in  $R\text{-Mod-}S$  und für  $E$  einen Komplex in  $S\text{-Mod}$  nehmen.

## 4 Singuläre Kohomologie

Für eine orientierte kompakte  $n$ -Mannigfaltigkeit ohne Rand  $M$  darf man erwarten, daß sich der anschauliche Schnitt zweier Zyklen formalisieren läßt zu einer bilinearen Paarung

$$H_{n-p}M \times H_{n-q}M \rightarrow H_{n-(p+q)}M$$

Das ist auch in der Tat der Fall, aber die Konstruktion dieses sogenannten “Schnittprodukts” und insbesondere deren anschauliche Rechtfertigung ist nicht einfach und wird uns lange beschäftigen. Wir konstruieren zunächst einmal den Kohomologiering, den man für einen beliebigen topologischen Raum zwar recht mühelos definiert, für den ich jedoch im allgemeinen keine Anschauung anbieten kann. Für kompakte orientierbare Mannigfaltigkeiten entspricht die Multiplikation im Kohomologiering unter der “Poincaré-Dualität” dem oben anschaulich erklärten Schnittprodukt, aber diesen Zusammenhang kann ich vorerst nur im Fall von Zykeln komplementärer Dimension klar machen und muß den allgemeinen Fall verschieben, bis wir die Garbenkohomologie weit genug entwickelt haben. Eine interessante Quelle zur Entwicklung der Theorie ist [\[Mas99\]](#).

### 4.1 Die Kohomologiegruppen

**Definition 4.1.1.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und eine abelsche Gruppe  $G$  definieren wir ganz allgemein

$$S^q(X; G) = \text{Hom}(S_q X, G) = \text{Ens}(\text{Top}(\Delta_q, X), G)$$

für  $S_q X = S_q(X; \mathbb{Z})$  und nennen die Elemente dieser Gruppe **singuläre Ketten von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$** .

4.1.2. Wir können  $S^q(X; G)$  also auch interpretieren als die Gruppe aller Abbildungen von der Menge der  $q$ -Simplizes nach  $G$ . Die Gruppe der singulären Ketten  $S_q(X; G)$  mit Koeffizienten in  $G$  besteht im Gegensatz dazu nur aus allen auf fast allen singulären Simplizes verschwindenden solchen Abbildungen.

4.1.3. Per definitionem ist  $S^q(X; G)$  gerade die homogene Komponente vom Grad  $(-q)$  im Komplex  $\text{Hom}(SX, G) = \text{Hom}(SX, G[0])$  wie er in [1.4.10](#) definiert wird. Wir vereinbaren die Konvention, nach der obere Indizes bei einem Komplex bedeuten sollen, daß ein Differential in Richtung wachsender Indizes gemeint ist. Im allgemeinen kann man diese Regel  $C^q = C_{-q}$  schreiben, aber in konkreten Situationen wie zum Beispiel hier trägt die Stellung des Index zusätzliche Information.



**Definition 4.1.4.** Eine Kokette  $c \in S^q(X; G)$  nennen wir eine **Kokette vom Grad**  $q$  und schreiben  $|c| = q$ . Den Wert einer Kokette  $c \in S^q(X; G)$  auf einer Kette  $z \in S_q X$  notieren wir  $\langle c, z \rangle \in G$ . Sprechen wir ohne nähere Spezifikation von singulären Koketten, so meinen wir Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . Den Randoperator des Komplexes  $S^*(X; G) = \text{Hom}(SX, G)$  nennen wir den **Korandoperator**.

4.1.5. Gegeben eine abelsche Gruppe  $G$  definieren wir ganz allgemein einen Funktor  $\text{Ab} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$ ,  $A \mapsto \text{Hom}(A, G)$ . Das Bild eines Morphismus  $f : A \rightarrow B$  unter diesem Funktor nennen wir das “Vorschalten von  $f$ ” alias die **transponierte Abbildung**  $f^\top : \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(A, G)$ . Explizit wird unser Korandoperator nach 1.4.10 also gegeben durch die Vorschrift  $\delta = -(-1)^q \partial^\top : S^q(X; G) \rightarrow S^{q+1}(X; G)$  und noch expliziter durch die Vorschrift  $\langle \delta c, z \rangle = -(-1)^{|c|} \langle c, \partial z \rangle$ .

4.1.6. Wir haben nun kontravariante Funktoren konstruiert von den topologischen Räumen in die Komplexe abelscher Gruppen als die Komposition

$$\text{Top} \rightarrow \text{Ket} \rightarrow \text{Ket}^{\text{opp}}$$

wo der erste Funktor gegeben ist durch  $X \mapsto SX$  und der zweite durch  $C \mapsto \text{Hom}(C, G)$ . Im Fall  $G = \mathbb{Z}$  notieren wir die Komposition  $S^*$ , also  $X \mapsto S^*X$  auf Objekten und  $f \mapsto S^*f$  auf Morphismen.

4.1.7. Im Kontext von Morphismen in Richtung wachsender Indizes bezeichnet man die Ränder, Zykel und Homologiegruppen meist als **Koränder**  $\mathcal{B}^q C$ , **Kozykel**  $\mathcal{Z}^q C$  und **Kohomologiegruppen**  $\mathcal{H}^q C$ .

**Definition 4.1.8.** Die Kohomologiegruppen unseres Komplexes  $S^*(X; G)$  der singulären Koketten von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$  heißen die **singulären Kohomologiegruppen von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$**  und werden bezeichnet mit

$$\mathcal{H}^q(S^*(X; G)) = H_{\text{sing}}^q(X; G) = H^q(X; G)$$

Die Notation  $H^q(X; G)$  kann später auch Garbenkohomologie bedeuten und der Leser muß die genaue Bedeutung jeweils aus dem Kontext erschließen. Offensichtlich erhalten wir so kontravariante Funktoren von den topologischen Räumen in die abelschen Gruppen  $H^q(\ ; G) : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$ . Das Bild einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  unter einem derartigen Funktor notieren wir  $H^q f = f^* : H^q Y \rightarrow H^q X$  und haben also  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ . Man bezeichnet die Abbildung  $f^*$  auch als den **Rückzug unter  $f$** .

4.1.9. Wir können auch die Zuordnung  $G \mapsto H^q(X; G)$  für festes  $X$  auffassen als einen Funktor von den abelschen Gruppen in sich selber. Ist insbesondere  $G$  ein Modul über einem Ring  $R$ , so erbt  $H^q(X; G)$  diese Struktur.

*Übung 4.1.10.* Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen  $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$  und ein topologischer Raum  $X$  zeige man, wie analog zu 3.1.3 in natürlicher Weise Randoperatoren definiert werden können so, daß eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H^q(X; G') \rightarrow H^q(X; G) \rightarrow H^q(X; G'') \rightarrow H^{q+1}(X; G') \rightarrow \dots$$

entsteht. Diese Randoperatoren heißen **Bockstein-Homomorphismen**.

4.1.11. Wenden wir die Abbildung  $\mathcal{H}\text{Hom}(C, D) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}C, \mathcal{H}D)$  aus 1.4.10 an mit  $C = S_*X$  und  $D$  dem Komplex, der nur im Grad Null lebt und dort  $G$  ist, so erhalten wir eine Abbildung  $H^q(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_q X, G)$  alias eine  $\mathbb{Z}$ -bilineare Abbildung, die **Kronecker-Paarung**

$$\begin{aligned} H^q(X; G) \times H_q X &\rightarrow G \\ (c, z) &\mapsto \langle c, z \rangle \end{aligned}$$

Ist  $G$  ein Modul über einem Ring  $k$ , so erhalten wir analog einen natürlichen Homomorphismus  $H^q(X; G) \rightarrow \text{Hom}_k(H_q(X; k), G)$  von Linksmoduln über  $k$ , wobei die  $k$ -Operation auf dem Hom-Raum herkommt von der Rechtsoperation von  $k$  auf  $H_q(X; k)$ . Arbeiten wir mit Koeffizienten in einem Körper  $k$ , so ist nach 1.4.12 die Kohomologie schlicht der Dualraum der Homologie, die Kronecker-Paarung definiert genauer Isomorphismen

$$H^q(X; k) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_q(X; k), k)$$

Ich kann mir die höheren Kohomologiegruppen ab  $q \geq 2$  nur vorstellen als den Dualraum in diesem Sinne der für mich vergleichsweise anschaulichen Homologiegruppen. Im Fall  $q = 1$  erkläre ich eine weitere mögliche Anschauung in der anschließenden Bemerkung 4.1.12.

4.1.12. Die erste Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $G$  kann man sich im Fall eines "lokal zusammenziehbaren" Raums als die Menge aller Isomorphieklassen von " $G$ -Hauptfaserbündeln" veranschaulichen, wobei  $G$  mit der diskreten Topologie zu verstehen ist, so daß unsere Hauptfaserbündel Überlagerungen sind. Der Wert einer Isomorphieklasse von Hauptfaserbündeln auf einem Zykel wird dann berechnet, indem man "den Zykel liftet und ihm das Gruppenelement zuordnet, das den Anfangspunkt auf den Endpunkt schiebt". Für allgemeine topologische Räume werden wir die Menge aller Isomorphieklassen von  $G$ -Hauptfaserbündeln in III.1.2.8 und III.1.11.1 mit der "ersten Garbenkohomologiegruppe unseres Raums mit Koeffizienten in  $G$ " identifizieren.

## 4.2 Der Kohomologiering

**Definition 4.2.1.** Gegeben ein Komplex von abelschen Gruppen  $A \in \text{Ket}$  erklären wir den **dualen Komplex** als den Komplex  $A^* = \text{Hom}(A, \mathbb{Z}) \in \text{Ket}$  der Homomorphismen in den im Grad Null konzentrierten Komplex  $\mathbb{Z}$ . Das Dualisieren ist in offensichtlicher Weise ein Funktor  $\text{Ket} \rightarrow \text{Ket}^{\text{opp}}$  und wir erhalten natürliche Kettenabbildungen

$$t = t_{A,B} : A^* \otimes B^* \rightarrow (A \otimes B)^*$$

durch die Vorschrift  $(t(f \otimes g))(a \otimes b) = (-1)^{|g||a|} f(a)g(b)$  für homogene Elemente  $f \in A^*, g \in B^*, a \in A$  und  $b \in B$ . Ich werde in 4.4.18 kurz diskutieren, warum wir bei der Konstruktion dieser Kettenabbildungen  $t$  in Wirklichkeit gar keine Vorzeichenwahl treffen und sie vielmehr durch die Daten in 3.4.15 bereits festgelegt werden.

4.2.2. Ist  $k$  ein beliebiger kommutativer Ring und lesen wir im Vorhergehenden wie im Folgenden  $H^*X = H^*(X; k)$  und  $\otimes = \otimes_k$  und  $\text{Hom} = \text{Hom}_k$  und  $A^* = \text{Hom}(A, k)$ , so behalten alle Aussagen weiter ihre Gültigkeit.

**Definition 4.2.3.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  betrachten wir die bis auf Homotopie wohlbestimmte Komposition von Kettenabbildungen

$$SX \rightarrow S(X \times X) \rightarrow SX \otimes SX$$

mit der von der diagonalen Einbettung  $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$  induzierten Abbildung vorne und einer Homotopieinversen einer Eilenberg-Zilber-Abbildung 3.6.4 hinten. Durch Dualisieren und Vorschalten der kanonischen Abbildung vom Tensorprodukt der dualen Komplexe in das Duale des Tensorprodukts wie in 4.2.1 erhalten wir daraus eine bis auf Homotopie wohlbestimmte Komposition von Kettenabbildungen

$$S^*X \leftarrow (SX \otimes SX)^* \leftarrow S^*X \otimes S^*X$$

Durch Bilden der Kohomologie und Vorschalten der kanonischen Abbildung 3.6.17 vom Tensorprodukt der Kohomologien in die Kohomologie des Tensorprodukts erhalten wir weiter eine wohlbestimmte Abbildung

$$H^*X \leftarrow \mathcal{H}^*(S^*X \otimes S^*X) \leftarrow H^*X \otimes H^*X$$

Sie beinhaltet lauter bilineare Abbildungen  $H^pX \times H^qX \rightarrow H^{p+q}X$ . Man notiert diese Abbildungen  $(a, b) \mapsto a \cup b$  und bezeichnet sie nach der tassenförmigen Gestalt des Verknüpfungssymbols als **cup-Produkt**. Wie bereits erwähnt kann ich für dieses Produkt in der Allgemeinheit beliebiger topologischer Räume zu meinem Leidwesen keinerlei Anschauung bereitstellen.

*Ergänzung 4.2.4.* Die Notation  $\cup$  für die Multiplikation im Kohomologiering scheint auf Whitney zurückzugehen. Seine Motivation war vermutlich, daß diese Multiplikation für jede kompakte orientierte Mannigfaltigkeit unter dem Isomorphismus der Poincaré-Dualität dem “Schnittprodukt” auf der Homologie entspricht, für das die Notation  $\cap$  nahe liegt. Wir werden das in 4.5.15 noch ausführen. Allerdings hat sich mittlerweile für das Schnittprodukt die Notation  $\cdot$  durchgesetzt, und zu allem Überfluß hat man dem Symbol  $\cap$  in der algebraischen Topologie daraufhin eine andere Bedeutung zugewiesen, wodurch der Ursprung der Notation  $\cup$  völlig verschüttet worden ist.

4.2.5. Wenn man mit Koeffizienten in einem Körper  $k$  arbeitet, kann man gleich zu Beginn der Argumentationskette aus 4.2.3 zur Homologie übergehen und so eine natürliche Abbildung  $H(X; k) \rightarrow H(X; k) \otimes_k H(X; k)$  erhalten, aus der dann das cup-Produkt auf der Kohomologie mit Koeffizienten in  $k$  durch Dualisieren entsteht. Bei der Arbeit mit ganzzahligen Koeffizienten erhalten wir jedoch auf diese Weise nur kanonische Abbildungen

$$HX \rightarrow \mathcal{H}(SX \otimes SX) \leftarrow HX \otimes HX$$

Eine “Komultiplikation” auf der ganzzahligen Homologie ergibt sich nur unter der zusätzlichen Annahme, daß der rechte Pfeil ein Isomorphismus ist, also etwa für Räume mit torsionsfreier Homologie.

**Satz 4.2.6 (Kohomologiering).** *Für jeden topologischen Raum  $X$  wird die totale Kohomologie  $H^*X = \bigoplus_q H^q X$  mit dem cup-Produkt als Multiplikation zu einem Ring, dem **singulären Kohomologiering** von  $X$ , und in diesem Ring gilt*

$$a \cup b = (-1)^{|a||b|} b \cup a$$

*Für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist weiter das Zurückholen ein Ringhomomorphismus  $f^* : H^*Y \rightarrow H^*X$ .*

4.2.7. Wir stützen uns beim Beweis auf das “Kreuzprodukt der Kohomologie” und seine Eigenschaften, die wir dazu erst einmal diskutieren müssen. Der eigentliche Beweis unseres Satzes folgt dann im Anschluß an den Beweis der Proposition 4.2.10 zu den Eigenschaften des Kreuzprodukts.

**Definition 4.2.8.** Gegeben topologische Räume  $X, Y$  definieren wir das **Kreuzprodukt der Kohomologie**

$$\begin{aligned} H^p X \otimes H^q Y &\rightarrow H^{p+q}(X \times Y) \\ a \otimes b &\mapsto a \times b \end{aligned}$$

indem wir den Effekt der Komposition

$$S^*X \otimes S^*Y \rightarrow (SX \otimes SY)^* \rightarrow S^*(X \times Y)$$

auf der Kohomologie betrachten, mit der Transponierten einer Eilenberg-Zilber-Abbildung als Abbildung rechts und der in 4.2.1 erklärten Kettenabbildung links, und dann noch die Abbildung  $H^*X \otimes H^*Y \rightarrow \mathcal{H}^*(S^*X \otimes S^*Y)$  aus 3.6.17 von dem Tensorprodukt der Homologie zweier Komplexe zur Homologie ihres Tensorprodukts davorschalten.

4.2.9. Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $\Delta : X \rightarrow X \times X$ ,  $x \mapsto (x, x)$  die Diagonale, so gilt nach unserer Definition 4.2.3 für beliebige  $a, b \in H^*X$  die Formel

$$a \cup b = \Delta^*(a \times b)$$

**Proposition 4.2.10 (Eigenschaften des Kreuzprodukts).**

**Natürlichkeit:** Gegeben stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow X'$  und  $g : Y \rightarrow Y'$  gilt für beliebige  $c \in H^p X'$  und  $d \in H^q Y'$  in der Kohomologie der Produktraums  $H^{p+q}(X \times Y)$  die Identität

$$(f^*c) \times (g^*d) = (f \times g)^*(c \times d)$$

**Einheit:** Bezeichnet  $1 \in H^0(\text{pt})$  den kanonischen Erzeuger der Homologie eines Punktes, so gelten unter Unterdrückung der Notation für die von den Identifikationen  $\text{pt} \times X \cong X \cong X \times \text{pt}$  auf der Kohomologie induzierten Isomorphismen die Gleichungen

$$1 \times c = c = c \times 1$$

**Assoziativität:** Gegeben  $X, Y, Z$  topologische Räume und  $a, b, c$  zugehörige Kohomologieklassen gilt unter Unterdrückung der Notation für die von den Identifikationen  $(X \times Y) \times Z \cong X \times Y \times Z \cong X \times (Y \times Z)$  auf der Kohomologie induzierten Isomorphismen in der Kohomologie von  $X \times Y \times Z$  die Gleichung

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

**Graduierte Kommutativität:** Gegeben topologische Räume  $X, Y$  bezeichne  $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X$  die Vertauschung der Faktoren  $(x, y) \mapsto (y, x)$ . Für beliebige homogene Kohomologieklassen  $c \in H^*X$  und  $d \in H^*Y$  gilt dann in  $H^*(Y \times X)$  die Identität

$$\tau^*(c \times d) = (-1)^{|c||d|} d \times c$$

*Beweis.* Um das zu zeigen, gilt es zunächst, alle Diagramme aus dem entsprechenden Beweis im Fall des Kreuzprodukts der Homologie 3.8.2 zu dualisieren. Dann gilt es jedoch weiter, die Kommutativität einiger Diagramme von abstrakten Kettenkomplexen zu prüfen, die wir im folgenden ohne Beweis angeben.

*Natürlichkeit:* Gegeben  $C \rightarrow C_1$ ,  $D \rightarrow D_1$  Kettenabbildungen kommutiert mit den durch 4.2.1 gegebenen Horizontalen, wie bereits in 4.2.1 behauptet, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^* \otimes D^* & \longrightarrow & (C \otimes D)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1^* \otimes D_1^* & \longrightarrow & (C_1 \otimes D_1)^* \end{array}$$

*Einheit:* Hier ist nichts zusätzlich zu prüfen.

*Assoziativität:* Wir betrachten das Diagramm mit hoffentlich offensichtlichen Morphismen

$$\begin{array}{ccccc} S^*X \otimes S^*Y \otimes S^*Z & \rightarrow & (SX \otimes SY)^* \otimes S^*Z & \rightarrow & (SX \otimes SY \otimes SZ)^* \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & S^*(X \times Y) \otimes S^*Z & \rightarrow & (S(X \times Y) \otimes SZ)^* \\ & & & & \downarrow \\ & & & & S^*(X \times Y \times Z) \end{array}$$

Das bereits im Beweis der Natürlichkeit benutzte Diagramm alias die in 4.2.1 behauptete Natürlichkeit der Morphismen  $t$  zeigt, daß auch dies Diagramm kommutiert. Setzen wir oben links ein Tensorprodukt  $\tilde{a} \otimes \tilde{b} \otimes \tilde{c}$  von Repräsentanten der jeweiligen Kohomologieklassen ein, so kommt unten rechts ein Repräsentant von  $(a \times b) \times c$  heraus. Nun ist die rechte Vertikale unseres Diagramms gerade einer der beiden möglichen Wege im Diagramm aus dem Beweis der Assoziativität für das Kreuzprodukt der Homologie, dualisiert. Malen wir dasselbe Diagramm für die andere Klammerung, so sind also die rechten Vertikalen in beiden Diagrammen homotopieäquivalent. Um den Beweis zu beenden benötigen wir dann nur noch die Information, daß auch die obere Horizontale unseres Diagramms nicht von der Wahl der Klammerung abhängt, also die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccc} & & (A \otimes B)^* \otimes C^* & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A^* \otimes B^* \otimes C^* & & & & (A \otimes B \otimes C)^* \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & A^* \otimes (B \otimes C)^* & & \end{array}$$

Deren Nachweis überlassen wir dem Leser.

*Graduierte Kommutativität:* Hierzu benötigen wir zusätzlich nur noch die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} A^* \otimes B^* & \longrightarrow & (A \otimes B)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^* \otimes A^* & \longrightarrow & (B \otimes A)^* \end{array}$$

mit  $t$ -Abbildungen in den Horizontalen und von Vertauschungen induzierten Abbildungen in den Vertikalen. Den Nachweis dieser Kommutativität überlassen wir wieder dem Leser.  $\square$

*Beweis von 4.2.6.* Wir stützen uns auf die Darstellung  $a \cup b = \Delta^*(a \times b)$  des cup-Produkts aus 4.2.9. Dann haben wir

$$\begin{aligned} (a \cup b) \cup c &= \Delta^*((a \cup b) \times c) \\ &= \Delta^*(\Delta^*(a \times b) \times c) \\ &= \Delta^*(\Delta \times \text{id})^*((a \times b) \times c) \\ &= \Delta_3^*((a \times b) \times c) \end{aligned}$$

wo wir im dritten Schritt die Natürlichkeit des Kreuzprodukts und die Identität  $c = \text{id}^* c$  benutzt haben und im vierten Schritt mit  $\Delta_3 = \Delta(\Delta \times \text{id})$  die Abbildung  $X \rightarrow (X \times X) \times X$ ,  $x \mapsto ((x, x), x)$  notieren. Die Assoziativität des cup-Produkts folgt nun unmittelbar aus der Assoziativität des Kreuzprodukts. Als nächstes behaupten wir, daß  $1_X = p^*1 \in H^0 X$  für  $p : X \rightarrow \text{pt}$  die konstante Abbildung ein neutrales Element für das cup-Produkt ist. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} a \cup 1_X &= \Delta^*(a \times 1_X) \\ &= \Delta^*(\text{id} \times p)^*(a \times 1) \\ &= \text{id}^*(a) \\ &= a \end{aligned}$$

unter Verwendung unserer Erkenntnisse über die Einheit beim Kreuzprodukt, und  $1_X \cup a = a$  zeigt man genauso. Die Formel  $a \cup b = (-1)^{|a||b|} b \cup a$  folgt aus der graduierten Kommutativität des Kreuzprodukts, indem man für die Vertauschung der Faktoren  $\tau : X \times X \rightarrow X \times X$  die Formel  $\tau \circ \Delta = \Delta$  beachtet. Damit erhalten wir dann wie gewünscht

$$\begin{aligned} a \cup b &= \Delta^*(a \times b) \\ &= \Delta^* \tau^*(a \times b) \\ &= (-1)^{|a||b|} \Delta^*(b \times a) \\ &= (-1)^{|a||b|} b \cup a \end{aligned}$$

Die Natürlichkeit des cup-Produkts folgt unmittelbar aus der Natürlichkeit des Kreuzprodukts.  $\square$

### 4.3 Cup-Produkt von singulären Koketten

**Proposition 4.3.1 (Komultiplikation von Ketten).** *Für jeden topologischen Raum  $X$  ist die Abbildung  $\Delta : SX \rightarrow SX \otimes SX$ , die auf Simplexes in der Notation 3.7.5 gegeben wird durch die Vorschrift*

$$\sigma \mapsto \sum_{p+q=|\sigma|} \sigma \lambda^p \otimes \sigma \rho^q$$

ein Homomorphismus von Kettenkomplexen und erfüllt die Bedingung der **Koassoziativität**  $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta : SX \rightarrow SX \otimes SX \otimes SX$ .

*Beweis.* Die fragliche Abbildung erhält man als die Verknüpfung  $SX \rightarrow S(X \times X) \rightarrow SX \otimes SX$  des direkten Bildes unter der Diagonale mit der Alexander-Whitney-Abbildung aus 3.7.6. Das ist auch der Grund, aus dem sie  $\Delta$  notiert wird. Als eine Verknüpfung von Kettenabbildungen ist unsere Abbildung eine Kettenabbildung. Die Koassoziativität ist offensichtlich.  $\square$

**Definition 4.3.2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Verknüpfung

$$S^*X \otimes S^*X \rightarrow (SX \otimes SX)^* \rightarrow S^*X$$

unserer kanonischen Abbildung aus 4.2.1 mit der Transponierten unserer Komultiplikation  $\Delta$  aus 4.3.1 wird auch notiert in der Form

$$a \otimes b \mapsto a \cup b$$

und heißt das **cup-Produkt auf den singulären Koketten**. Explizit wird für Koketten  $a \in S^pX$ ,  $b \in S^qX$  der Wert von  $a \cup b$  auf einem Simplex  $\sigma : \Delta_{p+q} \rightarrow X$  gegeben durch die Formel

$$\langle a \cup b, \sigma \rangle = (-1)^{pq} \langle a, \sigma \circ \lambda^p \rangle \langle b, \sigma \circ \rho^q \rangle$$

Die Koassoziativität von  $\Delta$  liefert mit ähnlichen Argumenten wie beim Beweis von 4.2.10 die Assoziativität des cup-Produkts auf den singulären Koketten, und daß die Augmentation  $\varepsilon \in S^0X$  für diese Verknüpfung ein neutrales Element ist, sieht man auch sofort ein. Daß unsere Verknüpfung eine Kettenabbildung ist, bedeutet explizit die "graduierte Leibniz-Regel"

$$\delta(a \cup b) = (\delta a) \cup b + (-1)^{|a|} a \cup (\delta b)$$



aus der hinwiederum folgt, daß die Zyklen einen Teilring  $Z^*X \subset S^*X$  bilden und darin die Bilder ein Ideal  $B^*X \subset Z^*X$ . Die Homologie erbt folglich die Struktur eines graduierten Rings im Sinne von 4.4.2, dessen Multiplikation per definitionem gerade unser Cup-Produkt aus 4.2.3 ist. Das zeigt ein weiteres Mal, daß die Kohomologie mit dem Cup-Produkt zu einem Ring wird, und liefert somit einen alternativen Beweis für einen Teil von Satz 4.2.6. Die "graduierte Kommutativität" des Kohomologierings ist jedoch auf diesem Weg nicht so leicht zu sehen.

4.3.3. Jeder stetigen Abbildung  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  für  $n \geq 1$  ordnet man eine ganze Zahl, ihre **Hopf-Invariante**, zu wie folgt: Bezeichnet  $X$  den Raum, der aus  $S^n$  entsteht durch Ankleben einer  $2n$ -Zelle mittels der Abbildung  $f$ , so erhält man aus der analog zu 2.8.3 gebildeten "Anklebesequenz der Kohomologie" zwei Isomorphismen

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H^n X \xrightarrow{\sim} H^n S^n \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow H^{2n-1} S^{2n-1} \xrightarrow{\sim} H^{2n} X \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Nun nimmt man den kanonischen Erzeuger von  $H^n S^n$ , holt ihn zurück nach  $H^n X$ , quadriert ihn im Kohomologiering des verklebten Raums  $X$ , betrachtet das Urbild unter dem Korand in  $H^{2n-1} S^{2n-1}$  und erhält ein Vielfaches des kanonischen Erzeugers. Der Faktor, mit dem hier multipliziert werden muß, heißt dann die Hopf-Invariante von  $f$ . Man kann zeigen, daß sie nur von der Homotopieklasse von  $f$  abhängt, siehe zum Beispiel [Vic94].

## 4.4 Differentielle graduierte Algebra

*Noch nicht ganz glatt. Man erinnere 3.4.15.*

**Definition 4.4.1.** Ein **differentieller graduierter Ring** oder kurz **dg-Ring** ist ein differentielle graduierte abelsche Gruppe  $R$  mit einer Kettenabbildung  $R \otimes R \rightarrow R$  derart, daß die induzierte Abbildung  $R \times R \rightarrow R$  die abelsche Gruppe  $R$  zu einem Ring macht. Ein **Morphismus von differentiellen graduierten Ringen** ist ein Ringhomomorphismus, der gleichzeitig eine Kettenabbildung ist.

4.4.2. Einen Ring  $R$  mit einer Graduierung der zugrundeliegenden additiven Gruppe und der Eigenschaft  $R_i R_j \subset R_{i+j} \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}$  nennt man einen **graduerten Ring**. Nach unserer Definition ist das dasselbe wie ein dg-Ring mit Differential Null. Ein dg-Ring ist ausgeschrieben ein graduiertes Ring  $R$  mit einem Differential  $d : R \rightarrow R$  auf der zugrundeliegenden graduierten abelschen Gruppe derart, daß die graduierte Leibniz-Regel  $d(ab) = (da)b + (-1)^{|a|}a(db)$  gilt.

*Übung 4.4.3.* In einem graduierten Ring gilt stets  $1 \in R_0$ . In einem dg-Ring gilt stets  $d(1) = 0$ .

4.4.4. Etwas allgemeiner mag man einen beliebigen kommutativen Grundring  $k$  fixieren. Eine **differentielle graduierte  $k$ -Ringalgebra** ist dann ein differentieller graduierter  $k$ -Modul  $R$  mit einer Kettenabbildung  $R \otimes_k R \rightarrow R$  derart, daß die induzierte Abbildung  $R \times R \rightarrow R$  den  $k$ -Modul  $R$  zu einer  $k$ -Ringalgebra macht. Ich werde mich im folgenden auf den Fall  $k = \mathbb{Z}$  der dg-Ringe konzentrieren und die offensichtlichen Verallgemeinerungen dem Leser überlassen.

*Ergänzung 4.4.5.* Leider paßt die in ?? erklärte Notation für Verknüpfungen mit unserer Notation ?? für Abbildungen partout nicht zusammen: Gegeben Mengen  $X, Y, Z$  liefert das Verknüpfen von Abbildungen eine Abbildung, die man in unseren Notationen entweder notieren kann als

$$\begin{aligned} \text{Ens}(X, Y) \times \text{Ens}(Y, Z) &\rightarrow \text{Ens}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

oder als

$$\begin{aligned} \text{Ens}(Y, Z) \times \text{Ens}(X, Y) &\rightarrow \text{Ens}(X, Z) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Beides sieht nicht schön aus und führt bei komplizierteren Formeln leicht zu unnötiger Verwirrung. Mir scheint das nachgerade die Erbsünde der üblichen mathematischen Notation. Ein Ausweg ist schwer zu finden, da beide Notationen die gesamte mathematische Literatur durchdringen. Ich schlage vor, wenn es später einmal darauf ankommt, zusätzlich die mit  $\circ$  besser verträgliche Notation  $\text{Eñs}$  einzuführen durch die Vorschrift  $\text{Eñs}(Y, X) := \text{Ens}(X, Y)$ . In dieser Notation nehmen unsere Formeln die schönere Gestalt

$$\begin{aligned} \text{Eñs}(Z, Y) \times \text{Eñs}(Y, X) &\rightarrow \text{Eñs}(Z, X) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

an. Sie hat darüber hinaus den Vorteil, daß man dabei an “opponierte Kategorien” denken kann. Ein anderer Ausweg bestünde darin, die Notationen  $x|f := f(x)$  und  $f|g := g \circ f$  mit dem aus der Programmierung vertrauten “pipe”-Zeichen  $|$  zu verwenden, das so etwa bedeutet “verfüttere das Resultat von dem, was davorsteht, an das, was dahintersteht”. Diese Notation wäre ihrerseits gut mit der üblichen Notation  $\text{Ens}(X, Y)$  verträglich, hat jedoch den Nachteil, daß das Symbol  $|$  in der Mathematik bereits vielfältig in anderer Weise verwendet wird.

4.4.6. In Anlehnung an 4.4.5 schlage ich vor, die Notation  $\mathring{\text{Hom}}$  einzuführen durch die Vorschrift

$$\mathring{\text{Hom}}(Y, X) := \text{Hom}(X, Y)$$

für Kettenkomplexe  $X, Y$ .

*Übung 4.4.7.* Gegeben Komplexe  $C, D, E$  von Moduln über einem beliebigen Ring liefert das Verknüpfen eine Kettenabbildung

$$\mathring{\text{Hom}}(E, D) \otimes \mathring{\text{Hom}}(D, C) \rightarrow \mathring{\text{Hom}}(E, C)$$

Insbesondere ist für jede dg-Gruppe  $(M, d)$  der Endomorphismenkomplex  $\text{End } M = \text{Hom}(M, M)$  mit der Verknüpfung als Multiplikation ein dg-Ring. In größerer Allgemeinheit wird das in ?? diskutiert.

4.4.8. Die Homologie eines dg-Rings trägt nach 3.6.17 stets in natürlicher Weise die Struktur eines graduierten Rings. Genauer bilden die Kozykel einen graduierten Teilring und die Koränder ein graduiertes beidseitiges Ideal im Ring der Kozykel im Sinne von ??, so daß der Quotient wie in ?? eine Ringstruktur erbt.

**Definition 4.4.9.** Ein **differentieller graduierter Modul** oder kurz **dg-Modul** über einem dg-Ring  $A$  ist eine abelsche dg-Gruppe  $M$  mitsamt einem Homomorphismus von dg-Ringen  $A \rightarrow \text{End } M$ . Ein Homomorphismus von dg-Moduln ist eine  $A$ -lineare Kettenabbildung. Wir notieren die Kategorie der dg-Moduln als  $A\text{-dgMod}$  oder  $\text{dgMod}_A$ . Lebt der dg-Ring  $A$  nur im Grad Null, so erhalten wir unsere alte Kategorie von Komplexen von  $A$ -Moduln.

4.4.10. Homomorphismen von dg-Gruppen  $A \rightarrow \text{End } M$  können wir nach 3.4.13 identifizieren mit Homomorphismen von dg-Gruppen  $A \otimes M \rightarrow M$ , und unser ursprünglicher Homomorphismus ist ein Ringhomomorphismus genau dann, wenn der so gebildete Homomorphismus die Bedingungen erfüllt, die man üblicherweise von der Operation eines Rings auf einem Modul fordert. Ausgeschrieben bedeutet das, daß  $M$  ein graduierter  $A$ -Modul ist und daß für alle homogenen  $a \in A$  und  $m \in M$  die "graduierete Leibniz-Regel" gilt, die da lautet

$$d(am) = (da)m + (-1)^{|a|}a(dm)$$

**Definition 4.4.11.** Ist  $(A, d)$  ein dg-Ring, so definiert man den **opponierten dg-Ring**  $A^{\text{opp}}$ , indem man dieselbe dg-Gruppe zugrunde legt und nur die Multiplikation in der Weise abändert, daß man die Abbildung  $v : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$  aus 3.4.11 davorschaltet. Manchmal verwende ich statt  $A^{\text{opp}}$  auch die kürzere Notation  $A^\circ$ .

4.4.12. Explizit wird demnach die neue Multiplikation gegeben durch die Vorschrift  $a * b = (-1)^{|a||b|}ba$ . Die analoge Regel  $a * m = (-1)^{|a||m|}ma$  identifiziert dann dg-Moduln über  $A^{\text{opp}}$  mit “dg-Rechtsmoduln” über  $A$ , deren Definition hoffentlich offensichtlich ist. Ist die Identität auf einem dg-Ring ein Isomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} A^{\text{opp}}$ , d.h. gilt für alle homogenen  $a, b \in A$  die Regel  $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ , so heißt unser dg-Ring **graduirt kommutativ** oder auch **superkommutativ**.

*Ergänzende Übung* 4.4.13. Gegeben über einem  $\mathbb{Z}$ -graduerten Ring  $R$  ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter Rechtsmodul  $M$  und ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter Linksmodul  $N$  ist der Kern der Surjektion  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \rightarrow M \otimes_R N$  stets ein im Sinne von ?? homogener Teilraum und folglich ist  $M \otimes_R N$  in natürlicher Weise  $\mathbb{Z}$ -graduirt. Ist  $R$  sogar ein dg-Ring und sind  $M$  und  $N$  beide dg-Moduln, so induziert das offensichtliche Differential auf  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$  ein Differential auf  $M \otimes_R N$ .

*Ergänzende Übung* 4.4.14. Gegeben dg-Moduln  $M, N$  über einem dg-Ring  $R$  ist die Menge der mit der Operation von  $R$  in hoffentlich offensichtlicher Weise verträglichen Elemente des Hom-Komplexes  $\text{Hom}(M, N)$  aus 1.4.10 ein Unterkomplex  $\text{Hom}_R(M, N)$ . Die Nullzykel dieses Komplexes sind genau die Homomorphismen von dg-Moduln, in Verallgemeinerung von 1.4.10 gilt also

$$\text{dgMod}_R(M, N) = \mathcal{Z}^0 \text{Hom}_R(M, N)$$

Die Nullränder  $\mathcal{B}^0 \text{Hom}_R(M, N)$  dieses Komplexes nennen wir analog **null-homotopie** Homomorphismen von differentiellen graduerten Moduln über  $R$  und führen die Homotopiekategorie

$$R\text{-dgHot} = \text{dgHot}_R$$

ein dadurch, daß ihre Objekte  $R$ -dg-Moduln sein sollen, die Morphismen jedoch gegeben sein sollen durch  $\text{dgHot}_R(M, N) = \mathcal{H}^0 \text{Hom}_R(M, N)$ .

*Ergänzende Übung* 4.4.15. Gegeben dg-Rechtsmoduln  $M, N$  über einem dg-Ring  $R$  ist  $\text{Hom}_{-R}(M, N) \subset \text{Hom}(M, N)$  ein Unterkomplex des Hom-Komplexes. Ist  $S$  ein weiterer dg-Ring und ist  $M$  ein  $S$ - $R$ -dg-Bimodul, so ist unser Unterkomplex ein  $S$ -dg-Unterrechtsmodul des Hom-Komplexes mit seiner offensichtlichen und in ?? formalisierten  $S$ -Operation von rechts. Analoges gilt, wenn man Links und Rechts vertauscht.

*Ergänzende Übung* 4.4.16. Gegeben ein dg-Ring  $R$  liefert die Multiplikation des Rings von links auf sich selber analog zum Fall normaler Ringe ?? einen Isomorphismus von dg-Ringen  $R \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{-R}(R, R)$  zwischen  $R$  selbst und dem Endomorphismenkomplex von  $R$  als dg-Rechtsmodul.

4.4.17. Unsere Adjunktion 3.4.13 liefert nach 1.4.9.12 insbesondere natürliche Kettenabbildungen von  $B$ -Rechtsmoduln  $\text{Hom}_{-B}(X, M) \otimes_A X \rightarrow M$ , die auch explizit als das “Auswerten von Homomorphismen auf Elementen” beschrieben werden können. Insbesondere erhalten wir so aus den Daten 3.4.15 für  $X, M \in \text{Ket}$  natürliche Kettenabbildungen

$$\text{Hom}(X, M) \otimes X \rightarrow M$$

Übung 4.4.18. Gegeben Komplexe  $C, C', D, D'$  von Moduln über einem kommutativen Ring erhalten wir eine Kettenabbildung

$$\gamma : \text{Hom}(C, C') \otimes \text{Hom}(D, D') \rightarrow \text{Hom}(C \otimes D, C' \otimes D')$$

durch die Vorschrift  $(\gamma(f \otimes g))(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|}(fx) \otimes (gy)$ , wobei das Tensorprodukt über besagtem Ring zu verstehen ist. Diese Kettenabbildung entsteht aus den Daten nach 3.4.15 durch das Anwenden der Adjunktion auf die durch zweimaliges Auswerten nach 4.4.17 gegebene Kettenabbildung

$$C \otimes D \otimes \text{Hom}(C, C') \otimes \text{Hom}(D, D') \rightarrow C' \otimes D'$$

wobei wir verschiedene Assoziatoren und Kommutatoren unterschlagen haben. Sie wird sich in ?? als Spezialfall einer allgemeinen Konstruktion im Rahmen von Tensorkategorien erweisen.

Ergänzende Übung 4.4.19. Hinweis: Diese Übung verfeinert 3.4.13. Gegeben dg-Ringe  $A, B$  und ein  $A$ - $B$ -dg-Bimodul  $X$  induziert für  $M$  bzw.  $N$  beliebige dg-Rechtsmoduln über  $A$  bzw.  $B$  die offensichtliche Abbildung Isomorphismen von Komplexen abelscher Gruppen

$$\text{Hom}_{-A}(M, \text{Hom}_{-B}(X, N)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{-B}(M \otimes_A X, N)$$

Insbesondere erhalten wir durch Übergang zur nullten Homologie natürliche Bijektionen  $\text{dgHot}_{-A}(M, \text{Hom}_{-B}(X, N)) \xrightarrow{\sim} \text{dgHot}_{-B}(M \otimes_A X, N)$ .

## 4.5 Die Homologie als Modul über der Kohomologie

**Definition 4.5.1.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  betrachten wir die Verknüpfung von Kettenabbildungen

$$S^*X \otimes SX \rightarrow S^*X \otimes SX \otimes SX \rightarrow SX$$

wobei der erste Morphismus gegeben wird durch  $\text{id} \otimes v \Delta$  mit  $\Delta$  der Komultiplikation auf den singulären Ketten aus 4.3.1 und  $v$  der Vertauschung der

Tensorfaktoren 3.4.11, der zweite Morphismus dahingegen durch das Auswerten  $S^*X \otimes SX \rightarrow \mathbb{Z}$  aus 4.4.17 auf den ersten beiden Tensorfaktoren. Diese Verknüpfung notieren wir

$$b \otimes z \mapsto b \cap z$$

und nennen sie das **cap-Produkt einer Kokette mit einer Kette**. Die Bezeichnung “cap” für englisch “Mütze” erinnert wieder an die Form des Symbols.

4.5.2. Algebraisch betrachtet ist also das cap-Produkt eine Art partieller Auswertung einer Kokette auf einer Kette. Ich kann für diese Konstruktion leider keinerlei Anschauung anbieten.

**Definition 4.5.3.** Gegeben ein dg-Ring  $R$  heißt eine differentielle graduierte Gruppe  $M$  mit einer Kettenabbildung  $R \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow M$ , die sie zu einem  $R$ -Modul macht, ein **differentieller graduierter Modul** oder kurz **dg-Modul** über unserem dg-Ring.

4.5.4. Das cap-Produkt macht  $SX$  zu einem dg-Modul über  $S^*X$ . Das prüft man zum Beispiel mit Hilfe der **Adjunktionsformel**

$$\langle a, b \cap z \rangle = \langle a \cup b, z \rangle \quad \forall z \in SX, \quad a, b \in S^*X,$$

die ihrerseits leicht aus der Definition folgt. Explizit wird das cap-Produkt einer Kokette  $b \in S^qX$  mit einem Simplex  $z = \sigma : \Delta_{p+q} \rightarrow X$  in den Notationen 3.7.5 gegeben durch

$$b \cap \sigma = (-1)^{pq} \langle b, \sigma \rho^q \rangle \sigma \lambda^p$$

4.5.5. Ganz allgemein versteht man unter einem **graduerten Modul** über einem graduerten Ring  $R$  einen  $R$ -Modul  $M$  mitsamt einer Graduierung  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$  derart, daß gilt  $R^i M^j \subset M^{i+j}$  für alle  $i, j \in \mathbb{Z}$ . Nach unserer Definition ist das dasselbe wie ein dg-Modul mit Differential Null über  $R$  aufgefaßt als dg-Ring mit Differential Null. Ein dg-Modul über einem beliebigen dg-Ring  $(R, d)$  ist ausgeschrieben ein graduierter  $R$ -Modul  $M$  mit Differential  $d$  derart, daß gilt  $d(am) = (da)m + (-1)^{|a|} a(dm)$  für alle homogenen  $a \in R$  und alle  $m \in M$ .

4.5.6. Nach 3.6.17 ist die Kohomologie  $\mathcal{H}M$  eines dg-Moduls  $M$  über einem dg-Ring  $R$  in natürlicher Weise ein graduierter Modul über der Kohomologie  $\mathcal{H}R$  von  $R$ . Konkret bilden die Zyklen  $\mathcal{Z}M = \ker d$  von  $M$  einen Modul über dem Ring  $\mathcal{Z}R$  der Zyklen von  $R$ , die Bilder  $\mathcal{B}M = d(M)$  bilden darin einen Untermodul, und auf dem Quotienten  $\mathcal{H}M = \mathcal{Z}M/\mathcal{B}M$  operiert das Ideal der Bilder  $\mathcal{B}R \subset \mathcal{Z}R$  durch Null, so daß die Operation von  $\mathcal{Z}R$  faktorisiert über die behauptete Operation von  $\mathcal{H}R$  auf  $\mathcal{H}M$ .

4.5.7. Unter unserem cap-Produkt wird  $SX$ , aufgefaßt als differentielle graduierte Gruppe mittels  $(S_q X) = (SX)^{-q}$  und Differential  $\partial$ , ein dg-Modul über  $S^* X$ . Speziell wird also nach 4.5.6 für jeden topologischen Raum  $X$  die **totale Homologie**  $HX = \bigoplus_q H_q X$  ein Modul über dem Kohomologiering  $H^* X$ . Wir notieren diese Operation auch mit  $\cap$  und erhalten so das **cap-Produkt auf der Homologie**

$$\cap : H^p X \times H_{p+q} X \rightarrow H_q X$$

*Übung 4.5.8.* Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $b \in H^p Y$  und  $z \in H_{p+q} X$ , so gilt die **Projektionsformel**  $f_*(f^* b \cap z) = b \cap (f_* z)$ .

4.5.9. Ist  $A \subset X$  eine Teilmenge, so ist  $S^*(X, A)$  als Kern des Ringhomomorphismus  $S^* X \rightarrow S^* A$  ein unter dem Korandoperator stabiles graduiertes Ideal von  $S^* X$  und somit ist  $H^*(X, A)$  ein graduierter Rng, d.h. ein "nicht notwendig unitärer Ring", sowie ein  $H^* X$ -Modul von rechts und links. Des weiteren ist  $SA \subset SX$  ein dg-Untermodule für die Operation von  $S^* X$  und das cap-Produkt definiert somit eine Operation auf dem Kokern  $S(X, A)$ , in Formeln  $\cap : H^p X \times H_{p+q}(X, A) \rightarrow H_q(X, A)$ . Das Merkwürdigste ist jedoch die Variante

$$\cap : H^p(X, A) \times H_{p+q}(X, A) \rightarrow H_q X$$

Um sie zu erhalten gilt es zu bemerken, daß das dg-Ideal  $S^*(X, A) \subset S^* X$  den dg-Untermodule  $SA \subset SX$  annulliert.

*Übung 4.5.10.* Gegeben  $z \in H_{p+q}(X, A)$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) & \rightarrow & H^p X \\ \cap z \downarrow & & \downarrow \cap z \\ H_q X & \rightarrow & H_q(X, A) \end{array}$$

*Übung 4.5.11.* Gegeben  $X \supset A \supset B$  und  $z \in H_{p+q}(X, B)$  mit Bild  $\bar{z} \in H_{p+q}(X, A)$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) & \rightarrow & H^p(X, B) \\ \cap \bar{z} \downarrow & & \downarrow \cap z \\ H_q X & = & H_q X \end{array}$$

**Satz 4.5.12 (Poincaré-Dualität).** *Für jede kompakte orientierte Mannigfaltigkeit definiert das cap-Produkt mit dem Fundamentalzykel einen Isomorphismus von ihrer Kohomologie mit ihrer Homologie.*

4.5.13. Ist also in Formeln  $M$  eine kompakte orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $\omega \in H_n M$  ihr Fundamentalzykel, so liefert das cap-Produkt mit  $\omega$  für alle  $p$  einen Isomorphismus

$$\cap \omega : H^p M \xrightarrow{\sim} H_{n-p} M$$

4.5.14. Dieser Satz und sein Beweis gelten mit Koeffizienten in einem beliebigen kommutativen Ring. Gilt in unserem Ring  $1 + 1 = 0$ , so benötigt man noch nicht einmal die Voraussetzung der Orientierbarkeit.

4.5.15. Für zwei Homologieklassen komplementärer Dimension  $\alpha \in H_p M$  und  $\beta \in H_{n-p} M$  einer orientierten kompakten  $n$ -Mannigfaltigkeit ist hoffentlich anschaulich klar, was ihre "Schnittzahl"  $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Z}$  sein sollte, die die Schnittpunkte von repräsentierenden Zykeln "in generischer Lage" mit geeigneten, von der Orientierung abhängigen Vorzeichen zählt. Der Isomorphismus aus dem obigen Satz 4.5.12 liefert eine Definition solcher Schnittzahlen: Wir suchen  $a \in H^{n-p} M$ ,  $b \in H^p M$  mit  $\alpha = a \cap \omega_M$ ,  $\beta = b \cap \omega_M$  und setzen

$$\alpha \cdot \beta = \langle a \cup b, \omega_M \rangle$$

Wir werden unsere geometrische Interpretation der so definierten Schnittzahlen in 5.4.6 rechtfertigen. Ebenso zeigt die graduierte Kommutativität des cup-Produkts nach 4.2.6, daß für die Schnittzahlen in einer  $n$ -Mannigfaltigkeit gilt  $\alpha \cdot \beta = (-1)^{(n-|\alpha|)(n-|\beta|)} \beta \cdot \alpha$ . Nach der Adjunktionsformel  $\langle a \cup b, \omega_M \rangle = \langle a, b \cap \omega_M \rangle$  und unseren Definitionen entsprechen sich unter den Identifikationen der Poincaré-Dualität für einen beliebigen kommutativen Koeffizientenring die drei Paarungen

$$\begin{aligned} H_p(M; k) \times H_{n-p}(M; k) &\rightarrow k, & (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \cdot \beta \\ H^{n-p}(M; k) \times H_{n-p}(M; k) &\rightarrow k, & (a, \beta) &\mapsto \langle a, \beta \rangle \\ H^{n-p}(M; k) \times H^p(M; k) &\rightarrow k, & (a, b) &\mapsto \langle a \cup b, \omega_M \rangle \end{aligned}$$

Falls eine dieser Paarungen eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes oder das Umgekehrte induziert, so folgt dasselbe für die beiden anderen Paarungen. Haben wir etwa Koeffizienten in einem Körper oder ist  $H_{n-p-1}(M; \mathbb{Z})$  eine freie abelsche Gruppe, so liefert nach 4.1.11 oder 4.10.1 die Paarung in der Mitte eine Bijektion des linken Raums auf den Dualraum des rechten Raumes, und dasselbe folgt für die beiden anderen Paarungen.

4.5.16. Der Satz liefert uns auch allgemeiner eine Definition des Schnittprodukts auf der Homologie von  $M$ : Man überträgt schlicht das cup-Produkt auf der Kohomologie mithilfe der Isomorphismen aus dem Satz in die Homologie. Allerdings sind wir hier noch nicht in der Lage, die Brücke von dieser Definition bis zur Anschauung zu schlagen.

4.5.17. Um einen anschaulichen Beweis der Poincaré-Dualität zu geben, verallgemeinert man zunächst unseren Satz 2.4.3 über den Zusammenhang von singulärer und simplizialer Homologie von endlichen Simplizialkomplexen auf



Räume, die statt aus Simplizes in ähnlicher Art aus komplizierten kompakten konvexen Polyedern zusammengesetzt sind, wie zum Beispiel die Oberflächen der platonischen Körper. So kann etwa die Homologie der Sphäre mithilfe einer Dodekaeder-Zerlegung berechnet werden durch einen Komplex der Gestalt  $\mathbb{Z}^{12} \rightarrow \mathbb{Z}^{30} \rightarrow \mathbb{Z}^{20}$  für die 12 Flächen, 30 Kanten und 20 Ecken. Gehen wir nun über zur “dualen” Zerlegung in kompakte konvexe Polyeder, im Beispiel zur Ikosaeder-Zerlegung der Sphäre in 20 Flächen mit 30 Kanten und 12 Ecken, so kann man den Komplex, der ursprünglich die Homologie berechnet, in natürlicher Weise identifizieren mit dem Komplex, der bezüglich dieser dualen Zerlegung die Kohomologie berechnet. Da aber Homologie und Kohomologie von der Zerlegung gänzlich unabhängig sind, ergibt sich  $H_i M \cong H^{n-i} M$  für jede orientierte kompakte triangulierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es ist nicht allzu schwer, diese Skizze zu einem richtigen Beweis auszubauen, siehe zum Beispiel [SZ94b]. Wir werden jedoch einen anderen Weg gehen, der Triangulierbarkeitsvoraussetzungen vermeidet und auch abgesehen davon zu allgemeineren Resultaten führt. Genauer wollen wir unseren Satz durch eine Art Induktion über alle offenen Teilmengen beweisen und werden dazu eine Version formulieren, die auch nichtkompakte Mannigfaltigkeiten einbezieht. Das benötigt einige algebraische Vorbereitungen.

*Übung 4.5.18.* Ist  $f : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung von orientierten kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimension  $m, n$  und  $[Y] \in H_m(Y)$  der Fundamentalzykel und  $c_Y \in H^{n-m}(X)$  das Poincaré-Duale von  $f_*[Y] \in H_m(X)$ , also  $c_Y \cap [X] = f_*[Y]$ , so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H^\nu Y & \xleftarrow{f^*} & H^\nu X & \xrightarrow{Uc_Y} & H^{\nu+n-m} X \\ \downarrow \cap [Y] & & & & \downarrow \cap [X] \\ H_{m-\nu} Y & \xrightarrow{f_*} & & & H_{m-\nu} X \end{array}$$

Hinweis: 4.5.7 und 4.5.8. Das Daranmultiplizieren des Poincaré-Dualen des Fundamentalzykels einer Untermannigfaltigkeit kann also ausgedrückt werden durch Rückzug auf der Kohomologie, Poincaré-Dualität auf der Untermannigfaltigkeit und Bild auf der Homologie.

## 4.6 Ein Kriterium für Homotopieäquivalenzen

4.6.1. Um bequem unsere bisher bewiesenen Resultate von der Homologie auf die Kohomologie übertragen zu können, entwickeln wir in diesem Abschnitt zunächst noch weitere Methoden der homologischen Algebra.

**Definition 4.6.2.** Wir nennen einen Komplex **beschränkt in Richtung**

**der Pfeile** genau dann, wenn wir in Richtung der Pfeile gehend ab einer Stelle nur noch  $C_q = 0$  treffen.

**Satz 4.6.3 (Kriterium für Homotopieäquivalenzen).** *Sei  $R$  ein Ring und seien  $P, Q$  zwei in Richtung der Pfeile beschränkte Komplexe von projektiven  $R$ -Moduln. Induziert eine Kettenabbildung  $f : Q \rightarrow P$  Isomorphismen auf allen Homologiegruppen, so ist sie bereits eine Homotopieäquivalenz.*

*Beweis.* Das folgt durch zweifaches Anwenden der anschließenden technischen Proposition 4.6.4.  $\square$

**Proposition 4.6.4.** *Sei  $R$  ein Ring,  $P$  ein in Richtung der Pfeile beschränkter Komplex von projektiven  $R$ -Moduln und  $C$  ein beliebiger Komplex von  $R$ -Moduln. Induziert eine Kettenabbildung  $f : C \rightarrow P$  Isomorphismen auf allen Homologiegruppen, so besitzt sie ein Rechtsinverses in der Homotopiekategorie, d.h. es gibt  $h : P \rightarrow C$  mit  $fh \simeq \text{id}_P$ .*

*Beweis.* Wir konstruieren für eine beliebige Kettenabbildung  $f : C \rightarrow P$  einen Komplex  $K = K(f)$ , den sogenannten **Abbildungskegel** von  $f$  wie folgt: Wir setzen  $K_n = C_{n-1} \oplus P_n$ , fassen die Elemente dieser Summe als Spaltenvektoren auf und definieren den Randoperator  $\partial^K : K_n \rightarrow K_{n-1}$  durch die Matrix

$$\partial^K = \begin{pmatrix} -\partial^C & 0 \\ f & \partial^P \end{pmatrix}$$

Man prüft mühelos  $\partial^K \circ \partial^K = 0$ . Bezeichnet  $[1]C$  wie in 3.6.24 den verschobenen Komplex mit  $([1]C)_n = C_{n-1}$  und Randoperator  $\partial^{[1]C} = -\partial^C$ , so ergibt sich mit den offensichtlichen Abbildungen eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$P \hookrightarrow K(f) \twoheadrightarrow [1]C$$

und man überzeugt sich, daß der Randoperator der zugehörigen langen exakten Homologiesequenz gerade  $\mathcal{H}_n f : \mathcal{H}_n C \rightarrow \mathcal{H}_n P$  ist. Ist speziell  $\mathcal{H}_n f$  ein Isomorphismus für alle  $n$ , so ist der Abbildungskegel  $K(f)$  exakt nach der langen exakten Homologiesequenz, und ist zusätzlich  $P$  ein in Richtung der Pfeile beschränkter Komplex von projektiven  $R$ -Moduln, so ist nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra 3.6.10 die Kettenabbildung  $P \hookrightarrow K(f)$  nullhomotop. Setzen wir so eine Homotopie an als Spaltenmatrix  $(h, \delta)^\top$ , so ergibt sich die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} -\partial^C & 0 \\ f & \partial^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ \delta \end{pmatrix} \partial^P = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_P \end{pmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren bedeutet die erste Zeile, daß  $h : P \rightarrow C$  eine Kettenabbildung ist, und die zweite, daß  $fh$  homotop ist zur Identität auf  $P$ .  $\square$

*Übung 4.6.5.* Hat ein in Richtung der Pfeile beschränkter Komplex  $C$  von projektiven  $R$ -Moduln projektive Homologie, so ist er homotopieäquivalent zu seiner Homologie. Fassen wir genauer die Homologie  $\mathcal{H}C$  wie auch anderweitig auf als Komplex mit trivialen Differentialen, so gibt es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe genau einen Isomorphismus  $\mathcal{H}C \xrightarrow{\cong} C$ , der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation  $\mathcal{H}(\mathcal{H}C) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}C$  induziert.

## 4.7 Eigenschaften der Kohomologie

**Satz 4.7.1 (Homotopie-Invarianz der Kohomologie).** *Homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen induzieren dieselbe Abbildung auf der Kohomologie.*

*Beweis.* Sind  $f$  und  $g$  homotop,  $f \simeq g$ , so sind nach 1.4.8 die induzierten Abbildungen  $Sf$  und  $Sg$  kettenhomotop,  $Sf \simeq Sg$ . Dasselbe gilt dann auch für die transponierten Abbildungen auf den Koketten,  $S^*f \simeq S^*g$ , und so erhalten wir wie gewünscht  $H^q(f) = H^q(g)$ .  $\square$

**Lemma 4.7.2.** *Sind alle Homologiegruppen eines topologischen Raums  $X$  mit Koeffizienten in einem Ring  $k$  freie Linksmodule über  $k$ , so induziert die Kronecker-Paarung mit Koeffizienten für jeden  $k$ -Modul  $G$  Isomorphismen*

$$H^q(X; G) \xrightarrow{\cong} \text{Mod}_k(H_q(X; k), G)$$

*Beweis.* Nach 4.6.5 ist unter unseren Voraussetzungen der Komplex  $S(X; k)$  als Komplex von Linksmodule homotop zu seiner Homologie  $H(X; k)$ . Also ist auch der Komplex  $S^*(X; G) = \text{Hom}_k(S(X; k), G)$  homotop zum Komplex  $\text{Hom}_k(H(X; k), G)$ .  $\square$

4.7.3. Die Kohomologie eines topologischen Raums  $X$  mit Koeffizienten in einem Körper  $k$  ist insbesondere schlicht der Dualraum der Homologie, in Formeln  $H^q(X; k) = H_q(X; k)^*$ . Wenden wir das Lemma an mit  $k = \mathbb{Z}$ , so erhalten wir insbesondere Formeln für die Kohomologie eines Punktes und die Kohomologie von Sphären mit beliebigen Koeffizienten.

4.7.4. Schon wenn  $X$  und  $Y$  unendliche diskrete Mengen sind, ist das Analogon der Künneth-Formel 3.6.20 für die Kohomologie falsch, selbst mit Koeffizienten in einem Körper. Nehmen wir jedoch an, alle Homologie-Gruppen des Raums  $X$  seien frei oder, noch allgemeiner, projektiv über dem gewählten Koeffizientenring, so haben wir ja nach 4.6.5 einen kanonischen Isomorphismus  $SX \xrightarrow{\cong} HX$  in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe. Nehmen wir dann zusätzlich für den vorletzten Isomorphismus alle Homologiegruppen von  $X$  als endlich erzeugt an, so erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$S^*(X \times Y) \xrightarrow{\cong} (SX \otimes SY)^* \xrightarrow{\cong} (HX \otimes SY)^* \xrightarrow{\cong} (HX)^* \otimes S^*Y \xleftarrow{\cong} (H^*X \otimes S^*Y)$$

und man sieht unschwer ein, daß der auf der Kohomologie in der Gegenrichtung induzierte Isomorphismus  $H^*X \otimes H^*Y \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y)$  gerade das Kreuzprodukt sein muß.

*Übung 4.7.5.* In dieser Übung ist  $H^q(X)$  eine Abkürzung für  $H^q(X; G)$  mit beliebigen aber festen Koeffizienten  $G$ . Sei  $X = \bigsqcup X_w$  eine Zerlegung von  $X$  in paarweise disjunkte offene Teilmengen und  $i_w : X_w \hookrightarrow X$  die jeweilige Einbettung. So definieren die  $H^q(i_w) : H^q(X) \rightarrow H^q(X_w)$  einen Isomorphismus  $H^q(X) \xrightarrow{\sim} \prod H^q(X_w)$ . Dasselbe gilt allgemeiner, wenn wir nur fordern, daß es für  $v \neq w$  keinen Weg von einem Punkt aus  $X_v$  zu einem Punkt aus  $X_w$  gibt.

4.7.6. Wir definieren weiter die **relative Kohomologie** eines Paares als die Kohomologie des Komplexes  $S^q(X, A; G) = \text{Ab}(S_q(X, A), G)$  der **relativen Koketten** und erhalten so einen Funktor

$$H^q : \{\text{Raumpaare}\} \rightarrow \{\text{Abelsche Gruppen}\}^{\text{opp}}$$

Lemma 4.7.2 gilt mit demselben Beweis auch für die relative Kohomologie. Gegeben ein Raumpaar  $(X, A)$  liefern die (spaltenden) kurzen exakten Sequenzen  $S_q A \hookrightarrow S_q X \twoheadrightarrow S_q(X, A)$  mittels Dualisierung kurze exakte Sequenzen  $S^q A \leftarrow S^q X \leftarrow S^q(X, A)$ . Die kurze exakte Sequenz der Komplexe der singulären Koketten liefert wiederum die **lange exakte Kohomologie-sequenz**

$$0 \rightarrow H^0(X, A) \rightarrow H^0 X \rightarrow H^0 A \rightarrow H^1(X, A) \rightarrow \dots$$

mit einem im Raumpaar  $(X, A)$  natürlichen Randoperator. Dasselbe gilt auch mit beliebigen Koeffizienten. Wir übertragen beispielhaft noch einige weitere Aussagen auf die Kohomologie.

**Satz 4.7.7 (Ausschneidung für die Kohomologie).** *Ist  $(X, A)$  ein Raumpaar und  $V \subset A$  eine Teilmenge mit  $\bar{V} \subset A^\circ$ , so liefert die Einbettung von Raumpaaren  $i : (X \setminus V, A \setminus V) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen auf den relativen Kohomologiegruppen*

$$H^q(X, A) \xrightarrow{\sim} H^q(X \setminus V, A \setminus V)$$

*Beweis.* Nach dem Ausschneidungssatz 2.3.18 induziert die von der Einbettung herkommende Kettenabbildung  $S_i : S(X \setminus V, A \setminus V) \rightarrow S(X, A)$  Isomorphismen auf der Homologie und ist mithin nach 4.6.3 eine Homotopieäquivalenz. Dann ist natürlich auch die transponierte Abbildung  $S^*i : S^*(X, A) \rightarrow S^*(X \setminus V, A \setminus V)$  eine Homotopieäquivalenz und induziert Isomorphismen auf der Kohomologie.  $\square$

4.7.8. Geht man in der Herleitung der Mayer-Vietoris-Sequenz und der relativen Mayer-Vietoris-Sequenz in 2.3.19 und 2.3.21 aus kurzen exakten Sequenzen von komplexen freier abelscher Gruppen zuerst zu den dualen Kettenkomplexen über und bildet erst dann die lange exakte Homologiesequenz, so erhält man lange exakte Sequenzen von Kohomologiegruppen, genannt die **Mayer-Vietoris-Sequenz** und die **relative Mayer-Vietoris-Sequenz der Kohomologie**.

4.7.9. Ist  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex, so besteht die obere Zeile des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} S\mathcal{K} & \leftarrow & S^s\Delta(\mathcal{K}) & \hookrightarrow & S\Delta(\mathcal{K}) \\ & \swarrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & S^{os}\Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

aus 2.4.3 nach 4.6.3 aus Homotopieäquivalenzen, und wählen wir zusätzlich eine Anordnung auf den Ecken, so ist auch der Komplex  $S^{os}\Delta(\mathcal{K})$  der ordnungsverträglichen simplicialen Ketten definiert und das ganze Diagramm besteht aus Homotopieäquivalenzen. Folglich erhalten wir durch Anwenden von  $\text{Hom}(\_, \mathbb{Z})$  wieder ein kommutatives Diagramm von Homotopieäquivalenzen, das wir

$$\begin{array}{ccccc} S^*\mathcal{K} & \rightarrow & S_s^*\Delta(\mathcal{K}) & \leftarrow & S^*\Delta(\mathcal{K}) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & S_{os}^*\Delta(\mathcal{K}) & & \end{array}$$

notieren und das Isomorphismen zwischen den Kohomologiegruppen dieser Komplexe liefert. Die Elemente von  $S_{os}^q\Delta(\mathcal{K})$  kann man auffassen als unendliche formale Linearkombinationen von ordnungsverträglichen  $q$ -Simplizes, formal haben wir eine kanonische Bijektion  $S_{os}^q\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}(\mathcal{K}_q, \mathbb{Z})$ . Der Korandoperator ordnet einem  $q$ -Simplex die formale Summe mit geeigneten Vorzeichen aller  $(q+1)$ -Simplizes zu, die unseren  $q$ -Simplex enthalten. Ähnlich kann man die Gruppe der **Simplicialkoketten**  $S^q\mathcal{K}$  identifizieren mit der Gruppe aller Abbildungen  $f: \mathcal{K}_q^{\leq} \rightarrow \mathbb{Z}$  von der Menge aller angeordneten  $q$ -Simplizes nach  $\mathbb{Z}$  mit der Eigenschaft  $f(\sigma \circ \pi) = (\text{sgn } \pi)f(\sigma)$  für alle Permutationen  $\pi \in \mathcal{S}_{q+1}$ . Zur Übung empfehle ich, diese **simpliciale Kohomologie** für eine Triangulierung der reellen Zahlengerade explizit zu berechnen.

## 4.8 Erweiterungen von abelschen Gruppen

4.8.1. Um unsere Kohomologiegruppen aus den Homologiegruppen berechnen zu können, brauchen wir **Erweiterungen**. Unter einer Erweiterung einer abelschen Gruppe  $M$  durch eine abelsche Gruppe  $N$  versteht man zunächst

einmal eine kurze exakte Sequenz  $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$ . Eine zweite solche Erweiterung  $N \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow M$  heißt **isomorph** zu unserer ersten Erweiterung genau dann, wenn es einen Isomorphismus  $E \xrightarrow{\sim} E'$  gibt, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ N & \hookrightarrow & E' & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

zum Kommutieren bringt. Wir werden uns im folgenden überlegen, daß die Isomorphieklassen von derartigen Erweiterungen eine Menge, ja sogar in natürlicher Weise eine abelsche Gruppe bilden, und wie wir diese Gruppe zu gegebenen  $M$  und  $N$  effektiv berechnen können. Die eigentliche Arbeit beginnen wir mit einem etwas künstlichen aber formal einfacheren Zugang zu besagter Gruppe. Das Ausarbeiten des Zusammenhangs zum hier nur skizzierten namensgebenden Zugang überlasse ich dem Leser als Übung 4.8.6.

**Definition 4.8.2.** Gegeben ein Homomorphismus von abelschen Gruppen  $f : A \rightarrow B$  definiert man seinen **Kokern** als die abelsche Gruppe

$$\text{cok } f = B/(\text{im } f)$$

**Definition 4.8.3.** Gegeben zwei abelsche Gruppen  $M$  und  $N$  erklären wir eine dritte abelsche Gruppe  $\text{Ext}(M, N)$  durch die Vorschrift

$$\text{Ext}(M, N) := \text{cok}(\text{Hom}(\mathbb{Z}M, N) \rightarrow \text{Hom}(KM, N))$$

für  $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$  die Standardauflösung von  $M$  aus 3.4.4. Sie heißt die Gruppe der **Erweiterungen von  $M$  durch  $N$** . Die Notation rührt her von der englischen und französischen Bezeichnung “**extension**”.

4.8.4. Offensichtlich ist  $\text{Ext}$  ein kovarianter Funktor in der zweiten und ein kontravarianter Funktor in der ersten Variablen. Ist  $M$  frei, so spaltet die Sequenz  $KM \hookrightarrow \mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$  und wir folgern  $\text{Ext}(M, N) = 0$  für alle  $N$ .

4.8.5. Wir können unsere Definition auch dahingehend umschreiben, daß wir den Komplex  $\mathcal{P}M$  mit  $\mathcal{P}_1M = KM$  und  $\mathcal{P}_0M = \mathbb{Z}M$  und  $\mathcal{P}_qM = 0$  für  $q \neq 0, 1$  aus 3.4.4 betrachten und  $N = N[0]$  als im Grad Null konzentrierten Komplex auffassen und im Sinne von 1.4.10 den Hom-Komplex  $\text{Hom}(\mathcal{P}M, N[0])$  bilden. Damit erhalten wir dann die Darstellung

$$\text{Ext}(M, N) = \mathcal{H}_{-1} \text{Hom}(\mathcal{P}M, N[0])$$

Andererseits definiert die Surjektion  $\mathbb{Z}M \twoheadrightarrow M$  offensichtlich einen Isomorphismus

$$\text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0 \text{Hom}(\mathcal{P}M, N[0])$$

Da nun nach 3.5.7 der Komplex  $\mathcal{P}M$  aus freien abelschen Gruppen besteht, liefert jede kurze exakte Sequenz  $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$  von abelschen Gruppen eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{P}M, N'[0]) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{P}M, N[0]) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{P}M, N''[0])$$

und die zugehörige lange exakte Homologiesequenz liefert mit den eben angegebenen Identifikationen eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}(M, N') & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(M, N) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(M, N'') \rightarrow \\ & & \rightarrow & & \mathrm{Ext}(M, N) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Ext}(M, N'') \rightarrow 0 \end{array}$$

Sie heißt die lange exakte **Ext-Sequenz im zweiten Eintrag**.

*Übung 4.8.6.* Man zeige, daß wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Erweiterungen von } M \text{ durch } N \\ \text{im Sinne von 4.8.1,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}(M, N)$$

erhalten, indem wir jeder kurzen exakten Sequenz  $N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow M$  das Bild in  $\mathrm{Ext}(M, N)$  der Identität auf  $M$  unter dem Randoperator der zugehörigen Ext-Sequenz im zweiten Eintrag zuordnen. Hinweis: Gegeben  $e \in \mathrm{Ext}(M, N)$  wähle man einen Repräsentanten  $\tilde{e} : KM \rightarrow N$  und bilde durch pushout in die Mitte im Sinne von 4.9.6 ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} KM & \hookrightarrow & \mathbb{Z}M & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ N & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & M \end{array}$$

## 4.9 Injektive abelsche Gruppen

**Definition 4.9.1.** Ein Modul  $I$  über einem Ring heißt **injektiv** genau dann, wenn gegeben irgendein weiterer Modul  $M$  über unserem Ring und darin ein Untermodul  $U \subset M$  sich jeder Modulhomomorphismus  $U \rightarrow I$  zu einem Modulhomomorphismus  $M \rightarrow I$  ausdehnen läßt.

4.9.2. In Formeln heißt also ein  $R$ -Modul  $I$  injektiv genau dann, wenn für jede Injektion  $i : U \hookrightarrow M$  von  $R$ -Moduln das Vorschalten eine Surjektion  $(\circ i) : \mathrm{Mod}_R(M, I) \twoheadrightarrow \mathrm{Mod}_R(U, I)$  liefert.

*Beispiele 4.9.3.* Ist  $k$  ein Körper, so ist jeder  $k$ -Modul injektiv als  $k$ -Modul, aber natürlich nicht notwendig als abelsche Gruppe. Einen injektiven  $\mathbb{Z}$ -Modul nennen wir eine **injektive abelsche Gruppe**. Die abelsche Gruppe  $\mathbb{Q}$  ist injektiv, wie die gleich anschließende Proposition 4.9.5 zeigt. Alternativ können wir auch argumentieren, daß gilt  $\mathrm{Ab}(M, \mathbb{Q}) = \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M, \mathbb{Q})$  nach ?? und daß die rechte Seite ein exakter Funktor in  $M$  ist nach 3.2.20.



**Definition 4.9.4.** Eine abelsche Gruppe heißt **divisibel** genau dann, wenn für jede von Null verschiedene ganze Zahl  $n$  der durch die Multiplikation mit dieser Zahl gegebene Endomorphismus unserer Gruppe surjektiv ist.

**Proposition 4.9.5.** 1. Eine abelsche Gruppe  $I$  ist injektiv genau dann, wenn gilt  $\text{Ext}(M, I) = 0$  für alle  $M$ .

2. Eine abelsche Gruppe ist injektiv genau dann, wenn sie divisibel ist.

3. Jeder Quotient einer injektiven abelschen Gruppe ist injektiv.

4. Jede abelsche Gruppe läßt sich in eine Injektive einbetten.

4.9.6. Analoges gilt mit einem analogen Beweis auch für Moduln über beliebigen Hauptidealringen. Der folgende Beweis verwendet die Konstruktion des “push-out in der Kategorie der abelschen Gruppen”: Gegeben Homomorphismen abelscher Gruppen  $\phi : A \rightarrow B$  und  $\psi : A \rightarrow C$  bildet man die abelsche Gruppe  $P = (B \oplus C) / \{(\phi(a), -\psi(a)) \mid a \in A\}$  mit den durch die Einbettungen induzierten Morphismen  $B \rightarrow P$  und  $C \rightarrow P$  und erhält so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \rightarrow & P \end{array}$$

von abelschen Gruppen. Die Gruppe  $P$  oder genauer die “Hälfte dieses Diagramms unterhalb der Linie durch  $B$  und  $C$ ” heißt der **push-out** der Hälfte oberhalb besagter Linie. Im Rahmen der Kategorientheorie in I.3.1.11 mag man die universelle Eigenschaft kennenlernen, die push-outs in beliebigen Kategorien charakterisiert. In unserem speziellen Fall erkennt man leicht, daß die Injektivität eines Ausgangspfeils die Injektivität des dazu parallelen Pfeils in den push-out impliziert und daß die Surjektivität eines Ausgangspfeils gleichbedeutend ist zur Surjektivität des dazu parallelen Pfeils in den push-out, in Formeln  $(A \hookrightarrow B) \Rightarrow (C \hookrightarrow P)$  und  $(A \twoheadrightarrow B) \Leftrightarrow (C \twoheadrightarrow P)$ . Vergleiche auch Übung I.3.1.14.

*Beweis.* 1. Für  $I$  injektiv folgt  $\text{Ext}(M, I) = 0$  aus der Definition. Sei umgekehrt  $I$  eine abelsche Gruppe mit  $\text{Ext}(M, I) = 0$  für alle  $M$ . Gegeben eine Injektion  $B' \hookrightarrow B$  gilt es, jeden Morphismus  $B' \rightarrow I$  zu einem Morphismus  $B \rightarrow I$  auszudehnen. Dazu bilden wir den push-out

$$\begin{array}{ccc} B' & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \hookrightarrow & Y \end{array}$$



mit einer Injektion in der unteren Horizontalen nach 4.9.6. Vervollständigen wir diese untere Horizontale zu einer kurzen exakten Sequenz  $I \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow K$  und bilden dazu die Ext-Sequenz im zweiten Eintrag 4.8.5 mit  $M = K$ , so folgt, daß die Surjektion  $Y \twoheadrightarrow K$  spaltet alias ein Rechtsinverses besitzt. Mit 2.2.9 folgt, daß dann auch die Injektion  $I \hookrightarrow Y$  spaltet, und ein Linksinverses  $Y \rightarrow I$  dazu liefert dann die gewünschte Ausdehnung.

2. Ist  $I$  injektiv, so induziert für alle  $n \neq 0$  die Injektion  $(n \cdot) : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$  eine Surjektion  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, I) \twoheadrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, I)$  alias  $(n \cdot) : I \twoheadrightarrow I$ . Jede injektive abelsche Gruppe ist also divisibel. Die Umkehrung zeigen wir mit dem Zorn'schen Lemma. Sei  $I$  divisibel,  $A' \subset A$  eine Untergruppe und  $\varphi' : A' \rightarrow I$  ein Homomorphismus. Es gilt,  $\varphi'$  auf ganz  $A$  auszudehnen. Wir betrachten dazu die Menge aller Paare  $(A_1, \varphi_1)$  mit  $A_1$  einer Untergruppe von  $A$  oberhalb von  $A'$  und  $\varphi_1$  einer Fortsetzung von  $\varphi'$  auf  $A_1$ . Die Menge aller derartigen Paare ist in offensichtlicher Weise induktiv geordnet, wir finden also eine maximale Ausdehnung  $(A_{\max}, \varphi_{\max})$ . Wäre hier nicht  $A_{\max} = A$ , so könnten wir ein  $a$  im Komplement wählen und das pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_{\max} \cap \langle a \rangle & \hookrightarrow & \langle a \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\max} & \hookrightarrow & A_{\max} + \langle a \rangle \end{array}$$

bilden. Da  $I$  divisibel ist, können wir die Einschränkung von  $\varphi_{\max}$  längs der linken Vertikale ausdehnen längs der oberen Horizontale zu sagen wir  $\varphi_a : \langle a \rangle \rightarrow I$ , und  $\varphi_{\max}$  und  $\varphi_a$  zusammen liefern dann eine Ausdehnung von  $\varphi_{\max}$  auf den pushout. Das aber widerspräche der Maximalität unserer Ausdehnung.

3. Das folgt direkt aus 2, oder auch aus 1 mit der Ext-Sequenz 4.8.5.

4. Eine derartige Einbettung liefert nach 3 die rechte Vertikale des pushout-Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}M & \twoheadrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}M & \twoheadrightarrow & I \end{array}$$

Daß die untere Horizontale eine Surjektion und die rechte Vertikale eine Injektion ist, folgt aus der expliziten Konstruktion des pushout nach 4.9.6.  $\square$

4.9.7. Ist  $N' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N''$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und ist  $M$  ein weitere abelsche Gruppe, so ist die induzierte Sequenz

$$\text{Hom}(M, N') \hookrightarrow \text{Hom}(M, N) \twoheadrightarrow \text{Hom}(M, N'')$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß keineswegs wieder eine Surjektion sein. Ist jedoch  $M$  frei, so ist auch der rechte Pfeil offensichtlich

wieder eine Surjektion und unsere Sequenz folglich exakt. Ist ähnlich  $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen und ist  $N$  eine weitere abelsche Gruppe, so ist die induzierte Sequenz

$$\mathrm{Hom}(M'', N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(M, N) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(M', N)$$

offensichtlich linksexakt, aber der rechte Pfeil muß ebensowenig eine Surjektion sein. Unsere Erweiterungsgruppen sind in gewisser Weise Korrekturterme für diese Phänomene. Im ersten Fall ist das die Bedeutung von 4.8.5. Wir zeigen es nun im zweiten Fall.

4.9.8. Gegeben eine abelsche Gruppe  $N$  betrachten wir die kurze exakte Sequenz  $N \hookrightarrow I_N \twoheadrightarrow C_N$  mit der im letzten Schritt des Beweises von 4.9.5 als pushout konstruierten Einbettung von  $N$  in eine injektive Gruppe  $I = I_N$  als erstem Pfeil und dem Kokern dieser Einbettung als zweitem Pfeil. Den Zweischrittkomplex  $I_N \twoheadrightarrow C_N$  in Grad 0 und  $(-1)$  notieren wir  $\mathcal{I}N$ . Gegeben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen  $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$  erhält man nun wegen der Injektivität der Einträge  $\mathcal{I}N$  eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$\mathrm{Hom}(M'', \mathcal{I}N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(M, \mathcal{I}N) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(M', \mathcal{I}N)$$

Die zugehörige lange exakte Homologiesequenz liefert mit den durch die Homologiesequenz im zweiten Eintrag gegebenen Identifikationen eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}(M'', N) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(M, N) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(M', N) & \rightarrow & & & \\ & & \rightarrow & & \mathrm{Ext}(M'', N) & \rightarrow & \mathrm{Ext}(M, N) & \rightarrow & \mathrm{Ext}(M', N) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Sie heißt die lange exakte **Ext-Sequenz im ersten Eintrag**.

*Übung 4.9.9.* Ähnlich wie im Fall der Torsionsgruppen zeige man, daß gegeben abelsche Gruppen  $M, N$  die von  $\mathcal{P}M \twoheadrightarrow M[0]$  und  $N[0] \hookrightarrow \mathcal{I}N$  induzierten Kettenabbildungen

$$\mathrm{Hom}(M[0], \mathcal{I}N) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{P}M, \mathcal{I}N) \leftarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{P}M, N[0])$$

auf der Homologie Isomorphismen induzieren.

4.9.10. Für jede abelsche Gruppe  $N$  und jede natürliche Zahl  $m \neq 0$  liefert der Randoperator der Ext-Sequenz im ersten Eintrag zur kurzen exakten Sequenz  $\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  einen Isomorphismus

$$N/mN \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N)$$

*Übung 4.9.11.* Gegeben eine abelsche Gruppe  $M$  und eine Familie von abelschen Gruppen  $(N_i)$  ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$\text{Ext}\left(M, \prod N_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod \text{Ext}(M, N_i)$$

*Übung 4.9.12.* Gegeben eine Familie von abelschen Gruppen  $(M_i)$  und eine abelsche Gruppe  $N$  ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$\text{Ext}\left(\bigoplus M_i, N\right) \xrightarrow{\sim} \prod \text{Ext}(M_i, N)$$

*Übung 4.9.13.* Gilt  $\text{Ext}(P, N) = 0$  für alle  $N$ , so ist  $P$  frei. Kann im allgemeinen  $\text{Ext}(M, N)$  Elemente unendlicher Ordnung enthalten?

4.9.14. Eine berühmte **Vermutung von Whitehead** dahingehend, daß für abelsche Gruppen  $A$  gilt

$$\text{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow A \text{ frei}$$

ist von Shelah [She74] in ganz absonderlicher Weise “gelöst” worden: Ob die Vermutung stimmt oder nicht, hängt von den Axiomen der Mengenlehre ab, die man zugrunde legt!

## 4.10 Koeffizientenwechsel in der Kohomologie

**Satz 4.10.1 (Universelles Koeffiziententheorem der Kohomologie).** *Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $G$  eine abelsche Gruppe, so haben wir natürliche kurze exakte Sequenzen*

$$\text{Ext}(\text{H}_{q-1}X, G) \hookrightarrow \text{H}^q(X; G) \rightarrow \text{Hom}(\text{H}_qX, G)$$

*die in unnatürlicher Weise spalten.*

*Übung 4.10.2.* Dasselbe gilt mit demselben Beweis auch in der relativen Kohomologie. Man prüfe es explizit im Fall der relativen Kohomologie des Möbiusbands relativ zu seinem Randkreis. Hinweis: 2.6.7.

*Ergänzung 4.10.3.* Will man aus Homologie eines topologischen Raums  $X$  mit Koeffizienten in einem Ring  $k$  die Kohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in einem  $k$ -Modul  $G$  berechnen, so leistet das im allgemeinen eine “Spektralsequenz mit  $E_2$ -Term  $\text{Ext}_k^i(\text{H}_j(X; k), G)$ ”. In unserem speziellen Fall  $k = \mathbb{Z}$  verschwinden alle Erweiterungen ab Grad zwei, wir notieren  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Ext}$  und besagte Spektralsequenz degeneriert zur Aussage des obigen Satzes. Das gilt allgemeiner nach 3.5.7 für  $k$  einen Hauptidealring oder ganz allgemein für alle Ringe derart, daß jeder Untermodul eines projektiven Moduls projektiv ist. Derartige Ringe heißen **erbliche Ringe**, da sich bei ihnen “die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt”.

*Ergänzung 4.10.4.* Kaplansky hat ein Beispiel für einen erblichen Ring gefunden, dessen opponierter Ring nicht erblich ist. Man müßte also eigentlich genauer von **linkserblichen** und **rechtserblichen Ringen** reden.

*Beweis.* Wir betrachten die kurze exakte Sequenz  $G \hookrightarrow I_G \twoheadrightarrow C_G$  mit injektiven  $I_G$  und  $C_G$  aus 4.9.8. Sie führt zu einer kurzen exakten Sequenz von Komplexen

$$\mathrm{Hom}(SX, G) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(SX, I_G) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(SX, C_G)$$

Da  $I_G$  und  $C_G$  injektiv sind, sind die Funktoren  $\mathrm{Hom}(\_, I_G)$  und  $\mathrm{Hom}(\_, C_G)$  exakt und "kommutieren" folglich mit dem Bilden der Homologie in derselben Weise, wie wir das in 3.3.1 für das Tensorieren mit torsionsfreien Moduln gesehen hatten. Von der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz ist also ein Ausschnitt

$$\begin{array}{ccccccc} & & \rightarrow & \mathrm{Hom}(H_{q-1}X, I_G) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(H_{q-1}X, C_G) & \rightarrow \\ \rightarrow & H^q(X; G) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(H_qX, I_G) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(H_qX, C_G) & \rightarrow \end{array}$$

und die Ext-Sequenz im zweiten Eintrag liefert uns wie gewünscht kurze exakte Sequenzen

$$\mathrm{Ext}(H_{q-1}X, G) \hookrightarrow H^q(X; G) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(H_qX, G)$$

Es bleibt zu zeigen, daß unsere Sequenzen spalten. So eine Spaltung folgt aber wie zu Ende des Beweises von 3.5.2 aus der Existenz einer Spaltung der Einbettung  $Z_qX \hookrightarrow S_qX$ : Solch eine Spaltung  $S_qX \twoheadrightarrow Z_qX$  induziert durch eine Abbildung  $\mathrm{Hom}(H_qX, G) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(Z_qX, G) \rightarrow S^q(X; G)$ , die in  $Z^q(X; G)$  landet.  $\square$

*Ergänzung 4.10.5.* Sei allgemeiner  $C_*$  irgendein Komplex von freien abelschen Gruppen und  $G$  eine weitere abelsche Gruppe. So liefert dasselbe Argument unkanonisch spaltende kurze exakte Sequenzen

$$\mathrm{Ext}(\mathcal{H}_{q-1}C_*, G) \hookrightarrow \mathcal{H}^q \mathrm{Hom}(C_*, G) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_q C_*, G)$$

## 5 Poincaré-Dualität und Schnittpaarung

### 5.1 Limites und Kolimites

**Definition 5.1.1.** Sei  $(I, \geq)$  eine partiell geordnete Menge. Ein **durch  $I$  indiziertes System in einer Kategorie  $\mathcal{C}$**  ist eine Familie  $\{M_i\}_{i \in I}$  von Objekten mitsamt Morphismen  $\varphi_{ji} : M_i \rightarrow M_j$  für alle  $j \geq i$  derart, daß gilt  $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$  wann immer  $k \geq j \geq i$ , und daß gilt  $\varphi_{ii} = \text{id}$  für alle  $i$ .

**Definition 5.1.2.** Ein **Kolimes** eines Systems ist ein Objekt  $L$  mitsamt Morphismen  $\text{can}_i : M_i \rightarrow L$  derart, daß gilt  $\text{can}_j \circ \varphi_{ji} = \text{can}_i$  für  $j \geq i$  und daß die folgende **universelle Eigenschaft** erfüllt ist: Gegeben ein Objekt  $N$  mitsamt Morphismen  $f_i : M_i \rightarrow N$  derart, daß gilt  $f_j \circ \varphi_{ji} = f_i$  wann immer  $j \geq i$ , gibt es genau einen Morphismus  $f : L \rightarrow N$  mit  $f_i = f \circ \text{can}_i$  für alle  $i$ . Wie üblich legt die universelle Eigenschaft das Datum  $(L, (\text{can}_i)_{i \in I})$  fest bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir schreiben für "den" Kolimes der  $M_i$  kurz


$$L = \text{colim } M_i = \text{col } M_i$$

*Beispiel 5.1.3.* Im Fall einer partiell geordneten Menge, in der je zwei verschiedene Objekte unvergleichbar sind, spezialisiert unsere Definition zum Koproduct, daher die Bezeichnung als Kolimes. Im Fall einer partiell geordneten Menge mit drei Elementen, von denen eines kleiner ist als die beiden anderen, wobei diese beiden anderen jedoch unvergleichbar sind, spezialisiert unsere Definition zum Pushout.

**Definition 5.1.4.** Eine partiell geordnete Menge heißt **filtrierend** genau dann, wenn darin jede endliche Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Ein Kolimes über ein filtrierendes System heißt ein **filtrierender Kolimes**.


5.1.5. In der Literatur wird meist eine andere Definition verwendet, nach der man eine partiell geordnete Menge filtrierend nennt genau dann, wenn es für je zwei Elemente aus  $I$  ein Drittes gibt, daß größer ist als alle beide. Mit dieser Definition wäre auch die leere Menge filtrierend, was mir jedoch unnatürlich scheint und was ich in diesem Text nicht zulassen will. Das ist der einzige Unterschied der Definition dieses Textes zur in der Literatur üblichen Definition.

5.1.6. Ein System über einer filtrierenden Menge heißt in der Literatur oft auch ein **direktes** oder **induktives System**. Ein Kolimes über ein derartiges System heißt ein **direkter** oder **induktiver Kolimes** oder in milder Begriffsverwirrung sogar ein **direkter** oder **induktiver Kolimes** und wird statt  $\text{col}$  meist  $\varinjlim$  notiert.



SkriptenBilder/BildKolim.png

Illustration zum Kolimes



SkriptenBilder/BildLimm.png

Illustration zum Limes

*Beispiel 5.1.7 (Kolimites von Mengen).* In der Kategorie der Mengen existieren Kolimites: Die Menge der Äquivalenzklassen in der disjunkten Vereinigung  $\bigsqcup_{i \in I} M_i$  unter der Äquivalenzrelation  $\sim$ , die erzeugt wird durch die Äquivalenzen

$$\text{in}_i(m_i) \sim \text{in}_j(\varphi_{ji}(m_i)) \text{ für alle } i, j \in I \text{ mit } j > i \text{ und alle } m_i \in M_i$$

löst unser universelles Problem. Wir nennen diese Menge von Äquivalenzklassen ab jetzt *den* Kolimes  $\text{colim } M_i$  der  $M_i$ . Sind speziell alle  $M_i$  Teilmengen einer Menge  $M$  und sind die  $\varphi_{ji}$  die Inklusionen und ist unser System filtrierend, so liefert die kanonische Abbildung eine Bijektion  $\text{colim } M_i \xrightarrow{\sim} \bigcup_{i \in I} M_i \subset M$ .

*Beispiel 5.1.8.* In der Kategorie der abelschen Gruppen existieren Kolimites: Der Quotient der direkten Summe  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  nach der Untergruppe, die erzeugt wird von allen  $\text{in}_i(m) - \text{in}_j(\varphi_{ji}(m))$  für  $i \in I$ ,  $j \geq i$  und  $m \in M_i$ , löst unser universelles Problem.

5.1.9. Bildet man zur partiell geordneten Menge  $(I, \geq)$  eine Kategorie  $\mathcal{I}$  mit  $\text{Ob } \mathcal{I} = I$  und  $|\mathcal{I}(i, j)| = 1$  falls  $j \geq i$ ,  $\mathcal{I}(i, j) = \emptyset$  sonst, so ist ein durch  $I$  indiziertes System schlicht ein Funktor  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ . Die Definition des Kolimes bleibt für beliebige Funktoren von einer Kategorie in eine weitere Kategorie oder sogar beliebige Köchermorphismen von einem Köcher in eine Kategorie sinnvoll.

*Ergänzende Übung 5.1.10.* Gegeben seien beliebige Kategorien  $\mathcal{I}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  und ein Funktor  $\mathcal{I} \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ,  $i \mapsto F_i$ . Existiert für alle  $C \in \mathcal{C}$  der Kolimes  $\text{colim } F_i(C)$  in  $\mathcal{D}$ , so erhalten wir einen Kolimes der  $F_i$  in  $\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  durch die Vorschrift

$$(\text{colim } F_i)(C) = \text{colim}(F_i(C))$$

5.1.11. Systeme in der opponierten Kategorie nennen wir **Kosysteme** und der Kolimes heißt dann **Limes**. Ausgeschrieben ist also ein Kosystem in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  über einer partiell geordneten Menge  $(I, \geq)$  eine Familie  $\{M_i\}_{i \in I}$  von Objekten mitsamt Morphismen  $\varphi_{ij} : M_j \rightarrow M_i$  für alle  $j \geq i$  derart, daß gilt  $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$  wann immer  $k \geq j \geq i$  und  $\varphi_{ii} = \text{id}$  für alle  $i$ , und ein Limes über ein solches Kosystem ist ein Objekt  $L$  mitsamt Morphismen  $\text{can}_i : L \rightarrow M_i$  derart, daß eine gewisse universelle Eigenschaft erfüllt ist, die der Leser nun erraten kann. Man notiert Limes meist

$$L = \lim M_i$$

Im Fall einer partiell geordneten Menge, in der je zwei verschiedene Objekte unvergleichbar sind, spezialisiert unser Limes zum Produkt. Im Fall einer

partiell geordneten Menge mit drei Elementen, von denen eines kleiner ist als die beiden anderen, diese beiden jedoch unvergleichbar sind, spezialisiert unsere Definition zum Pullback alias Faserprodukt.

*Bemerkung 5.1.12.* Sicher können Kosysteme identifiziert werden mit Systemen, die durch die opponierte partiell geordnete Menge indiziert werden. Wir können in diesem Sinne sowohl unsere Limes als auch unsere Kolimes jeweils sowohl über Systemen als auch über Kosystemen erklären, aber das würde zu zusätzlicher Verwirrung führen. Die Indizierung ist so gewählt, daß weder der Limes noch der Kolimes sich ändern, wenn man Elemente unserer partiell geordneten Mengen wegläßt, die nicht maximal sind. Stärkere Aussagen in dieser Richtung formuliert 5.1.20.

5.1.13. Ein Kosystem über einer filtrierenden Menge heißt in der Literatur meist ein **inverses System**, und ein Limes über ein derartiges System heißt dann ein **inverser** oder **projektiver Limes** und wird statt  $\lim$  meist  $\varprojlim$  notiert.

*Beispiel 5.1.14 (Limes von Mengen).* In der Kategorie der Mengen existieren Limes: Die Teilmenge des Produkts  $\prod_{i \in I} M_i$ , die besteht aus allen Tupeln  $(m_i)$  mit

$$\varphi_{ij}(m_j) = m_i \text{ für alle } i, j \in I \text{ mit } j > i$$

löst unser universelles Problem. Wir nennen diese Teilmenge des Produkts ab jetzt *den* Limes  $(\lim M_i)$  der  $M_i$ .

*Ergänzung 5.1.15.* Bezeichne  $\rightrightarrows$  den Köcher mit zwei Punkten und zwei Pfeilen, von dem ich der Einfachheit halber nur die Pfeile angedeutet habe. Der Limes eines Köchermorphismus  $(\rightrightarrows) \rightarrow \mathcal{C}$  in eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt, wenn er existiert, auch der **Egalisator** der beiden Morphismen, die den Pfeilen unseres Köchers zugeordnet werden. Sind zum Beispiel  $f, g : X \rightarrow Y$  zwei Abbildungen von Mengen, so ist ihr Egalisator schlicht  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ .

*Übung 5.1.16.* Gegeben ein Kosystem von Gruppen (oder abelschen Gruppen, oder Ringen, oder Moduln) trägt sein Limes als Kosystem von Mengen in natürlicher Weise die Struktur einer Gruppe (oder einer abelschen Gruppe, oder eines Rings, oder eines Moduls) und wird mit dieser Struktur ein Limes in der jeweiligen Kategorie.

*Beispiel 5.1.17.* Zum Beispiel können wir den Ring  $k[[X]]$  der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in einem Ring  $k$  aus ?? beschreiben als Limes des Kosystems aller "abgeschnittenen Polynomringe", genauer liefert die universelle Eigenschaft einen Isomorphismus  $k[[X]] \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n k[X]/\langle X^n \rangle$ .



**Definition 5.1.18.** Eine Teilmenge  $K \subset I$  einer partiell geordneten Menge  $I$  heißt **final** genau dann, wenn es für jedes  $i \in I$  ein  $k \in K$  gibt mit  $k \geq i$ .

5.1.19. In der Literatur heißt diese Eigenschaft meist **kofinal**. Da die Vorsilbe “ko” aber in diesem Zusammenhang mit anderer Bedeutung belastet ist, habe ich die Terminologie etwas variiert.

**Lemma 5.1.20 (Übergang zu finalen Teilsystemen).** *Seien  $I$  eine partiell geordnete Menge,  $K \subset I$  final und  $M_i$  ein durch  $I$  indiziertes System. Genau dann existiert der Kolimes über  $I$ , wenn der Kolimes über  $K$  existiert, und dann ist der offensichtliche Morphismus ein Isomorphismus*

$$\operatorname{col}_{k \in K} M_k \xrightarrow{\sim} \operatorname{col}_{i \in I} M_i$$

*Beweis.* Beide Seiten haben dieselbe universelle Eigenschaft. Man überzeuge sich davon zunächst im Spezialfall, daß  $I$  ein größtes Element besitzt und daß  $K$  nur aus diesem einen Element besteht.  $\square$

5.1.21. Als Konsequenz unseres Resultats für Kolimites in 5.1.20 bleiben natürlich auch Limes unverändert bei der Restriktion zu einer finalen Teilmenge der Indexmenge des zugehörigen Kosystems.

5.1.22 (**Filtrierende Kolimites von Mengen**). Gegeben ein induktives System  $(M_i)$  von Mengen haben  $m_i \in M_i$  und  $m_j \in M_j$  dasselbe Bild im direkten Limes genau dann, wenn es ein  $k$  oberhalb von  $i$  und  $j$  gibt derart, daß beide Elemente dasselbe Bild in  $M_k$  haben. In der Tat kann in diesem Fall die fragliche Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung explizit beschrieben werden durch die Vorschrift

$$(m_i \sim m_j) \Leftrightarrow (\exists k \in I \text{ mit } k \geq i, k \geq j \text{ und } \varphi_{ki}(m_i) = \varphi_{kj}(m_j))$$

da nämlich diese Vorschrift im Fall eines induktiven Systems bereits eine Äquivalenzrelation definiert.

5.1.23 (**Filtrierende Kolimites von Gruppen**). Gegeben ein induktives System  $(M_i)$  von Gruppen kann man mithilfe von 5.1.22 seinen direkten Limes in der Kategorie der Mengen leicht mit einer Gruppenstruktur versehen derart, daß alle  $\operatorname{can}_i$  Gruppenhomomorphismen werden. Mit dieser Gruppenstruktur ist unser direkter Limes dann natürlich auch ein direkter Limes in der Kategorie der Gruppen, da er die geforderte universelle Eigenschaft hat. Analoges gilt für direkte Limes in der Kategorie der abelschen Gruppen oder auch der Ringe oder auch der Moduln über einem Ring. Insbesondere kommt in diesen Fällen jedes Element des direkten Limes von einem  $M_i$  her, und ein  $m \in M_i$  geht im direkten Limes auf das neutrale Element genau dann, wenn es ein  $k \geq i$  gibt derart, daß sein Bild in  $M_k$  das neutrale Element ist.

*Ergänzende Übung 5.1.24.* Gegeben ein induktives System  $(M_i)$  von Gruppen, dessen sämtliche Morphismen Surjektionen  $\varphi_{ji} : M_i \twoheadrightarrow M_j$  sind, kann man den direkten Limes auch beschreiben, indem man ein  $i$  festhält und  $M_i$  teilt durch die Vereinigung der Kerne aller  $\varphi_{ji}$  für  $j > i$ .

*Ergänzende Übung 5.1.25.* (Hinweis: 5.1.24.) Gegeben ein induktives System von Ringen  $R_i$  mit Kolimes  $R$  und einen  $R$ -Rechtsmodul  $M$  sowie einen  $R$ -Linksmodul  $N$  induziert die kanonische Abbildung einen Isomorphismus

$$\varinjlim_i (M \otimes_{R_i} N) \xrightarrow{\sim} M \otimes_R N$$

**Definition 5.1.26.** Ein **Morphismus von Systemen**

$$(M_i, \varphi_{ji}) \rightarrow (N_i, \psi_{ji})$$

ist eine Familie von Abbildungen  $g_i : M_i \rightarrow N_i$  so daß gilt  $\psi_{ji} \circ g_i = g_j \circ \varphi_{ji}$  wann immer  $j \geq i$ . Fassen wir Systeme als Funktoren auf, so sind unsere Morphismen gerade die natürlichen Transformationen.

5.1.27. Aufgrund der universellen Eigenschaften liefert jeder Morphismus von Systemen einen Morphismus auf den Kolimites. Wir nennen eine Sequenz  $(M'_i) \rightarrow (M_i) \rightarrow (M''_i)$  von Systemen abelscher Gruppen **exakt** genau dann, wenn die zugehörige Sequenz abelscher Gruppen  $M'_i \rightarrow M_i \rightarrow M''_i$  exakt ist für alle  $i$ .

**Satz 5.1.28 (Exaktheit von filtrierenden Kolimites).** Gegeben eine exakte Sequenz  $(M'_i) \rightarrow (M_i) \rightarrow (M''_i)$  von induktiven Systemen abelscher Gruppen erhalten wir auch im direkten Limes eine exakte Sequenz

$$\varinjlim M'_i \rightarrow \varinjlim M_i \rightarrow \varinjlim M''_i$$

*Beweis.* Bezeichne  $f_i, g_i$  unsere Morphismen und  $f, g$  ihre direkten Limites. Sicher ist die Verknüpfung auch im direkten Limes Null. Ist andererseits  $\text{can}_i(m_i)$  ein Element der Mitte, das nach Null geht, so folgt  $\text{can}_i'' g_i(m_i) = 0$ , nach 5.1.23 also  $\varphi_{ji}'' g_i(m_i) = 0$  für geeignetes  $j \geq i$ , also  $g_j \varphi_{ji}(m_i) = 0$  und folglich ist  $\varphi_{ji}(m_i) = f_j(m'_j)$  und  $\text{can}_i(m_i) = f \text{can}'_j(m'_j)$ .  $\square$

*Übung 5.1.29.* Sei der topologische Raum  $X$  eine aufsteigende Vereinigung offener Teilmengen,  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ . So gilt  $H_q(X) = \varinjlim H_q(U_i)$  und  $\pi_1(X, x) = \varinjlim \pi_1(U_i, x)$ , wo der zweite direkte Limes nur über alle  $i$  mit  $x \in U_i$  läuft.

*Übung 5.1.30. Kolimites kommutieren mit Tensorprodukten.* In Formeln liefert also die kanonische Abbildung einen Isomorphismus

$$\text{colim}(M_i \otimes_R N) \xrightarrow{\sim} (\text{colim } M_i) \otimes_R N$$

Hinweis: Man verallgemeinere den Beweis für die Vertauschbarkeit von Tensorprodukten und direkten Summen 3.2.10.

*Ergänzende Übung 5.1.31.* Algebraisch Gebildete mögen zeigen, daß in der Kategorie Kring der kommutativen Ringe beliebige Produkte existieren. Hinweis: Man bilde den inversen Limes über alle endlichen Teilprodukte, deren Existenz durch [I.2.4.9](#) bereits gesichert ist.

*Übung 5.1.32.* Ist  $M'_i \hookrightarrow M_i \rightarrow M''_i$  eine linksexakte Sequenz von Kosystemen abelscher Gruppen, so ist die Sequenz

$$\lim_i M'_i \hookrightarrow \lim_i M_i \rightarrow \lim_i M''_i$$

der Limites auch linksexakt. Sind die opponierten Systeme indiziert durch  $n \in \mathbb{N}$  und besteht die Sequenz aus kurzen exakten Sequenzen  $M'_n \hookrightarrow M_n \rightarrow M''_n$  und sind alle  $M'_n \rightarrow M'_m$  surjektiv, so bilden die inversen Limites sogar eine kurze exakte Sequenz

$$\varprojlim_n M'_n \hookrightarrow \varprojlim_n M_n \rightarrow \varprojlim_n M''_n$$

Man kann das sogar allgemeiner zeigen unter der noch schwächeren sogenannten **Mittag-Leffler-Bedingung**, daß in jedem  $M'_n$  die absteigende Folge der Bilder der  $M'_j$  mit  $j > n$  nach endlich vielen Schritten konstant wird, etwa beim Bild von  $M'_{j(n)}$ . Hinweis: Gegeben ein Element des inversen Limes ( $m''_n$ ) wähle man zunächst in der Mitte jeweils Urbilder  $m_n$  und davon ausgehend "bessere" Urbilder als die Bilder  $\tilde{m}_n \in M_n$  der  $m_{j(n)}$ , und ändere die  $m_{j(n)}$  dann induktiv so ab, daß die  $\tilde{m}_n$  ein Element des inversen Limes werden.

*Beispiel 5.1.33.* Die kurzen exakten Sequenzen  $p^n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  für  $p \neq 0$  liefern im inversen Limes keine kurze exakte Sequenz: Die kanonische Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$  von  $\mathbb{Z}$  in die  $p$ -adischen Zahlen ist nicht surjektiv.

*Übung 5.1.34.* Sei ein durch die natürlichen Zahlen indiziertes inverses System von exakten Komplexen abelscher Gruppen gegeben. Sind alle Morphismen unseres Systems surjektiv, so ist auch der inverse Limes exakt. Hinweis: Die Bilder fallen einerseits mit den Zykeln zusammen und bilden andererseits auch ein inverses System mit surjektiven Morphismen. Nun wende man das Mittag-Leffler-Kriterium [5.1.32](#) an.

*Übung 5.1.35.* Gegeben ein Morphismus von Kosystemen von Kettenkomplexen ist der Limes der zugehörigen Abbildungskegel der Abbildungskegel des auf den Limites induzierten Morphismus.

*Übung 5.1.36.* Sei gegeben ein Morphismus  $u : X \rightarrow Y$  von durch  $\mathbb{N}$  indizier-

ten inversen Systemen von Kettenkomplexen. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \cdots & & \cdots \\
 \cdots & X_n^1 \xrightarrow{\partial} X_{n-1}^1 & \cdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & X_n^0 \xrightarrow{\partial} X_{n-1}^0 & \cdots
 \end{array}$$

deuten die vertikalen Pfeile die Morphismen des inversen Systems  $X$  an. Induziert  $u^i : X^i \rightarrow Y^i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  Isomorphismen auf der Homologie und sind alle Morphismen unserer inversen Systeme Surjektionen  $X^i \twoheadrightarrow X^{i-1}$ ,  $Y^i \twoheadrightarrow Y^{i-1}$ , so induziert auch die im inversen Limes erhaltene Kettenabbildung

$$\varprojlim X^i \rightarrow \varprojlim Y^i$$

Isomorphismen auf der Homologie. Hinweis: Es reicht, die Exaktheit des Abbildungskegels zu zeigen. Das gelingt mit 5.1.35 und 5.1.34.

## 5.2 Kohomologie mit kompaktem Träger

5.2.1. Wir wollen im nächsten Abschnitt den Dualitätssatz von Poincaré 4.5.12 durch eine Art “Induktion über die offenen Teilmengen” beweisen und müssen dazu eine Version dieses Satzes für nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeiten formulieren. Für jeden topologischen Raum  $X$  definieren wir seine **singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger** als den direkten Limes

$$H_c^q X := \varinjlim H^q(X, X \setminus K)$$

seiner relativen Kohomologiegruppen in Bezug auf die Komplemente kompakter Teilmengen. Der Limes ist zu verstehen über alle kompakten Teilmengen  $K \subset X$ . Die Kohomologie mit kompaktem Träger hat nur für lokal kompakte Hausdorffräume so gute Eigenschaften, daß sie zu etwas nützlich ist. Ich will jedoch versuchen, im folgenden die jeweils benötigten Eigenschaften der beteiligten Räume jeweils explizit dazuschreiben.

5.2.2. Üblich ist für Kohomologie mit kompaktem Träger die Notation  $H_c^q X$ , aber bei ihrer Verallgemeinerung zum “direkten Bild mit kompaktem Träger” hat sich schon lange die  $!$ -Notation durchgesetzt und beim unteren Index  $c$  liegt auch immer die Fehlinterpretation als  $c$ -te Homologie nahe, weshalb ich die  $!$ -Notation bevorzuge. Natürlich kann Kohomologie mit kompaktem Träger auch mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $G$  definiert werden.

Wir schreiben dann  $H_!^q(X; G)$  und, wenn wir besonders betonen wollen, daß die singuläre Kohomologie gemeint ist, genauer  $H_!^q(X; G)_{\text{sing}}$ .

*Beispiel 5.2.3.* Für die Kohomologie mit kompaktem Träger des  $\mathbb{R}^n$  gilt

$$H_!^q(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat bilden immer größere Bälle um den Ursprung ein finales System im System aller kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , und für dieses System ist der fragliche Limes leicht zu berechnen. Man beachte, daß die Kohomologie mit kompaktem Träger insbesondere keine Homotopieinvariante ist.

5.2.4. Wie bereits erwähnt, finde ich Homologie und insbesondere simpliziale Homologie sehr viel anschaulicher als Kohomologie. Zumindest bei der Arbeit über einem Koeffizientenkörper ist nun die Kohomologie der Dualraum der Homologie, und das hilft mir, auch für die Kohomologie eine gewisse Anschauung zu entwickeln. Man beachte, daß die Homologie nur dann auch umgekehrt der Dualraum der Kohomologie ist, wenn die Homologie bereits endlichdimensional war.

5.2.5. In der Hoffnung, dadurch im Sinne der vorhergehenden Bemerkung zusätzliche Anschauung für die Kohomologie mit kompaktem Träger bereitzustellen, erkläre ich im folgenden, wie deren Dualraum im Fall von Körperkoeffizienten anschaulich interpretiert werden kann als die sogenannte "Borel-Moore-Homologie". Man beachte, daß es sich in diesem Fall andersherum verhält: Die Borel-Moore-Homologie ist zwar stets der Dualraum der Kohomologie mit kompaktem Träger, die Kohomologie mit kompaktem Träger ist jedoch nur dann der Dualraum der Borel-Moore-Homologie, wenn sie endlichdimensional ist. In diesem Sinne scheint die Kohomologie mit kompaktem Träger ähnlich grundlegend zu sein wie die Homologie.

**Definition 5.2.6.** Gegeben ein topologischer Raum  $X$  erklären wir die Gruppe  $S_q^!X$  der **lokal endlichen singulären  $q$ -Ketten** als die Gruppe aller Abbildungen  $\text{Top}(\Delta_q, X) \rightarrow \mathbb{Z}$  mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt derart, daß nur endlich vielen der  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  mit  $\sigma(\Delta_q) \cap U \neq \emptyset$  eine von Null verschiedene Zahl zugeordnet wird. Man überlegt sich leicht, daß wir wie bei der Definition der Homologie Randoperatoren

$$\partial : S_q^!X \rightarrow S_{q-1}^!X$$

definieren können: Die lokale Endlichkeit unserer Ketten sorgt dafür, daß beim Bilden der Ränder keine unendlichen Summen von Koeffizienten auftreten. Die Homologiegruppen des Komplexes  $S^!X$  der lokal endlichen singulären Ketten nennen wir die **Borel-Moore-Homologie von  $X$**  und notieren

sie

$$\mathcal{H}_q S^! X =: H_q^! X$$

Natürlich können wir diese Konstruktionen auch analog mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe  $G$  durchführen. Wir erhalten so Kettenkomplexe  $S^!(X; G)$ , notieren deren Homologie  $\mathcal{H}_q S^!(X; G) =: H_q^!(X; G)$  und nennen sie die **Borel-Moore-Homologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$** .

5.2.7. In der Literatur findet man meist andere Definitionen, die zwar nicht immer, aber doch in allen mir bekannten Anwendungsfällen dieselben Gruppen liefern. Die Notation  $H_q^! X$  ist unüblich, sie scheint mir jedoch praktisch und ich kenne auch keine allgemein übliche Notation.

5.2.8. Wir haben stets kanonische Kettenabbildungen  $SX \rightarrow S^! X$  und davon induzierte Gruppenhomomorphismen  $H_q X \rightarrow H_q^! X$ , und für  $X$  kompakt sind diese Abbildungen Isomorphismen. Für jedes Kompaktum  $K \subset X$  haben wir weiter eine offensichtliche Kettenabbildung  $S^! X \rightarrow S(X, X \setminus K)$  und damit kanonische Abbildungen auf der Homologie

$$H_q^! X \rightarrow H_q(X, X \setminus K)$$

Schalten wir unsere kanonischen Abbildungen  $H_q X \rightarrow H_q^! X$  davor, so ergeben sich die üblichen Abbildungen  $H_q X \rightarrow H_q(X, X \setminus K)$ , die demnach für kompaktes  $K$  über die Borel-Moore-Homologie  $H_q^! X$  faktorisieren.

5.2.9. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  erklären wir dual den Komplex der **singulären Koketten mit kompaktem Träger** als direkten Limes über alle Kompakta

$$S_!^* X := \varinjlim_K S^*(X, X \setminus K)$$

der relativen Koketten alias den Komplex aller Koketten, für die es ein Kompaktum gibt derart, daß sie auf allen Simplizes verschwinden, die besagtes Kompaktum nicht treffen. Wegen der Exaktheit filtrierender direkter Limes berechnet dieser Komplex in der Tat die Kohomologie mit kompaktem Träger im Sinne von 5.2.1, wir haben also kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{H}^q S_!^* X \xrightarrow{\sim} H_!^q X$$

5.2.10. Für jeden lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  liefern die Abbildungen aus 5.2.8 Isomorphismen

$$S_q^! X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_K S_q(X, X \setminus K)$$

wo der inverse Limes über alle Kompakta  $K \subset X$  zu verstehen ist. In der Tat können in diesem Fall die lokal endlichen Ketten auch beschrieben werden

als Abbildungen  $\text{Top}(\Delta_q, X) \rightarrow \mathbb{Z}$  mit der Eigenschaft, daß für jedes Kompaktum  $K \subset X$  nur endlich vielen der  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  mit  $\sigma(\Delta_q) \cap K \neq \emptyset$  eine von Null verschiedene Zahl zugeordnet wird.

5.2.11. Die Borel-Moore-Homologie ist keineswegs homotopieinvariant, ja noch nicht einmal in dem von der Homologie gewohnten Sinne funktoriell. Vielmehr erhält man nur für eigentliche Abbildungen von lokal kompakten Hausdorffräumen  $f : X \rightarrow Y$  Abbildungen  $f_* : S^1 X \rightarrow S^1 Y$  auf den lokal endlichen Ketten und Abbildungen  $f_* : H_q^1 X \rightarrow H_q^1 Y$  auf der Borel-Moore-Homologie. Die wesentliche Bedeutung der Borel-Moore-Homologie liegt darin, daß in ihr auch für nicht kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten “Fundamentalzykel” erklärt werden können, wie im folgenden ausgeführt wird. Noch stärker gelingt das sogar für “Pseudomannigfaltigkeiten, bei denen die Singularitäten erst in Kodimension Zwei beginnen”, und damit insbesondere für mit ihrer analytischen Topologie versehene komplexe algebraische Varietäten, aber das besprechen wir hier nicht weiter.

**Satz 5.2.12 (Fundamentalzykel in der Borel-Moore-Homologie).** *Gegeben eine separable zusammenhängende orientierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist ihre  $n$ -te Borel-Moore-Homologie  $H_n^1 M$  frei vom Rang Eins und die kanonische Abbildung nach 5.2.8 definiert für alle  $x \in M$  einen Isomorphismus*

$$H_n^1 M \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus x)$$

*Beweis.* Dieser Satz folgt unmittelbar aus der anschließenden genaueren Proposition 5.2.13.  $\square$

**Proposition 5.2.13 (Borel-Moore-Homologie und Fundamentalzykel).** *Gegeben eine separable  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  definieren die Abbildungen aus 5.2.8 einen Isomorphismus*

$$H_n^1 M \xrightarrow{\sim} \Gamma M$$

*zwischen ihrer  $n$ -ten Borel-Moore-Homologie und dem Raum der globalen Schnitte ihrer Orientierungsgarbe nach 2.10.19.*

**Definition 5.2.14.** Ist  $(M, \omega)$  eine separable orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach Proposition 5.2.13 genau ein  $\omega_M \in H_n^1 M$  mit  $\omega_M \mapsto \omega_x$  für alle  $x \in M$ . Dies  $\omega_M$  heißt der **Fundamentalzykel** der orientierten Mannigfaltigkeit  $M$ , obwohl es genau genommen eigentlich gar kein Zykel ist, sondern vielmehr eine Homologiekategorie in ihrer Borel-Moore-Homologie.

*Ergänzung 5.2.15.* Die Separabilität ist hier wesentlich. Um das zu sehen, betrachte man die Alexandroff’sche Halbgerade  $A$  mit ihrer Anordnung nach

?? und nehme als  $M$  das Komplement ihres kleinsten Elements. Ich will kurz skizzieren, wie die Annahme der Existenz eines lokal endlichen Fundamentalzykels in diesem Fall einer nicht separablen Mannigfaltigkeit zum Widerspruch führt. In der Tat ist  $A$  nach ?? folgenkompakt, als da heißt, jede unendliche Teilmenge hat einen Häufungspunkt. Die Endpunkte aller 1-Simplizes, die mit von Null verschiedenem Koeffizienten in einem lokal endlichen Fundamentalzykel vorkommen, bilden nun sicher eine Teilmenge von  $M$  ohne obere Schranke in  $M$ . Es gibt also zu einem festen Punkt  $x \in M$  unendliche viele solcher Endpunkte, die größer sind. Diese müssen dann einen Häufungspunkt in  $M$  haben, im Widerspruch zur lokalen Endlichkeit unseres Zyklus.

*Beweis.* Für jeden lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  liefern die Abbildungen aus 5.2.8 nach 5.2.10 Isomorphismen

$$S_q^! X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_K S_q(X, X \setminus K)$$

wo der inverse Limes über alle Kompakta  $K \subset X$  zu verstehen ist. Nehmen wir zusätzlich  $X$  separabel an, so existiert sogar eine Überdeckung von  $X$  durch eine aufsteigende Folge von offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß  $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset X$ , und da die  $\bar{U}_i$  final sind im System aller Kompakta von  $X$ , haben wir auch

$$S_q^! X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i S_q(X, X \setminus \bar{U}_i)$$

Dieses inverse System besteht offensichtlich aus Surjektionen, und dasselbe gilt a fortiori für das System von Rändern  $B_{q-1}(X, X \setminus \bar{U}_i)$ . Ist nun zusätzlich  $X = M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit, so liefert Satz 2.10.20 über die hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten  $H_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i) = 0$ , folglich haben wir  $B_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i) = Z_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i)$  und die  $(n+1)$ -Zykel bilden auch ein inverses System aus Surjektionen. Mit dem Mittag-Leffler-Kriterium 5.1.32 für die Exaktheit inverser Limites folgt sowohl die Surjektivität der offensichtlichen Abbildung

$$\varprojlim_i S_{n+1}(M, M \setminus \bar{U}_i) \twoheadrightarrow \varprojlim_i B_n(M, M \setminus \bar{U}_i)$$

als auch die Exaktheit von

$$\varprojlim_i B_n(M, M \setminus \bar{U}_i) \hookrightarrow \varprojlim_i Z_n(M, M \setminus \bar{U}_i) \twoheadrightarrow \varprojlim_i H_n(M, M \setminus \bar{U}_i)$$

Unsere erste Surjektivität erlaubt uns die Identifikation der ersten Gruppe dieser kurzen exakten Sequenz mit  $\mathcal{B}_n S^! M$  und die Linksexaktheit inverser



Limites erlaubt die Identifikation der Mitte unserer Sequenz mit  $\mathcal{Z}_n S^1 M$ , so daß wir schließlich für jede separable  $n$ -Mannigfaltigkeit einen Isomorphismus

$$H_n^1 M \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i H_n(M, M \setminus \bar{U}_i)$$

erhalten. Beachten wir nun die Isomorphismen  $H_n(M, M \setminus A) \xrightarrow{\sim} \Gamma A$  für  $A \subset M$  kompakt aus dem Satz 2.10.20 über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten, so erhalten wir den gewünschten Isomorphismus  $H_n^1 M \xrightarrow{\sim} \Gamma M$  wegen  $\Gamma M \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \Gamma \bar{U}_i$ . Diese letzte Identität sieht man zum Beispiel ein, indem man sich überlegt, daß sowohl die  $\bar{U}_i$  als auch die  $U_i$  final sind im System aller Teilmengen von  $X$  mit kompaktem Abschluß.  $\square$

5.2.16. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  liefert unsere Formel 4.5.4 für das cap-Produkt auch eine Kettenabbildung

$$S_!^* X \otimes S^! X \rightarrow S X$$

Wir notieren auch diese Verknüpfung  $b \otimes z \mapsto b \cap z$  und nennen sie ein **cap-Produkt**.

**Definition 5.2.17.** Ist  $(M, \omega)$  eine separable orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es nach Proposition 5.2.13 genau ein  $\omega_M \in H_n^1 M$  mit  $\omega_M \mapsto \omega_x$  für alle  $x \in M$ . Dies  $\omega_M$  heißt der **Fundamentalzykel** der orientierten Mannigfaltigkeit  $M$ , obwohl es genau genommen eigentlich gar kein Zykel ist, sondern vielmehr eine Homologiekategorie in der Borel-Moore-Homologie.

5.2.18 (**Poincaré-Dualität mit lokal endlichen Ketten**). Ist  $(M, \omega)$  eine separable orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit, so können wir das Auswerten auf dem Fundamentalzykel im Sinne von 5.3.6, das nach 5.3.7 den Isomorphismus der Poincaré-Dualität liefert, als den Effekt auf der Kohomologie einer und jeder Kettenabbildung

$$\cap \omega : S_!^* M[n] \rightarrow S M$$

interpretieren, die mit diesen Begriffsbildungen nun in der Tat durch das Darancappen eines und jedes Repräsentanten  $\omega \in S^! M$  des Fundamentalzykels gegeben wird. Die Wahl eines anderen Repräsentanten führt offensichtlich zu einer homotopen Kettenabbildung und liefert folglich dieselbe Abbildung auf der Kohomologie.

5.2.19 (**Simpliziale Interpretation der Borel-Moore-Homologie**). Gegeben ein lokal endlicher Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  wie in 5.3.3 können wir den **Komplex der lokal endlichen Simplizialketten**  $S^! \mathcal{K}$  ganz analog bilden wie den Komplex der Simplizialketten  $S \mathcal{K}$  aus 1.1.3, indem wir eben auch unendliche formale Linearkombinationen von angeordneten Simplizes zulassen.

Die Homologie dieses Komplexes nennen wir die **simpliciale Borel-Moore-Homologie** und notieren sie  $H_q^! \mathcal{K} := \mathcal{H}_q S^! \mathcal{K}$ . Wir erhalten unmittelbar einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$S^! \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(S_*^! \mathcal{K}, \mathbb{Z})$$

mit dem Dualen des Komplexes der simplizialen Koketten mit kompaktem Träger aus 5.3.3, der also in gewisser Weise das fundamentalere Objekt ist. Analog wie in 2.4.1 definieren wir auch den Komplex der lokal endlichen simplizialen Ketten  $S^{!s} \Delta(\mathcal{K}) \subset S^! \Delta(\mathcal{K})$  und analog wie in 2.4.2 die Kettenabbildung  $S^{!s} \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S^! \mathcal{K}$  von den lokal endlichen simplizialen Ketten in die lokal endlichen Simplizialketten.

**Satz 5.2.20 (Simpliciale als singuläre Borel-Moore-Homologie).** *Für jeden lokal endlichen Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  induzieren die Kettenabbildungen  $S^! \mathcal{K} \leftarrow S^{!s} \Delta(\mathcal{K}) \hookrightarrow S^! \Delta(\mathcal{K})$  aus 5.2.19 Isomorphismen auf der Homologie*

$$H_q^! \mathcal{K} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}_q S^{!s} \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} H_q^! \Delta(\mathcal{K})$$

*Beweis.* Alle in diesem Satz auftauchenden Gruppen, Komplexe etc. zerfallen in ein Produkt über die Zusammenhangskomponenten unseres Simplizialkomplexes, den wir deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusammenhängend und damit abzählbar annehmen dürfen. Wir können unseren Simplizialkomplex dann als Vereinigung einer aufsteigenden Folge  $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \dots$  endlicher Teilkomplexe schreiben derart, daß  $\mathcal{K}_{n+1}$  jeweils alle Simplizes umfaßt, die Simplizes aus  $\mathcal{K}_n$  treffen. Wir betrachten nun die Unterkomplexe  $\mathcal{L}_n$  aller Simplizes von  $\mathcal{K}$ , die keinen Simplex von  $\mathcal{K}_n$  treffen, und bilden das kommutative Diagramm mit exakten Spalten

$$\begin{array}{ccccc} S\mathcal{L}_n & \longleftarrow & S^s \Delta(\mathcal{L}_n) & \hookrightarrow & S\Delta(\mathcal{L}_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S\mathcal{K} & \longleftarrow & S^s \Delta(\mathcal{K}) & \hookrightarrow & S\Delta(\mathcal{K}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S\mathcal{K}/S\mathcal{L}_n & \longleftarrow & S^s \Delta(\mathcal{K})/S^s \Delta(\mathcal{L}_n) & \longrightarrow & S(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}_n)) \end{array}$$

Nach 2.4.3 induzieren die Horizontalen oben und in der Mitte Isomorphismen auf der Homologie, nach dem Fünferlemma und der langen exakten Homologiesequenz gilt das also auch für die Horizontalen unten. Gehen wir in der unteren Horizontale zum inversen Limes über, so erhalten wir gerade die Morphismen von Komplexen

$$S^! \mathcal{K} \leftarrow S^{!s} \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow S^! \Delta(\mathcal{K})$$

aus unserem Satz, denn die Komplemente der  $\Delta(\mathcal{L}_n)$  sind final im System aller Teilmengen von  $\Delta(\mathcal{K})$  mit kompaktem Abschluß. Da alle System-Morphismen der fraglichen inversen Systeme Surjektionen sind, folgt die Behauptung nun aus 5.1.36.  $\square$

5.2.21. Sei nun unser Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  eine Triangulierung einer nicht notwendig kompakten separablen orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeit. Der Fundamentalzykel von  $\Delta(\mathcal{K})$  im Sinne von 5.2.12 hat wegen 5.2.20 genau einen Repräsentanten in der Gruppe der Borel-Moore- $n$ -Simplizialketten. Für  $n \geq 1$  kann dieser Repräsentant beschrieben werden als die formale Summe über alle  $n$ -Simplizes, jeweils mit einer Anordnung versehen, die mit der gewählten Orientierung in der Weise verträglich ist, daß eben  $\omega|_x \in H_n(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{K}) \setminus x)$  an jeder Stelle  $x$  die vorgegebene Orientierung liefert. Im Fall  $n \geq 0$  einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit ist dieser Repräsentant dahingegen die formale Summe aller ihrer Punkte mit den durch die Orientierung gegebenen Vorzeichen.

### 5.3 Poincaré-Dualität

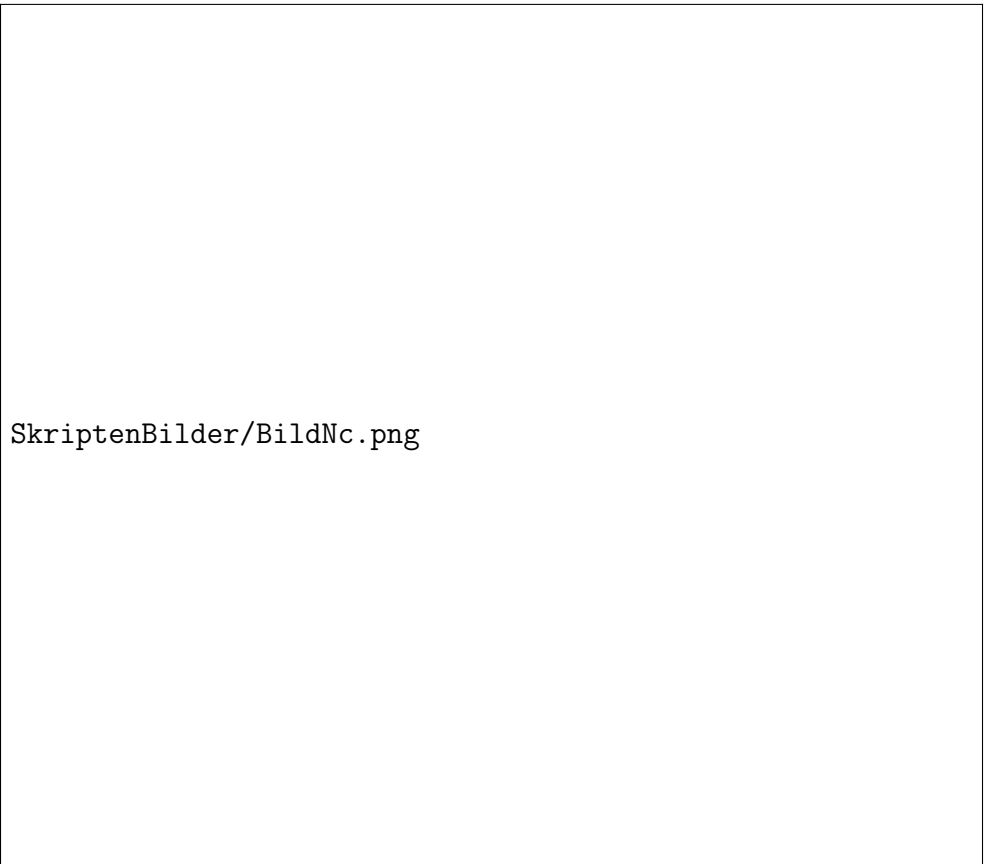
5.3.1. Für jede offene Teilmenge  $U \Subset X$  eines Hausdorffraums erhalten wir eine Abbildung, die **Ausdehnung durch Null**

$$H_!^q U \rightarrow H_!^q X$$

als Limes der Abbildungen  $H^q(U, U \setminus K) \xrightarrow{\sim} H^q(X, X \setminus K) \rightarrow H_!^q X$ , wo die ersten Abbildungen die Inversen zu den Ausschneidungsisomorphismen meinen und der Limes über alle Kompakta aus  $U$  zu bilden ist. Die Hausdorff-Eigenschaft wird benötigt, um sicherzustellen, daß unser Kompaktum  $K$  auch abgeschlossen ist in  $X$  und wir somit die Ausschneidungsisomorphismen zur Verfügung haben.


*Übung 5.3.2.* Ist ein Hausdorffraum  $X$  Vereinigung eines Systems offener Teilmengen  $\mathcal{U}$  derart, daß es für je zwei Mengen aus  $\mathcal{U}$  eine weitere Menge aus  $\mathcal{U}$  gibt, die sie beide umfaßt, so induzieren die eben erklärten Abbildungen einen Isomorphismus  $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} H_!^q(U) \xrightarrow{\sim} H_!^q(X)$ .

5.3.3. Die Kohomologie mit kompaktem Träger ist nur im Fall lokal kompakter Hausdorffräume von Bedeutung, im Fall noch allgemeinerer Räume hat sie zu wenig gute Eigenschaften. Um etwas Anschauung für die Kohomologie mit kompaktem Träger zu geben, erkläre ich die simpliziale Bedeutung dieses Konzepts. Ein Simplicialkomplex heißt **lokal endlich** genau dann, wenn jede seiner Ecken nur zu endlich vielen Simplizes gehört. Sie werden



SkriptenBilder/BildNc.png

*Kreispeile einzeichnen!* Graphische Darstellung derjenigen Simplizialkette, die für die ebenfalls dargestellte Triangulierung der Ebene den Fundamentalzykel in Bezug auf eine geeignete Orientierung repräsentiert. Man mache sich auch anschaulich klar, daß die Borel-Moore-Homologie der Ebene in allen von Zwei verschiedenen Graden verschwindet.



SkriptenBilder/BildNc.png

Dieses Bild soll anhand der simplizialen Interpretation veranschaulichen, daß nur die zweite Kohomologie mit kompaktem Träger der Ebene nicht verschwindet und daß sie frei ist vom Rang Eins über dem Koeffizientenring. Der Korand eines Punktes ist die formale Summe aller "orientierten aus ihm herauslaufenden Kanten". Es ist damit klar, daß es außer der Null keinen Null-Simplizialkozykel gibt. Der Korand eines orientierten Segments ist die Summe aller 2-Simplizes, in deren Rand es liegt, mit einer durch die Orientierung unseres Segments bestimmten Orientierung. Man kann sich etwa mithilfe der dualen Zellenzerlegung klarmachen, daß alle Eins-Simplizialkozykel Ränder sind. Schließlich sind alle 2-Simplizialkorketten auch 2-Kozykel und zwei 2-Korketten sind kohomolog genau dann, wenn die "Zahl der darin vorkommenden orientierten 2-Simplizes gleich ist, wobei 2-Simplizes mit entgegengesetztem Drehsinn negativ zu zählen sind".

als Übung 5.3.4 zeigen, daß diese Bedingung gleichbedeutend ist zur lokalen Kompaktheit des zugehörigen Polyeders. Gegeben ein lokal endlicher Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  können wir im Komplex der Simplicialkokerketten aus 4.7.9 einen Unterkomplex  $S_!^* \mathcal{K} \subset S^* \mathcal{K}$  bilden, indem wir nur solche Abbildungen  $f : \mathcal{K}_q^{\leq} \rightarrow \mathbb{Z}$  zulassen, die auf fast allen angeordneten  $q$ -Simplizes verschwinden. Wir nennen ihn den Komplex der **Simplicialkokerketten mit kompaktem Träger** und behaupten, daß er bereits die Kohomologie mit kompaktem Träger  $H_!^* \Delta(\mathcal{K})$  berechnet. Nach 5.1.20 können wir ja bei der Definition der Kohomologie mit kompaktem Träger den direkten Limes ebenso gut über alle Teilmengen  $K$  mit kompaktem Abschluß laufen lassen. Wieder nach 5.1.20 haben wir in unserem speziellen Fall auch

$$H_!^* \Delta(\mathcal{K}) = \varinjlim_{\mathcal{L}} H^*(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$$

wo  $\mathcal{L}$  über alle Unterkomplexe  $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$  läuft mit  $|\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}| < \infty$ . Nach 4.7.9 in Verbindung mit dem Fünferlemma wird nun aber die relative Kohomologie  $H^*(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L}))$  berechnet durch den Komplex  $S^*(\mathcal{K}, \mathcal{L})$  der relativen Simplicialkokerketten, den wir erklären als den Kern der offensichtlichen Kettenabbildung  $S^* \mathcal{K} \rightarrow S^* \mathcal{L}$ . Bilden wir den direkten Limes dieser Kerne, so erhalten wir gerade unseren Komplex  $S_!^* \mathcal{K}$ , und wegen der Exaktheit filtrierender direkter Limes erhalten wir schließlich kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^q S_!^* \mathcal{K} &\cong \mathcal{H}^q \varinjlim_{\mathcal{L}} S^*(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \\ &\cong \varinjlim_{\mathcal{L}} \mathcal{H}^q S^*(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \\ &\cong \varinjlim_{\mathcal{L}} H^q(\Delta(\mathcal{K}), \Delta(\mathcal{L})) \\ &\cong H_!^q \Delta(\mathcal{K}) \end{aligned}$$

*Übung 5.3.4.* Ein Simplicialkomplex ist lokal endlich genau dann, wenn der zugehörige topologische Raum lokal kompakt ist. Hinweis: 1.3.4.15.

5.3.5 (**Mayer-Vietoris-Sequenz für  $H_!^*$** ). Ist ein Hausdorffraum  $X$  Vereinigung von zwei offenen Teilmengen  $X = U \cup V$  und sind  $K \subset U$  und  $L \subset V$  kompakt, so haben wir in 4.7.8 eine lange exakte Sequenz

$$H^q(X, X \setminus (K \cap L)) \rightarrow H^q(X, X \setminus K) \oplus H^q(X, X \setminus L) \rightarrow H^q(X, X \setminus (K \cup L))$$

konstruiert. Mit Ausschneidung und Übergang zum direkten Limes über alle  $K$  und  $L$  ergibt sich daraus eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_!^q(U \cap V) \rightarrow H_!^q(U) \oplus H_!^q(V) \rightarrow H_!^q(X) \rightarrow H_!^{q+1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Sie heißt die **Mayer-Vietoris-Sequenz der Kohomologie mit kompaktem Träger**.

5.3.6. Ist  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine Orientierung auf  $M$ , so definiert  $\omega$  nach 2.10.20 für alle kompakten Teilmengen  $K \subset M$  ein Element  $\omega_K \in H_n(M, M \setminus K)$ , das cap-Produkt mit  $\omega_K$  liefert nach 4.5.9 Abbildungen  $\cap \omega_K : H^q(M, M \setminus K) \rightarrow H_{n-q}M$ , und durch Übergang zum direkten Limes mithilfe von 4.5.11 erhalten wir Abbildungen

$$\cap \omega : H_!^q M \rightarrow H_{n-q}M$$

die verträglich sind mit dem Übergang zu offenen Teilmengen von  $M$ . Wir nennen sie das **partielle Auswerten auf dem Fundamentalzykel**.

**Satz 5.3.7 (Allgemeine Poincaré-Dualität).** *Gegeben eine orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  mit Orientierung  $\omega$  induziert das partielle Auswerten auf dem Fundamentalzykel  $\cap \omega$  aus 5.3.6 für alle  $q$  Isomorphismen*

$$\cap \omega : H_!^q M \xrightarrow{\sim} H_{n-q}M$$

5.3.8. Dieser Satz gilt mit demselben Beweis für Koeffizienten in einem beliebigen kommutativen Ring. Gilt in unserem Ring  $1 + 1 = 0$ , so benötigt man noch nicht einmal die Voraussetzung der Orientierbarkeit.

5.3.9. Mit Koeffizienten in einem Körper können wir diesen Satz dahingehend formulieren, daß die Schnittpaarung zwischen Borel-Moore-Homologie und Homologie die erstere identifiziert mit dem Dualraum der letzteren. Diese Formulierung ist meiner Anschauung besonders gut zugänglich.

*Beweis.* Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

**Lemma 5.3.10.** *Sind  $U, V \subset M$  offen und gilt der Satz für die  $n$ -Mannigfaltigkeiten  $U, V$  und  $U \cap V$ , so gilt er auch für  $U \cup V$ .*

*Beweis.* Das folgt sofort mit dem Fünferlemma aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow & H_!^q(U \cap V) & \rightarrow & H_!^q U \oplus H_!^q V & \rightarrow & H_!^q(U \cup V) & \rightarrow & H_!^{q+1}(U \cap V) \rightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots \rightarrow & H_{n-q}(U \cap V) & \rightarrow & H_{n-q}U \oplus H_{n-q}V & \rightarrow & H_{n-q}(U \cup V) & \rightarrow & H_{n-q-1}(U \cap V) \rightarrow \end{array}$$

sobald wir zeigen können, daß dies Diagramm kommutativ ist. Es reicht, für beliebige kompakte  $K \subset U$  und  $L \subset V$  die Kommutativität des Diagramms zu zeigen, das man erhält, wenn man die obere Zeile durch die entsprechende relative Mayer-Vietoris-Sequenz ersetzt. Wir kürzen  $U \cup V = X$  ab und bezeichnen die offene Überdeckung  $X \setminus (K \cap L) = (X \setminus K) \cup (X \setminus L)$  mit  $\mathcal{V}$ . Die kurze exakte Sequenz auf den singulären Ketten

$$S(X \setminus K \cup L) \hookrightarrow S(X \setminus K) \oplus S(X \setminus L) \twoheadrightarrow S^{\mathcal{V}}(X \setminus K \cap L)$$

liefert durch Dualisieren die oberste Horizontale im folgenden großen kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 S_{\mathcal{V}}^*(X \setminus K \cap L) & \hookrightarrow & S^*(X \setminus K) \oplus S^*(X \setminus L) & \rightarrow & S^*(X \setminus K \cup L) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 S^*(X) & \hookrightarrow & S^*X \oplus S^*X & \rightarrow & S^*X \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 S_{\mathcal{V}}^*(X, X \setminus K \cap L) & \hookrightarrow & S^*(X, X \setminus K) \oplus S^*(X, X \setminus L) & \rightarrow & S^*(X, X \setminus K \cup L)
 \end{array}$$

wo alle Vertikalen kurze exakte Sequenzen sind, die untere linke Ecke durch die Exaktheit der vertikalen Sequenz definiert ist und die untere Zeile exakt ist nach dem Neunerlemma. Die lange exakte Kohomologiesequenz dieser untersten Zeile ist bis auf einige Identifikationen gerade unsere relative Mayer-Vietoris-Sequenz der Kohomologie. Wählen wir nun für  $\omega_{K \cup L}$  einen Repräsentanten in  $S_n X$ , der fein ist bezüglich der offenen Überdeckung  $X = (V \setminus K) \cup (U \setminus L) \cup (U \cap V)$ , und fassen die Kettenkomplexe der singulären Ketten auf als Kokettenkomplexe, die nur in Indizes  $\leq 0$  leben, so definiert das cap-Produkt mit so einem Repräsentanten die vertikalen Morphismen eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
 S_{\mathcal{V}}^*(X, X \setminus K \cap L) & \hookrightarrow & S^*(X, X \setminus K) \oplus S^*(X, X \setminus L) & \rightarrow & S^*(X, X \setminus K \cup L) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 S(U \cap V) & \hookrightarrow & SU \oplus SV & \rightarrow & S^{\mathcal{W}}(U \cup V)
 \end{array}$$

für  $\mathcal{W}$  die Überdeckung  $X = U \cup V$  von  $X$ . Das liefert dann das gesuchte kommutative Diagramm von langen exakten Sequenzen.  $\square$

Jetzt gehen wir in mehreren Schritten von Spezialfällen bis zur allgemeinen Situation.

1. Der Satz gilt für  $M = \mathbb{R}^n$ . Dann bilden ja die abgeschlossenen Bälle  $D_r$  schon ein finales System unter allen kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  und  $\cap \omega : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_r) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}$  ist schlicht das Auswerten einer Kohomologieklassse auf der Homologieklassse  $\omega \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D_r)$ , also ein Isomorphismus für  $0 < r < \infty$ .
2. Der Satz gilt für jede offene konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , denn so eine Teilmenge ist schon homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .
3. Der Satz gilt für jede endliche Vereinigung offener konvexer Mengen in  $\mathbb{R}^n$ . Mit Induktion, 2 und Lemma 5.3.10.
4. Ist  $M$  eine aufsteigende Vereinigung von offenen Teilmengen  $U_i$  und gilt der Satz für alle  $U_i$ , so gilt er auch für  $M$ . In der Tat gilt  $H_q(M) = \varinjlim H_q(U_i)$  und  $H_1^p M = \varinjlim H_1^p(U_i)$  nach den Übungen 5.1.29 und 5.3.2.



5. Der Satz gilt für jede offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . In der Tat läßt sie sich als abzählbare Vereinigung offener Bälle schreiben.

6. Der Satz gilt für jede Mannigfaltigkeit. In der Tat finden wir nach 4 und dem Zorn'schen Lemma eine maximale offene Teilmenge, für die der Satz gilt. Wäre sie nicht schon die ganze Mannigfaltigkeit, so könnten wir sie nach Lemma 5.3.10 und Schritt 5 noch durch eine Karte vergrößern, im Widerspruch zur Maximalität.  $\square$

**Korollar 5.3.11.** *Ist  $t$  ein Erzeuger der zweiten Kohomologiegruppe  $H^2\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ , so liefert der offensichtliche Ringhomomorphismus einen Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}[t]/\langle t^{n+1} \rangle \xrightarrow{\sim} H^*\mathbb{P}^n\mathbb{C}$$

*Beweis.* Es gilt zu zeigen, daß das Produkt eines Erzeugers von  $H^{2p}$  mit einem Erzeuger von  $H^{2q}$  stets ein Erzeuger von  $H^{2p+2q}$  ist. Im Fall  $p+q = n$  folgt das aus 4.5.15. Im Fall  $p+q > n$  ist eh nichts zu zeigen. Im Fall  $p+q = m < n$  verwendet man den nach 2.8.7 und 4.7.2 surjektiven Ringhomomorphismus  $H^*\mathbb{P}^n\mathbb{C} \rightarrow H^*\mathbb{P}^m\mathbb{C}$ .  $\square$

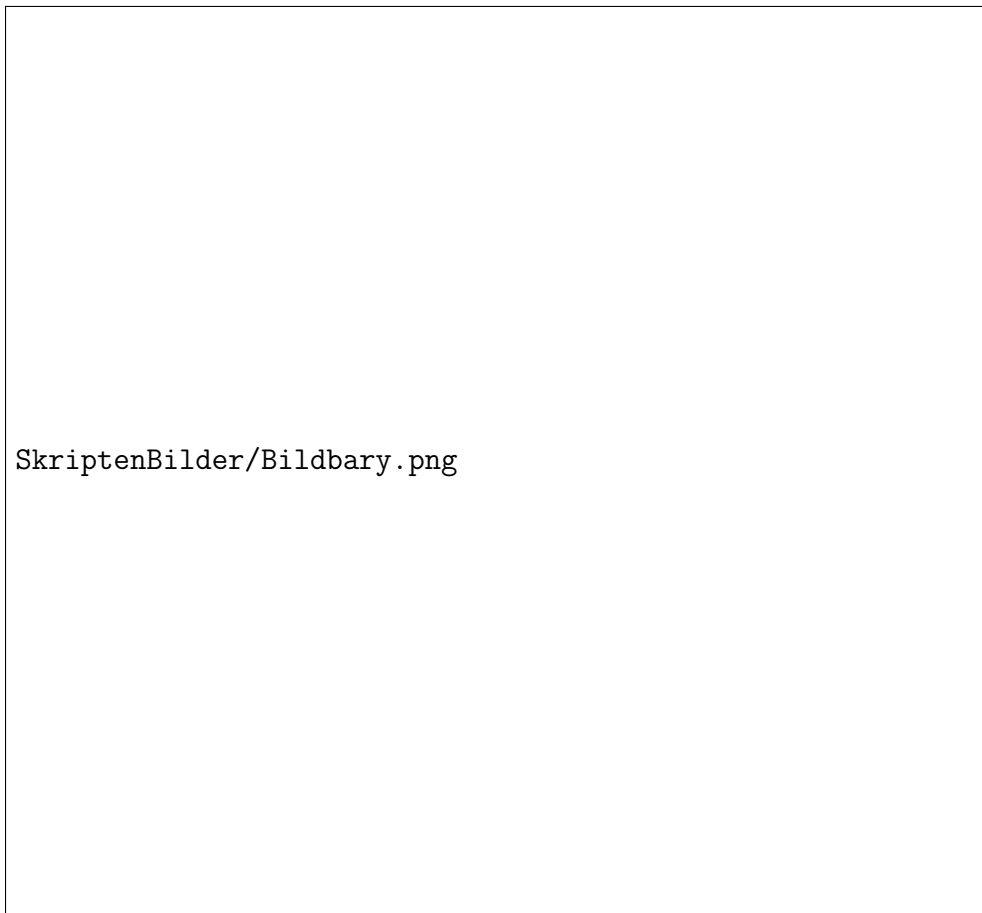
*Übung 5.3.12.* Man definiere für jeden Hausdorffraum ein cup-Produkt auf seiner Kohomologie mit kompaktem Träger. Für eine Mannigfaltigkeit entspricht es nebenbei bemerkt unter dem Isomorphismus der Poincaré-Dualität dem anschaulichen Schnittprodukt auf der Homologie.

## 5.4 Schnittzahlen

5.4.1. Sei  $M$  eine kompakte orientierte  $n$ -Mannigfaltigkeit. Für zwei Homologieklassen komplementärer Dimension  $\alpha \in H_q M$  und  $\beta \in H_{n-q} M$  ist hoffentlich anschaulich in etwa klar, was ihre "Schnittzahl" sein sollte, die die Schnittpunkte von repräsentierenden Zykeln "in generischer Lage" mit geeigneten, von der Orientierung abhängigen Vorzeichen zählt. Mit dem Isomorphismus der Poincaré-Dualität 5.3.7 können wir unseren Homologieklassen sicher formal korrekt eine Zahl  $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Z}$  zuordnen wie folgt: Wir suchen einfach  $a \in H^{n-q} M$  und  $b \in H^q M$  mit  $\alpha = a \cap \omega_M$  und  $\beta = b \cap \omega_M$  und setzen

$$\alpha \cdot \beta = \langle a \cup b, \omega_M \rangle$$

Dies sei unsere Definition der **Schnittzahl** der beiden Homologieklassen. Der bald folgende Satz 5.4.6 soll plausibel machen, daß die so definierte Zahl die oben beschriebene geometrische Bedeutung hat. Dazu braucht es jedoch einige Vorbereitungen.



Ein Simplicialkomplex und gestrichelt eingezeichnet seine baryzentrische Unterteilung. Die Ecken der baryzentrischen Unterteilung mag man sich denken als die Schwerpunkte der nichtleeren Simplizes des ursprünglichen Simplicialkomplexes, die Simplizes der baryzentrischen Unterteilung entsprechen den endlichen Ketten in der partiell geordneten Menge der ursprünglichen Simplizes.

5.4.2. Gegeben ein Simplicialkomplex  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  im Sinne von I.3.4.5 erklären wir wie folgt einen neuen Simplicialkomplex, seine **baryzentrische Unterteilung**  $\check{\mathcal{K}} = (\check{E}, \check{\mathcal{K}})$ : Als Ecken nehmen wir alle nichtleeren Simplexe des ursprünglichen Komplexes, in Formeln  $\check{E} = \{s \in \mathcal{K} \mid s \neq \emptyset\}$ . Als Simplexe nehmen wir alle endlichen Ketten in der Menge  $\check{E}$ , die ja durch die Inklusionsrelation partiell geordnet ist, also alle bezüglich dieser partiellen Ordnung total geordneten endlichen Teilmengen. Man erhält einen Homöomorphismus zwischen den zugehörigen Polyedern

$$\Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$$

durch die Vorschrift, daß jede Ecke  $s \in \check{E} \subset \mathcal{K}$  auf den Schwerpunkt des vollen Simplex  $\Delta(s) \subset \Delta(\mathcal{K})$  abgebildet wird und jeder volle Simplex von  $\Delta(\check{\mathcal{K}})$  affin in denjenigen vollen Simplex von  $\Delta(\mathcal{K})$ , der seiner größten Ecke entspricht. Jeder Simplex von  $\check{\mathcal{K}}$  hat bereits eine offensichtliche Anordnung, in Bezug auf die wir von nun an den Komplex der ordnungsverträglichen simplicialen Ketten  $S^{\text{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})$  verstehen wollen, und die hoffentlich offensichtlichen Kettenabbildungen liefern Homotopieäquivalenzen

$$S\check{\mathcal{K}} \xrightarrow{\sim} S^{\text{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\sim} S\Delta(\mathcal{K})$$

Im Beweis von 2.4.3 hatten wir zwar ordnungsverträgliche simpliciale Ketten nur in Bezug auf eine totale Ordnung auf der Menge aller Ecken eingeführt, aber mit einer partiellen Ordnung, die auf allen Simplexen eine totale Ordnung induziert, geht es genauso.

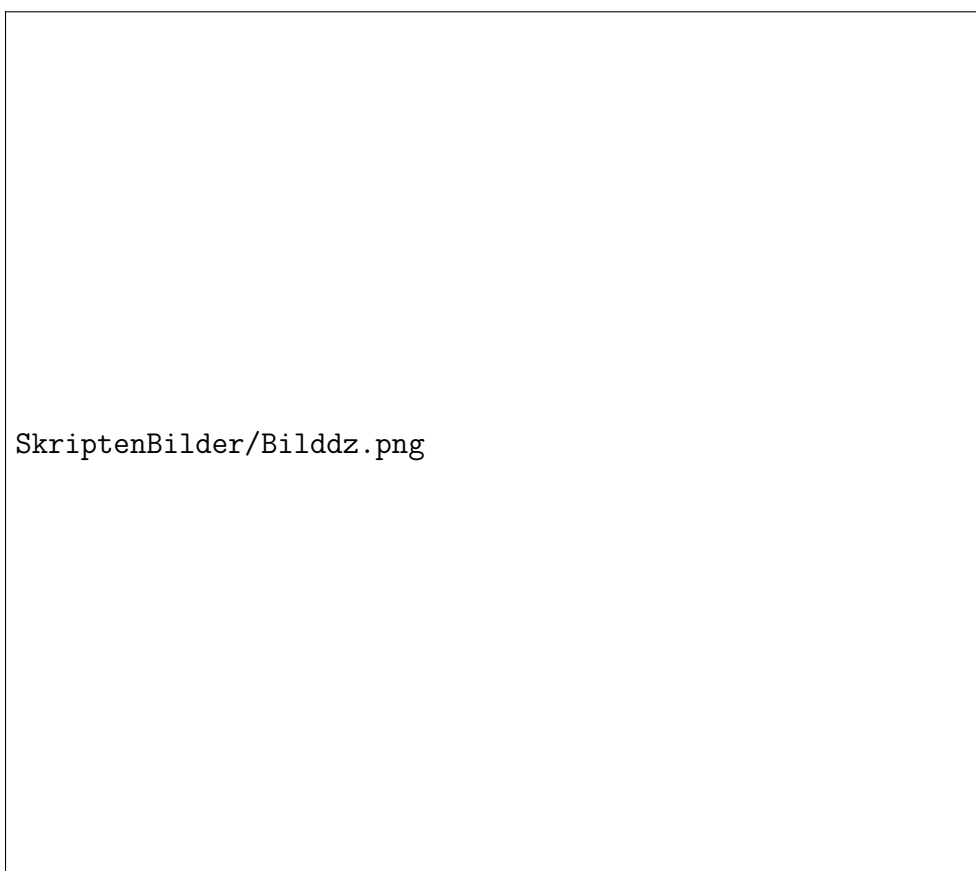
5.4.3. Sei nun unser Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  eine Triangulierung einer kompakten orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeit. Wir wählen eine Anordnung  $\leq$  auf der Menge  $E$  der Ecken von  $\mathcal{K}$ . Der Fundamentalzykel von  $\Delta(\mathcal{K})$  hat genau einen Repräsentanten in den  $n$ -Simplicialketten und damit auch genau einen Repräsentanten  $\omega \in S_n^{\text{os}}\Delta(\mathcal{K})$  in der Gruppe der ordnungsverträglichen simplicialen  $n$ -Ketten. Nach 5.2.21 hat unser Fundamentalzykel die Gestalt

$$\omega = \sum_{s \in \mathcal{K}_n} \varepsilon(s) \langle s \rangle$$

für wohlbestimmtes  $\varepsilon : \mathcal{K}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ , wobei  $\langle s \rangle$  wie im Beweis von 2.4.3 den zum  $n$ -Simplex  $s$  gehörigen angeordneten  $n$ -Simplex bezeichnet.

5.4.4. Gegeben ein  $(n - q)$ -Simplex  $t \in \mathcal{K}_{n-q}$  definieren wir die zugehörige **duale Zelle**  $c(t) \in S_q^{\text{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})$  als die Summe

$$c(t) = \sum \eta(\check{u}) \langle \check{u} \rangle$$



Ein Ausschnitt einer triangulierten 2-Mannigfaltigkeit. Die Nummerierung der Ecken legt ihre Anordnung fest. Der Kreispeil daneben deutet die Orientierung an, der Fundamentalzykel hat also die Gestalt

$$\omega = \dots + \langle \{1, 2, 3\} \rangle - \langle \{1, 2, 7\} \rangle + \dots$$

Die duale Zelle zum 1-Simplex  $t = \{1, 2\}$  besteht aus den beiden Summanden  $\tilde{u} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$  und  $\tilde{v} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 7\}\}$  und deren Vorzeichen sind  $\eta(\tilde{u}) = -1$  und  $\eta(\tilde{v}) = 1$ , so daß sich die duale Zelle zu  $c(t) = \tilde{v} - \tilde{u}$  ergibt. Im Bild habe ich die den ordnungsverträglichen 1-Ketten  $\langle t \rangle$  und  $c(t)$  entsprechenden Simplizialketten fett eingezeichnet.

Weiter besteht die duale Zelle zum 0-Simplex  $\{6\}$  aus 10 Summanden, und ich habe im Bild auch die der dualen Zelle zu dieser Ecke alias der ordnungsverträglichen 2-Kette  $c(\{6\})$  entsprechende Simplizialkette durch Kreispeile eingezeichnet.

über alle  $q$ -Simplizes  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  mit  $\check{u}_0 = t$ . Einen  $q$ -Simplex  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  schreiben wir dazu als echt aufsteigende Kette  $\check{u}_0 \subsetneq \check{u}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$  von nicht-leeren Simplizes von  $\mathcal{K}$ , und wir summieren über alle Ketten, die mit dem  $(n - q)$ -Simplex  $t$  beginnen. Die  $\eta(\check{u}) = \pm 1$  sind gewisse Vorzeichen, die wie folgt gegeben seien: Man betrachte die Ecken  $u_1, \dots, u_q \in E$  des ursprünglichen Komplexes mit  $\check{u}_i = \check{u}_{i-1} \cup \{u_i\}$ , so daß also gilt  $\check{u}_q = \check{u}_0 \cup \{u_1, \dots, u_q\}$ . Sei  $(s_0, s_1, \dots, s_n)$  die angeordnete Darstellung des  $n$ -Simplex  $\check{u}_q$  und  $(t_0, \dots, t_{n-q})$  die angeordnete Darstellung des  $(n - q)$ -Simplex  $t = \check{u}_0$  und  $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$  die Permutation mit

$$\begin{array}{rcl} s_{\tau(0)} & = & t_0 \\ \vdots & & \vdots \\ s_{\tau(n-q)} & = & t_{n-q} \\ s_{\tau(n-q+1)} & = & u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ s_{\tau(n)} & = & u_q \end{array}$$

So sei das fragliche Vorzeichen gegeben als  $\eta(\check{u}) = (-1)^{q(n-q)} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\tau)$ .

5.4.5. Diese dualen Zellen mögen mit ihren ganzen Vorzeichen unanschaulich wirken. Der erste Teil des folgenden Satzes sollte hier jedoch der Anschauung helfen, zeigt er doch, daß die Vorzeichen jedenfalls stets so zusammenpassen, daß der Rand einer dualen Zelle eine Linearkombination dualer Zellen ist. Das hat im Bild der Simplizialketten unter anderem die anschauliche Bedeutung, daß “die einzelnen Simplizes einer dualen Zelle gerade so orientiert sind, daß sich die internen Ränder gegenseitig wegheben”.

**Satz 5.4.6 (Geometrische Interpretation der Schnittzahlen).** *Sei der Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  eine Triangulierung einer kompakten orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$ . Sei auf der Menge  $E$  der Ecken von  $\mathcal{K}$  eine Anordnung gewählt. So gilt:*

1. Die von den dualen Zellen im Sinne von 5.4.4 erzeugten Untergruppen  $C_q \subset S_q^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  bilden einen Unterkomplex  $C \subset S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  im Komplex der ordnungsverträglichen simplizialen Ketten der baryzentrischen Unterteilung  $\check{\mathcal{K}}$  von  $\mathcal{K}$ , und die Einbettung dieses Unterkomplexes induziert auf allen Homologiegruppen Isomorphismen  $\mathcal{H}_q C \xrightarrow{\sim} H_q M$ .
2. Wird  $\alpha \in H_q M$  repräsentiert durch einen “simplizialen” Zykel der Gestalt  $\sum_{t \in \mathcal{K}_q} \alpha_t \langle t \rangle \in S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$  und  $\beta \in H_{n-q} M$  durch einen “zellulären” Zykel der Gestalt  $\sum_{t \in \mathcal{K}_q} \beta_t c(t) \in C_{n-q}$ , so gilt für ihre Schnittzahl

$$\alpha \cdot \beta = \sum_t \alpha_t \beta_t$$

*Beweis.* Zunächst einmal erinnern wir die Definition der Schnittzahl: Wir hatten dazu ja das  $a \in H^{n-q}M$  bzw.  $b \in H^qM$  genommen mit  $a \cap \omega_M = \alpha$  bzw.  $b \cap \omega_M = \beta$  und dann unsere Schnittzahl als Kronecker-Paarung des cup-Produkts dieser Kohomologieklassen mit dem Fundamentalzykel definiert, in Formeln  $\alpha \cdot \beta = \langle a \cup b, \omega_M \rangle$ . Mit der Adjunktionsformel 4.5.4 erhalten wir daraus auch die alternative Darstellung  $\alpha \cdot \beta = \langle a, \beta \rangle$ . Es reicht also, das Urbild  $a$  von  $\alpha$  unter dem Isomorphismus der Poincaré-Dualität hinreichend explizit zu beschreiben. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen. Gegeben ein Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  liefert das baryzentrische Unterteilen ganz allgemein eine Homotopieäquivalenz  $S\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} S\check{\mathcal{K}}$  zwischen den entsprechenden Komplexen von Simplicialketten. Genauer erhält man eine Injektion von der Menge  $\mathcal{K}_q^{\leq}$  aller angeordneten  $q$ -Simplizes von  $\mathcal{K}$  in die Menge  $\check{\mathcal{K}}_q^{\leq}$  aller angeordneten  $q$ -Simplizes von  $\check{\mathcal{K}}$ , indem man  $\sigma : \{0, \dots, q\} \hookrightarrow E$  abbildet auf  $\sigma^\vee : \{0, \dots, q\} \hookrightarrow \check{E}$  gegeben durch  $\sigma^\vee(i) = \{\sigma(0), \dots, \sigma(i)\}$ . Anschaulich gesprochen erhalten wir so “alle  $q$ -Simplizes von  $\check{\mathcal{K}}$ , die in  $q$ -Simplizes von  $\mathcal{K}$  liegen”, und die Abbildung  $\mathcal{K}_q^{\leq} \rightarrow S_q\check{\mathcal{K}}$  gegeben durch

$$\sigma \mapsto \sum_{\pi \in S_{q+1}} \text{sgn}(\pi) (\sigma \circ \pi)^\vee$$

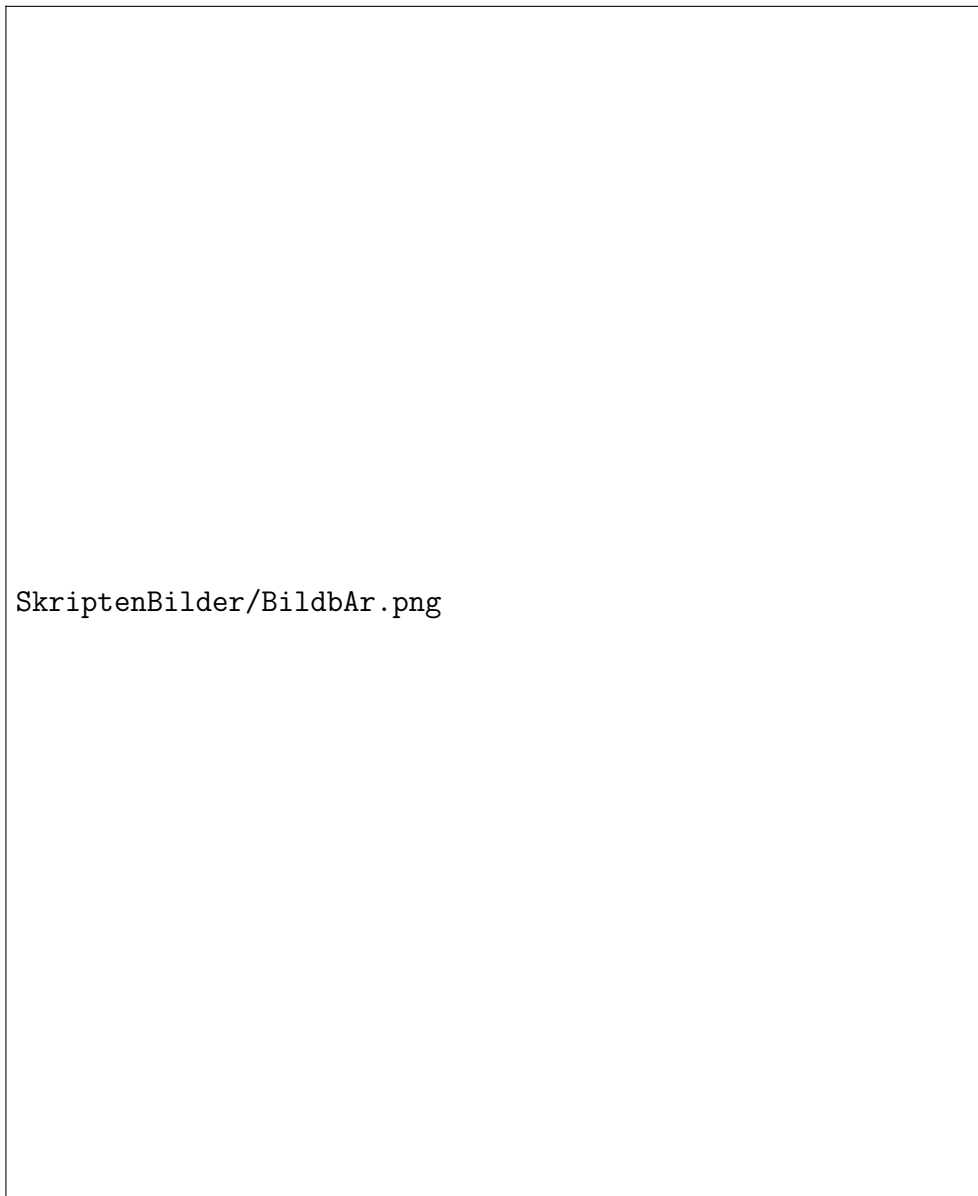
induziert eine Homotopieäquivalenz  $b : S\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} S\check{\mathcal{K}}$ , die wir wieder die **baryzentrische Unterteilung** nennen. Wenden wir auf unseren Fundamentalzykel aus 5.4.3 die baryzentrische Unterteilung an, so erhalten wir den Repräsentanten

$$\check{\omega} = \sum_{s \in \mathcal{K}_n, \pi \in S_{n+1}} \varepsilon(s) \text{sgn}(\pi) ((s) \circ \pi)^\vee$$

des Fundamentalzykels in  $S_n^{\text{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}})$ . Die weitere Argumentation wird ausgehen von einem Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} C^*[n] & \dashrightarrow & S^{\text{os}}\Delta(\mathcal{K}) \\ \uparrow & \nearrow & \downarrow b \\ S_{\text{os}}^*\Delta(\check{\mathcal{K}})[n] & \xrightarrow{\cap \check{\omega}} & S^{\text{os}}\Delta(\check{\mathcal{K}}) \end{array}$$

Der Komplex  $S_{\text{os}}^*\Delta(\check{\mathcal{K}})$  der ordnungsverträgliche simplicialen Koketten mit samt einem Isomorphismus von Komplexen  $S_{\text{os}}^*\Delta(\check{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\sim} S^*\check{\mathcal{K}}$  ist in derselben Weise erklärt wie der Komplex der ordnungsverträgliche simplicialen Ketten



Ein angeordneter 3-Simplex  $\sigma$  und die sechs angeordneten 3-Simplizes  $\sigma \circ \pi$  mit Vorzeichen, deren Summe seine baryzentrische Unterteilung  $b(\sigma)$  im Sinne des Beweises von [5.4.6](#) repräsentiert. Die Kreispeile sind eigentlich überflüssig und betonen nur die Reihenfolge der Ecken in den angeordneten 3-Simplizes  $\sigma \circ \pi$  und die Beziehung zum Signum der zugehörigen Permutationen  $\pi$ .

in 5.4.2. Die durchgezogenen Pfeile sind uns bereits bekannt, die rechte Vertikale ist modulo unserer Identifikation von Simplizialketten mit ordnungsverträglichen simplizialen Ketten das baryzentrische Unterteilen, die untere Horizontale die Restriktion auf ordnungsverträgliche simpliziale Ketten unserer Poincaré-Dualität aus 5.3.7. Unser Ziel ist die Ergänzung durch Kettenabbildungen wie durch die gestrichelten Pfeile angedeutet zu einem kommutativen Diagramm von Homotopieäquivalenzen, dessen obere Horizontale dann die geometrische Bedeutung des Dualitäts-Isomorphismus klar macht. Als ersten Schritt in diese Richtung behaupte ich, daß die durch  $\cap \check{\omega}$  gegebene Kettenabbildung wie durch den schrägen gestrichelten Pfeil angedeutet über unsere baryzentrische Unterteilung  $b$  faktorisiert. Ein  $q$ -Simplex  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  ist ja per definitionem eine echt aufsteigende Kette  $\check{u}_0 \subsetneq \check{u}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$  von Simplexes von  $\mathcal{K}$ . Die zugehörigen  $\langle \check{u} \rangle$  bilden eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $S_q^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  und die zugehörigen Linearformen bilden eine  $\mathbb{Z}$ -Basis  $\langle \check{u} \rangle^*$  von  $S_q^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$ . Für das cap-Produkt  $\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega}$  mit dem Fundamentalzykel erhalten wir nach 4.5.4 die Darstellung

$$\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega} = (-1)^{q(n-q)} \sum_{s \in \mathcal{K}_n, \pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\pi) \langle \langle \check{u} \rangle^*, (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee \rho^q \rangle (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee \lambda^{n-q}$$

Insbesondere ist die rechte Seite nur dann nicht Null, wenn  $\check{u}$  die Gestalt  $\check{u}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$  hat mit  $\check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}$  und dann natürlich auch  $\check{u}_i \in \mathcal{K}_{n-q+i}$  für alle  $i$ . Seien nun  $u_1, \dots, u_q \in E$  die Ecken des ursprünglichen Komplexes mit  $\check{u}_i = \check{u}_{i-1} \cup \{u_i\}$ , so daß also gilt  $\check{u}_q = \check{u}_0 \cup \{u_1, \dots, u_q\}$ . Sei  $s = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  die angeordnete Darstellung des  $n$ -Simplex  $s$ . Auf der rechten Seite liefert nur  $s = \check{u}_q \in \mathcal{K}_n$  von Null verschiedene Beiträge, und zwar nur für  $\pi \in \mathcal{S}_{n+1}$  mit  $s_{\pi(n-q+1)} = u_1, \dots, s_{\pi(n)} = u_q$ , und für diese ist der Gesamtbeitrag bis auf ein Vorzeichen gerade

$$b(\check{u}_0) = \sum_{\kappa \in \mathcal{S}_{n-q+1}} \operatorname{sgn}(\kappa) \langle \langle \check{u}_0 \rangle \circ \kappa \rangle^\vee$$

Das zeigt schon einmal, dass  $\cap \check{\omega}$  wie behauptet über  $b$  faktorisiert und liefert den Pfeil schräg nach oben. Um auch das Vorzeichen anzugeben, betrachten wir die angeordnete Darstellung  $\check{u}_0 = (v_0, \dots, v_{n-q})$  und die Permutation  $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$  mit  $s_{\tau(0)} = v_0, \dots, s_{\tau(n-q)} = v_{n-q}, s_{\tau(n-q+1)} = u_1, \dots, s_{\tau(n)} = u_q$ , finden für das fragliche Vorzeichen die Darstellung  $\eta(\check{u}) = (-1)^{q(n-q)} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\tau)$  und erhalten für  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  die Formel

$$\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega} = \begin{cases} \eta(\check{u}) b(\check{u}_0) & \text{falls } \check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Bilden wir den Quotienten  $C^*$  von  $S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  nach den  $\langle \check{u} \rangle^*$  mit  $\check{u}_0 \notin \mathcal{K}_{n-q}$  sowie den  $\eta(\check{u})\langle \check{u} \rangle^* - \eta(\check{v})\langle \check{v} \rangle^*$  mit  $\check{u}_0 = \check{v}_0$ , so faktorisiert unser  $\cap \tilde{\omega}$  weiter und liefert, wie man leicht sieht, einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$C^*[n] \xrightarrow{\sim} S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$$

unter Verwendung unserer Konvention 4.1.3. Man kann in dieser Weise sogar einen Beweis der Poincaré-Dualität im triangulierbaren Fall geben, wofür dann allerdings noch gezeigt werden muß, daß die linke Vertikale unseres Diagramms Isomorphismen auf der Homologie induziert. Da wir aber vielmehr an der anschaulichen Bedeutung der Poincaré-Dualität interessiert sind, drehen wir den Spieß um und folgern aus der Poincaré-Dualität 5.3.7, daß die linke Vertikale unseres Diagramms  $S_{\text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}}) \rightarrow C^*$  Isomorphismen auf der Kohomologie induziert. Nach 4.6.3 ist sie also eine Homotopieäquivalenz und unser ganzes Diagramm besteht aus Homotopieäquivalenzen. Gehen wir nun in dieser linken Vertikale zu den dualen Komplexen über, so erhalten wir offensichtlich genau den Unterkomplex  $C \subset S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  aus dem ersten Teil unseres Satzes 5.4.6, und damit ist auch dieser erste Teil bereits bewiesen. Des weiteren sehen wir, daß für  $t \in \mathcal{K}_{n-q}$  und  $\langle t \rangle$  der zugehörige angeordnete Simplex seine baryzentrische Unterteilung  $b(\langle t \rangle)$  genau ein Urbild hat unter  $\cap \tilde{\omega}$ , und daß dieses Urbild auf der dualen Zelle  $c(t)$  den Wert Eins annimmt und auf allen anderen dualen Zellen den Wert Null. Daraus folgt dann auch der zweite Teil des Satzes.  $\square$

## 5.5 Anschauung im nichtkompakten Fall

5.5.1. *Später!* In derselben Weise erklären wir die Komplexe  $S^{! \text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  bzw.  $S_{! \text{os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  mitsamt Isomorphismen von Komplexen nach  $S^! \check{\mathcal{K}}$  bzw.  $S_{!}^* \check{\mathcal{K}}$ .

5.5.2. Sei nun unser Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  eine Triangulierung einer nicht notwendig kompakten separablen orientierten  $n$ -Mannigfaltigkeit. Wir wählen eine Anordnung  $\leq$  auf der Menge  $E$  der Ecken von  $\mathcal{K}$ . Der Fundamentalzykel von  $\Delta(\mathcal{K})$  im Sinne von 5.2.12 hat wegen 5.2.20 genau einen Repräsentanten in den Borel-Moore-Simplizialketten und damit auch genau einen Repräsentanten  $\omega \in S_n^{! \text{os}} \Delta(\mathcal{K})$  in der in hoffentlich offensichtlicher Weise definierten Gruppe der ordnungsverträglichen simplizialen Borel-Moore- $n$ -Ketten. Nach 5.2.21 hat er Gestalt

$$\omega = \sum_{s \in \mathcal{K}_n} \varepsilon(s) \langle s \rangle$$

für wohlbestimmtes  $\varepsilon : \mathcal{K}_n \rightarrow \{\pm 1\}$  mit  $\langle s \rangle$  dem zum  $n$ -Simplex  $s$  gehörigen angeordneten  $n$ -Simplex wie im Beweis von 2.4.3. Wenden wir darauf die

baryzentrische Unterteilung an, so erhalten wir den Repräsentanten

$$\check{\omega} = \sum_{s \in \mathcal{K}_n, \pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\pi) (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee$$

des Fundamentalzykels in  $S_n^{\text{!os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$ . Die weitere Argumentation wird ausgehen vom Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_!^* \Delta(\check{\mathcal{K}})[n] & \dashrightarrow & S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K}) \\ \uparrow & \nearrow & \downarrow b \\ S_{\text{!os}}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})[n] & \xrightarrow{\cap \check{\omega}} & S^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}}) \end{array}$$

Die durchgezogenen Pfeile sind uns bereits bekannt, die rechte Vertikale ist modulo unserer Identifikation von Simplicialketten mit ordnungsverträglichen simplicialen Ketten das baryzentrische Unterteilen, die untere Horizontale die Restriktion auf ordnungsverträgliche simpliciale Ketten unserer Poincaré-Dualität auf singulären Ketten aus 5.2.18. Unser Ziel ist die Ergänzung durch Kettenabbildungen wie durch die gestrichelten Pfeile angedeutet zu einem kommutativen Diagramm von Homotopieäquivalenzen, dessen obere Horizontale dann die geometrische Bedeutung des Dualitäts-Isomorphismus klar macht. Als ersten Schritt in diese Richtung behaupte ich, daß die durch  $\cap \check{\omega}$  gegebene Kettenabbildung wie durch den schrägen gestrichelten Pfeil angedeutet über unsere baryzentrische Unterteilung  $b$  faktorisiert. Ein  $q$ -Simplex  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  ist ja per definitionem eine echt aufsteigende Kette  $\check{u}_0 \subsetneq \check{u}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$  von Simplexes von  $\mathcal{K}$ . Die zugehörigen  $\langle \check{u} \rangle$  bilden eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $S_q^{\text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$  und die zugehörigen Linearformen bilden eine  $\mathbb{Z}$ -Basis  $\langle \check{u} \rangle^*$  von  $S_{\text{!os}}^q \Delta(\check{\mathcal{K}})$ . Für das cap-Produkt  $\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega}$  mit dem Fundamentalzykel erhalten wir nach 4.5.4 die Darstellung

$$\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega} = (-1)^{q(n-q)} \sum_{s \in \mathcal{K}_n, \pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(s) \operatorname{sgn}(\pi) \langle \langle \check{u} \rangle^*, (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee \rho^q \rangle (\langle s \rangle \circ \pi)^\vee \lambda^{n-q}$$

Insbesondere ist die rechte Seite nur dann nicht Null, wenn  $\check{u}$  die Gestalt  $\check{u}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \check{u}_q$  hat mit  $\check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}$  und dann natürlich auch  $\check{u}_i \in \mathcal{K}_{n-q+i}$  für alle  $i$ . Seien nun  $u_1, \dots, u_q \in E$  die Ecken des ursprünglichen Komplexes mit  $\check{u}_i = \check{u}_{i-1} \cup \{u_i\}$ , so daß also gilt  $\check{u}_q = \check{u}_0 \cup \{u_1, \dots, u_q\}$ . Sei  $s = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  die angeordnete Darstellung des  $n$ -Simplex  $s$ . Auf der rechten Seite liefert nur  $s = \check{u}_q \in \mathcal{K}_n$  von Null verschiedene Beiträge, und zwar nur für  $\pi \in \mathcal{S}_{n+1}$  mit  $s_{\pi(n-q+1)} = u_1, \dots, s_{\pi(n)} = u_q$ , und für diese ist der Gesamtbeitrag bis auf ein

Vorzeichen gerade

$$b(\check{u}_0) = \sum_{\kappa \in \mathcal{S}_{n-q+1}} \text{sgn}(\kappa) (\langle \check{u}_0 \rangle \circ \kappa)^\vee$$

Das zeigt schon einmal, dass  $\cap \check{\omega}$  wie behauptet über  $b$  faktorisiert und liefert den Pfeil schräg nach oben. Um das Vorzeichen anzugeben, betrachten wir die angeordnete Darstellung  $\check{u}_0 = (v_0, \dots, v_{n-q})$  und die Permutation  $\tau \in \mathcal{S}_{n+1}$  mit  $s_{\tau(0)} = v_0, \dots, s_{\tau(n-q)} = v_{n-q}, s_{\tau(n-q+1)} = u_1, \dots, s_{\tau(n)} = u_q$ , finden für das fragliche Vorzeichen die Darstellung  $\eta(\check{u}) = (-1)^{q(n-q)} \varepsilon(s) \text{sgn}(\tau)$  und erhalten für  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  die Formel

$$\langle \check{u} \rangle^* \cap \check{\omega} = \begin{cases} \eta(\check{u}) b(\check{u}_0) & \text{falls } \check{u}_0 \in \mathcal{K}_{n-q}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bilden wir den Quotienten  $C_!^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  von  $S_{!}^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  nach den  $\langle \check{u} \rangle^*$  mit  $\check{u}_0 \notin \mathcal{K}_{n-q}$  sowie den  $\eta(\check{u}) \langle \check{u} \rangle^* - \eta(\check{v}) \langle \check{v} \rangle^*$  mit  $\check{u}_0 = \check{v}_0$ , so faktorisiert unser  $\cap \check{\omega}$  weiter und liefert, wie man leicht sieht, einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$C_!^* \Delta(\check{\mathcal{K}})[n] \xrightarrow{\sim} S^{\text{os}} \Delta(\mathcal{K})$$


Man kann in dieser Weise sogar einen Beweis der Poincaré-Dualität im triangulierbaren Fall geben, wofür dann allerdings noch gezeigt werden muß, daß die linke Vertikale unseres Diagramms Isomorphismen auf der Homologie induziert. Da wir aber vielmehr an der anschaulichen Bedeutung der Poincaré-Dualität interessiert sind, drehen wir den Spieß um und folgern aus der Poincaré-Dualität, daß die linke Vertikale unseres Diagramms  $S_{!}^* \Delta(\check{\mathcal{K}}) \rightarrow C_!^* \Delta(\check{\mathcal{K}})$  Isomorphismen auf der Kohomologie induziert. Nach 4.6.3 ist sie also eine Homotopieäquivalenz und unser ganzes Diagramm besteht aus Homotopieäquivalenzen. Um nun endlich zur anschaulichen Bedeutung vorzudringen, betrachten wir in der linken Vertikalen die dualen Komplexe und erhalten so eine Homotopieäquivalenz

$$C^! \Delta(\check{\mathcal{K}}) \hookrightarrow S^{! \text{os}} \Delta(\check{\mathcal{K}})$$

wo der  $q$ -te Teil  $C_q^! \Delta(\check{\mathcal{K}})$  unseres Teilkomplexes aus allen “unendlichen formalen Linearkombinationen” über  $t \in \mathcal{K}_{n-q}$  gewisser Ausdrücke  $c(t)$  besteht, die ihrerseits gegeben werden als

$$c(t) = \sum \eta(\check{u}) \langle \check{u} \rangle$$

summiert über alle  $\check{u} \in \check{\mathcal{K}}_q$  mit  $\check{u}_0 = t$ .



SkriptenBilder/BildFzy.png

BlahBlah



SkriptenBilder/BildFzz.png

BlahBlah



BlahBlah

# Kapitel III

## Garbenkohomologie

### Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Garben und ihre Kohomologie</b>	<b>330</b>
1.1	Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen	330
1.2	Erste Čech-Kohomologie und Torsoren	335
1.3	Prägarben und höhere Čech-Kohomologie	339
1.4	Garben und ihre étalen Räume	344
1.5	Kerne und Kokerne in Kategorien	354
1.6	Präabelsche Kategorien	355
1.7	Additive und abelsche Kategorien	357
1.8	Kerne und Kokerne für abelsche Garben	360
1.9	Definition der Garbenkohomologie	362
1.10	Kohomologie welcher Garben	365
1.11	Erste Čech-Kohomologie als Garbenkohomologie	366
<b>2</b>	<b>Funktorialität und Beispiele</b>	<b>369</b>
2.1	Ein Spektralsequenzargument	369
2.2	Angeordnete Čech-Kohomologie	371
2.3	Kohomologie durch azyklische Auflösungen	375
2.4	Rückzug von Garben	378
2.5	Rückzug in der Garbenkohomologie	383
2.6	Parakompakte Räume	387
2.7	Garben auf parakompakten Räumen	389
2.8	Direktes Bild von Garben	393

2.9	Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie . . .	397
2.10	Der Satz von de Rham . . . . .	401
2.11	Kohomologie mit kompaktem Träger . . . . .	404
<b>3</b>	<b>Abstrakte homologische Algebra . . . . .</b>	<b>423</b>
3.1	Die lange exakte Kohomologiesequenz . . . . .	423
3.2	Höhere derivierte Funktoren . . . . .	427
3.3	Ausgezeichnete Dreiecke . . . . .	435
3.4	Abstrakte Interpretation des Kohomologierings . .	440
<b>4</b>	<b>Lokalisierung in Kategorien . . . . .</b>	<b>445</b>
4.1	Köcher . . . . .	445
4.2	Lokalisierung von Kategorien . . . . .	446
4.3	Lokalisierung unter Ore-Bedingungen . . . . .	450
<b>5</b>	<b>Derivierte Kategorien und Funktoren . . . . .</b>	<b>454</b>
5.1	Triangulierte Kategorien . . . . .	454
5.2	Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien .	459
5.3	Triangulierte Kategorien und dg-Moduln . . . . .	461
5.4	Quotienten triangulierter Kategorien . . . . .	465
5.5	Derivierte Kategorien . . . . .	468
5.6	Beschränkte derivierte Kategorien . . . . .	469
5.7	Derivierte Kategorien durch Auflösungen . . . . .	473
5.8	Derivierte Kategorien als dg-Modulkategorien . . .	477
5.9	Rechtsderivierte Funktoren . . . . .	479
5.10	Approximieren durch azyklische Auflösungen . . .	485
5.11	Linksderivierte Funktoren . . . . .	489
5.12	Wohl nicht hier . . . . .	491
5.13	Derivierte Kategorien, ALT . . . . .	491
<b>6</b>	<b>Viel Später?! . . . . .</b>	<b>494</b>
6.1	Spektralsequenzen . . . . .	494
6.2	Bidualität für Kettenkomplexe . . . . .	502
6.3	Relative Kategorientheorie . . . . .	502
6.4	Faserungen von Kategorien . . . . .	503
6.5	Morphismen von Kategorienfaserungen, Versuch .	507
6.6	Basiswechsel . . . . .	508



6.7	Gefaserte Produkte von Kategorien, woanders . . .	509
6.8	Nachdenken über Stacks, woanders . . . . .	512
6.9	Kartesische Funktoren, Wohin? . . . . .	515
<b>7</b>	<b>Altes Zeug, wohl Schrott . . . . .</b>	<b>516</b>
7.1	Alter Beweis von Čech gleich Garben . . . . .	516
7.2	Kohomologie und azyklische Auflösungen (ALT) .	517

---

# 1 Garben und ihre Kohomologie

Als Motivation für die Entwicklung der Garbenkohomologie bespreche ich zunächst den Zusammenhang zwischen der ersten Garbenkohomologie und der Klassifikation verschiedener Arten von Bündeln. Dann definiere ich die höhere Garbenkohomologie und zeige mit ihrer Hilfe den Satz von de Rham, der in ?? zunächst einmal vorgestellt wird. Als weitere Anwendungen gebe ich unter anderem eine anschauliche Interpretation der Schnittpaarung in ?? und als vielleicht wichtigste Anwendung in ?? eine Diskussion der Frage, inwiefern bei stetigen Familien topologischer Räume auch die Kohomologiegruppen unserer Räume stetige Familien bilden.

## 1.1 Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen

**Definition 1.1.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $n \geq 1$  eine positive natürliche Zahl. Eine stetige Abbildung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  heißt eine  **$n$ -blättrige Überlagerung** genau dann, wenn eine offene Überdeckung  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von  $X$  existiert derart, daß es für alle  $U \in \mathcal{U}$  Homöomorphismen

$$i_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \{1, \dots, n\}$$

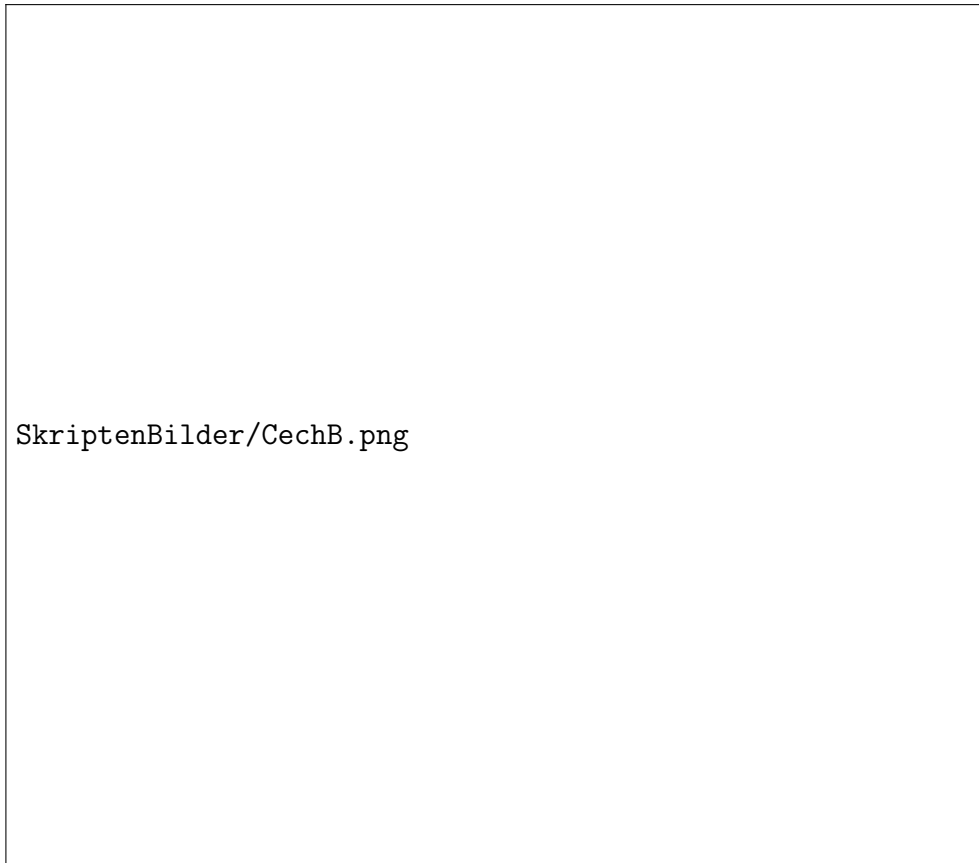
gibt, die verträglich sind mit den offensichtlichen Projektionen beider Seiten auf  $U$ . Solch eine Familie von Homöomorphismen  $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$  nennen wir eine **Trivialisierung** unserer Überlagerung. Zwei Überlagerungen nennt man **isomorph** genau dann, wenn sie isomorph sind in der Kategorie der topologischen Räume über  $X$ , wenn es also in anderen Worten eine Decktransformation zwischen ihnen gibt, die ein Homöomorphismus ist.

**Definition 1.1.2.** Wir kürzen  $\{1, \dots, n\} = F$  ab und bezeichnen mit  $\mathcal{S}_n$  die Gruppe der Permutationen von  $F$ , versehen mit der diskreten Topologie. Jede Trivialisierung  $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$  unserer Überlagerung über einer offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  liefert für beliebige  $U, V \in \mathcal{U}$  eindeutig bestimmte und nach ?? stetige Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_{UV} : U \cap V &\rightarrow \mathcal{S}_n \\ x &\mapsto \varphi_{UV}^x \end{aligned}$$

derart, daß gilt  $(i_U \circ i_V^{-1})(x, f) = (x, \varphi_{UV}^x(f)) \quad \forall x \in U \cap V, f \in F$ . Wir nennen diese Abbildungen die **Verklebungsfunktionen** unserer Trivialisierung  $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$ . Gegeben  $U, V, W \in \mathcal{U}$  haben wir offensichtlich

$$\varphi_{UV}^x \circ \varphi_{VW}^x = \varphi_{UW}^x \quad \forall x \in U \cap V \cap W$$



Eine zweiblättrige Überlagerung der Kreislinie mit Trivialisierung in Bezug auf eine Überdeckung durch zwei offene Teilmengen. Der Schnitt dieser beiden Teilmengen hat zwei Zusammenhangskomponenten, und die Verklebungsfunktion ist konstant das neutrale Element aus  $\mathcal{S}_2$  auf der im Bild “hinteren” Komponente und konstant die Transposition aus  $\mathcal{S}_2$  auf der “vorderen” Komponente.

**Definition 1.1.3.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  eine offene Überdeckung von  $X$  und  $G$  eine topologische Gruppe, deren Verknüpfung wir mit  $\top$  notieren. Die Menge  $\check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$  der **Čech-1-Kozykel** bezüglich  $\mathcal{U}$  mit Werten in  $G$  ist definiert als die Menge aller möglichen Wahlen von stetigen Abbildungen  $\varphi_{UV} : U \cap V \rightarrow G$  für alle  $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$  derart, daß für beliebige  $U, V, W \in \mathcal{U}$  auf dem Schnitt  $U \cap V \cap W$  gilt

$$\varphi_{UV} \top \varphi_{VW} = \varphi_{UW}$$

1.1.4. Ist  $q : \hat{X} \rightarrow X$  eine zweite  $n$ -blättrige Überlagerung mit einer Trivialisierung über  $\mathcal{U}$  durch gewisse  $j_U : q^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ , so verstehen wir unter einem "trivialisierungsverträglichen" Isomorphismus zwischen unseren beiden Überlagerungen eine bijektive Decktransformation  $d : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \hat{X}$  derart, daß gilt  $j_U \circ d = i_U$  für alle  $U \in \mathcal{U}$ .

**Lemma 1.1.5.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . So liefert das Bilden der Verklebungsfunktionen eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X \text{ mit} \\ \text{einer Trivialisierung } (i_U)_{U \in \mathcal{U}} \text{ über } \mathcal{U}, \text{ bis auf} \\ \text{trivialisierungsverträglichen Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{S}_n)$$

*Beweis.* Um die Bijektivität zu zeigen, konstruieren wir eine Umkehrabbildung. Gegeben ein Čech-1-Kozykel  $(\varphi_{UV})_{U, V \in \mathcal{U}}$  bilden wir für jedes  $U \in \mathcal{U}$  die einpunktige Menge  $\{U\}$ , betrachten auf dem Raum

$$\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} \{U\} \times U \times F$$

die Äquivalenzrelation  $\sim$ , die erzeugt wird von

$$(V, x, f) \sim (U, x, \varphi_{UV}^x(f)) \quad \forall U, V \in \mathcal{U}, x \in U \cap V, f \in F$$

und bilden den Raum  $\tilde{X}$  der Äquivalenzklassen mit der Quotiententopologie, der Projektion auf die mittlere Koordinate  $\tilde{X} \rightarrow X$  und der offensichtlichen Trivialisierung über  $\mathcal{U}$ . Es bleibe dem Leser überlassen zu zeigen, daß diese Konstruktion invers ist zum Bilden der Verklebungsfunktionen.  $\square$

**Definition 1.1.6.** Nun nehmen wir an, wir hätten für dieselbe Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  über derselben offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  eine zweite Trivialisierung gegeben durch gewisse  $\tilde{i}_U : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ . Dann erklären wir stetige Abbildungen

$$\begin{array}{lcl} \psi_U : U & \rightarrow & \mathcal{S}_n \\ & x \mapsto & \psi_U^x \end{array}$$

durch die Gleichungen  $(\tilde{i}_U \circ i_U^{-1})(x, f) = (x, \psi_U^x(f)) \quad \forall x \in U, f \in F$  und nennen diese  $\psi_U$  die **Übergangsfunktionen** zwischen unseren beiden Trivialisierungen  $(i_U)$  und  $(\tilde{i}_U)$ .

1.1.7. Die Verklebungsfunktionen  $\tilde{\varphi}_{UV}$  zu unserer zweiten Trivialisierung  $(\tilde{i}_U)$  lassen sich durch die Verklebungsfunktionen  $\varphi_{UV}$  zu unserer ersten Trivialisierung  $(i_U)$  und die Übergangsfunktionen zwischen den beiden Trivialisierungen ausdrücken vermittels der Formel

$$\tilde{\varphi}_{UV}^x = \psi_U^x \circ \varphi_{UV}^x \circ (\psi_V^x)^{-1} \quad \forall x \in U \cap V$$

**Definition 1.1.8.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$  und  $G$  eine topologische Gruppe. Zwei Čech-1-Kozykel  $\varphi, \tilde{\varphi} \in \check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$  heißen **kohomolog** und wir schreiben  $\varphi \sim \tilde{\varphi}$  genau dann, wenn es eine Familie  $\psi = (\psi_U)_{U \in \mathcal{U}}$  von stetigen Funktionen  $\psi_U : U \rightarrow G$  gibt derart, daß für beliebige  $U, V \in \mathcal{U}$  auf dem Schnitt  $U \cap V$  gilt

$$\tilde{\varphi}_{UV} = \psi_U \top \varphi_{UV} \top \psi_V^{-1}$$

Diese Relation “kohomolog” ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen notieren wir

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; G) = \check{Z}^1(\mathcal{U}; G) / \sim$$

und nennen sie die **erste Čech-Kohomologie für die Überdeckung  $\mathcal{U}$  mit Werten in der topologischen Gruppe  $G$** .

1.1.9. Unser  $\check{H}^1(\mathcal{U}; G)$  ist im allgemeinen keine Gruppe, sondern nur eine Menge mit einem ausgezeichneten Punkt, nämlich der Klasse des trivialen 1-Kozykels. Ist jedoch die Gruppe  $G$  kommutativ, so sind  $\check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$  und  $\check{H}^1(\mathcal{U}; G)$  auch kommutative Gruppen in natürlicher Weise.

**Lemma 1.1.10.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . So liefert das Bilden der Verklebungsfunktionen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige über } \mathcal{U} \text{ trivialisierbare} \\ \text{Überlagerungen von } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{S}_n)$$

*Beweis.* Dem Leser überlassen. □

1.1.11. Unwesentlich allgemeiner können wir die erste Čech-Kohomologie analog auch einführen für “indizierte” offene Überdeckungen  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ . Alles bis hierher Gesagte gilt entsprechend.

1.1.12. Ist  $\mathcal{U}$  eine Überdeckung von  $X$  und  $\mathcal{V}$  eine weitere Überdeckung durch weniger offene Mengen, in Formeln  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , so haben wir eine offensichtliche Abbildung  $\check{H}^1(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{V}; G)$ , die den ausgezeichneten Punkt in den ausgezeichneten Punkt überführt.

**Definition 1.1.13.** Wir nennen eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  **gesättigt** genau dann, wenn sie mit einer Menge auch alle ihre offenen Teilmengen enthält, wenn also aus  $U \in \mathcal{U}$  und  $V \subseteq U$  folgt  $V \in \mathcal{U}$ .

**Definition 1.1.14.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $G$  eine topologische Gruppe. Die **erste Čech-Kohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in der topologischen Gruppe  $G$**  ist die punktierte Menge

$$\check{H}^1(X; G) = \varinjlim \check{H}^1(\mathcal{U}; G)$$

die wir erhalten als den direkten Limes über alle gesättigten offenen Überdeckungen unseres Raums. Hier bilden wir den direkten Limes in der Kategorie der punktierten Mengen.

1.1.15. In der Literatur ist ein etwas komplizierteres Vorgehen üblich: Man bildet dabei den direkten Limes über alle Überdeckungen “in Richtung immer feinerer Überdeckungen”, wobei eine Überdeckung  $\mathcal{V}$  **feiner** heißt als eine Überdeckung  $\mathcal{U}$  genau dann, wenn jede ihrer offenen Mengen  $V \in \mathcal{V}$  Teilmenge einer offenen Menge  $U \in \mathcal{U}$  der anderen Überdeckung ist; um die Abbildungen, bezüglich derer der Limes gebildet wird, zu erklären, wählt man zusätzlich ein  $\tau : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  mit  $V \subset \tau(V)$  für alle  $V$ ; dies  $\tau$  liefert dann Abbildungen  $\check{C}^1(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{C}^1(\mathcal{V}; G)$  und  $\check{Z}^1(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{Z}^1(\mathcal{V}; G)$  und  $\check{H}^1(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{V}; G)$ ; und von letzteren zeigt man, daß sie von der Wahl von  $\tau$  gar nicht abhängen und bildet dann den direkten Limes. Unser direktes System aller gesättigten offenen Überdeckungen ist nun aber kofinal, so daß unsere Definition dieselbe Čech-Kohomologie liefert.

**Satz 1.1.16 (Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen).** *Für jeden topologischen Raum  $X$  liefert das Bilden von Verklebungsfunktionen für Trivialisierungen bezüglich offener Überdeckungen eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{l} n\text{-blättrige Überlagerungen von } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; \mathcal{S}_n)$$

*Beweis.* Das ergibt sich aus den vorhergehenden Definitionen und Lemmata. Die Details bleiben dem Leser überlassen.  $\square$

*Übung 1.1.17.* Jeder Čech-Kozykel bezüglich einer Überdeckung  $\mathcal{U}$  läßt sich fortsetzen zu einem Čech-Kozykel bezüglich der aus allen offenen Teilmengen der Mengen aus  $\mathcal{U}$  bestehenden Überdeckung  $\mathcal{V} \supset \mathcal{U}$ , und die Klasse einer solchen Fortsetzung in der Čech-Kohomologie ist unabhängig von der Wahl der Fortsetzung.

## 1.2 Erste Čech-Kohomologie und Torsoren

**Definition 1.2.1.** Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Ein  $G$ -Raum  $Y$  heißt **topologisch frei** genau dann, wenn jeder Punkt  $y \in Y$  eine offene  $G$ -stabile Umgebung  $U$  besitzt, die isomorph ist zu einem  $G$ -Raum der Gestalt  $W \times G$  für irgendeinen topologischen Raum  $W$ .

*Beispiel 1.2.2.* Die Operation von  $\mathbb{R}$  mit der diskreten Topologie auf  $\mathbb{R}$  mit der üblichen Topologie ist stetig und frei, aber nicht topologisch frei.

**Definition 1.2.3.** Sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $X$  ein topologischer Raum. Ein  $G$ -**Torsor** auf  $X$ , auch genannt ein  $G$ -**Hauptfaserbündel** (englisch **principal bundle**, französisch **fibré principal**), ist ein Paar  $(E, p)$  bestehend aus einem topologisch freien  $G$ -Rechtsraum  $E$  mitsamt einer stetigen Abbildung  $p : E \rightarrow X$ , die einen Homöomorphismus  $E/G \xrightarrow{\sim} X$  induziert. Wir nennen  $E$  den **Totalraum** und  $p$  die **Projektion** unseres Torsors. Ein **Morphismus von  $G$ -Torsoren auf  $X$**  ist eine stetige  $G$ -äquivalente Abbildung über  $X$ .

*Beispiel 1.2.4.* Ist  $G$  diskret, so ist ein  $G$ -Torsor auf einem topologischen Raum dasselbe wie eine Überlagerung unseres Raums mitsamt einer Rechtsoperation von  $G$  durch Decktransformationen derart, daß die Operation auf jeder Faser frei und transitiv ist.

1.2.5. Ist  $G$  eine Lie-Gruppe und  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ersetzt man in der obigen Definition überall das Wort “stetig” durch “differenzierbar” oder besser “glatt” und den Begriff “topologischer Raum” durch “differenzierbare Mannigfaltigkeit”, so erhält man die Definition eines **glatten  $G$ -Hauptfaserbündels auf  $X$** .

*Übung 1.2.6.* Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir erhalten eine Bijektion

$$\{\mathcal{S}_n\text{-Torsoren auf } X\} / \cong \xrightarrow{\sim} \{n\text{-blättrige Überlagerungen von } X\} / \cong$$

durch  $E \mapsto E \times_{\mathcal{S}_n} \{1, \dots, n\}$  bzw. in der umgekehrten Richtung, indem wir einer  $n$ -blättrigen Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  die Menge  $E = \bigsqcup_x E_x$  zuordnen, für  $E_x = \text{Ens}^\times(\{1, \dots, n\}, p^{-1}(x))$  die Menge aller Bijektionen zwischen  $\{1, \dots, n\}$  und der Faser unserer Überlagerung bei  $x$ , mit der offensichtlichen

$\mathcal{S}_n$ -Operation und Projektion auf  $X$  und einer geeigneten Topologie. Hierbei ist  $\times_{\mathcal{S}_n}$  als balanciertes Produkt im Sinne von 1.4.9.18 zu verstehen, nicht als Faserprodukt.

*Übung 1.2.7.* Jeder Morphismus von Torsoren ist ein Isomorphismus. Die Automorphismen des  $G$ -Torsors  $X \times G$  über  $X$  können identifiziert werden mit den stetigen Abbildungen  $X \rightarrow G$ . Genauer erhalten wir eine Bijektion  $\text{Top}(X, G) \xrightarrow{\sim} \text{Top}_X^G(X \times G)$  durch die Vorschrift  $f \mapsto \tilde{f}$  mit  $\tilde{f}$  gegeben durch  $\tilde{f}(x, g) = (x, f(x)g)$ .

**1.2.8 (Erste Čech-Kohomologie und Torsoren).** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $G$  eine topologische Gruppe und  $p : E \rightarrow X$  ein  $G$ -Torsor auf  $X$ . Wählen wir für unseren Torsor eine trivialisierende gesättigte offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  und über  $\mathcal{U}$  eine Trivialisierung  $(i_U)_{U \in \mathcal{U}}$  von  $E$  durch die Wahl gewisser  $i_U \in \text{Top}_U^G(p^{-1}(U), U \times G)$  und erklären für  $U, V \in \mathcal{U}$  die Verklebungsfunktionen  $\varphi_{UV} \in \text{Top}(U \cap V, G)$  durch die Vorschrift  $(i_U \circ i_V^{-1})(x, g) = (x, \varphi_{UV}(x)g)$ , so bilden die  $\varphi_{UV}$  einen Čech-Kozykel, dessen Kohomologiekategorie nur von  $E$  abhängt, und wir erhalten so eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} G\text{-Torsoren auf } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; G)$$

wobei rechts die Čech-Kohomologie mit Werten in der topologischen Gruppe  $G$  gemeint ist. Der Beweis läuft vollständig analog zum Beweis von 1.1.16 und bleibt dem Leser überlassen. Gegeben ein Homomorphismus topologischer Gruppen  $H \rightarrow G$  kann man weiter jedem  $H$ -Hauptfaserbündel  $E \rightarrow X$  das  $G$ -Hauptfaserbündel  $E \times_H G \rightarrow X$  zuordnen. Diese Zuordnung ist dann unter den eben erklärten Bijektionen verträglich mit der offensichtlichen Abbildung  $\check{H}^1(X; H) \rightarrow \check{H}^1(X; G)$ .

**1.2.9.** Gegeben ein zusammenhängender lokal zusammenziehbarer topologischer Raum  $X$  und eine diskrete abelsche Gruppe  $G$  können wir bereits hier einen Isomorphismus zwischen der ersten singulären Kohomologie und der ersten Čech-Kohomologie definieren als die Komposition der Isomorphismen bzw. Inversen der Isomorphismen des folgenden Diagramms, dessen Pfeile wir im Anschluß diskutieren:

$$\begin{array}{ccc} H^1(X; G)_{\text{sing}} & & \check{H}^1(X; G) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ \text{Hom}(H_1(X), G) & & \{G\text{-Torsoren auf } X\} / \cong \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \text{Grp}(\pi_1(X, x), G) & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1(X, x)\text{-Mengen mit einer freien} \\ \text{transitiven Rechtsoperation von } G \end{array} \right\} / \cong \end{array}$$



Hier kommt der vertikale Pfeil oben links vom universellen Koeffiziententheorem II.4.10.1 her, der vertikale Pfeil unten links vom Satz von Hurewicz II.1.5.2 und der vertikale Pfeil oben rechts von der vorhergehenden Bemerkung 1.2.8. Für den vertikalen Pfeil unten rechts beachten wir, daß nach I.4.8.4 unter unseren Annahmen der Faserfunktorkomplex zu einem beliebigen Punkt  $x \in X$  für unser diskretes  $G$  eine Äquivalenz von Kategorien

$$\{G\text{-Torsoren auf } X\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \pi_1(X, x)\text{-Mengen mit einer freien} \\ \text{transitiven Rechtsoperation von } G \end{array} \right\}$$

liefert, wobei auf der rechten Seite zu verstehen ist, daß die Rechtsoperation von  $G$  mit der Linksoperation von  $\pi_1(X, x)$  kommutieren soll. Die Isomorphieklassen auf der rechten Seite entsprechen nun wiederum eineindeutig den  $G$ -Konjugationsklassen von Gruppenhomomorphismen  $\pi_1(X, x) \rightarrow G$ , zum Beispiel nach I.4.2.9. Im hier vorliegenden Fall einer kommutativen Gruppe  $G$  entsprechen sie insbesondere eineindeutig der Menge  $\text{Grp}(\pi_1(X, x), G)$  aller Gruppenhomomorphismen von der Fundamentalgruppe nach  $G$ , und diese Entsprechung liefert die untere Horizontale unseres Diagramms. Wir werden später noch sehr viel stärkere Resultate über den Zusammenhang von singulärer Kohomologie und Garbenkohomologie kennenlernen. Die hier gegebenen Argumente sollen aber schon mal eine erste Anschauung vermitteln.

*Übung 1.2.10.* Man zeige, daß der in 1.2.9 konstruierte Isomorphismus zwischen der ersten singulären Kohomologie und der ersten Čech-Kohomologie nicht von der Wahl des Basispunkts  $x \in X$  abhängt.

*Übung 1.2.11.* Ist der topologische Raum  $X$  einfach zusammenhängend, so besteht  $\check{H}^1(X; G)$  für jede diskrete Gruppe  $G$  nur aus einem Punkt.

**Definition 1.2.12.** Sei  $\mathbb{K}$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  oder der Schiefkörper der Quaternionen  $\mathbb{H}$  und sei  $X$  ein topologischer Raum.

1. Ein "Möchtegern-Bündel von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen" oder kurz ein "Möchtegern- $\mathbb{K}$ -Bündel"  $E = (E, p) = (p : E \rightarrow X)$  auf  $X$  besteht aus einem topologischen Raum  $p : E \rightarrow X$  über  $X$ , dem **Totalraum**  $E$  mit der **Projektion**  $p$ , sowie einer  $\mathbb{K}$ -Vektorraumstruktur auf jeder Faser  $E_x = p^{-1}(x)$ .
2. Ein **Morphismus** von einem Möchtegern- $\mathbb{K}$ -Bündel  $E$  in ein Möchtegern- $\mathbb{K}$ -Bündel  $F$  ist eine stetige Abbildung  $h : E \rightarrow F$  über  $X$  derart, daß für alle  $x \in X$  die auf den Fasern induzierte Abbildung  $h : E_x \rightarrow F_x$  eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung ist.
3. Der Raum  $X \times \mathbb{K}^n$  mit seiner offensichtlichen Struktur als Möchtegern- $\mathbb{K}$ -Bündel heißt das **konstante  $n$ -dimensionale  $\mathbb{K}$ -Bündel auf  $X$** .

4. Ein  $n$ -dimensionales (topologisches)  $\mathbb{K}$ -Bündel auf  $X$  ist ein  $n$ -dimensionales Möchtegern- $\mathbb{K}$ -Bündel  $(E, p)$ , bei dem jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt derart, daß das induzierte Möchtegern- $\mathbb{K}$ -Bündel  $(p : p^{-1}(U) \rightarrow U)$  auf  $U$  isomorph ist zum konstanten  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Bündel  $U \times \mathbb{K}^n$  auf  $U$ .

1.2.13. Die Automorphismengruppe des konstanten  $\mathbb{K}$ -Bündels  $X \times \mathbb{K}^n$  ist kanonisch isomorph zur Gruppe der stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ . Genauer erhalten wir eine Bijektion  $\mathrm{Top}(X, \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X \times \mathbb{K}^n)$  vermittelt  $f \mapsto \tilde{f}$  mit  $\tilde{f}(x, v) = (x, f(x)v)$ . Hier fassen wir  $v \in \mathbb{K}^n$  als Spaltenvektor auf und verstehen im Fall der Quaternionen unter einem  $\mathbb{H}$ -Vektorraum einen  $\mathbb{H}$ -Rechtsmodul.

1.2.14. Ganz genauso wie in 1.1.16 erhalten wir auch Bijektionen

$$\{n\text{-dimensionale } \mathbb{K}\text{-Bündel auf } X\} / \cong \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}))$$

indem wir lokale Trivialisierungen unseres  $\mathbb{K}$ -Bündels betrachten und die Klasse des durch die zugehörigen Übergangsfunktionen gegebenen Čech-Eins-Kozykels. Wir können auch direkt jedem  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ -Torsor  $E$  das  $n$ -dimensionale  $\mathbb{K}$ -Bündel  $E \times_{\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})} \mathbb{K}^n$  zuordnen und erhalten dann ein kommutatives Dreieck von Bijektionen, an dessen drei Ecken Isomorphieklassen von Vektorraumbündeln, Isomorphieklassen von Torsoren und  $\check{H}^1(X; \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}))$  stehen.

1.2.15. Ist  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und ersetzt man in der obigen Definition überall das Wort “stetig” durch “differenzierbar” oder besser “glatt” und den Begriff “topologischer Raum” durch “differenzierbare Mannigfaltigkeit”, so erhält man die Definition eines  **$n$ -dimensionalen differenzierbaren  $\mathbb{K}$ -Bündels auf  $X$** , wie sie in ?? bereits im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  gegeben wurde. Um die Klassifikation differenzierbarer oder auch “analytischer” Bündel in derselben Weise behandeln zu können wie die Klassifikation topologischer Bündel, führen wir im folgenden Abschnitt allgemeiner Prägarben und ihre Čech-Kohomologie ein.

*Beispiel* 1.2.16. Das Tangentialbündel an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  ist ein  $n$ -dimensionales differenzierbares und damit erst recht ein  $n$ -dimensionales topologisches  $\mathbb{R}$ -Bündel.

**Definition 1.2.17.** Seien  $F$  und  $X$  topologische Räume. Ein **Faserbündel** mit Faser  $F$  auf  $X$  ist ein topologischer Raum  $p : Y \rightarrow X$  über  $X$  derart, daß jeder Punkt von  $X$  eine Umgebung  $U$  besitzt, für die  $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$  als topologischer Raum über  $U$  isomorph ist zu  $\mathrm{pr}_U : U \times F \rightarrow U$ .

*Beispiel* 1.2.18. Ein Faserbündel mit diskreter endlicher Faser  $F$  der Kardinalität  $n$  ist dasselbe wie eine  $n$ -blättrige Überlagerung.

*Übung 1.2.19.* Ist  $F$  ein topologischer Raum, auf dem eine topologische Gruppe  $G$  wirkt, und ist  $E$  ein  $G$ -Torsor auf einem Raum  $X$ , so ist  $E \times_G F$  ein Faserbündel über  $X$  mit Faser  $F$ .

1.2.20. In manchen Fällen liefert die Konstruktion aus 1.2.19 sogar eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen von  $G$ -Torsoren und Isomorphieklassen von Faserbündeln mit Faser  $F$ , so zum Beispiel etwa im Fall  $F = \{1, \dots, n\}$  und  $G = \mathcal{S}_n$ , den wir bereits in 1.2.6 diskutiert hatten.

*Übung 1.2.21.* Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Ordnen wir jedem Element  $g \in G$  den  $G$ -Torsor auf  $S^1$  zu, der entsteht aus  $[0, 1] \times G$  durch die Identifikation  $(0, h) \sim (1, gh)$ , so erhalten wir eine Bijektion

$$\pi_0(G) \xrightarrow{\sim} \{G\text{-Torsoren auf } S^1\} / \cong$$

zwischen der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $G$  und der Menge der Isomorphieklassen von  $G$ -Torsoren auf der Kreislinie.

### 1.3 Prägarben und höhere Čech-Kohomologie

1.3.1. Für einen topologischen Raum bilden wir die Kategorie seiner offenen Teilmengen mit allen offenen Teilmengen als Objekten und den Inklusionen als Morphismen. Insbesondere ist in dieser Kategorie also jede Morphismenmenge entweder einelementig oder leer.

**Definition 1.3.2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Eine **Prägarbe** (englisch **presheaf**, französisch **prefaisceau**) auf  $X$  mit Werten in  $\mathcal{C}$  ist ein Funktor

$$\{\text{offene Teilmengen von } X\}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$$

Ein **Morphismus von Prägarben** ist eine natürliche Transformation von Funktoren. Eine Prägarbe mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen heißt eine **abelsche Prägarbe**.

1.3.3. Manche Autoren betrachten nur Prägarben von Gruppen oder sogar nur von abelschen Gruppen und fordern dann von jeder Prägarbe zusätzlich, daß der entsprechende Funktor der leeren Menge eine einelementige Gruppe zuordnen soll. Diese Zusatzannahme scheint mir im Lichte der obigen allgemeinen Definition jedoch unnatürlich.

1.3.4. Ausgeschrieben ist eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  von Gruppen auf einem Raum  $X$  also eine Zuordnung

$$\begin{aligned} U &\mapsto \mathcal{F}(U) \\ \mathcal{F} : \quad U &\mapsto \downarrow \rho_U^V \\ V &\mapsto \mathcal{F}(V) \end{aligned}$$

die jeder offenen Menge  $U \subseteq X$  eine Gruppe  $\mathcal{F}(U)$  zuordnet und jeder Inklusion  $V \subset U$  von offenen Teilmengen von  $X$  einen Homomorphismus von Gruppen  $\rho_U^V : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ , die sogenannte **Einschränkungsabbildung**, und man muß von diesen Daten noch fordern, daß gilt  $\rho_U^U = \text{id}$  und  $\rho_V^W \circ \rho_U^V = \rho_U^W$  falls  $W \subset V \subset U$ . Ein Element  $s \in \mathcal{F}(U)$  heißt ein **Schnitt von  $\mathcal{F}$  über  $U$** . Statt  $\rho_U^V(s)$  schreiben wir meist  $s|_V$  oder auch  $s|_V$ . Ein Morphismus von Prägarben  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ist eine Familie von Gruppenhomomorphismen  $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  derart, daß gilt  $\rho_U^V \circ f_U = f_V \circ \rho_U^V$  für alle  $V \subset U$ , wo wir mit  $\rho_U^V$  links die Restriktionsabbildungen der Prägarbe  $\mathcal{G}$  und rechts die Restriktionsabbildungen der Prägarbe  $\mathcal{F}$  meinen. Als Diagramm geschrieben soll also kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \rightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \rightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

*Beispiel 1.3.5.* Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Zuordnung, die jeder offenen Menge  $U \subseteq X$  den komplexen Vektorraum  $\mathcal{C}(U)$  aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf  $U$  zuordnet und jeder Inklusion  $V \subseteq U$  die Restriktion  $\mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(V)$ , ist eine Prägarbe  $\mathcal{C}$  von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen auf  $X$ , die **Prägarbe der stetigen komplexwertigen Funktionen**.

*Beispiel 1.3.6.* Ist allgemeiner  $X$  ein topologischer Raum und  $G$  eine topologische Gruppe, so bilden die stetigen Abbildungen von offenen Teilmengen von  $X$  nach  $G$  eine Prägarbe  $\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{G,X}$  von Gruppen auf  $X$ , die **Prägarbe der stetigen  $G$ -wertigen Funktionen**. Wählt man auf  $G$  die diskrete Topologie, so notiert man diese Prägarbe oft  $G_X$  und spricht von der **Prägarbe der lokal konstanten  $G$ -wertigen Funktionen**. Für jeden topologischen Raum  $X$  haben wir zum Beispiel Homomorphismen von abelschen Prägarben  $\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{R}_X \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R},X}$ .

*Beispiel 1.3.7.* Ist  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so bilden die komplexwertigen  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen eine Prägarbe  $\mathcal{C}^\infty$  von komplexen Vektorräumen auf  $X$ . Wir haben dann einen natürlichen Homomorphismus  $\mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}$  von Prägarben von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen auf  $X$ .

*Beispiel 1.3.8.* Ist allgemeiner  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $G$  eine Lie-Gruppe, so bilden die differenzierbaren Abbildungen von offenen Teilmengen von  $X$  nach  $G$  eine Prägarbe  $\mathcal{C}_G^\infty = \mathcal{C}_{G,X}^\infty$  von Gruppen auf  $X$ , die **Prägarbe der differenzierbaren  $G$ -wertigen Funktionen**.

*Beispiel 1.3.9.* Gegeben ein topologischer Raum  $X$ , ein Punkt  $x \in X$  und eine Menge  $A$  definieren wir eine Prägarbe von Mengen  $A_{(x)}$  auf  $X$  durch die Vorschrift  $A_{(x)}(U) = A$  falls  $x \in U$  und  $A_{(x)}(U)$  einpunktig sonst. Diese

Prägarbe heißt der **Wolkenkratzer** bei  $x$  mit Faser  $A$ . Es kann aber durchaus Prägarben geben, die in gewisser Weise “noch stärker lokalisiert” sind. Haben wir zum Beispiel einen zweipunktigen Raum vor uns mit einem offenen und einem abgeschlossenen Punkt, so ordnet der Wolkenkratzer beim offenen Punkt jeder nichtleeren offenen Menge dieselbe Menge zu, und wir könnten stattdessen auch die Prägarbe betrachten, die dem ganzen Raum die einpunktige Menge zuordnet und dem offenen Punkt eine beliebige Menge mit ausgezeichnetem Element.

*Übung 1.3.10.* In der Kategorie der abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum gibt es beliebige Summen und Produkte.

1.3.11. Wir ordnen nun jeder abelschen Prägarbe eine Sequenz von Gruppen zu, ihre sogenannten “Čech-Kohomologiegruppen”. Die erste Čech-Kohomologie verallgemeinert die bisher eingeführten Konzepte. Für die nullte Čech-Kohomologie werden wir in 1.3.21 eine Interpretation geben. Die Bedeutung der anderen Čech-Kohomologiegruppen wird sich erst im Zusammenhang mit der Garbenkohomologie erweisen.

**Definition 1.3.12 (Čech-Kohomologie einer abelschen Prägarbe).** Sei  $\mathcal{F}$  eine abelsche Prägarbe auf einem topologischen Raum  $X$ . Gegeben eine offene Überdeckung  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von  $X$  definieren wir den Komplex

$$\dots \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

der **Čech-Koketten für  $\mathcal{U}$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$**  als den Komplex von abelschen Gruppen

$$\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \prod_{(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{U}^{q+1}} \mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_q),$$

wo wir  $\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = 0$  setzen für  $q < 0$  und wo die Randoperatoren  $d$  wie folgt erklärt werden: Ein  $\psi \in \check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  ist ja ein Tupel gewisser  $\psi(U_0, \dots, U_q) \in \mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_q)$ . Wir setzen dann

$$(d\psi)(U_0, \dots, U_{q+1}) = \sum_{0 \leq i \leq q+1} (-1)^i \psi(U_0, \dots, \hat{U}_i, \dots, U_{q+1})|(U_0 \cap \dots \cap U_{q+1})$$

wobei die “Tarnkappe” über  $U_i$  wie üblich bedeuten soll, daß man  $U_i$  aus dem Schnitt wegzulassen hat. Man prüft leicht die Formel  $dd = 0$ , unsere Konstruktion liefert also wirklich einen Komplex. Die Kohomologie dieses Komplexes nennen wir die **Čech-Kohomologie von  $X$  bezüglich  $\mathcal{U}$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$**  und notieren sie

$$\mathcal{H}^q \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

Die  $q$ -te **Čech-Kohomologie**  $\check{H}^q(X; \mathcal{F})$  von  $X$  mit **Koeffizienten in  $\mathcal{F}$**  ist definiert als der direkte Limes über alle gesättigten offenen Überdeckungen  $\mathcal{U}$  von  $X$  der Čech-Kohomologien für diese Überdeckungen, in Formeln

$$\check{H}^q(X; \mathcal{F}) = \varinjlim \check{H}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

1.3.13. Unwesentlich allgemeiner können wir den Čech-Komplex und die Čech-Kohomologie analog auch einführen für “indizierte” offene Überdeckungen  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ .

1.3.14. Ähnlich wie im Fall der ersten Čech-Kohomologie in 1.1.15 ausgeführt ist auch hier in der Literatur ein etwas komplizierteres Vorgehen üblich, das jedoch zu demselben Resultat führt.

1.3.15. Für explizite Rechnungen empfiehlt sich der sehr viel kleinere wenn auch weniger natürliche “angeordnete Čech-Komplex” aus 2.2.1, von dem wir in 2.2.2 zeigen, daß er dieselbe Kohomologie liefert.

*Ergänzung* 1.3.16. Im Fall einer Prägarbe  $\mathcal{F}$  von Mengen kann man immer noch die Menge

$$\check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \left\{ (s_U) \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U) \mid s_U|_{U \cap V} = s_V|_{U \cap V} \quad \forall U, V \in \mathcal{U} \right\}$$

bilden und setzt dann wieder in derselben Weise

$$\check{H}^0(X; \mathcal{F}) = \varinjlim \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

und nennt das etwas widerstrebend die **nullte Čech-Kohomologie mit Koeffizienten in der Prägarbe von Mengen  $\mathcal{F}$** .

*Ergänzung* 1.3.17. Im Fall einer Prägarbe von nicht notwendig kommutativen Gruppen erben die  $\check{H}^0$  aus der vorhergehenden Bemerkung noch die Struktur einer Gruppe und wir können zusätzlich auch analog zu den Definitionen des ersten Abschnitts und in multiplikativer Notation geschrieben die Menge der **Čech-1-Kozykel** erklären als

$$\check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \left\{ (s_{UV}) \in \prod_{(U,V) \in \mathcal{U}^2} \mathcal{F}(U \cap V) \mid \begin{array}{l} \text{Für alle } U, V, W \in \mathcal{U} \text{ gilt mit} \\ \text{der Notation } U \cap V \cap W = \cap \\ \text{die Identität} \\ s_{UV}|_{\cap} s_{VW}|_{\cap} = s_{UW}|_{\cap} \end{array} \right\}$$

Zwei solche 1-Kozykel  $(s_{UV})$  und  $(t_{UV})$  heißen **kohomolog** genau dann, wenn es eine Familie  $(i_U) \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U)$  gibt mit

$$s_{UV} = (i_U|_{U \cap V}) t_{UV} (i_V|_{U \cap V})^{-1} \quad \forall U, V \in \mathcal{U}$$

Die Relation, kohomolog zu sein, ist dann eine Äquivalenzrelation auf der Menge  $\check{Z}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  der Čech-1-Kozykel. Die Menge der Äquivalenzklassen notieren wir

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; G) = \check{Z}^1(\mathcal{U}; G) / \sim$$

Sie heißt die **erste Čech-Kohomologie für die Überdeckung  $\mathcal{U}$  mit Koeffizienten in der Prägarbe von Gruppen  $\mathcal{F}$** . Unser  $\check{H}^1(\mathcal{U}; G)$  ist im allgemeinen keine Gruppe, sondern nur eine Menge mit einem ausgezeichneten Punkt, nämlich der Klasse des trivialen 1-Kozykels. Der direkte Limes über alle gesättigten offenen Überdeckungen liefert dann zumindest noch eine punktierte Menge

$$\check{H}^1(X; \mathcal{F}) = \varinjlim \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

die **erste Čech-Kohomologie von  $X$  mit Werten in der Prägarbe von Gruppen  $\mathcal{F}$** . Im Fall einer abelschen Prägarbe fallen diese Definitionen von  $\check{H}^0$  und  $\check{H}^1$  mit den in 1.3.12 gegebenen Definitionen zusammen.

*Ergänzung 1.3.18.* Ist  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so erhalten wir genau wie in 1.2.14 Bijektionen

$$\{\text{differenzierbare reelle Geradenbündel auf } X\} / \cong \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; \mathcal{C}_{\mathbb{R}^\times}^\infty)$$

$$\{\text{differenzierbare komplexe Geradenbündel auf } X\} / \cong \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; \mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}^\infty)$$

Ist  $X$  eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{O}_X$  die Prägarbe der komplexwertigen analytischen Funktionen auf  $X$  und  $\mathcal{O}_X^\times$  die Prägarbe der der komplexwertigen analytischen Funktionen ohne Nullstellen mit der Multiplikation als Verknüpfung, so erhalten wir in derselben Weise eine Bijektion

$$\{\text{analytische komplexe Geradenbündel auf } X\} / \cong \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; \mathcal{O}_X^\times)$$

Allgemeiner erhalten wir Bijektionen

$$\{\text{differenzierbare } n\text{-dimensionale } \mathbb{K}\text{-Bündel auf } X\} / \cong \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X; \mathcal{C}_{\text{GL}(n; \mathbb{K})}^\infty)$$

Das triviale Bündel entspricht hier stets der Null bzw. im letzten Fall dem ausgezeichneten Punkt der punktierten Menge  $\check{H}^1$ .

*Übung 1.3.19.* Das Bilden der Čech-Kohomologie bezüglich einer Überdeckung  $\mathcal{U}$  kommutiert mit beliebigen Produkten von abelschen Prägarben. Für die Čech-Kohomologie selbst ist das im allgemeinen vermutlich falsch.

**Lemma 1.3.20 (Die Čech-Kohomologie von Wolkenkratzern).** *Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$  und  $A_{(x)}$  der Wolkenkratzer an einem Punkt  $x \in X$  mit einer abelschen Gruppe  $A$  als Faser, so gilt*

$$\check{H}^q(\mathcal{U}; A_{(x)}) = 0 \text{ für } q > 0.$$

*Beweis.* Der fragliche Čech-Komplex kann identifiziert werden mit unserem Komplex II.1.1.9 zur Menge  $E = \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\}$  abgeschnitten bei Null und tensoriert mit  $A$ . Daraus folgt das Lemma unmittelbar. Wir können aber auch den Beweis von II.2.4.8 wiederholen: Wir wählen dann  $U \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U$  und definieren für  $q \geq 0$  die Abbildung  $\delta = \delta_U : \check{C}^{q+1}(\mathcal{U}; A_{(x)}) \rightarrow \check{C}^q(\mathcal{U}; A_{(x)})$  durch die Vorschrift

$$(\delta\psi)(U_0, \dots, U_q) = \psi(U, U_0, \dots, U_q)$$

Eine kurze Rechnung zeigt  $d\delta + \delta d = \text{id}$  auf  $\check{C}^q(\mathcal{U}; A_{(x)})$  für  $q > 0$ , folglich ist für  $q > 0$  jeder  $q$ -Zykel ein Rand.  $\square$

1.3.21. Im Fall einer diskreten abelschen Gruppe  $G$  fallen die in 1.1 definierten Gruppen  $\check{H}^1(\mathcal{U}; G)$  bzw.  $\check{H}^1(X; G)$  mit den hier definierten Gruppen  $\check{H}^1(\mathcal{U}; G_X)$  bzw.  $\check{H}^1(X; G_X)$  zusammen. Im Fall einer allgemeinen topologischen abelschen Gruppe  $G$  fallen die in 1.1 definierten Gruppen  $\check{H}^1(\mathcal{U}; G)$  bzw.  $\check{H}^1(X; G)$  zusammen mit den hier definierten Gruppen  $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}_G)$  bzw.  $\check{H}^1(X; \mathcal{C}_G)$ .

1.3.22. Sei  $G$  eine abelsche topologische Gruppe. Nach ?? definiert die Restriktion für jede offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  Isomorphismen  $\text{Top}(X, G) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(\mathcal{U}; G_X)$ , folglich haben wir auch im direkten Limes einen Isomorphismus  $\text{Top}(X, G) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(X; G_X)$ . Insbesondere erhalten wir für jeden zusammenhängenden Raum  $X$  und diskretes  $G$  die Formel  $\check{H}^0(X; G_X) = G$ . Das steht im Gegensatz zur singulären Kohomologie, bei der ja  $H^0(X; G) = G$  abgesehen vom Extremfall  $G = 0$  nur dann gilt, wenn  $X$  wegzusammenhängend ist. Für lokal wegzusammenhängende Räume  $X$  haben wir jedoch wieder einen kanonischen Isomorphismus

$$\check{H}^0(X; G_X) \cong H^0(X; G)$$

zwischen der nullten Čech-Kohomologie mit Koeffizienten in der Prägarbe  $G_X$  und der nullten singulären Kohomologie mit Koeffizienten in  $G$ .

## 1.4 Garben und ihre étalen Räume

1.4.1. Alle Prägarben, die bisher von Belang waren, besitzen noch eine zusätzliche Eigenschaft, die es erlaubt, eine geometrische Anschauung zu entwickeln. Diese zusätzlich Eigenschaft, die die "Garben" unter den Prägarben auszeichnet, ist im Folgenden von entscheidender Bedeutung.



**Definition 1.4.2.** Eine **Garbe**  $\mathcal{F}$  (englisch **sheaf**, französisch **faisceau**) von Mengen (bzw. Gruppen, bzw. Ringen) auf einem topologischen Raum  $X$  ist eine Prägarbe von Mengen (bzw. Gruppen, bzw. Ringen) derart, daß die folgende **Verklebungsbedingung** erfüllt ist: Gegeben ein System  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von offenen Teilmengen von  $X$  und gegeben für alle  $U \in \mathcal{U}$  Schnitte  $s_U \in \mathcal{F}(U)$  mit

$$s_U|_{U \cap W} = s_W|_{U \cap W} \quad \forall U, W \in \mathcal{U}$$

gibt es auf der Vereinigung  $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  genau einen Schnitt  $s \in \mathcal{F}(V)$  mit

$$s|_U = s_U \quad \forall U \in \mathcal{U}$$

Ein **Homomorphismus von Garben** ist ein Homomorphismus der zugrundeliegenden Prägarben.

1.4.3. Unsere Verklebungsbedingung mit  $\mathcal{U} = \emptyset$  impliziert, daß für eine Garbe  $\mathcal{F}$  von Mengen  $\mathcal{F}(\emptyset)$  stets aus genau einem Element besteht.

*Ergänzung 1.4.4.* Wir können allgemeiner Garben erklären mit Werten in einer beliebigen Kategorie  $\mathcal{C}$ . Sie werden dann definiert  $\mathcal{C}$ -wertige Prägarben  $\mathcal{F}$ , die zusätzlich die “Verklebungsbedingung” erfüllen, daß es für jedes System  $\mathcal{U}$  von offenen Teilmengen von  $X$  mit Vereinigung  $V$  und jede Familie von Morphismen  $(c_U : C \rightarrow \mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{U}}$  mit der Eigenschaft, daß  $c_U$  und  $c_{U'}$  jeweils denselben Morphismus  $C \rightarrow \mathcal{F}(U \cap U')$  liefern, genau einen Morphismus  $c : C \rightarrow \mathcal{F}(V)$  gibt, der seinerseits alle  $c_U$  liefert. Die Kategorie der Garben auf  $X$  mit Werten in  $\mathcal{C}$  notieren wir  $\mathcal{C}/X$  oder  $\mathcal{C}_{/X}$ . Für eine Garbe  $\mathcal{F}$  mit Werten in  $\mathcal{C}$  ist  $\mathcal{F}(\emptyset)$  stets ein finales Objekt von  $\mathcal{C}$ .

1.4.5. Die Kategorie der Garben von Mengen auf einem topologischen Raum  $X$  notieren wir insbesondere  $\text{Ens}/X$  oder  $\text{Ens}_{/X}$ . Eine Garbe mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen heißt eine **abelsche Garbe**. Die Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$  notieren wir entsprechend  $\text{Ab}/X$  oder  $\text{Ab}_{/X}$ .

1.4.6. Gegeben eine Garbe von Mengen  $\mathcal{F}$  auf einem Raum  $X$  und eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  liefern die für jede Prägarbe von Mengen definierten Abbildungen Isomorphismen  $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(X; \mathcal{F})$ . In der Tat folgt das unmittelbar aus den Definitionen.

*Beispiel 1.4.7.* Ist  $p : E \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so erhalten wir eine Garbe von Mengen  $\mathcal{S} = \mathcal{S}E = \mathcal{S}_X E$  auf  $X$  durch die Vorschrift

$$\mathcal{S}(U) = \text{Top}_X(U, E) = \{s : U \rightarrow E \mid s \text{ ist stetig und } p(s(x)) = x \forall x \in U\}$$

mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Wir nennen sie die **Garbe der Schnitte von  $p$**  und erhalten so einen Funktor von der Kategorie der

Räume über unserem Raum in die Kategorie der Garben von Mengen auf unserem Raum

$$\mathcal{S} : \text{Top}_X \rightarrow \text{Ens}/X$$

*Beispiel 1.4.8.* Die Prägarben  $G_X$  für eine diskrete Gruppe  $G$  oder allgemeiner  $\mathcal{C}_{G,X}$  für eine topologische Gruppe  $G$  aus 1.3.6 sind Garben von Gruppen. Die Garbe  $G_X$  heißt die **konstante Garbe mit Faser  $G$** . Eine abelsche Garbe heißt **konstant** genau dann, wenn sie zu einer derartigen konstanten Garbe isomorph ist.

*Beispiel 1.4.9.* Unsere Prägarben von differenzierbaren oder besser glatten Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit sind Garben von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen. Unsere Wolkenkratzer sind Garben von Gruppen.

*Beispiel 1.4.10.* Sei  $A$  eine nichttriviale Gruppe. Die Prägarbe, die jeder offenen Teilmenge von  $X$  einfach die feste Gruppe  $A$  zuordnet, mit der Identität als Restriktion, ist keine Garbe: Der leeren Menge wird nämlich nicht die triviale Gruppe zugeordnet. Wenn wir unser Beispiel dahingehend abändern, daß wir der leeren Menge ausnahmsweise die triviale Gruppe zuordnen, ist unsere Prägarbe immer noch keine Garbe, wenn es in unserem Raum nicht-leere unzusammenhängende offene Teilmengen gibt: Denn dann zerlegen wir diese in zwei echte disjunkte offene Teilmengen, wählen dort als Schnitte verschiedene Elemente von  $A$  und können diese Vorgabe nicht “zu einem Schnitt auf der ganzen offenen Menge zusammenkleben”.

*Übung 1.4.11.* In der Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum gibt es beliebige Produkte, und sie stimmen überein mit den Produkten in der Kategorie der Prägarben. Für direkte Summen liegen die Verhältnisse im allgemeinen etwas komplizierter, siehe 1.8.6.

**Definition 1.4.12.** Wir erinnern aus 1.4.1.5, daß eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow X$  **étale** heißt genau dann, wenn jeder Punkt  $e \in E$  eine offene Umgebung  $U \subseteq E$  besitzt, die von  $p$  homöomorph auf eine offene Teilmenge  $p(U) \subseteq X$  abgebildet wird. Sei nun  $X$  ein topologischer Raum. Ein **étaler Raum**  $E = (E, p)$  **über**  $X$  ist ein topologischer Raum  $E$  mitsamt einer étalen Abbildung  $p : E \rightarrow X$ . Ein **Morphismus von étalen Räumen** über  $X$  ist eine stetige Abbildung, die verträglich ist mit den Projektionen auf  $X$ .

*Übung 1.4.13.* Jede étale Abbildung ist offen. Insbesondere ist nach 1.4.1.7 jeder Morphismus von étalen Räumen offen, speziell also jeder Schnitt einer étalen Abbildung auf einer offenen Menge.

*Ergänzende Übung 1.4.14.* Sei  $f : Y \rightarrow X$  stetig und  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  eine offene Überdeckung. Man zeige: Genau dann ist  $f$  étale, wenn  $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$  étale ist für alle  $U \in \mathcal{U}$ .

**Satz 1.4.15 (Garben und ihre étalen Räume).** *Der Funktor  $\mathcal{S}$ , der jedem Raum über  $X$  die Garbe seiner Schnitte zuordnet, definiert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{c} \text{étale Räume} \\ \text{über } X \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Garben von Mengen} \\ \text{auf } X \end{array} \right\}$$

*Beispiele 1.4.16.* Der étale Raum der Garbe  $G_X$  ist  $G \times X$ . Der étale Raum des Wolkenkratzers  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{(0)}$  mit Faser  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  am Nullpunkt auf der reellen Gerade  $X = \mathbb{R}$  ist die reelle Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt aus ??.

1.4.17. Die linke Seite der Äquivalenz 1.4.15 ist, zumindest nach meinem Geschmack, der Anschauung besser zugänglich und liefert eine sehr transparente Konstruktion für das “Zurückholen” von Garben, wie wir es in 2.4.3 kennenlernen werden, und auch für die Konstruktion von Kokernen. Die rechte Seite ist dahingegen technisch besonders gut zugänglich und leicht zu verallgemeinern. Sobald wir die Äquivalenz gezeigt haben, befinden wir uns folglich in “der besten aller Welten”.

*Beweis.* Der Beweis des vorhergehenden Satzes strukturiert den Rest dieses Abschnitts. Genauer konstruieren wir in 1.4.22 einen Funktor  $\text{ét}$  von Prägarben auf  $X$  zu topologischen Räumen über  $X$ , erhalten aus 1.4.25 eine Adjunktion  $(\text{ét}, \mathcal{S})$ , und weisen in 1.4.23 nach, daß  $\text{ét}$  bereits in den étalen Räumen über  $X$  landet. Schließlich zeigen wir in 1.4.26 und 1.4.28, daß unser adjungiertes Paar, wenn wir es einschränken von beliebigen Räumen über  $X$  auf étale Räume und von beliebigen Prägarben auf Garben, das Kriterium 1.4.9.13 für ein Paar adjungierter Äquivalenzen von Kategorien erfüllt.  $\square$

**Definition 1.4.18.** Gegeben eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  von Mengen auf einem topologischen Raum  $X$  definieren wir ihren **Halm**  $\mathcal{F}_x$  an einer Stelle  $x \in X$  als den direkten Limes

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

wo unser Limes wie angedeutet über alle offenen Umgebungen  $U \subseteq X$  von  $x$  laufen soll. Gegeben  $x \in U \subseteq X$  und  $s \in \mathcal{F}(U)$  einen Schnitt bezeichnen wir mit  $s_x \in \mathcal{F}_x$  sein Bild im Halm.

*Beispiel 1.4.19.* Unsere Keime regulärer Funktionen aus ?? sind genau die Halme der Garbe der regulären Funktionen aus ??.

*Ergänzende Übung 1.4.20.* Man zeige, daß die Halme der Wolkenkratzergarbe  $A_{(x)}$  gerade die Menge  $A$  selbst sind an allen Stellen, die im Abschluß des Punktes  $x$  liegen, und daß sie sonst einelementig sind.

*Ergänzung 1.4.21.* Gegeben Punkte  $x, y$  eines topologischen Raums, von denen einer im Abschluß des anderen liegt, in Formeln  $x \ni \bar{y}$ , erhalten wir für jede Prägarbe von Mengen  $\mathcal{F}$  eine Abbildung  $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_y$  aus der Beobachtung heraus, daß jede offene Menge um  $x$  auch  $y$  enthalten muß.

**Definition 1.4.22.** Gegeben ein Prägarbe  $\mathcal{F}$  von Mengen auf einem topologischen Raum  $X$  definieren wir ihren **étalen Raum**, notiert  $\text{ét}(\mathcal{F})$  oder kürzer  $\bar{\mathcal{F}}$ , als die disjunkte Vereinigung der Halme

$$\bar{\mathcal{F}} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

mitsamt der natürlichen Projektion  $p : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow X$ . Gegeben  $U \subseteq X$  und  $s \in \mathcal{F}(U)$  definieren wir einen Schnitt  $\tilde{s} : U \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$  durch  $\tilde{s}(x) = s_x$ . Wir versehen  $\bar{\mathcal{F}}$  mit der Finaltopologie in Bezug auf die Familie aller dieser Abbildungen  $\tilde{s}$ . Bezeichnet  $\text{pEns}/_X$  die Kategorie der Prägarben von Mengen auf  $X$ , so erhalten wir auf diese Weise einen Funktor

$$\text{ét} : \text{pEns}/_X \rightarrow \text{Top}_X$$

**Lemma 1.4.23.** *Sei  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe von Mengen auf einem Raum  $X$ .*

1. *Die  $\tilde{s}(U)$  mit  $U \subseteq X$  und  $s \in \mathcal{F}(U)$  bilden eine Basis für die Topologie des étalen Raums von  $\mathcal{F}$ . Insbesondere sind alle derartigen  $\tilde{s}$  offene Immersionen.*
2. *Die Projektion  $p : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow X$  ist étale.*
3. *Ein Schnitt über  $V \subseteq X$  in  $\bar{\mathcal{F}}$  ist stetig genau dann, wenn jedes  $x \in V$  eine offene Umgebung  $U \subseteq V$  besitzt derart, daß unser Schnitt auf dieser Umgebung  $U$  übereinstimmt mit einem  $\tilde{s}$  für geeignetes  $s \in \mathcal{F}(U)$ .*

*Beweis.* 1. Wir zeigen zunächst, daß alle  $\tilde{s}(U)$  offen sind in  $\bar{\mathcal{F}}$ . Dazu gilt es nachzuweisen, daß  $W = \tilde{t}^{-1}(\tilde{s}(U))$  offen ist in  $V$ , für alle  $V \subseteq X$  und  $t \in \mathcal{F}(V)$ . Aber wir haben ja

$$\tilde{t}^{-1}(\tilde{s}(U)) = \{x \in U \cap V \mid s_x = t_x\},$$

und da mit der Beschreibung [II.5.1.22](#) eines filtrierenden direkten Limes aus  $s_x = t_x$  folgt  $s|_O = t|_O$  für eine hinreichend kleine offene Umgebung  $O$  von  $x$ , ist  $\tilde{t}^{-1}(\tilde{s}(U))$  in der Tat stets offen in  $V$  und damit  $\tilde{s}(U)$  offen in  $\bar{\mathcal{F}}$ . Damit gilt insbesondere  $\tilde{t}(W) = \tilde{s}(U) \cap \tilde{t}(V)$  für  $W = \tilde{t}^{-1}(\tilde{s}(U)) \subseteq X$ , folglich bilden unsere  $\tilde{s}(U)$  ein System von offenen Mengen, das stabil ist unter endlichen Schnitten. Für die von diesem Mengensystem erzeugte Topologie sind aber

bereits alle  $\tilde{s}$  stetig, folglich muß es sich dabei um die Finaltopologie handeln.

2. Der zweite Teil des Lemmas folgt sofort aus dem ersten.

3. Für den dritten Teil bemerken wir, daß offensichtlich jeder Schnitt mit besagter Eigenschaft stetig ist. Ist umgekehrt  $t : V \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$  ein Schnitt und ist  $x \in V$  gegeben, so hat  $t(x) \in \mathcal{F}_x$  die Gestalt  $t(x) = s_x$  für geeignetes  $s \in \mathcal{F}(W)$  und  $W \subseteq V$  eine Umgebung von  $x$ . Ist  $t$  stetig, so folgt  $U = t^{-1}(\tilde{s}(W)) \subseteq V$ , und das ist die gesuchte offene Umgebung von  $x$  mit  $t|_U = \tilde{s}$  für  $s = s|_U$ .  $\square$

1.4.24. Gegeben  $E \in \text{Top}_X$  liefert das Auswerten von Schnitten eine stetige Abbildung  $\text{ét}(\mathcal{S}E) \rightarrow E$  über  $X$ , wie man unschwer aus dem ersten Teil von Lemma 1.4.23 folgert. Gegeben  $\mathcal{F} \in \text{pEns}/_X$  liefert umgekehrt  $s \mapsto \tilde{s}$  einen Homomorphismus von Prägarben  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}(\text{ét } \mathcal{F})$ .

**Proposition 1.4.25.** *Gegeben ein topologischer Raum  $X$  liefern die in 1.4.24 erklärten Morphismen eine Adjunktion  $(\text{ét}, \mathcal{S})$  zwischen den beiden Funktoren  $\text{ét} : \text{pEns}/_X \rightarrow \text{Top}_X$  und  $\mathcal{S} : \text{Top}_X \rightarrow \text{pEns}/_X$ .*

*Beweis.* Es gilt nach 1.4.9.12, für jede Prägarbe  $\mathcal{F}$  von Mengen auf  $X$  und jeden topologischen Raum  $E$  über  $X$  zu zeigen, daß im Viereck

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_X(\text{ét } \mathcal{F}, E) & \rightarrow & \text{pEns}/_X(\mathcal{S}(\text{ét } \mathcal{F}), \mathcal{S}E) \\ \uparrow & & \downarrow \\ \text{Top}_X(\text{ét } \mathcal{F}, \text{ét}(\mathcal{S}E)) & \leftarrow & \text{pEns}/_X(\mathcal{F}, \mathcal{S}E) \end{array}$$

einmal im Kreis herumgehen die Identität induziert auf der oberen linken und der unteren rechten Ecke. Die restlichen Details des Beweises überlassen wir dem Leser.  $\square$

**Lemma 1.4.26.** *Ist  $p : E \rightarrow X$  étale, so ist die Adjunktionsabbildung ein Isomorphismus  $\text{ét}(\mathcal{S}E) \xrightarrow{\sim} E$ .*

*Beweis.* Nach 1.4.23 ist die linke Seite auch étale über  $X$ . Nach 1.4.13 reicht es also zu zeigen, daß unsere Adjunktionsabbildung bijektiv ist, d.h. daß sie Bijektionen auf allen Halmen induziert. Da  $p$  étale ist, gibt es für jedes  $e \in E$  eine offene Umgebung  $U$  von  $x = p(e)$  und einen Schnitt  $s : U \rightarrow E$  mit  $s(x) = e$ . Also ist unsere Abbildung auf den Halmen surjektiv. Ist  $V \subseteq X$  eine weitere offene Umgebung von  $p(e)$  und  $t \in \mathcal{F}(V)$  ein weiterer Schnitt mit  $t(x) = e$ , so stimmen  $s$  und  $t$  notwendig überein auf der nach 1.4.13 offenen Umgebung  $W = p(s(U) \cap t(V))$  von  $x$  in  $X$ . Also ist unsere Abbildung auf den Halmen auch injektiv.  $\square$

**Lemma 1.4.27.** *1. Stimmen zwei Schnitte einer Garbe auf allen Halmen überein, so sind sie gleich.*

2. *Induziert ein Morphismus von Garben Bijektionen auf allen Halmen, so ist er ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Die Herleitung der ersten Aussage bleibt dem Leser überlassen. Für den Nachweis der zweiten Aussage sei  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  unser Morphismus. Aus 1 folgt, daß für alle  $U \subseteq X$  die induzierte Abbildung  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  injektiv ist. Wir müssen zeigen, daß diese Abbildungen auch surjektiv sind. Gegeben  $s \in \mathcal{G}(U)$  gibt es jedoch für alle  $x \in U$  ein  $t_x \in \mathcal{F}_x$  mit  $t_x \mapsto s_x$ . Dies  $t_x$  ist der Halm eines Schnitts  $t_{(x)} \in \mathcal{F}(U(x))$  für eine geeignete offene Umgebung  $U(x) \subseteq U$  von  $x$ , und wenn wir  $U(x)$  hinreichend klein wählen, dürfen wir annehmen  $t_{(x)}|_{U(x)} \mapsto s|_{U(x)}$ . Dann aber erfüllen die  $t_{(x)}$  aber die Verklebungsbedingung und verkleben zu einem Schnitt  $t \in \mathcal{F}(U)$  mit  $t \mapsto s$ .  $\square$

**Lemma 1.4.28.** *Für jede Garbe  $\mathcal{F}$  liefert die Adjunktion einen Isomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\text{ét } \mathcal{F})$ .*

*Beweis.* Nach 1.4.27 müssen wir nur zeigen, daß unser Morphismus auf allen Halmen Bijektionen induziert oder gleichbedeutend, daß er unter  $\text{ét}$  eine Bijektion liefert. Nach unseren allgemeinen Erkenntnissen über adjungierte Funktoren 1.4.9.12 faktorisiert jedoch die Identität auf  $\text{ét } \mathcal{F}$  in kanonischer Weise als  $\text{ét } \mathcal{F} \rightarrow \text{ét}(\mathcal{S}(\text{ét } \mathcal{F})) \rightarrow \text{ét } \mathcal{F}$ , und nach 1.4.26 angewandt auf  $E = \text{ét } \mathcal{F}$  ist hier die zweite Abbildung ein Isomorphismus. Dasselbe gilt dann auch für die erste Abbildung und das Lemma folgt.  $\square$

*Übung 1.4.29.* Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$  ein Punkt. Der Halmfunktork  $\text{Ab}/X \rightarrow \text{Ab}$ ,  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$  hat als Rechtsadjungierten den Wolkenkratzerfunktork  $A \mapsto A_{(x)}$ . Sehr viel allgemeinere Resultate in dieser Richtung werden wir in 2.8.5 kennenlernen.

*Ergänzende Übung 1.4.30.* Sei  $(A, \leq)$  eine partiell geordnete Menge. Wir versehen sie mit ihrer Ordnungstopologie nach ??, in der also genau die Teilmengen offen sind, die mit einem Element auch jedes kleinere enthalten. Wir versehen sie auch mit der durch die Ordnung gegebenen Kategorienstruktur im Sinne von 1.2.1.9, Morphismen gehen hier von größeren zu kleineren Objekten. Man zeige, daß wir eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Ens}/A \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(A, \text{Ens})$$

erhalten zwischen der Kategorie der Garben auf der Menge  $A$  mit ihrer Ordnungstopologie und der Kategorie der Funktoren von  $A$  in die Kategorie der Mengen, indem wir zu jeder Garbe  $\mathcal{F}$  den Funktor bilden, der jedem Punkt  $x \in A$  seinen Halm  $\mathcal{F}_x$  und jedem Morphismus  $x \geq y$  die von  $x \ni \bar{y}$  nach 1.4.21 induzierte Abbildung  $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_y$  zwischen den Halmen zuordnet.

1.4.31. Ist  $\mathcal{F}$  eine Garbe von Funktionen auf  $X$ , zum Beispiel die Garbe der differenzierbaren Funktionen auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  oder allgemeiner einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so nennt man die Elemente der Halme  $\mathcal{F}_x$  meist **Funktionskeime**, in unserem Beispielfall also “Keime differenzierbarer Funktionen an der Stelle  $x$ ”.

1.4.32. Der étale Raum der Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  ist nicht Hausdorff: Die Nullfunktion und die Funktion  $x \mapsto \max\{x, 0\}$  haben verschiedene Keime an der Stelle Null, aber dieselben Keime an allen echt negativen Stellen. Die beiden Keime an der Stelle Null lassen sich also nicht durch offene Umgebungen im étalen Raum trennen.

1.4.33. Der étale Raum  $\text{ét } \mathcal{O}$  der Garbe  $\mathcal{O}$  der holomorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  ist Hausdorff aufgrund der Eindeutigkeit der lokalen analytischen Fortsetzung. Die Zusammenhangskomponente eines holomorphen Funktionskeims  $f \in \text{ét } \mathcal{O}$  erhält als finale Struktur im Sinne von ?? zur Familie der lokalen Schnitte in natürlicher Weise die Struktur einer Riemann’schen Fläche, der **Riemann’schen Fläche des Funktionskeims  $f$** . Zum Beispiel erhalten wir als Riemannsche Fläche der in einer Umgebung der Eins durch die Eigenschaft  $\sqrt[n]{1} = 1$  ausgezeichneten  $n$ -ten Wurzel eine zusammenhängende  $n$ -blättrige Überlagerung von  $\mathbb{C}^\times$ .

**Definition 1.4.34.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe von Mengen auf einem Raum  $X$  und  $p : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow X$  ihr étaler Raum. Gegeben eine beliebige Teilmenge  $A \subset X$  definieren wir die Garbe

$$\mathcal{F}|_A$$

auf dem Raum  $A$  als die Garbe zum nach ?? étalen Raum  $p^{-1}(A) \rightarrow A$  und nennen sie die **Einschränkung von  $\mathcal{F}$  auf  $A$** . Weiter setzen wir

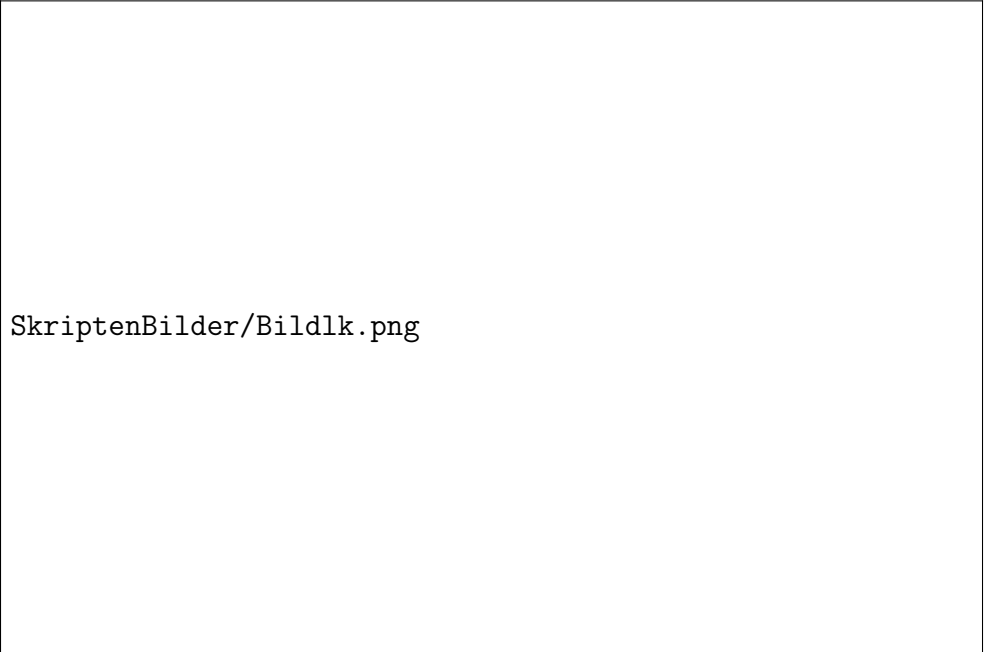
$$\mathcal{F}(A) = \Gamma(A; \mathcal{F}) = \{s : A \rightarrow \bar{\mathcal{F}} \mid s \text{ stetig und } p(s(x)) = x \forall x \in A\}$$

und nennen die Elemente dieser Menge die **Schnitte von  $\mathcal{F}$  über  $A$** . Per definitionem haben wir zum Beispiel  $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(\{x\})$  für alle  $x \in X$ .

1.4.35. Im Gegensatz zu Prägarben können wir also bei Garben Schnitte über beliebigen, nicht notwendig offenen Mengen betrachten. Die Schnitte einer Garbe  $\mathcal{F}$  über dem ganzen Raum nennen wir auch die **globalen Schnitte** unserer Garbe und notieren sie

$$\mathcal{F}(X) = \Gamma(X; \mathcal{F}) = \Gamma \mathcal{F}$$

**Definition 1.4.36.** Gegeben eine Menge  $M$  und ein topologischer Raum  $X$  definieren wir die konstante Garbe  $M_X$  als die Garbe der Schnitte von  $M \times X$ ,



SkriptenBilder/Bildlk.png

Eine abelsche Garbe, deren Halme alle freie abelsche Gruppen vom Rang Eins sind, braucht noch lange nicht lokal konstant zu sein.



wo  $M$  mit der diskreten Topologie gemeint ist. Eine Garbe von Mengen heißt **konstant** genau dann, wenn sie zu einer Garbe der Gestalt  $M_X$  isomorph ist. Sie heißt **lokal konstant** genau dann, wenn unser Raum eine offene Überdeckung besitzt derart, daß die Einschränkung unserer Garbe auf jede der überdeckenden Mengen konstant ist.

1.4.37. Eine Garbe von Mengen auf einem topologischen Raum ist offensichtlich genau dann lokal konstant, wenn ihr étaler Raum eine Überlagerung ist.

**Lemma 1.4.38.** *Gegeben ein topologischer Raum  $X$  besitzt der offensichtliche Einbettungsfunktor  $\text{Ens}/_X \rightarrow \text{pEns}/_X$  von den Garben auf  $X$  in die Prägarben auf  $X$  einen Linksadjungierten, die **Garbifizierung**  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$ .*

1.4.39. Der Formalismus der adjungierten Funktoren 1.4.9.11 liefert uns dann für jede Prägarbe  $\mathcal{G}$  einen kanonischen Morphismus  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^+$  derart, daß jeder Morphismus  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  in eine Garbe  $\mathcal{F}$  in eindeutiger Weise über  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^+$  faktorisiert. Des weiteren folgt aus der Volltreueheit des Einbettungsfunktors mit 1.4.9.13, daß für jede Garbe  $\mathcal{F}$  der kanonische Morphismus einen Isomorphismus  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^+$  liefert. Explizit ist das genau der Isomorphismus 1.4.28.

*Beweis.* Wir notieren  $\text{étTop}_X \subset \text{Top}_X$  die volle Unterkategorie aller étalen Räume über  $X$  und betrachten das Diagramm der bereits in 1.4.25 konstruierten Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \text{pEns}/_X & \rightarrow & \text{étTop}_X \\ \uparrow & & \downarrow \\ \text{Ens}/_X & \leftarrow & \text{Top}_X \end{array}$$

mit den offensichtlichen Einbettungsfunktoren in den Vertikalen, dem Bilden des étalen Raums  $\text{ét}$  in der oberen Horizontalen und dem Bilden der Garbe der stetigen Schnitte  $\mathcal{S}$  in der unteren Horizontalen. Wir haben in 1.4.25 eine Adjunktion  $(\text{ét}, \mathcal{S})$  konstruiert zwischen dem Kompositionsfunktor von links oben nach rechts unten und dem Kompositionsfunktor zurück. In 1.4.28 und 1.4.26 haben wir gezeigt, daß das induzierte Paar von adjungierten Funktoren eine Äquivalenz von Kategorien zwischen links unten und rechts oben liefert. Damit ist klar, daß und wie die Zuordnung  $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{S}(\text{ét } \mathcal{C}) := \mathcal{C}^+$  linksadjungiert ist zur Einbettung  $\text{Ens}/_X \rightarrow \text{pEns}/_X$ .  $\square$

*Übung 1.4.40.* Ist  $\mathcal{F}$  eine abelsche Prägarbe, so ist die Garbifizierung  $\mathcal{F}^+$  in natürlicher Weise eine abelsche Garbe und wir erhalten so einen Linksadjungierten der Einbettung  $\text{Ab}/_X \rightarrow \text{pAb}/_X$ .

*Übung 1.4.41.* Für jede Garbe von Mengen  $\mathcal{F}$  induziert der kanonische Morphismus in die Garbifizierung  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  Bijektionen auf allen Halmen.

## 1.5 Kerne und Kokerne in Kategorien

1.5.1. Im Folgenden wird es sich als nützlich erweisen, auch in der Kategorie der abelschen Garben auf einem topologischen Raum homologische Algebra zu treiben. In diesem Abschnitt beginnen wir damit, für dieses Vorhaben einen begrifflichen Rahmen zu zimmern.

**Definition 1.5.2.** Ein Objekt einer Kategorie heißt ein **Nullobjekt** genau dann, wenn es final und kofinal ist. Existiert ein Nullobjekt, so ist es eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir sprechen deshalb meist von **dem** Nullobjekt und notieren es  $0$ . Gegeben zwei Objekte  $A, B$  in einer Kategorie mit Nullobjekt nennen wir den Morphismus  $A \rightarrow B$ , der über das Nullobjekt faktorisiert, den **Nullmorphismus** und notieren ihn  $0 : A \rightarrow B$ .

*Übung 1.5.3.* Gegeben eine Kategorie mit Nullobjekt ist die Verknüpfung von rechts oder links eines Nullmorphismus mit einem anderen Morphismus stets wieder ein Nullmorphismus.

**Definition 1.5.4.** Sei  $f : B \rightarrow C$  ein Morphismus in einer Kategorie mit Nullobjekt.

1. Ein **Kern** von  $f$  ist ein Morphismus  $i : (\ker f) \rightarrow B$  mit  $fi = 0$  derart, daß jeder Morphismus  $g : A \rightarrow B$  mit  $fg = 0$  eindeutig faktorisiert über  $i$ , als da heißt, es gibt genau einen Morphismus  $\tilde{g} : A \rightarrow (\ker f)$  mit  $g = i\tilde{g}$ .
2. Ein **Kokern** von  $f$  ist dual ein Morphismus  $p : C \rightarrow (\text{cok } f)$  mit  $pf = 0$  derart, daß jeder Morphismus  $g : C \rightarrow D$  mit  $gf = 0$  eindeutig faktorisiert über  $p : C \rightarrow (\text{cok } f)$ .
3. Einen Kokern eines Kerns von  $f$  nennen wir auch ein **Bild** von  $f$  und notieren es  $B \rightarrow (\text{im } f)$ .
4. Einen Kern eines Kokerns von  $f$  nennen wir dual ein **Kobild** von  $f$  und notieren es  $(\text{coim } f) \rightarrow C$ .

1.5.5. Per definitionem sind Kerne und Kokerne und ebenso Bilder und Kobilder eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, falls sie existieren. Wir sprechen deshalb meist von *dem* Kern, *dem* Kokern etc.

**Definition 1.5.6.** Ein Morphismus  $g : B \rightarrow C$  in einer Kategorie heißt ein **Monomorphismus** oder **Mono** und als Adjektiv **mono** genau dann, wenn für zwei beliebige Morphismen  $f, f' : A \rightarrow B$  aus  $gf = gf'$  schon folgt  $f = f'$ . Wir notieren Monomorphismen oft  $\hookrightarrow$ .

**Definition 1.5.7.** Ein Morphismus  $g : B \rightarrow C$  in einer Kategorie heißt ein **Epimorphismus** oder **Epi** und als Adjektiv **epi** genau dann, wenn für zwei beliebige Morphismen  $h, h' : C \rightarrow D$  aus  $hg = h'g$  schon folgt  $h = h'$ . Wir notieren Epimorphismen oft  $\rightarrow$ .

*Übung 1.5.8.* Die Verknüpfung von zwei Monos ist mono. Ist eine Verknüpfung  $hg$  mono, so auch  $g$ . Die Verknüpfung von zwei Epis ist epi. Ist eine Verknüpfung  $gf$  epi, so auch  $g$ .

*Übung 1.5.9.* In einer Kategorie mit Nullobjekt zeige man die folgenden Aussagen und formuliere ihre Dualen: (1) Der Kern eines Nullmorphisms ist die Identität auf dem Ausgangsobjekt. Ein Morphismus mit Kern 0 induziert einen Isomorphismus auf sein Bild. (2) Besitzt  $f : A \rightarrow B$  einen Kern und ist  $g : B \rightarrow C$  ein Mono, so haben wir  $\ker f = \ker gf$ . (3) Gegeben ein kartesisches Diagramm ist jeder Kern eines Morphisms im Diagramm auch ein Kern des gegenüberliegenden Morphisms.

## 1.6 Präabelsche Kategorien

1.6.1. Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit Nullobjekt. Wir erinnern die Definition 1.5.4 von Kern, Bild, Kokern und Kobild. Per definitionem sind Kerne stets Monos und Kokerne stets Epis. Für jeden Morphismus  $f : B \rightarrow C$  mit Kern, Bild, Kokern und Kobild gibt es genau einen Morphismus  $\text{im } f \rightarrow \text{coim } f$ , mit dem das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccccc} \ker f & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & \text{im } f \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{cok } f & \leftarrow & C & \hookleftarrow & \text{coim } f \end{array}$$

**Definition 1.6.2.** Eine Kategorie heißt **präabelsch** genau dann, wenn sie (1) ein Nullobjekt besitzt, wenn (2) jeder Morphismus einen Kern und einen Kokern hat und wenn zusätzlich (3) für jeden Morphismus  $f$  der induzierte Morphismus nach 1.6.1 ein Isomorphismus  $\text{im } f \xrightarrow{\sim} \text{coim } f$  ist.

*Ergänzung 1.6.3.* Iversen [Ive87] nennt unsere präabelschen Kategorien exakt und übernimmt damit in etwa die Terminologie von Buchsbaum [Buc55], der allerdings von seinen exakten Kategorien etwas mehr fordert als Iversen. In der Literatur versteht man unter einer exakten Kategorie inzwischen fast immer abweichend davon eine exakte Kategorie im Sinne von Quillen [Qui73]. Die Terminologie “präabelsch” führe ich ein, um diese Inkonsistenzen aufzulösen. Wir werden in 3.1 in beliebigen präabelschen Kategorien zu jeder kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen die lange exakte Homologiesequenz herleiten.

*Beispiele* 1.6.4. Die Kategorie aller abelschen Gruppen ist präabelsch. Die Kategorie aller Gruppen besitzt zwar ein Nullobjekt und zu jedem Morphismus Kern und Kokern, ist jedoch nicht präabelsch. Die Kategorie aller Moduln über einem festen Grundring ist präabelsch.

*Beispiel* 1.6.5. Die opponierte Kategorie einer präabelschen Kategorie ist auch eine präabelsche Kategorie.

*Übung* 1.6.6. In einer präabelschen Kategorie zeige man die folgenden Aussagen. (1) Für einen Morphismus  $f : A \rightarrow B$  sind gleichbedeutend: (a)  $f$  ist epi, (b)  $\text{cok } f = 0$  und (c)  $\text{im } f \xrightarrow{\sim} B$ . Man formuliere auch die duale Aussage. (2) Genau dann ist ein Morphismus ein Isomorphismus, wenn er mono und epi ist. (3) Ist  $A \rightarrow B \hookrightarrow C$  eine Komposition eines Epi mit einem Mono, so ist  $B$  das Bild dieser Verknüpfung.

**Definition 1.6.7.** Eine Sequenz  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  in einer präabelschen Kategorie heißt **exakt** genau dann, wenn gilt  $gf = 0$  und wenn zusätzlich die induzierte Abbildung  $\text{im } f \rightarrow \ker g$  ein Isomorphismus ist. Sie heißt eine **kurze exakte Sequenz** genau dann, wenn zusätzlich  $f$  mono ist und  $g$  epi. Eine längere Sequenz heißt exakt genau dann, wenn sie exakt ist an jeder Stelle.

*Beispiel* 1.6.8. Eine exakte Sequenz ist offensichtlich auch exakt in der opponierten Kategorie.

**Definition 1.6.9.** Ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien heißt **linksexakt** genau dann, wenn er Kerne zu Kernen macht; **rechtsexakt** genau dann, wenn er Kokerne zu Kokernen macht; und **exakt** genau dann, wenn er linksexakt und rechtsexakt ist.

*Übung* 1.6.10. Sowohl rechtsexakte als auch linksexakte Funktoren bilden das Nullobjekt stets auf das Nullobjekt ab.

*Übung* 1.6.11. Besitzt ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien einen linksadjungierten Funktor, so ist er linksexakt. Besitzt ein Funktor zwischen präabelschen Kategorien einen rechtsadjungierten Funktor, so ist er rechtsexakt.

*Übung* 1.6.12. Besitzt ein exakter treuer Funktor  $L$  zwischen präabelschen Kategorien einen Rechtsadjungierten  $R$ , so ist die Adjunktionsabbildung  $M \rightarrow RLM$  stets ein Monomorphismus.

*Übung* 1.6.13. Eine Sequenz  $\dots \rightarrow A^{q-1} \rightarrow A^q \rightarrow A^{q+1} \rightarrow \dots$  in einer präabelschen Kategorie ist exakt genau dann, wenn für die Faktorisierungen  $A^{n-1} \twoheadrightarrow K^q \hookrightarrow A^q$  in einen Epi gefolgt von einem Mono die offensichtlichen Sequenzen  $K^q \hookrightarrow A^q \twoheadrightarrow K^{q+1}$  für alle  $q$  kurz exakt sind.

*Ergänzende Übung* 1.6.14. Eine **absteigende Filtrierung**  $F$  auf einem Vektorraum  $V$  ist eine Folge von Teilräumen

$$\dots \supset F^{\geq n}V \supset F^{\geq n+1}V \supset \dots$$

mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Wir machen die filtrierten Vektorräume zu einer Kategorie, indem wir die filtrierungserhaltenden linearen Abbildungen als Morphismen nehmen. Man zeige, daß es in dieser Kategorie Kerne und Kokerne gibt, daß aber die kanonische Abbildung  $\text{coim } f \rightarrow \text{im } f$  kein Isomorphismus sein muß. Ist diese Abbildung doch ein Isomorphismus, so heißt  $f$  **strikt verträglich mit den Filtrierungen**.

## 1.7 Additive und abelsche Kategorien

**Definition 1.7.1.** Eine **additive Struktur** auf einer Kategorie ist die Vorgabe einer Verknüpfung “Addition” auf allen Morphismenräumen derart, daß sie alle abelsche Gruppen werden und alle Kompositionen bilineare Abbildungen.

*Beispiel* 1.7.2. Ein Kategorie mit einer additiven Struktur und einem einzigen Objekt ist “dasselbe” wie ein Ring. In manchen Quellen wird eine Kategorie mit einer additiven Struktur auch als eine **prä-additive Kategorie** bezeichnet. Ich mag diese Terminologie nicht, da es sich hierbei nicht um eine mögliche Eigenschaft einer Kategorie handelt, sondern um zusätzliche Daten. Ich bezeichne eine kleine Kategorie mit einer additiven Struktur auch als ein **Ringoid**.

**Definition 1.7.3.** Eine Kategorie heißt **additiv** genau dann, wenn sie endliche Produkte hat und mit einer additiven Struktur versehen werden kann. Eine Kategorie heißt **abelsch** genau dann, wenn sie additiv und präabelsch ist.

1.7.4. Wir werden in 1.7.10 zeigen, daß es auf Kategorien mit endlichen Produkten höchstens eine additive Struktur geben kann. Bei unserer Forderung nach endlichen Produkten mitgemeint ist die Forderung nach einem finalen Objekt als dem Produkt über die leere Familie. Andere äquivalente Definitionen und viele weitere Resultate findet man in [Fre66, Bor94, Gab62, HS71]. Insbesondere findet man in [Fre66] einen Beweis der Tatsache, daß jede präabelsche Kategorie mit endlichen Produkten und Koprodukten bereits abelsch ist.

*Übung* 1.7.5. Eine volle Unterkategorie einer additiven Kategorie ist additiv genau dann, wenn sie mit jeder endlichen Familie von Objekten auch ein Produkt dieser Familie enthält.

**Lemma 1.7.6 (Kofinale Objekte als finale Objekte).** *In einer Kategorie mit additiver Struktur ist jedes finale Objekt bereits kofinal.*

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $0$  die neutralen Elemente der Morphismenräume. Sei nun  $K$  unser finales Objekt und  $A$  ein beliebiges Objekt. Sicher gibt es dann genau einen Morphismus  $0 = \text{id} : K \rightarrow K$ . Für einen beliebigen Morphismus  $f : K \rightarrow A$  gilt also  $f = f \circ \text{id} = f \circ 0 = 0$ .  $\square$

1.7.7. Für jede Kategorie mit additiver Struktur und finalem Objekt sind nach dem vorhergehenden Lemma die neutralen Elemente der Morphismenräume genau die Morphismen, die über das finale Objekt faktorisieren. Die Nullmorphismen hängen demnach, wenn solch ein finales Objekt existiert, schon einmal nicht von der Wahl der additiven Struktur ab.

**Lemma 1.7.8 (Produkte als Koprodukte).** *Für beliebige Objekte  $B_1, B_2$  einer additiven Kategorie ist das Tripel  $(B_1 \times B_2, i_1, i_2)$  mit  $i_1 = (\text{id}, 0)$  und  $i_2 = (0, \text{id})$  ein Koprodukt von  $B_1$  und  $B_2$ .*

1.7.9. Das gilt allgemeiner auch für beliebige Objekte  $B_1, B_2$  einer Kategorie mit additiver Struktur und finalem Objekt, wenn denn für sie ein Produkt  $B_1 \times B_2$  existiert.

*Beweis.* Wir erhalten für jede additive Struktur  $i_1 \circ \text{pr}_1 + i_2 \circ \text{pr}_2 = \text{id}$  auf  $B_1 \times B_2$ , da beide Seiten nach Verknüpfen mit  $\text{pr}_\nu$  wieder  $\text{pr}_\nu$  liefern. Den Rest des Beweises überlassen wir dem Leser.  $\square$

**Lemma 1.7.10 (Eindeutigkeit der additiven Struktur).** *Auf einer Kategorie mit endlichen Produkten gibt es höchstens eine additive Struktur.*

*Beweis.* Man kann die Summe von zwei Morphismen  $f, g : A \rightarrow B$  beschreiben als die Verknüpfung der Diagonale  $(\text{id}, \text{id}) : A \rightarrow A \times A$  mit dem durch die Interpretation von  $A \times A$  als Koprodukt und  $f$  und  $g$  festgelegten Morphismus  $A \times A \rightarrow B$ .  $\square$

1.7.11. In additiven Kategorien ist es bequem, Morphismen zwischen endlichen Produkten von Objekten als Matrizen von Morphismen zwischen den einzelnen Objekten zu schreiben. Die Morphismen  $(f, g)$  in ein Produkt werden wir in Zukunft bei additiven Kategorien meist als Spaltenmatrizen  $(f, g)^\top$  schreiben, und eine Zeilenmatrix  $(f, g)$  wird abweichend von den bisherigen Konventionen eine Morphismus von einem Produkt alias Koprodukt in das gemeinsame Zielobjekt von  $f$  und  $g$  meinen. Diese Schreibweise hat den Vorteil, daß die Verknüpfung von Morphismen zwischen Produkten durch das Produkt ihrer Matrizen dargestellt wird.

*Beispiele 1.7.12.* Sei  $R$  ein Ring. Die Kategorie aller freien  $R$ -Moduln von endlichem Rang ist additiv. Die Kategorie aller  $R$ -Moduln ist sogar abelsch, ebenso wie die Kategorie der abelschen Prägarben und die Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen topologischen Raum. Die opponierte Kategorie einer additiven bzw. abelschen Kategorie ist stets auch additiv bzw. abelsch.

*Übung 1.7.13.* Genau dann ist ein Objekt einer additiven Kategorie ein Nullobjekt, wenn die Identität auf besagtem Objekt der Nullmorphismus ist.

*Beispiel 1.7.14.* Ganz allgemein ist für jede kleine Kategorie  $I$  die Kategorie aller Funktoren von  $I$  in eine additive bzw. abelsche Kategorie mit den Transformationen als Morphismen wieder eine additive bzw. abelsche Kategorie. Zum Beispiel ist die Kategorie aller gerichteten Systeme von abelschen Gruppen über einer vorgegebenen partiell geordneten Indexmenge eine abelsche Kategorie. Aus demselben allgemeinen Grund bilden auch die abelschen Prägarben auf einem topologischen Raum eine abelsche Kategorie: Nullobjekt ist Prägarbe, die jeder offenen Menge die triviale Gruppe zuordnet und der Kern bzw. Kokern eines Morphismus  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  werden gegeben durch

$$\begin{aligned}(\ker f)(U) &= \ker(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)) & \forall U \subseteq X \\(\operatorname{cok} f)(U) &= \operatorname{cok}(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)) & \forall U \subseteq X\end{aligned}$$

mit hoffentlich offensichtlichen Restriktionen.

*Beispiel 1.7.15.* Die Kategorie aller Komplexe in einer additiven bzw. abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$ , also aller Sequenzen  $\dots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1} \rightarrow \dots$  mit der Eigenschaft, daß die Komposition von je zwei aufeinanderfolgenden Morphismen Null ist, ist mit den “Kettenabbildungen” als Morphismen eine additive bzw. abelsche Kategorie  $\operatorname{Ket}(\mathcal{A}) = \operatorname{Ket}_{\mathcal{A}}$ , und unsere kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen aus II.2.2.2 sind genau die kurzen exakten Sequenzen in  $\operatorname{Ket}(\operatorname{Ab})$  in unserem hier rein kategorientheoretisch definierten Sinne.

**Definition 1.7.16.** Ein Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen additiven Kategorien heißt **additiv** genau dann, wenn für alle  $A, A' \in \mathcal{A}$  die offensichtliche Abbildung von der Summe ihrer Bilder unter  $F$  in das Bild unter  $F$  ihrer Summe ein Isomorphismus ist, in Formeln

$$FA \oplus FA' \xrightarrow{\sim} F(A \oplus A')$$

So ein Funktor induziert auf den Morphismenräumen stets Gruppenhomomorphismen  $F : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$  und er bildet nach 1.7.13 auch notwendig das Nullobjekt auf das Nullobjekt ab.

*Übung 1.7.17.* Jeder rechtsexakte und jeder linksexakte Funktor zwischen abelschen Kategorien ist additiv. Jeder Funktor zwischen additiven Kategorien, der einen Rechts- oder Linksadjungierten besitzt, ist additiv.

*Übung 1.7.18.* Gegeben  $\mathcal{A}$  eine additive Kategorie und  $T \in \mathcal{A}$  ein Objekt bezeichne  $\langle !T \rangle = \langle !T \rangle_{\oplus} \subset \mathcal{A}$  die kleinste volle Unterkategorie von  $\mathcal{A}$ , die  $T$  enthält und stabil ist unter endlichen Produkten. Wie immer bezeichne  $\mathcal{A}(T, \_)$  den Endomorphismenring von  $T$ . Man zeige, daß der Funktor  $\mathcal{A}(T, \_)$  eine Äquivalenz zwischen  $\langle !T \rangle_{\oplus}$  und  $\langle !\mathcal{A}(T) \rangle_{\oplus} \subset \text{Mod-}\mathcal{A}(T)$  induziert. Im übrigen sind beide Kategorien auch äquivalent zur Matrixkategorie  $\mathcal{M}(\mathcal{A}(T))$ , wie wir sie in I.2.2.10 für einen beliebigen Ring definiert haben.

*Ergänzende Übung 1.7.19.* Sei  $\mathcal{A}$  eine additive Kategorie und  $E \in \mathcal{A}$  ein Objekt mit der Eigenschaft, daß jedes Objekt von  $\mathcal{A}$  isomorph ist zu einem Summanden einer direkten Summe von endlich vielen Kopien von  $E$ . So ist der Funktor der Homomorphismen

$$\mathcal{A}(E, \_) : \mathcal{A} \rightarrow \text{mod-}\mathcal{A}(E)$$

von  $\mathcal{A}$  in die Rechtsmoduln über dem Endomorphismenring von  $E$  volltreu und alle  $\mathcal{A}(E, M)$  sind projektive  $\mathcal{A}(E)$ -Rechtsmoduln. Hat unsere additive Kategorie  $\mathcal{A}$  darüber hinaus die **Karoubi-Eigenschaft**, ist also jeder idempotente Endomorphismus eines Objekts der Projektor einer Zerlegung in eine direkte Summe, so induziert  $\mathcal{A}(E, \_)$  eine Äquivalenz von  $\mathcal{A}$  mit der Kategorie der endlich erzeugten projektiven  $\mathcal{A}(E)$ -Rechtsmoduln.

## 1.8 Kerne und Kokerne für abelsche Garben

**Satz 1.8.1.** 1. Die Kategorie der abelschen Garben auf einem festen topologischen Raum ist eine abelsche Kategorie.

2. Eine Sequenz von abelschen Garben ist exakt genau dann, wenn sie auf allen Halmen exakte Sequenzen von abelschen Gruppen induziert.

1.8.2. Der étale Raum der Bildgarbe ist also genau das mengentheoretische Bild der auf den étalen Räumen induzierten Abbildung.

*Beweis.* Sicher besitzt unsere Kategorie ein Nullobjekt. Offensichtlich ist der Prägarbenkern eines Morphismus  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  von abelschen Garben schon selbst eine Garbe und sogar ein Kern von  $f$  in der Kategorie der abelschen Garben. Mit der Exaktheit des direkten Limes folgern wir aus dieser Beschreibung, daß für alle  $x \in X$  die Sequenz von Halmen

$$0 \rightarrow (\ker f)_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$$



exakt ist. Der Kokern in der Kategorie der abelschen Prägarben eines Morphismus von abelschen Garben  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ist zwar im allgemeinen keine Garbe, aber seine Garbifizierung

$$\text{cok } f = (\text{Prägarbenkokern von } f)^+$$

ist ein Kokern von  $f$  in der Kategorie der abelschen Garben aufgrund der universellen Eigenschaft der Garbifizierung 1.4.40. Da die Garbifizierung die Halme nicht ändert, folgt aus der Exaktheit des direkten Limes wieder, daß für alle  $x \in X$  die Sequenz von Halmen  $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow (\text{cok } f)_x \rightarrow 0$  exakt ist. Wir folgern insbesondere, daß die kanonische Abbildung

$$\text{im } f \rightarrow \text{coim } f$$

auf allen Halmen Isomorphismen induziert. Dann ist sie aber nach 1.4.27 schon ein Isomorphismus und der erste Teil des Satzes folgt. Für einen Garbenhomomorphismus wissen wir bereits, daß der Halm des Kerns der Kern der auf den Halmen induzierten Abbildung ist, und desgleichen für den Kokern. Damit folgt, daß eine exakte Sequenz von abelschen Garben auch exakte Sequenzen auf allen Halmen liefert. Ist umgekehrt  $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  exakt auf allen Halmen, so ist die Verknüpfung Null nach 1.4.27 und die damit definierte kanonische Abbildung vom Bild des ersten Morphismus in den Kern des zweiten ist ein Isomorphismus nach 1.4.27.  $\square$

*Übung 1.8.3.* Das Bilden der globalen Schnitte ist ein linksexakter Funktor von der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum in die Kategorie der abelschen Gruppen.

*Übung 1.8.4.* Das Bilden des Halms an einem Punkt ist ein exakter Funktor von der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum in die Kategorie der abelschen Gruppen.

*Übung 1.8.5.* Die Garbifizierung ist ein exakter Funktor von der Kategorie der abelschen Prägarben in die Kategorie der abelschen Garben.

*Übung 1.8.6.* In der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum existieren direkte Limes, und der Halm eines direkten Limes ist der direkte Limes der Halme.

*Ergänzung 1.8.7.* In der Kategorie der abelschen Garben auf einem gegebenen Raum existieren Produkte, aber der Halm eines Produkts ist nicht notwendig das Produkt der Halme: Zum Beispiel betrachte man auf  $\mathbb{R}$  das Produkt der Garben  $\mathcal{F}_n$  mit étalen Räumen den disjunkten Vereinigungen  $\mathbb{R} \sqcup (-1/n, 1/n)$  für  $n \geq 1$  natürliche Zahlen und den offensichtlichen Abbildungen nach  $\mathbb{R}$ . Das führt zu der unangenehmen Erkenntnis, daß ein unendliches Produkt von kurzen exakten Sequenzen von abelschen Garben im allgemeinen keineswegs wieder eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben sein muß.

## 1.9 Definition der Garbenkohomologie

1.9.1. Die gleich folgende Definition der Garbenkohomologie scheint mir verheerend unanschaulich. Leider kenne ich keine anschauliche Definition dieses Konzeptes. Anstelle von Anschaulichkeit hat die Garbenkohomologie jedoch sehr gute formale Eigenschaften zu bieten, die es ermöglichen, sie in vielen Anwendungen zu identifizieren mit technisch im allgemeinen weniger gutartigen aber dafür anschaulichen oder gut berechenbaren Theorien wie der singulären Kohomologietheorie, der Čech-Kohomologie oder der de-Rham-Kohomologie. In typischen Anwendungen kann man die Garbenkohomologie sogar mit mehreren derartigen Theorien identifizieren und so bemerkenswerte Identitäten erhalten. Das wird auch eine Weile die Hauptmotivation bleiben müssen, denn die Grundlagen zu legen ist mühsam: Die Funktorialität der Garbenkohomologie zeigen wir erst in 2.5.10, und die Homotopieinvarianz muß bis ?? warten.

**Definition 1.9.2.** Sei  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf einem Raum  $X$ .

1. Die **Garbe der un stetigen Schnitte von  $\mathcal{F}$**  ist die Garbe  $\mathcal{G}\mathcal{F}$ , die jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  das Produkt der Halme von  $\mathcal{F}$  an allen Punkten  $x \in U$  zuordnet, in Formeln

$$(\mathcal{G}\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen. Wir haben eine kanonische Injektion  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$  gegeben durch  $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$  für  $s \in \mathcal{F}(U)$ .

2. Die **Godement-Auflösung** von  $\mathcal{F}$  ist der exakte Komplex von abelschen Garben

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^0\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^1\mathcal{F} \rightarrow \dots$$

den wir nach 1.6.13 erhalten durch die Vorschrift

$$\mathcal{G}^0\mathcal{F} = \mathcal{G}\mathcal{F}$$

$$\mathcal{G}^1\mathcal{F} = \mathcal{G}(\text{cok}(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F})) \text{ und dann induktiv}$$

$$\mathcal{G}^i\mathcal{F} = \mathcal{G}(\text{cok}(\mathcal{G}^{i-2}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^{i-1}\mathcal{F})) \text{ für } i \geq 2.$$

3. Die  **$q$ -te Kohomologiegruppe von  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$**  ist die abelsche Gruppe  $H^q(X; \mathcal{F})$ , die wir erhalten als die  $q$ -te Kohomologiegruppe des Komplexes  $\dots \rightarrow 0 \rightarrow \Gamma\mathcal{G}^0\mathcal{F} \rightarrow \Gamma\mathcal{G}^1\mathcal{F} \rightarrow \dots$  der globalen Schnitte der Godement-Auflösung von  $\mathcal{F}$ , in Formeln

$$H^q(X; \mathcal{F}) = \mathcal{H}^q(\Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F})$$

4. Jeder Morphismus von abelschen Garben  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  liefert in offensichtlicher Weise einen Morphismus  $\mathcal{G}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}'$  zwischen den zugehörigen Garben unstetiger Schnitte, dann induktiv einen Morphismus von Komplexen von Garben  $\mathcal{G}^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^*\mathcal{F}'$ , dann eine Kettenabbildung  $\Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F} \rightarrow \Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F}'$  und so schließlich Abbildungen zwischen den Kohomologiegruppen. Auf diese Weise wird die  $q$ -te Kohomologie ein Funktor von den abelschen Garben auf  $X$  in die abelschen Gruppen

$$H^q = H^q(X; \cdot) : \text{Ab}/_X \rightarrow \text{Ab}$$

1.9.3. Natürlich haben wir  $H^q(X; \mathcal{F}) = 0$  für  $q < 0$  und die exakte Sequenz  $0 \rightarrow \Gamma\mathcal{F} \rightarrow \Gamma\mathcal{G}^0\mathcal{F} \rightarrow \Gamma\mathcal{G}^1\mathcal{F}$  nach 1.8.3 liefert einen kanonischen Isomorphismus

$$\Gamma\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} H^0(X; \mathcal{F})$$

1.9.4. Wie bereits erwähnt habe ich für die Bedeutung dieser Definition im Fall  $q > 0$  keinerlei Anschauung. In 1.11.1 zeigen wir jedoch, daß sie für  $q = 1$  mit der Čech-Kohomologie übereinstimmt, deren Bedeutung wir bereits ausführlich diskutiert haben. Wir werden darüber hinaus für einen “parakompakten” und lokal zusammenziehbaren Raum in 2.9.4 natürliche Isomorphismen

$$H^q(X; G)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H^q(X; G_X)$$

zwischen der singulären Kohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $G$  und der Garbenkohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in der konstanten Garbe  $G_X$  konstruieren. Weiter hoffe ich, Sie davon zu überzeugen, daß die Garbenkohomologie im allgemeinen ein sehr viel stärkeres und flexibleres Werkzeug ist als die singuläre Kohomologie. Die Garbenkohomologie mit konstanten Koeffizienten notieren wir auch

$$H^q(X; G_X) = H^q(X; G)_{\text{garb}} = H^q(X; G)$$

wobei die Notation  $H^q(X; G)$  sowohl singuläre Kohomologie als auch Garbenkohomologie bedeuten kann und die genaue Bedeutung jeweils aus dem Kontext erschlossen werden muß.

*Übung 1.9.5.* Man gebe unter der Annahme  $X$  lokal wegzusammenhängend für jede abelsche Gruppe  $G$  Isomorphismen  $H^0(X; G)_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} H^0(X; G_X)$  an.

1.9.6. Die Schnitte unserer “Garbe der unstetigen Schnitte”  $\mathcal{G}\mathcal{F}$  sind nur über offenen Teilmengen unstetige Schnitte in den étalen Raum der ursprünglichen Garbe. Die Halme der Garbe der unstetigen Schnitte einer Garbe zum Beispiel sind im allgemeinen sehr viel größer als die Halme der ursprünglichen Garbe.

1.9.7. Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf  $X$  und  $A \subset X$  eine Teilmenge, so kürzen wir  $H^q(A; \mathcal{F}|_A) = H^q(A; \mathcal{F})$  ab.

**Proposition 1.9.8.** *Ist  $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  eine exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$ , so sind die auf den Garben der Godement-Auflösungen induzierten Sequenzen sogar exakte Sequenzen in der Kategorie der abelschen Prägarben*

$$\mathcal{G}^i \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}^i \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}^i \mathcal{F}''$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir von einer kurzen exakten Sequenz  $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  ausgehen. Ergänzen wir sie zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}' & \hookrightarrow & \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}\mathcal{F}' & \rightarrow & \mathcal{G}\mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{G}\mathcal{F}'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}' & \rightarrow & \mathcal{K} & \rightarrow & \mathcal{K}'' \end{array}$$

mit im Garbensinne exakten Vertikalen, so ist die mittlere Horizontale exakt als Sequenz von Prägarben nach Konstruktion. Dann ist sie erst recht exakt als Sequenz von Garben und das Neunerlemma angewandt auf die Halme zeigt, daß auch die unterste Zeile exakt ist auf den Halmen, also exakt ist als Sequenz von Garben. Die Proposition folgt durch Induktion.  $\square$

**Definition 1.9.9.** Sei  $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$ . Nach 1.9.8 führt sie zu einer kurzen exakten Sequenz von Komplexen von abelschen Gruppen

$$\Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F}' \hookrightarrow \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F}''$$

Die nach II.2.2.2 zugehörige lange exakte Homologiesequenz hat die Gestalt

$$H^0(X; \mathcal{F}') \hookrightarrow H^0(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X; \mathcal{F}'') \rightarrow H^1(X; \mathcal{F}') \rightarrow H^1(X; \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

und heißt die zur kurzen exakten Sequenz von Garben  $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$  gehörige **lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie**.

1.9.10. Für lokal zusammenziehbare “parakompakte” Räume spezialisiert diese lange exakte Sequenz unter der Identifikation 2.9.4 von Garbenkohomologie und singulärer Kohomologie zu unserer Bockstein-Sequenz II.4.1.10.

*Übung 1.9.11.* In der Kategorie der Prägarben über einem gegebenen Raum konstruiert man leicht beliebige Produkte, und dieselbe Konstruktion liefert auch Produkte in der Kategorie der Garben. Diese Produkte vertauschen mit dem Bilden der globalen Schnitte, aber ein Produkt von Epimorphismen von Garben muß nicht notwendig wieder ein Epimorphismus sein. Deshalb vertauscht das Bilden von Produkten von Garben im allgemeinen *nicht* mit dem Bilden der höheren Kohomologiegruppen.

*Übung 1.9.12.* Ist ein Raum eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen, so ist die Kohomologie einer Garbe darauf das Produkt der Kohomologien ihrer Restriktionen auf besagte offene Teilmengen.

## 1.10 Kohomologie welcher Garben

**Definition 1.10.1.** Eine Garbe heißt **welk** (englisch **flabby** und französisch **flasque**) genau dann, wenn sich jeder Schnitt auf einer offenen Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

**Definition 1.10.2.** Eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem topologischen Raum  $X$  heißt **azyklisch** oder genauer  $\Gamma$ -**azyklisch** genau dann, wenn alle ihre höheren Kohomologiegruppen verschwinden, wenn also in Formeln gilt  $H^q(X; \mathcal{F}) = 0$  für  $q > 0$ .

**Satz 1.10.3.** *Alle welken abelschen Garben sind azyklisch.*

1.10.4. Wir zeigen das im Anschluß an das folgende Lemma.

**Lemma 1.10.5.** *Sei  $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$ .*

1. *Ist  $\mathcal{F}'$  welk, so induziert der Epimorphismus  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  eine Surjektion  $\Gamma\mathcal{F} \rightarrow \Gamma\mathcal{F}''$  auf den globalen Schnitten.*
2. *Sind  $\mathcal{F}'$  und  $\mathcal{F}$  welk, so ist auch  $\mathcal{F}''$  welk.*

*Beweis.* 1. Sei  $s'' \in \Gamma\mathcal{F}''$  ein globaler Schnitt. Wir betrachten die Menge aller Paare  $(U, s_U)$  mit  $U \subseteq X$  und  $s_U \in \mathcal{F}(U)$  einem Urbild von  $s''|_U$ . Diese Menge ist in natürlicher Weise induktiv geordnet und besitzt nach Zorn ein maximales Element. Wäre nun  $(U, s_U)$  so ein maximales Element und wäre  $U \neq X$ , so fänden wir  $x \in X \setminus U$  und aufgrund der Surjektivität  $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}''_x$  eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  sowie  $s_V \in \mathcal{F}(V)$  mit  $s_V \mapsto s''|_V$ . Es folgte

$$s_V|_{U \cap V} - s_U|_{U \cap V} \in \mathcal{F}'(U \cap V)$$

und setzen wir diese Differenz fort zu einem Schnitt  $t_V \in \mathcal{F}'(V)$  über  $V$  der selben Garbe  $\mathcal{F}'$ , so stimmen  $(s_V - t_V)$  und  $s_U$  überein auf  $U \cap V$  und verkleben folglich zu einem Urbild von  $s''$  auf  $U \cup V$ , das  $s_U$  fortsetzt. Das steht jedoch im Widerspruch zur Maximalität von  $(U, s_U)$  und es war doch  $U = X$ . 2 folgt aus 1, da die Restriktionen welcher Garben auf offene Teilmengen wieder welche sind.  $\square$

*Beweis von 1.10.3.* Die Garbe  $\mathcal{G}\mathcal{F}$  der unstetigen Schnitte in eine Garbe  $\mathcal{F}$  ist stets welche. Zerlegen wir die Godement-Auflösung unserer Garbe in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{G}^0\mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{K}^1 & & \\ & & & & \mathcal{K}^1 & \hookrightarrow & \mathcal{G}^1\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{K}^2 \\ & & & & & & \mathcal{K}^2 \hookrightarrow \mathcal{G}^2\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{K}^3 \\ & & & & & & \dots \dots \dots \dots \end{array}$$

so erkennen wir mit dem Lemma, daß für welche  $\mathcal{F}$  alle Garben in diesen kurzen exakten Sequenzen welche sind, so daß alle unsere Sequenzen kurz exakt bleiben unter  $\Gamma$ . Das zeigt aber, daß der Komplex  $0 \rightarrow \Gamma\mathcal{F} \rightarrow \Gamma\mathcal{G}^0\mathcal{F} \rightarrow \Gamma\mathcal{G}^1\mathcal{F} \rightarrow \dots$  exakt ist.  $\square$

### 1.11 Erste Čech-Kohomologie als Garbenkohomologie

**Satz 1.11.1.** Gegeben eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem topologischen Raum  $X$  liefert die durch das Kommutieren des Diagramms im anschließenden Beweis definierte Abbildung einen natürlichen Isomorphismus zwischen ihrer ersten Čech-Kohomologie und ihrer ersten Garbenkohomologie

$$\text{can} : \check{H}^1(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^1(X; \mathcal{F})$$

1.11.2. Dieses Theorem soll unter anderem dazu beitragen, unsere Anschauung von der durch 1.2.8 bereits mit Anschauung gefüllten Čech-Kohomologie auf die von ihrer Definition her in meinen Augen völlig unanschauliche Garbenkohomologie zu übertragen. In [God64] II.5.10.1 wird gezeigt, daß die Čech-Kohomologie und die Garbenkohomologie auf "parakompakten" Räumen sogar in allen Graden übereinstimmen.

*Beweis.* Bezeichne  $\mathcal{C}$  den Prägarbenkern der Abbildung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}$  von  $\mathcal{F}$  in die Garbe der unstetigen Schnitte von  $\mathcal{F}$  und bezeichne  $\mathcal{C}^+$  seine Garbifizierung. Wir haben ein kommutatives Diagramm von Prägarben

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{G}\mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{C} \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{G}\mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{C}^+ \end{array}$$

mit kurzer exakter oberer Zeile und linksexakter unterer Zeile, das insbesondere zeigt, daß die kanonische Abbildung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^+$  ein Monomorphismus von Prägarben ist. Behandeln wir dies Diagramm mit  $\check{H}$  und mit 1.4.6, so erhalten wir die linke Hälfte eines kommutativen Diagramms, bei dem wir der Einfachheit halber den Grundraum  $X$  aus der Notation weglassen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \check{H}^0 \mathcal{F} & \longrightarrow & \check{H}^0 \mathcal{G}\mathcal{F} & \longrightarrow & \check{H}^0 \mathcal{C} & \longrightarrow & \check{H}^1 \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \vdots \\
 \check{H}^0 \mathcal{F} & \longrightarrow & \check{H}^0 \mathcal{G}\mathcal{F} & \longrightarrow & \check{H}^0 \mathcal{C}^+ & & \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 H^0 \mathcal{F} & \longrightarrow & H^0 \mathcal{G}\mathcal{F} & \longrightarrow & H^0 \mathcal{C}^+ & \longrightarrow & H^1 \mathcal{F} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Die Zeilen sind exakt: Ein kurze exakte Sequenz von Prägarben liefert uns ja eine lange exakte Sequenz in der Čech-Kohomologie, zunächst bezüglich jeder offenen Überdeckung und dann auch im Limes. Wir haben weiter  $\check{H}^1(X; \mathcal{G}\mathcal{F}) = 0$ , nach 1.3.20 und 1.3.19 verschwinden ja für ein Produkt von Wolkenkratzergerben sogar alle höheren Čech-Kohomologiegruppen bezüglich jeder offenen Überdeckung. Das liefert Exaktheit der oberen Zeile. Die untere Zeile ist exakt als Teil einer langen exakten Garbenkohomologie-Sequenz, es gilt nämlich  $H^1(X; \mathcal{G}\mathcal{F}) = 0$  nach 1.10.3, da  $\mathcal{G}\mathcal{F}$  stets welk ist. Folglich können wir den gestrichelten Pfeil durch die Kommutativität des Diagramms definieren. Um zu zeigen, daß er ein Isomorphismus ist, brauchen wir nur zu prüfen, daß der Monomorphismus von Prägarben  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^+$  Isomorphismen auf  $\check{H}^0$  induziert. Nun hat jedoch sein Prägarbenkokern  $\mathcal{K}$  aufgrund der Exaktheit der Garbifizierung die Eigenschaft  $\mathcal{K}^+ = 0$ , als da heißt, alle Halme von  $\mathcal{K}$  sind Null, woraus wir leicht  $\check{H}^0 \mathcal{K} = 0$  folgern. Dann ergibt sich  $\check{H}^0 \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \check{H}^0 \mathcal{C}^+$  aus der bereits diskutierten langen exakten Sequenz der Čech-Kohomologie zu einer kurzen exakten Sequenz in der Kategorie der abelschen Prägarben.  $\square$

*Ergänzung 1.11.3.* Im allgemeinen liefert eine kurze exakte Sequenz in der Kategorie der abelschen Garben keineswegs eine lange exakte Sequenz der zugehörigen Čech-Kohomologiegruppen. Ich bin jedoch außerstande, ein konkretes Gegenbeispiel anzugeben.

*Beispiel 1.11.4.* Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die lange exakte Sequenz zur kurzen exakten Garbensequenz  $2\pi i \mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \twoheadrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}$ , die von der Exponenti-

alabbildung induziert wird, liefert die obere Horizontale in einem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(X; \mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}) & \longrightarrow & H^2(X; 2\pi i \mathbb{Z}_X) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 \check{H}^1(X; \mathcal{C}_{\mathbb{C}^\times}) & & \\
 \downarrow \wr & & \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{komplexe Geradenbündel auf } X, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} & & H^2(X; \mathbb{Z}_X)
 \end{array}$$

wo wir links die Identifikationen aus 1.11.1 und 1.2.13 benutzen und rechts durch  $2\pi i$  teilen. Das Bild eines komplexen Geradenbündels  $\mathcal{L}$  unter dieser Verknüpfung heißt die **erste Chern'sche Klasse von  $\mathcal{L}$**  und wird bezeichnet mit

$$c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X; \mathbb{Z}_X)$$

Wir werden in 2.7.5 und 2.7.6 sehen, daß auf "parakompakten" Räumen die Gruppen  $H^q(X; \mathcal{C}_{\mathbb{C}})$  verschwinden für  $q > 0$ , so daß unser ganzes Diagramm aus Bijektionen besteht. Auf parakompakten Räumen werden demnach komplexe Geradenbündel "klassifiziert durch ihre erste Chern'sche Klasse".



## 2 Funktorialität und Beispiele

### 2.1 Ein Spektralsequenzargument

**Definition 2.1.1.** Ein **Doppelkomplex**  $A = (A^{p,q}, \partial, \delta)$  ist eine durch  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  parametrisierte Familie  $A^{p,q}$  von abelschen Gruppen mitsamt Gruppenhomomorphismen  $\partial = \partial^p : A^{p,q} \rightarrow A^{p+1,q}$  und  $\delta = \delta^q : A^{p,q} \rightarrow A^{p,q+1}$  derart, daß gilt  $\partial^2 = 0$ ,  $\delta^2 = 0$  und  $\partial\delta = \delta\partial$ . Gegeben ein Doppelkomplex  $A$  bilden wir seinen **Totalkomplex**  $\text{tot}(A) = T = (T, d)$  durch die Vorschrift

$$T^n = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}$$

mit Differential  $da = \partial a + (-1)^p \delta a$  für  $a \in A^{p,q}$ .

2.1.2. Wir denken uns  $p$  nach rechts und  $q$  nach oben aufgetragen und betrachten in unserem Doppelkomplex die **Spaltenkomplexe**  $A^{p,*}$  sowie die **Zeilenkomplexe**  $A^{*,q}$ . Verschwinden alle  $A^{p,q}$  mit  $p < 0$  oder  $q < 0$ , so sprechen wir von einem **Doppelkomplex im ersten Quadranten**. Zu einem Doppelkomplex im ersten Quadranten erklären wir den **senkrechten Kernkomplex**  $K_{\uparrow}$  als den Komplex der Kerne "längs der  $q$ -Achse", in Formeln

$$K_{\uparrow}^* = \ker(\partial : A^{0,*} \rightarrow A^{1,*})$$

mit dem von  $\delta$  induzierten Differential. Gegeben ein Doppelkomplex im ersten Quadranten haben wir eine offensichtliche injektive Kettenabbildung  $K_{\uparrow} \hookrightarrow T$  vom senkrechten Kernkomplex in den Totalkomplex und analog auch vom waagerechten Kernkomplex in den Totalkomplex.

**Satz 2.1.3 (Eine ausgeartete Spektralsequenz).** *Sei  $A = (A^{p,q}, \partial, \delta)$  ein Doppelkomplex im ersten Quadranten. Sind alle seine Zeilen exakt an allen Stellen  $A^{p,q}$  mit  $p \neq 0$ , so induziert die Einbettung des senkrechten Kernkomplexes in den Totalkomplex  $K_{\uparrow} \hookrightarrow T$  auf der Kohomologie Isomorphismen*

$$\mathcal{H}^n K_{\uparrow} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n T$$

*Beweis.* Wir beginnen mit einem Spezialfall.

**Lemma 2.1.4.** *Sind bei einem Doppelkomplex im ersten Quadranten alle Zeilen exakt, so ist auch sein Totalkomplex exakt.*

*Ergänzung 2.1.5.* Eine Verallgemeinerung dieser Aussage, die für beliebige Doppelkomplexe richtig bleibt, wird in ?? formuliert und bewiesen. Daraus ergeben sich dann auch Verallgemeinerungen von 2.1.3. Allgemeine Spektralsequenzen besprechen wir erst in 6.1.



Ein Doppelkomplex

*Beweis.* Sind nur endlich viele Zeilen unseres Doppelkomplexes von Null verschieden, so können wir das mit vollständiger Induktion zeigen: Dazu betten wir die oberste von Null verschiedene Zeile ein in den Totalkomplex. Der Kokern dieser Einbettung ist der Totalkomplex eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen und einer Zeile weniger. Zu der so konstruierten kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen bilden wir dann die lange exakte Homologiesequenz und unsere Induktion läuft. Haben wir einen beliebigen Doppelkomplex im ersten Quadranten vor uns, so stimmt sein Totalkomplex bis zum Grad  $n$  überein mit dem Totalkomplex zum Doppelkomplex der untersten  $n$  Zeilen, also können wir uns auf den bereits behandelten Fall zurückziehen.  $\square$

Jetzt folgern wir Satz 2.1.3. Der Kokern der Einbettung  $K_{\uparrow} \hookrightarrow T$  ist nämlich der Totalkomplex eines Doppelkomplexes mit exakten Zeilen. Nach Lemma 2.1.4 ist er damit azyklisch und die Behauptung folgt aus der langen exakten Homologiesequenz.  $\square$

## 2.2 Angeordnete Čech-Kohomologie

2.2.1. Will man Garbenkohomologie explizit berechnen, so ist der **angeordnete Čech-Komplex** ein sehr nützliches Hilfsmittel. Man wählt dazu auf einer offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  eine totale Ordnung  $\leq$  und arbeitet mit den **angeordneten Čech-Koketten**

$$\check{C}_{\leq}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \prod_{U_0 < \dots < U_q} \mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_q)$$

wo das Produkt wie angedeutet über alle streng monoton wachsenden Folgen der Länge  $q + 1$  in  $\mathcal{U}$  läuft. Das Differential wird definiert durch dieselben Formeln wie beim Čech-Komplex aus 1.3.12. Die Kohomologie dieses Komplexes notieren wir  $\check{H}_{\leq}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  und nennen sie die **angeordnete Čech-Kohomologie** bezüglich der angeordneten Überdeckung  $(\mathcal{U}, \leq)$  der abelschen Prägarbe  $\mathcal{F}$ .

*Ergänzung 2.2.2.* Um zu zeigen, daß die Restriktion  $\check{C}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}_{\leq}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  für jede abelsche Prägarbe Isomorphismen auf der Kohomologie liefert, kann man wie folgt vorgehen: Zunächst prüft man, daß die fraglichen Abbildungen mit den Differentialen verträglich sind und für jede Prägarbe  $\mathcal{F}$  Isomorphismen auf der nullten Kohomologie induzieren. Dann definiert man für jede abelsche Gruppe  $M$  und jede Teilmenge  $A \subset X$  die abelsche Prägarbe  $M_{(A)}$  durch die Vorschrift  $M_{(A)}(U) = M$  für  $U \supset A$  und  $M_{(A)}(U) = 0$  sonst und prüft durch Anwenden von  $\text{Hom}(\ , M)$  auf die Komplexe II.1.1.9 und II.2.4.8

wie beim Beweis von 2.2.3, daß unsere Behauptung für alle Prägarben  $M_{(A)}$  stimmt und daß die höhere Kohomologie für diese Prägarben verschwindet. Schließlich beachtet man, daß unserer Kohomologien verträglich sind mit Produkten, und daß jede abelsche Prägarbe  $\mathcal{F}$  in das Produkt  $\prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U)$  eingebettet werden kann. Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert dann induktiv die Behauptung auch für die höheren Kohomologien.

**Lemma 2.2.3.** *Die höheren angeordneten Čech-Kohomologiegruppen eines Wolkenkratzers verschwinden, in Formeln*

$$\check{H}_{\leq}^q(\mathcal{U}; M_{(x)}) = 0 \text{ für } q > 0$$

*Beweis.* Nach II.1.1.9 oder vielleicht besser seinem Beweis ist der “augmentierte Simplicialkomplex eines vollen Polyeders” stets nullhomotop. Speziell gilt das für den vollen Polyeder mit Ecken  $E = \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\}$ . Der zu dieser angeordneten Menge in II.1.1.9 betrachtete Komplex bleibt dann auch nullhomotop unter  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, M)$ , und nach Abschneiden bei Null entsteht gerade unser angeordneter Čech-Komplex. Also verschwinden dessen höhere Kohomologiegruppen.  $\square$

2.2.4. Wir konstruieren nun Homomorphismen  $\check{H}_{\leq}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X; \mathcal{F})$  wie folgt: Wir betrachten die “waagrecht gedachte” Godement-Auflösung von  $\mathcal{F}$  und bilden einen Doppelkomplex von abelschen Gruppen, indem wir an jeder Stelle “in senkrechter Richtung” den angeordneten Čech-Komplex nehmen. In Kurzschreibweise betrachten wir also den Doppelkomplex

$$\check{C}_{\leq}^q(\mathcal{U}; \mathcal{G}^p \mathcal{F})$$

Da die Garben der Godement-Auflösung Produkte von Wolkenkratzern sind, hat nach 2.2.3 unser Doppelkomplex exakte Spalten oberhalb der Zeile  $q = 0$  und der waagerechte Kernkomplex ist offensichtlich  $\Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F}$ . Nach 2.1.3 induziert also die Einbettung des waagerechten Kernkomplexes in den Totalkomplex einen Isomorphismus von der Kohomologie des waagerechten Kernkomplexes alias der Garbenkohomologie von  $\mathcal{F}$  mit der Kohomologie des Totalkomplexes. Andererseits ist aber der senkrechte Kernkomplex genau der angeordnete Čech-Komplex von  $\mathcal{F}$ , und so erhalten wir die gesuchten kanonischen Homomorphismen

$$\check{H}_{\leq}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X; \mathcal{F})$$

**Definition 2.2.5.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf  $X$  und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Gilt für alle endlichen Schnitte von einer oder mehr Mengen aus  $\mathcal{U}$  und für alle  $q > 0$

$$H^q(U_0 \cap \dots \cap U_\nu; \mathcal{F}) = 0$$

so sagen wir, die Garbe  $\mathcal{F}$  sei **azyklisch für die Überdeckung  $\mathcal{U}$** , oder manchmal auch, die Überdeckung sei azyklisch für die Garbe.

**Satz 2.2.6 (Berechnung der Kohomologie nach Čech).** *Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf  $X$  und  $(\mathcal{U}, \leq)$  eine angeordnete offene Überdeckung von  $X$ . Ist die Garbe  $\mathcal{F}$  azyklisch für die Überdeckung  $\mathcal{U}$ , so berechnet der Komplex der angeordneten Čech-Koketten schon ihre Kohomologie. Genauer liefern dann die in 2.2.4 konstruierten Abbildungen Isomorphismen*

$$\check{H}_{\leq}^q(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathcal{F})$$

2.2.7. Eine analoge Aussage gilt mit einem analogen Beweis auch für unseren Komplex von Čech-Koketten “ohne Anordnung” aus 1.3.12.

*Beweis.* Ist  $\mathcal{F}$  azyklisch für  $\mathcal{U}$ , so hat unser Doppelkomplex aus 2.2.4 exakte Zeilen außerhalb der Vertikalen  $p = 0$  und die Einbettung des senkrechten Kernkomplexes in den Totalkomplex liefert nach 2.1.3 auch Isomorphismen auf der Kohomologie.  $\square$

2.2.8. Ist  $X = U \cup V$  eine Überdeckung eines topologischen Raums durch zwei offene Teilmengen und ist  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf  $X$ , so hat der Doppelkomplex  $\check{C}_{\leq}^q(\mathcal{U}; \mathcal{G}^p \mathcal{F})$  aus 2.2.4 nur zwei Zeilen und kann zusammen mit seinem waagerechten Kernkomplex  $\Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F}$  als eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\Gamma(X; \mathcal{G}^* \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}^* \mathcal{F}) \oplus \Gamma(V; \mathcal{G}^* \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma(U \cap V; \mathcal{G}^* \mathcal{F})$$

gelesen werden. Die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz, die sogenannte **Mayer-Vietoris-Sequenz der Garbenkohomologie**, hat die Gestalt

$$\dots H^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(U; \mathcal{F}) \oplus H^q(V; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(U \cap V; \mathcal{F}) \rightarrow H^{q+1}(X; \mathcal{F}) \dots$$

*Bemerkung 2.2.9.* Guck mal bei Kashiwara nach, ob das auch mit einem Garbenkomplex geht!

*Übung 2.2.10.* Ich habe sie noch nicht gemacht! Man zeige, daß die Analoga der Morphismen aus 2.2.6 im nicht angeordneten Fall für  $q = 1$  im Limes über alle gesättigten Überdeckungen die in 1.11.1 folgende konstruierten Isomorphismen liefern.



Eine für die konstante Garbe auf der Acht azyklische offene Überdeckung durch drei offene Teilmengen mit ihrem angeordneten Čech-Komplex

### 2.3 Kohomologie durch azyklische Auflösungen

**Definition 2.3.1.** Unter einer **Auflösung** einer abelschen Garbe  $\mathcal{F}$  verstehen wir einen exakten Komplex  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{B}^0 \rightarrow \mathcal{B}^1 \rightarrow \mathcal{B}^2 \rightarrow \dots$  von abelschen Garben. Eine Auflösung heißt **azyklisch** genau dann, wenn alle  $\mathcal{B}^i$  azyklisch sind.

**Definition 2.3.2.** Gegeben eine Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{B}^*$  einer abelschen Garbe betrachten wir den Doppelkomplex im ersten Quadranten  $B^{p,q} = \Gamma \mathcal{G}^q \mathcal{B}^p$  der globalen Schnitte der Godement-Auflösungen der Garben unseres Komplexes. Sein senkrechter Kernkomplex ist kanonisch isomorph zu  $\Gamma \mathcal{G}^q \mathcal{F}$  und sein waagerechter Kernkomplex zu  $\Gamma \mathcal{B}^p$ . Weiter hat unser Doppelkomplex nach 1.9.8 an allen Stellen außer bei  $p = 0$  exakte Zeilen. Folglich liefern die Morphismen  $\Gamma \mathcal{B}^p \xrightarrow{\sim} K_{\rightarrow} \rightarrow TB \leftarrow K_{\uparrow} \xleftarrow{\sim} \Gamma \mathcal{G}^q \mathcal{F}$  auf der Kohomologie Morphismen, die sogenannten **natürlichen Abbildungen**

$$\text{nat} : \mathcal{H}^n \Gamma \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{H}^n \mathcal{F}$$

als die Verknüpfungen  $\mathcal{H}^n \Gamma \mathcal{B}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n K_{\rightarrow} \rightarrow \mathcal{H}^n TB \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}^n K_{\uparrow} \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}^n \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F}$ , wo der Isomorphismus im vorletzten Schritt von 2.1.3 herkommt.

2.3.3. Wir zeigen in 2.3.17, daß für  $\mathcal{B}^* = \mathcal{G}^* \mathcal{F}$  die Godementauflösung unsere natürlichen Abbildungen die Identität auf  $\mathcal{H}^n \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F} = \mathcal{H}^n \mathcal{F}$  sind.

*Übung 2.3.4.* Ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{B}^0 & \rightarrow & \mathcal{B}^1 & \rightarrow & \mathcal{B}^2 & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{G} & \hookrightarrow & \mathcal{C}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}^1 & \rightarrow & \mathcal{C}^2 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

gegeben mit Auflösungen von abelschen Garben  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{G}$  als Zeilen, so kommutiert mit den offensichtlichen Vertikalen und den in 2.3.2 konstruierten natürlichen Abbildungen als Horizontalen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{B}^* & \rightarrow & \mathcal{H}^q \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{C}^* & \rightarrow & \mathcal{H}^q \mathcal{G} \end{array}$$

**Satz 2.3.5 (Kohomologie durch azyklische Auflösungen).** *Die Kohomologie einer abelschen Garbe läßt sich berechnen als die Kohomologie des Komplexes der globalen Schnitte einer beliebigen azyklischen Auflösung. Ist genauer  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$  eine azyklische Auflösung, so sind unsere natürlichen Abbildungen aus 2.3.2 Isomorphismen*

$$\text{nat} : \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{A}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \mathcal{F}$$

*Beweis.* Sind alle  $\mathcal{A}^i$  azyklisch, so sind im Doppelkomplex  $\Gamma\mathcal{G}^q\mathcal{A}^p$ , der unsere natürlichen Abbildungen definiert, auch alle Spalten exakt außer bei  $q = 0$ . Mithin induziert nach 2.1.3 auch die Einbettung des waagerechten Kernkomplexes in den Totalkomplex Isomorphismen auf der Kohomologie.  $\square$

**Definition 2.3.6.** Ein Objekt  $I$  einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  heißt **injektiv** genau dann, wenn der Funktor der Homomorphismen in unser Objekt  $\mathcal{A}(\cdot, I) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$  exakt ist. Eine abelsche Kategorie **hat genug Injektive** genau dann, wenn es von jedem Objekt einen Monomorphismus in ein injektives Objekt gibt.

2.3.7. Ein Objekt einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  ist injektiv genau dann, wenn jeder von besagtem Objekt ausgehende Monomorphismus spaltet. In der Tat, ist  $I \hookrightarrow M$  ein Monomorphismus und  $I$  injektiv, so ist das Vorschalten eine Surjektion  $\mathcal{A}(M, I) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(I, I)$ , unter der die Identität auf  $I$  eben ein Urbild hat. Der Nachweis der anderen Implikation bleibe dem Leser überlassen.

*Beispiel 2.3.8.* Die Kategorie der abelschen Gruppen besitzt genügend Injektive nach II.4.9.5.

*Übung 2.3.9.* Ein Produkt über eine beliebige Familie von injektiven Objekten ist wieder injektiv.

**Lemma 2.3.10.** *Die Kategorie aller abelschen Garben über einem gegebenen topologischen Raum besitzt genug Injektive, d.h. jede abelsche Garbe läßt sich in eine injektive abelsche Garbe einbetten.*

*Ergänzung 2.3.11.* Man kann sogar zeigen, daß in der Kategorie der Garben von Vektorräumen auf einem gegebenen topologischen Raum die injektiven Objekte genau die welken Garben sind, vergleiche [Bor84], V.1.13, wo man sogar noch allgemeiner eine explizite Charakterisierung injektiver Garben von Moduln über noether'schen Ringen findet. Wir werden jedoch diese Resultate nicht benötigen.

*Beweis.* Alle Wolkenkratzer mit einer injektiven abelschen Gruppe als Halm sind injektive abelsche Garben nach 1.4.29. Gegeben eine Garbe  $\mathcal{F}$  und eine Einbettung  $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I_x$  von jedem Halm in eine injektive abelsche Gruppe konstruieren wir eine welke injektive abelsche Garbe  $\mathcal{I} = \prod (I_x)_{(x)}$  als Produkt der zu den Gruppen  $I_x$  gehörigen Wolkenkratzer bei  $x$ , explizit haben wir also

$$\mathcal{I}(U) = \prod_{x \in U} I_x \quad \forall U \subseteq X$$

Der offensichtliche Monomorphismus  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$  zeigt dann das Lemma.  $\square$



2.3.12. Gegeben eine additive Kategorie  $\mathcal{A}$  erklären wir die zugehörige Homotopiekategorie  $\text{Hot}(\mathcal{A}) = \text{Hot}_{\mathcal{A}}$  analog zur Homotopiekategorie der abelschen Gruppen aus II.1.4.7 in der hoffentlich offensichtlichen Weise.

**Satz 2.3.13 (Hauptlemma der homologischen Algebra).** *Seien in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  gegeben ein Komplex  $C$  mit  $\mathcal{H}^q C = 0$  für  $q > 0$  und ein Komplex  $I$  injektiver Objekte mit  $I^q = 0$  für  $q < 0$ . So induziert das Bilden der nullten Homologie eine Bijektion*

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(C, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\mathcal{H}^0 C, \mathcal{H}^0 I)$$

*Beweis.* In der opponierten Kategorie zur Kategorie  $\text{Mod}_R$  der Moduln über einem Ring  $R$  hatten wir das bereits in II.3.6.10 bewiesen. Der Beweis im Allgemeinen ist mutatis mutandis derselbe.  $\square$

2.3.14. Eine **injektive Auflösung** einer abelschen Garbe ist eine Auflösung durch injektive abelsche Garben. Nach 2.3.10 besitzt jede abelsche Garbe eine injektive Auflösung.

2.3.15. Gegeben zwei Auflösungen  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{B}^*$  und  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{C}^*$  einer abelschen Garbe oder auch eines Objekts irgendeiner abelschen Kategorie versteht man unter einem **Morphismus von Auflösungen** eine Kettenabbildung  $\mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{C}^*$  derart, daß im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{B}^0 & \rightarrow & \mathcal{B}^1 & \rightarrow & \mathcal{B}^2 & \rightarrow & \dots \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{C}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}^1 & \rightarrow & \mathcal{C}^2 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

auch das erste Quadrat kommutiert.

**Lemma 2.3.16 (Kohomologie durch injektive Auflösungen).** *Jede injektive abelsche Garbe ist azyklisch und für jede injektive Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  einer abelschen Garbe  $\mathcal{F}$  und jeden Morphismus von Auflösungen  $\mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^*$  ist die induzierte Abbildung  $\text{H}^q \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{I}^*$  invers zu unserer natürlichen Abbildung  $\text{nat} : \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{I}^* \xrightarrow{\sim} \text{H}^q \mathcal{F}$ .*

*Beweis.* Die Godement-Konstruktion liefert eine Einbettung jeder Garbe in eine welke Garbe, und diese Einbettung muß nach 2.3.7 für jede injektive abelsche Garbe spalten. Jede injektive abelsche Garbe ist mithin welk und insbesondere azyklisch. Insbesondere ist nach 2.3.5 für jede injektive Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  unsere natürliche Abbildung ein Isomorphismus

$$\text{nat} : \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{I}^* \xrightarrow{\sim} \text{H}^q \mathcal{F}$$

Die Konstruktion dieser natürlichen Abbildung können wir auch dahingehend beschreiben, daß wir den Totalkomplex des Doppelkomplexes von Garben  $\mathcal{G}^*\mathcal{I}^*$  betrachten und die durch die Einbettung der waagerechten und senkrechten Kernkomplexe gegebenen Morphismen

$$\mathcal{I}^* \rightarrow \mathcal{T}^* \leftarrow \mathcal{G}^*\mathcal{F}$$

von Komplexen von Garben. Aus unseren Resultaten über Doppelkomplexe, angewandt auf die Halme, folgt sofort, daß auch  $\mathcal{T}^*$  exakt und eine Auflösung von  $\mathcal{F}$  ist, so daß unsere Morphismen von Komplexen sogar Morphismen von Auflösungen von  $\mathcal{F}$  sind. Unsere natürliche Abbildung entsteht dann durch das Anwenden von  $\mathcal{H}^q\Gamma$  und die Erkenntnis, daß darunter der rechte Morphismus oben ein Isomorphismus wird. Da unsere Auflösung azyklisch war, wird sogar auch der linke Morphismus oben unter  $\mathcal{H}^q\Gamma$  ein Isomorphismus. Nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra gibt es aber nun auch einen Morphismus  $\mathcal{T}^* \rightarrow \mathcal{I}^*$  von Auflösungen von  $\mathcal{F}$  und dessen Verknüpfung mit  $\mathcal{I}^* \rightarrow \mathcal{T}^*$  ist homotop zur Identität auf  $\mathcal{I}^*$ . Das zeigt, daß ein und wieder nach dem Hauptlemma der homologischen Algebra dann auch jeder Morphismus von Auflösungen  $\mathcal{G}^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^*$  nach Anwenden von  $\mathcal{H}^q\Gamma$  das Inverse unserer natürlichen Abbildung  $\text{nat} : \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{I}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q\mathcal{F}$  liefert.  $\square$

2.3.17. Gegeben eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  und Morphismen von Auflösungen dieser Garbe  $\mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{A}^* \leftarrow \mathcal{G}^*\mathcal{F}$  mit  $\mathcal{A}^*$  azyklisch können wir die natürliche Abbildung aus 2.3.2 auch erhalten als die Verknüpfung

$$\mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{A}^* \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}^q\Gamma\mathcal{G}^*\mathcal{F} = \mathcal{H}^q\mathcal{F}$$

In der Tat folgt das sofort mit der Natürlichkeit 2.3.4 aus 2.3.16, wenn wir zusätzlich eine injektive Auflösung wählen und von allen drei Auflösungen den Homotopielift der Identität dorthin nehmen. Insbesondere sehen wir im Fall  $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* = \mathcal{G}^*\mathcal{F}$ , daß die natürliche Abbildung zur Godement-Auflösung die Identität sein muß.

## 2.4 Rückzug von Garben

**Definition 2.4.1.** Sei  $\mathcal{B}$  eine Kategorie. Unter einer **Kategorienfaserung**  $\mathcal{C}_/ = (\mathcal{C}_/, \circ, c)$  **über**  $\mathcal{B}$  verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Objekt  $B \in \mathcal{B}$  eine Kategorie  $\mathcal{C}_{/B}$  zuordnet, jedem Morphismus  $f : B' \rightarrow B$  in  $\mathcal{B}$  einen Funktor  $f^\circ : \mathcal{C}_{/B} \rightarrow \mathcal{C}_{/B'}$ , und jedem Paar von verknüpfbaren Morphismen eine Isotransformation  $c = c(g, f) : g^\circ \circ f^\circ \xrightarrow{\sim} (f \circ g)^\circ$  derart, daß  $\text{id}^\circ$  stets eine Äquivalenz von Kategorien ist und daß stets kommutiert

$$\begin{array}{ccc} h^\circ \circ g^\circ \circ f^\circ & \Rightarrow & (g \circ h)^\circ \circ f^\circ \\ \downarrow & & \downarrow \\ h^\circ \circ (f \circ g)^\circ & \Rightarrow & (f \circ g \circ h)^\circ \end{array}$$

mit den in hoffentlich offensichtlicher Weise gebildeten Transformationen. Wir nennen die Funktoren  $f^\circ$  die **Rückhofunktoren** unserer Kategorienfaserung und  $\mathcal{B}$  ihre **Basis**. Gilt stärker  $g^\circ \circ f^\circ = (f \circ g)^\circ$  und  $\text{id}^\circ = \text{id}$ , so sprechen wir von einer **strikten Kategorienfaserung**.

*Beispiel 2.4.2.* Jeder Funktor  $F : \mathcal{B} \rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}}$  definiert eine strikte Kategorienfaserung über  $\mathcal{B}$  mit der diskreten Kategorie  $F(B)$  als Faser über  $B$  und den von den Abbildungen  $f^\circ = F(f)$  induzierten Rückhofunktoren.

2.4.3. Wir definieren nun eine Kategorienfaserung  $\text{Ens}_/$  über der Kategorie der topologischen Räume. Jedem topologischen Raum  $X$  ordnet sie die Kategorie  $\text{Ens}_{/X}$  aller Garben von Mengen über  $X$  zu. Gegeben eine stetige Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  definieren wir das **inverse Bild** von Garben, einen Funktor

$$f^\circ : \text{Ens}_{/X} \rightarrow \text{Ens}_{/Y}$$

als die Zuordnung, die jeder Garbe  $\mathcal{G}$  auf  $X$  die Garbe der stetigen Schnitte des Faserprodukts des étalen Raums von  $\mathcal{G}$  mit  $Y$  zuordnet, in Formeln

$$f^\circ \mathcal{G} := \mathcal{S}_Y(Y \times_X \bar{\mathcal{G}})$$

Gleichbedeutend sprechen wir auch vom **Zurückholen von Garben**. Jeder Rückzug eines étalen Morphismus ist étale nach ??, folglich liefert die Adjunktion 1.4.25 einen Homöomorphismus von étalen Räumen

$$\overline{f^\circ \mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} Y \times_X \bar{\mathcal{G}}$$

über  $Y$ . Ich hoffe, daß das eine gewisse Anschauung für das inverse Bild einer Garbe gibt. Es führt auch zum letzten Datum unserer Kategorienfaserung: Wir erklären für je zwei verknüpfbare stetige Abbildungen  $g : X \rightarrow Y$  und  $f : Y \rightarrow Z$  unsere Isotransformation

$$c = c(g, f) : g^\circ \circ f^\circ \xrightarrow{\sim} (f \circ g)^\circ$$

indem wir beachten, daß für jede Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ens}_{/Z}$  die étalen Räume zu  $g^\circ(f^\circ \mathcal{F})$  und  $(f \circ g)^\circ \mathcal{F}$  nach 1.3.1.7 dasselbe Diagramm kartesisch machen.

2.4.4. Daß die in 2.4.3 gegebenen Daten die Axiome 2.4.1 einer Kategorienfaserung erfüllen, scheint mir offensichtlich. Analog erklären wir auch die Kategorienfaserung  $\text{Ab}_/$  über der Kategorie der topologischen Räume, die jedem topologischen Raum  $X$  die Kategorie der abelschen Garben auf  $X$  zuordnet, und noch allgemeiner für jeden Ring  $k$  die Kategorienfaserung  $k\text{-Mod}_/$ , die jedem topologischen Raum  $X$  die Kategorie der Garben von  $k$ -Moduln auf  $X$  zuordnet.

2.4.5. In der Literatur werden inverse Bilder von Garben statt  $f^\circ$  wie hier meist  $f^{-1}$  notiert. Ich will jedoch später das direkte Bild  $f_\circ$  notieren statt wie üblich  $f_*$  und will für diese adjungierten Funktoren symmetrische Notationen verwenden.

*Beispiel 2.4.6.* Das Zurückholen von Garben unter der Einbettung einer Teilmenge haben wir bereits in 1.4.34 als “Einschränkung” kennengelernt.

2.4.7. Gegeben eine Kategorienfaserung können wir jedem Objekt der Basis  $B \in \mathcal{B}$  eine Isotransformation  $\text{can} : \text{id}^\circ \xrightarrow{\sim} \text{Id}$  von Funktoren  $\mathcal{C}_{/B} \rightarrow \mathcal{C}_{/B}$  zwischen dem Zurückholen mit der Identität auf  $B$  und dem Identitätsfunktorktor auf  $\mathcal{C}_{/B}$  zuordnen durch die Vorschrift, daß sie unter dem Anwenden der Äquivalenz von Kategorien  $\text{id}^\circ : \mathcal{C}_{/B} \rightarrow \mathcal{C}_{/B}$  der Isotransformation  $c(\text{id}, \text{id}) : \text{id}^\circ \circ \text{id}^\circ \xrightarrow{\sim} \text{id}^\circ$  entsprechen möge, in Formeln  $\text{id}^\circ \text{can} = c(\text{id}, \text{id})$ . Zur Übung mag der Leser zeigen, daß dann auch gilt  $\text{can id}^\circ = c(\text{id}, \text{id})$ .

*Beispiel 2.4.8.* Im Fall unserer Kategorienfaserung  $\text{Ens}_/$  liefert unsere Isotransformation aus 2.4.7 die offensichtlichen Isomorphismen  $\text{id}^\circ \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ .

**Definition 2.4.9.** Gegeben eine Menge  $G$  notieren wir  $G_{/top} \in \text{Ens}_{/top}$  die Garbe über dem einpunktigen Raum  $\text{top}$  mit Faser  $G$  und erhalten so eine Äquivalenz von Kategorien  $\text{Ens} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{/top}$ .

2.4.10 (**Grundkonstruktionen**). Wir wollen im folgenden die Theorie aus möglichst wenigen Grundkonstruktionen aufbauen und versuchen es erst einmal mit unserer Kategorienfaserung 2.4.3 und der Äquivalenz  $\text{Ens} \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{/top}$ ,  $G \mapsto G_{/top}$  des Bildens konstanter Garben auf einem Punkt 2.4.9. Dieses Vorgehen hat einerseits den Vorteil, daß man viele Argumente und abgeleitete Konstruktionen leicht auf ähnlich gelagerte Situationen übertragen kann, und andererseits, daß weniger Verträglichkeiten zu prüfen bleiben.

*Ergänzung 2.4.11.* Eine genauere Analyse zeigt, daß das wesentliche Datum schlicht eine Kategorienfaserung über einer Kategorie mit finalem Objekt ist derart, daß die Faser über besagtem finalen Objekt ihrerseits ein finales Objekt besitzt. Diese Struktur reicht aus, um konstante Garben zu bilden, jeder Garbe die Menge ihrer globalen Schnitte zuzuordnen, und den Rückzug auf globalen Schnitten zu erklären.

2.4.12. Bezeichnet  $\text{fin}_X : X \rightarrow \text{top}$  wie “final” die konstante Abbildung von einem beliebigen topologischen Raum  $X$  auf den einpunktigen Raum  $\text{top}$ , so haben wir einen kanonischen Isomorphismus  $\text{fin}_X^\circ G_{/top} \xrightarrow{\sim} G_X$  zwischen dem inversen Bild der konstanten Garbe auf dem Punkt und der konstanten Garbe auf unserem Raum  $X$ . Im Sinne eines systematischen Aufbaus der Theorie aus den Grundkonstruktionen 2.4.10 nehmen wir das von nun als

Definition der konstanten Garbe und setzen also

$$G_X := \text{fin}_X^\circ G_{/\text{top}}$$

Damit liefert nach 2.4.3 für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  unser  $c(f, \text{fin}_Y)$  insbesondere einen Isomorphismus  $c(f, \text{fin}_Y) : f^\circ G_Y \xrightarrow{\sim} G_X$ , und unsere Isotransformation aus 2.4.7 liefert einen Isomorphismus  $G_{\text{top}} \xrightarrow{\sim} G_{/\text{top}}$ .

2.4.13. Im folgenden bezeichnen wir die einelementige Menge mit  $\text{ens}$ , um sie vom einelementigen Raum  $\text{top}$  zu unterscheiden. Den Funktor des Bildens der globalen Schnitte  $\Gamma : \text{Ens}_{/X} \rightarrow \text{Ens}$  können wir aus den Grundkonstruktionen 2.4.10 erhalten als

$$\Gamma \mathcal{F} := \text{Ens}_{/X}(\text{ens}_X, \mathcal{F})$$

für  $\text{ens}_X = \text{fin}_X^\circ \text{ens}_{/\text{top}}$  die konstante Garbe auf  $X$  mit der einelementigen Menge  $\text{ens}$  als Faser, als da heißt, mit zu  $\text{id} : X \rightarrow X$  isomorphem étalem Raum. Unsere Grundkonstruktionen liefern dann weiter für jede stetige Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  eine Abbildung

$$f^* : \Gamma \mathcal{F} \rightarrow \Gamma f^\circ \mathcal{F}$$

auf den globalen Schnitten, das sogenannte **Zurückholen von Schnitten**, als die Verknüpfung der in hoffentlich offensichtlicher Weise gegebenen Abbildungen

$$\text{Ens}_{/X}(\text{ens}_X, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Ens}_{/Y}(f^\circ \text{ens}_X, f^\circ \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{/Y}(\text{ens}_Y, f^\circ \mathcal{F})$$

*Ergänzung* 2.4.14. Das Zurückholen von Schnitten kann in unserer Konstruktion der zurückgeholten Garbe 2.4.3 alternativ auch mithilfe der universellen Eigenschaft des Faserprodukts explizit beschrieben werden.

*Ergänzung* 2.4.15. Die im vorhergehenden eingeführten Konstruktionen können analog für eine beliebige Kategorienfaserung durchgeführt werden, deren Basis ein finales Objekt  $\text{pt} = \text{pt}(\mathcal{B})$  besitzt. Wählen wir dann  $E \in \mathcal{C}_{/\text{pt}}$ , so können wir für jedes  $X \in \mathcal{B}$  den Funktor

$$\Gamma = \Gamma_E := \mathcal{C}_{/X}(\text{fin}_X^\circ(E), \ ) : \mathcal{C}_{/X} \rightarrow \text{Ens}$$

betrachten und Transformationen  $f^* : \Gamma \Rightarrow \Gamma f^\circ$  erklären, die das Zurückholen von Schnitten verallgemeinern. Sogar in dieser Allgemeinheit kommutiert für je zwei verknüpfbare Morphismen  $f$  und  $g$  in  $\mathcal{B}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{f^*} & \Gamma f^\circ \\ (fg)^* \downarrow & & \downarrow g^* f^\circ \\ \Gamma(fg)^\circ & \xleftarrow{c(g,f)} & \Gamma g^\circ f^\circ \end{array}$$

und liefert  $\text{id}^*$  stets Bijektionen  $\text{id}^* : \Gamma \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma \text{id}^\circ \mathcal{F}$  alias eine Isotransformation  $\text{id}^* : \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma \text{id}^\circ$ .

2.4.16. Gegeben eine Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ens}/X$  und ein Punkt  $x \in X$  bezeichnen wir die Einbettung mit Bild  $x$  des einpunktigen Raums mit  $i_x : \text{top} \hookrightarrow X$ . Wir erhalten dann eine kanonische Bijektion  $\Gamma i_x^\circ \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x$ , unter der das Zurückholen eines Schnittes aus  $\Gamma \mathcal{F}$  dem Übergang zu seinem Halm an der Stelle  $x \in X$  entspricht. Im Sinne eines Aufbaus der Theorie aus den Grundkonstruktionen 2.4.10 nehmen von nun an die linke Seite als unsere Definition des Halms und setzen also

$$\mathcal{F}_x := \Gamma i_x^\circ \mathcal{F}$$

2.4.17. Im Fall abelscher Garben gehen wir ähnlich vor. Gegeben eine abelsche Gruppe  $G$  notieren wir  $G/\text{top} \in \text{Ab}/\text{top}$  die abelsche Garbe über dem einpunktigen Raum  $\text{top}$  mit Faser  $G$  und nehmen diese Konstruktion zusammen mit unserer Kategorienfaserung  $\text{Ab}/\text{Top}$  als Grundkonstruktionen. Dann definieren wir die konstante Garbe mit Faser  $G$  auf einem Raum  $X$  als

$$G_X := \text{fin}_X^\circ G/\text{top}$$

und konstruieren den Funktor  $\Gamma : \text{Ab}/X \rightarrow \text{Ab}$  des Bildens der globalen Schnitte aus unseren Grundkonstruktionen als

$$\Gamma \mathcal{F} := \text{Ab}/X(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F})$$

Nun liefern für jede stetige Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  unsere Grundkonstruktionen einen Gruppenhomomorphismus

$$f^* : \Gamma \mathcal{F} \rightarrow \Gamma f^\circ \mathcal{F}$$

auf den globalen Schnitten, den wir wieder das **Zurückholen** nennen, und schließlich konstruieren wir den Halm einer abelschen Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem Raum  $X$  an einer Stelle  $x \in X$  aus unseren Grundkonstruktionen als

$$\mathcal{F}_x := \Gamma i_x^\circ \mathcal{F}$$

2.4.18. Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und  $x \in X$  folgt aus  $f \circ i_x = i_{f(x)}$  sofort, daß  $c(f, i_x)$  auf den Halmen einen Isomorphismus  $\mathcal{F}_{f(x)} \xrightarrow{\sim} (f^\circ \mathcal{F})_x$  induziert. Wir können diesen Isomorphismus alternativ auch unmittelbar aus der Definition der beteiligten Objekte ablesen.

**Lemma 2.4.19.** *Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist das Zurückholen abelscher Garben ein exakter Funktor  $f^\circ : \text{Ab}/Y \rightarrow \text{Ab}/X$ .*

*Beweis.* Der Halm der zurückgeholten Garbe an einem Punkt  $y \in Y$  ist per definitionem kanonisch isomorph zum Halm der ursprünglichen Garbe am Punkt  $f(y) \in X$ . Das Lemma folgt, da die Exaktheit einer Sequenz von Garben nach ?? äquivalent ist zur Exaktheit der auf den Halmen induzierten Sequenzen.  $\square$

## 2.5 Rückzug in der Garbenkohomologie

2.5.1. Von ihrer Definition her liefert die Garbenkohomologie insbesondere für jeden topologischen Raum  $X$  Funktoren  $\text{Ab}/_X \rightarrow \text{Ab}$  von der Kategorie der abelschen Garben auf  $X$  in die Kategorie der abelschen Gruppen. Wenn wir den Funktor davorschalten, der jeder Gruppe die entsprechende konstante Garbe zuordnet, erhalten wir auch von Funktoren von den abelschen Gruppen in die abelschen Gruppen. In diesem Abschnitt will ich erklären, inwiefern die Garbenkohomologie bei einer festen Koeffizientengruppe auch kontravariante Funktoren  $\text{Top} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$  von den topologischen Räumen in die abelschen Gruppen liefert.

**Definition 2.5.2.** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $Y$  definieren wir das **Zurückholen auf der Kohomologie** als die Homomorphismen von abelschen Gruppen

$$f^* : H^q(Y; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X; f^* \mathcal{F})$$

gegeben durch die Verknüpfungen  $\mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^q \Gamma f^* \mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow H^q(X; f^* \mathcal{F})$ , wobei die erste Abbildung vom Zurückholen globaler Schnitte der Godement-Auflösung  $\Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow \Gamma f^* \mathcal{G}^* \mathcal{F}$  induziert wird und die zweite von der in 2.3.2 erklärten natürlichen Abbildung zur Auflösung  $f^* \mathcal{F} \hookrightarrow f^* \mathcal{G}^* \mathcal{F}$ .

2.5.3. Aus unseren Konstruktionen folgt, daß  $f^*$  für jedes  $q$  eine Transformation von Funktoren  $\text{Ab}/_Y \rightarrow \text{Ab}$  liefert. Weiter folgt, daß  $\text{id}^*$  stets Isomorphismen  $\text{id}^* : H^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X; \text{id}^* \mathcal{F})$  liefert. Beim Beweis von 2.5.10 werden wir zusätzlich sehen, daß diese Isomorphismen invers sind zu denen, die von unseren  $\text{can} : \text{id}^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  aus 2.4.7 auf der Kohomologie induziert werden.

**Definition 2.5.4.** Ist speziell  $G$  eine abelsche Gruppe und benutzen wir zusätzlich den kanonischen Isomorphismus  $f^* G_Y \xrightarrow{\sim} G_X$ , so erhalten wir auch in der Garbenkohomologie für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  eine kanonische Abbildung

$$f^* : H^q(Y; G_Y) \rightarrow H^q(X; G_X)$$

als die Verknüpfung  $H^q(Y; G_Y) \rightarrow H^q(X; f^* G_Y) \xrightarrow{\sim} H^q(X; G_X)$ . Wir nennen auch diese Abbildung das **Zurückholen auf der Kohomologie**.

2.5.5 (**Zurückholen von Torsoren**). Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$  eine indizierte offene Überdeckung von  $Y$  und  $f^{-1} \mathcal{V} = (f^{-1} V_i)_{i \in I}$  die davon induzierte indizierte offene Überdeckung von  $X$  und  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe

auf  $Y$  und  $f^* : \check{C}^*(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^*(f^{-1}\mathcal{V}; f^*\mathcal{F})$  die durch das Zurückholen von Schnitten erklärte Kettenabbildung und  $f^* : \check{H}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(f^{-1}\mathcal{V}; f^*\mathcal{F})$  die davon induzierte Abbildung auf der Kohomologie. So kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^q(\mathcal{V}; \mathcal{F}) & \rightarrow & H^q(Y; \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}^q(f^{-1}\mathcal{V}; f^*\mathcal{F}) & \rightarrow & H^q(X; f^*\mathcal{F}) \end{array}$$

mit der eben gegebenen linken Vertikale, dem Zurückholen auf der Garbenkohomologie in der rechten Vertikalen und den kanonischen Morphismen aus 2.2.4 in den Horizontalen, wie der Leser zur Übung selbst zeigen mag. Speziell im Fall  $q = 1$  ergibt sich für jede abelsche Gruppe  $G$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \{G\text{-Torsoren auf } Y\} & \leftarrow & \check{H}^1(\mathcal{V}; G_Y) & \rightarrow & H^1(Y; G_Y) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \{G\text{-Torsoren auf } X\} & \leftarrow & \check{H}^1(f^{-1}\mathcal{V}; G_X) & \rightarrow & H^1(X; G_X) \end{array}$$

mit dem Zurückholen von Torsoren in der linken Vertikalen, und indem wir zu jedem Torsor eine trivialisierende Überdeckung wählen, ergibt sich schließlich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{G\text{-Torsoren auf } Y\} & \xrightarrow{\sim} & H^1(Y; G_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{G\text{-Torsoren auf } X\} & \xrightarrow{\sim} & H^1(X; G_X) \end{array}$$

Dies Diagramm mag für das Zurückholen auf der ersten Garbenkohomologie eine gewisse Anschauung geben.

2.5.6. Wir wollen nun zeigen, daß für jede abelsche Gruppe  $G$  und jedes  $q$  die Zuordnungen  $X \mapsto H^q(X; G_X)$  und  $f \mapsto f^*$  in der Tat einen Funktor  $\text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  liefern. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen, bevor wir diese Behauptung dann als Lemma 2.5.10 zeigen.

**Lemma 2.5.7.** *Gegeben eine Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$  einer Garbe gibt es stets eine solche Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{T}^*$  mitsamt Morphismen von Auflösungen*

$$\mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{T}^* \leftarrow \mathcal{G}^*\mathcal{F}$$

*Erster Beweis.* Wir können als  $\mathcal{T}^*$  den Totalkomplex des Doppelkomplexes von Garben  $\mathcal{G}^*\mathcal{A}^*$  nehmen, in den  $\mathcal{A}^*$  und  $\mathcal{G}^*\mathcal{F}$  als senkrechter bzw. waagrechter Kernkomplex eingebettet sind. Die Exaktheit von  $\mathcal{T}^*$  folgt aus unseren Resultaten über Doppelkomplexe, angewandt auf die Halme.  $\square$



*Zweiter Beweis.* Wir können als  $\mathcal{T}^*$  irgendeine injektive Auflösung von  $\mathcal{F}$  nehmen, und die Morphismen aus dem Hauptlemma der homologischen Algebra erhalten.  $\square$

**Lemma 2.5.8.** *Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_Y$  eine abelsche Garbe auf  $Y$  und  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$  eine Auflösung, so kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathrm{H}^q(Y; \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q \Gamma f^* \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathrm{H}^q(X; f^* \mathcal{F}) \end{array}$$

für die in 2.3.2 erklärten natürlichen Abbildungen in den Horizontalen.

*Beweis.* Mit 2.5.7 erhalten wir durch Rückzug Morphismen von Auflösungen  $f^* \mathcal{A}^* \rightarrow f^* \mathcal{T}^* \leftarrow f^* \mathcal{G}^* \mathcal{F}$  und es ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{T}^* & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q \Gamma f^* \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathcal{H}^q \Gamma f^* \mathcal{T}^* & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H}^q \Gamma f^* \mathcal{G}^* \mathcal{F} \\ & \searrow \text{nat} & \downarrow \text{nat} & \swarrow \text{nat} & \\ & & \mathrm{H}^q(X; f^* \mathcal{F}) & & \end{array}$$

bei dem das Kommutieren der unteren Dreiecke aus 2.3.4 abgeleitet wird und die Komposition der rechten Außenkante per definitionem das Zurückholen auf der Kohomologie ist.  $\square$

**Proposition 2.5.9 (Funktorialität der Garbenkohomologie).** *Gegeben stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  und eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $Z$  kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^q(Z; \mathcal{F}) & \xrightarrow{g^*} & \mathrm{H}^q(Y; g^* \mathcal{F}) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{H}^q(X; f^*(g^* \mathcal{F})) \\ \parallel & & & & \downarrow \wr \\ \mathrm{H}^q(Z; \mathcal{F}) & \xrightarrow{(g \circ f)^*} & & & \mathrm{H}^q(X; (g \circ f)^* \mathcal{F}) \end{array}$$

wobei die rechte Vertikale von  $c(f, g) : f^*(g^* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (g \circ f)^* \mathcal{F}$  aus 2.4.3 induziert wird.

*Beweis.* Mit 2.5.7 finden wir für  $g^* \mathcal{F}$  eine beliebige Auflösung  $\mathcal{T}^*$  nebst Morphismen von Auflösungen

$$g^* \mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{T}^* \leftarrow \mathcal{G}^* g^* \mathcal{F}$$

und dann weiter durch Rückzug für  $f^\circ g^\circ \mathcal{F}$  Morphismen von Auflösungen

$$f^\circ g^\circ \mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow f^\circ \mathcal{T}^* \leftarrow f^\circ \mathcal{G}^* g^\circ \mathcal{F}$$

Wenden wir auf diese Zeilen  $\mathcal{H}^q \Gamma$  an und ergänzen links das offensichtliche kommutative Dreieck und unten die natürlichen Abbildungen aus 2.3.2 nach  $H^q(X; f^\circ g^\circ \mathcal{F})$ , so erhalten wir nach 2.5.8 und 2.3.4 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q \Gamma g^\circ \mathcal{G}^* \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{T}^* & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{G}^* g^\circ \mathcal{F} \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathcal{H}^q \Gamma f^\circ g^\circ \mathcal{G}^* \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q \Gamma f^\circ \mathcal{T}^* & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H}^q \Gamma f^\circ \mathcal{G}^* g^\circ \mathcal{F} \\ & & & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & & & H^q(X; f^\circ g^\circ \mathcal{F}) & & \end{array}$$

Die Komposition der oberen Horizontale ist  $g^* : H^q(Z; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(Y; g^\circ \mathcal{F})$ . Die Komposition der rechten Kante ist  $f^* : H^q(Y; g^\circ \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X; f^\circ g^\circ \mathcal{F})$ . Die Komposition der linken Kante schließlich ist

$$(g \circ f)^* : H^q(Z; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X; (g \circ f)^\circ \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(X; f^\circ g^\circ \mathcal{F}) \quad \square$$

**Lemma 2.5.10.** *Mit den in 2.5.4 für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  erklärten Homomorphismen  $f^* : H^q(Y; G_Y) \rightarrow H^q(X; G_X)$  wird die Garbenkohomologie mit Koeffizienten in einer beliebig vorgegebenen abelschen Gruppe  $G$  ein kontravarianter Funktor  $\text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ .*

*Beweis.* Es gilt zu zeigen  $\text{id}^* = \text{id}$  und  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ . Nehmen wir in 2.5.9 speziell  $f = g = \text{id}$  und beachten, daß  $\text{id}^*$  nach 2.5.3 ein Isomorphismus sein muß, so folgt, daß die Verknüpfung

$$H^q(X; \text{id}^\circ \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{id}^*} H^q(X; \text{id}^\circ(\text{id}^\circ \mathcal{F})) \xrightarrow{c} H^q(X; \text{id}^\circ \mathcal{F})$$

die Identität ist für  $c$  die von  $c(\text{id}, \text{id})$  induzierte Abbildung. Nach 2.4.7 ist das jedoch auch die von  $\text{can}_{\text{id}^\circ \mathcal{F}}$  induzierte Abbildung. Dann ist jedoch auch die Verknüpfung

$$H^q(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{id}^*} H^q(X; \text{id}^\circ \mathcal{F}) \xrightarrow{c} H^q(X; \mathcal{F})$$

mit  $c$  der von  $\text{can}_{\mathcal{F}} : \text{id}^\circ \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$  induzierten Abbildung die Identität für jede Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_X$ , da unsere Verknüpfung eine Transformation von Funktoren  $\text{Ab}_X \rightarrow \text{Ab}$  ist. Wenden wir diese Erkenntnis auf  $\mathcal{F} = G_X$  an und beachten 2.4.7, so folgt  $\text{id}^* = \text{id}$ . Die Ableitung von  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$  aus 2.5.9 und den Definitionen sei dem Leser überlassen.  $\square$

## 2.6 Parakompakte Räume

- Definition 2.6.1.**
1. Ein System von Teilmengen  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  eines topologischen Raums  $X$  heißt **lokal endlich** genau dann, wenn jedes  $x \in X$  eine Umgebung besitzt, die höchstens endlich viele  $U \in \mathcal{U}$  trifft.
  2. Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  eine Überdeckung von  $X$ . Eine Überdeckung  $\mathcal{V}$  von  $X$  heißt eine **Verfeinerung von  $\mathcal{U}$**  genau dann, wenn jedes  $V \in \mathcal{V}$  in mindestens einem  $U \in \mathcal{U}$  enthalten ist.
  3. Ein topologischer Raum heißt **parakompakt** genau dann, wenn er Hausdorff'sch ist und sich jede offene Überdeckung unseres Raums zu einer lokal endlichen offenen Überdeckung verfeinern läßt.

*Übung 2.6.2.* Die Vereinigung über ein beliebiges lokal endliches System abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Ist eine Abbildung stetig auf jeder der Teilmengen einer lokal endlichen Überdeckung eines Raums durch abgeschlossene Teilmengen, so ist sie schon selbst stetig.

**Proposition 2.6.3 (Kriterium für Parakompaktheit).** *Besitzt ein Hausdorffraum eine abzählbare Überdeckung durch offene Teilmengen mit kompaktem Abschluß, so ist er parakompakt.*

*Beweis.* Indem wir zu geeigneten Vereinigungen übergehen dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit sogar annehmen, unser Raum sei überdeckt durch eine aufsteigende Folge  $X_0 \subset X_1 \subset \dots$  von offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß. Indem wir zu einer geeigneten Teilfolge übergehen, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß für alle  $n$  gilt  $\bar{X}_n \subset X_{n+1}$ . Um Sonderbetrachtungen zu vermeiden setzen wir  $X_n = \emptyset$  für  $n < 0$ . Gegeben eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  unseres Raums werden die Kompakta  $\bar{X}_{n+1} \setminus X_n$  jeweils schon überdeckt von den  $U$  aus einem endlichen Teilsystem  $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$ . Die Schnitte  $U \cap (X_{n+2} \setminus \bar{X}_{n-1})$  für  $U \in \mathcal{U}_n$  und  $n \in \mathbb{Z}$  bilden dann die gesuchte lokal endliche Verfeinerung der Überdeckung  $\mathcal{U}$ .  $\square$

**Proposition 2.6.4.** *Jeder parakompakte Raum ist normal.*

*Beweis.* Das folgt mit zweimaligem Anwenden des anschließenden technischen Lemmas, erst im Fall einer einpunktigen Menge  $B$ , dann im Allgemeinen.  $\square$

**Lemma 2.6.5.** *Seien  $A, B$  disjunkte abgeschlossene Mengen in einem parakompakten Raum  $X$ . Zu jedem  $x \in A$  gebe es disjunkte offene Teilmengen  $U_x, V_x \Subset X$  mit  $x \in U_x$  und  $B \subset V_x$ . So gibt es auch disjunkte offene  $U, V \Subset X$  mit  $A \subset U$  und  $B \subset V$ .*

*Beweis.* Die  $U_x$  mitsamt  $X \setminus A$  bilden eine offene Überdeckung von  $X$ . Sei  $\mathcal{W}$  eine offene lokal endliche Verfeinerung dieser offenen Überdeckung. Setzen wir  $\mathcal{W}_A = \{W \in \mathcal{W} \mid W \cap A \neq \emptyset\}$ , so ist jedes  $W \in \mathcal{W}_A$  in einem  $U_x$  enthalten, die Vereinigung  $U = \bigcup_{W \in \mathcal{W}_A} W$  ist offen, und wir haben  $A \subset U$ . Andererseits besitzt jedes  $y \in B$  eine offene Umgebung  $C_y$ , die nur endlich viele Mengen  $W_1, \dots, W_n$  aus  $\mathcal{W}_A$  trifft. Wählen wir nun  $x(i) \in A$  mit  $W_i \subset U_{x(i)}$ , so ist  $D_y = C_y \cap V_{x(1)} \cap \dots \cap V_{x(n)}$  offen und trifft überhaupt keine Menge aus  $\mathcal{W}_A$ . Damit ist  $V = \bigcup_{y \in B} D_y$  offen mit  $V \cap U = \emptyset$  und  $B \subset V$ .  $\square$

**Proposition 2.6.6 (Schrumpfen offener Überdeckungen).** *Ist  $X$  ein parakompakter Raum und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so finden wir eine offene Überdeckung  $(V_i)_{i \in I}$  von  $X$  mit  $\bar{V}_i \subset U_i \quad \forall i \in I$ .*

*Beweis.* Aufgrund der Normalität von  $X$  besitzt jedes  $x \in X$  eine offene Umgebung  $W_x$ , deren Abschluß in einem  $U_i$  enthalten ist, sagen wir  $\bar{W}_x \subset U_{i(x)}$ . Sei  $\mathcal{W}$  eine lokal endliche offene Verfeinerung der offenen Überdeckung von  $X$  durch die  $W_x$ . So finden wir auch für jedes  $W \in \mathcal{W}$  ein  $i = i(W)$  mit  $\bar{W} \subset U_{i(W)}$ . Dann setzen wir  $V_j = \bigcup_{i(W)=j} W$  und erhalten  $\bar{V}_j \subset U_j$ , da die Vereinigung einer lokal endlichen Familie abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist.  $\square$

**Lemma 2.6.7 (Teilung der Eins).** *Ist  $X$  eine glatte parakompakte Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so gibt es eine durch  $U \in \mathcal{U}$  indizierte Familie von glatten Funktionen  $\alpha_U : X \rightarrow [0, 1]$  derart, daß  $\alpha_U$  jeweils Träger in  $U$  hat, daß jede Stelle  $x \in X$  eine Umgebung besitzt, auf der nur endlich viele unserer Funktionen nicht verschwinden, und daß an jeder Stelle  $x \in X$  gilt*

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} \alpha_U(x) = 1$$

2.6.8. Sind etwa  $A, B \not\subset X$  disjunkt und abgeschlossen, so gibt es eine glatte Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f = 1$  auf einer offenen Umgebung von  $A$  und  $f = 0$  auf einer offenen Umgebung von  $B$ . In der Tat folgt das sofort, wenn man das Lemma auf die Überdeckung von  $X$  durch die Komplemente unserer beiden abgeschlossenen Mengen anwendet.

*Beweis.* Können wir unseren Satz für eine lokal endliche Verfeinerung unserer Überdeckung  $\mathcal{U}$  zeigen, so folgt er mühelos für  $\mathcal{U}$  selber. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere Überdeckung lokal endlich ist und daß die überdeckenden Mengen  $U_i$  jeweils kompakten Abschluß haben, der darüber hinaus noch ganz im Bild einer Karte liegt. Wählen wir dann eine Schrumpfung  $(V_i)$  unserer Überdeckung, so finden wir

etwa nach ?? angewandt auf den Fall der Überdeckung von  $\bar{V}_i$  durch  $U_i$  glatte Funktionen  $\beta_i : U_i \rightarrow [0, 1]$  mit kompaktem Träger, die auf  $\bar{V}_i$  konstant Eins sind. Dehnen wir diese durch Null auf ganz  $X$  aus und bilden ihre Summe, so erhalten wir eine glatte überall positive Funktion  $\beta$ , und die Quotienten  $\alpha_i = \beta_i/\beta$  bilden die gesuchte Teilung der Eins.  $\square$

## 2.7 Garben auf parakompakten Räumen

**Proposition 2.7.1.** *Gegeben eine Garbe von Mengen auf einem parakompakten Raum läßt sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge auf eine offene Umgebung unserer abgeschlossenen Teilmenge fortsetzen.*

*Ergänzung 2.7.2.* In 2.11.17 zeigen wir dieselbe Aussage für kompakte “relativ Hausdorff’sche” Teilmengen beliebiger topologischer Räume. Ein Gegenbeispiel für eine nicht abgeschlossene Teilmenge liefert etwa die konstante Garbe  $\mathbb{Z}_X$  auf  $X = \mathbb{R}$  mit demjenigen Schnitt auf der Teilmenge  $A = \{1/n \mid n = 1, 2, \dots\}$ , der am Punkt  $1/n$  den Wert  $(-1)^n$  annimmt.

*Beweis.* Sei  $X$  unser Raum,  $A \not\subset X$  unsere abgeschlossene Teilmenge und  $\mathcal{F}$  unsere Garbe. Gegeben  $s \in \mathcal{F}(A)$  finden wir wegen  $A \not\subset X$  eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $X$  und Schnitte  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  mit  $s|_{U_i \cap A} = s_i|_{U_i \cap A} \forall i$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir unsere Überdeckung lokal endlich annehmen. Nach 2.6.6 finden wir auch  $V_i \subset X$  mit  $\bar{V}_i \subset U_i \quad \forall i$  und  $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ . Jetzt setzen wir

$$W = \{x \in X \mid \text{Alle } s_i \text{ zu Indizes } i \text{ mit } x \in \bar{V}_i \text{ haben denselben Halm bei } x\}$$

Per definitionem gilt  $A \subset W$  und  $W$  ist offen. Da gilt  $s_i|_{W \cap V_i \cap V_j} = s_j|_{W \cap V_i \cap V_j} \quad \forall i, j$  verkleben die Schnitte  $s_i|_{W \cap V_i}$  zu einem Schnitt  $\tilde{s}$  auf  $W$ , der  $s$  fortsetzt.  $\square$

**Definition 2.7.3.** Eine Garbe heißt **weich** (englisch **soft**, französisch **mou**) genau dann, wenn sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

*Beispiele 2.7.4.* Jede welche Garbe auf einem parakompakten Raum ist weich nach 2.7.1. Die Garbe der glatten Funktionen auf einer parakompakten Mannigfaltigkeit ist weich: Um das zu sehen, dehnt man einen Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge zunächst mithilfe von 2.7.1 auf eine offene Menge aus und biegt ihn dann in dieser offenen Menge mithilfe einer glatten Partition der Eins 2.6.8 herunter nach Null, so daß man ihn weiter durch Null ausdehnen kann zu einem globalen Schnitt. Man beachte hierbei, daß ein Schnitt der Garbe der glatten Funktionen auf einer abgeschlossenen Teilmenge einer

glatten Mannigfaltigkeit keineswegs eine Funktion auf dieser abgeschlossenen Teilmenge ist: An den Randpunkten zeichnet ein Schnitt dieser Garbe einen ganzen Funktionskeim auf einer offenen Umgebung des besagten Punktes in der ursprünglichen Mannigfaltigkeit aus und keineswegs nur einen Funktionswert. Analog sind auch die Garben der glatten  $p$ -Formen und allgemeiner der glatten Schnitte in irgendeinem glatten Vektorraumbündel weich.

*Übung 2.7.5.* Die Garbe der stetigen Funktionen auf einem parakompakten Raum mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ist weich. Hinweis: Tietzes Erweiterungslemma ?? und Normalität 2.6.4. Dasselbe gilt für die Garbe der stetigen Schnitte in einem beliebigen Vektorraumbündel.

**Satz 2.7.6.** *Auf parakompakten Räumen sind alle weichen abelschen Garben azyklisch.*

*Beweis.* Das folgt genau wie bei den weichen Garben 1.10.3 aus dem anschließenden Lemma.  $\square$

**Lemma 2.7.7.** *Sei  $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem parakompakten topologischen Raum  $X$ .*

1. *Ist  $\mathcal{F}'$  weich, so induziert der Epimorphismus  $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$  eine Surjektion  $\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}''$  auf den globalen Schnitten.*
2. *Sind  $\mathcal{F}'$  und  $\mathcal{F}$  weich, so ist auch  $\mathcal{F}''$  weich.*

*Beweis.* 1. Sei  $s'' \in \Gamma\mathcal{F}''$  gegeben. Es gibt eine lokal endliche offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  unseres Raums und  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  mit  $s_i \mapsto s''|_{U_i} \forall i$ . Nach 2.6.6 finden wir eine weitere offene Überdeckung  $(\bar{V}_i)_{i \in I}$  mit  $\bar{V}_i \subset U_i \forall i$ . Für  $J \subset I$  setzen wir  $\bar{V}_J = \bigcup_{i \in J} \bar{V}_i$ . Nun betrachten wir die Menge aller Paare  $(s_J, J)$  mit  $J \subset I$  und  $s_J$  einem Schnitt von  $\mathcal{F}$  über  $\bar{V}_J$ , der auf  $s''|_{\bar{V}_J}$  geht. Auf dieser Menge erklären wir eine partielle Ordnung durch die Vorschrift  $(s_K, K) \leq (s_J, J) \Leftrightarrow (K \subset J \text{ und } s_K = s_J|_{\bar{V}_K})$ . Nach 2.6.2 ist unsere Menge induktiv geordnet und besitzt folglich ein maximales Element. Sei  $(s_J, J)$  solch ein maximales Element. Wäre  $J \neq I$ , so gäbe es  $i \in I \setminus J$ . Hier unterscheiden sich  $s_i$  und  $s_J$  auf  $\bar{V}_i \cap \bar{V}_J$  nur um einen Schnitt  $s'_i$  in  $\mathcal{F}'$ , der sich nach Annahme auf ganz  $\bar{V}_i$  ausdehnen läßt. Also verkleben  $s_i - s'_i$  und  $s_J$  auf  $\bar{V}_i \cup \bar{V}_J$  zu einem Urbild von  $s''$  im Widerspruch zur Maximalität von  $(s_J, J)$ . Damit ist in der Tat  $\Gamma\mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma\mathcal{F}''$  eine Surjektion.

2. Das folgt sofort aus Teil 1, da jede abgeschlossene Teilmenge eines parakompakten Raums parakompakt ist und da die Einschränkung einer weichen Garbe auf eine abgeschlossene Teilmenge stets eine weiche Garbe bleibt.  $\square$

2.7.8. Denjenigen Lesern, die bereits mit der Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten vertraut sind, können wir nun zeigen, wie die de-Rham-Kohomologie mit der allgemeinen Garbenkohomologie zusammenhängt. Wer mit Mannigfaltigkeiten noch nicht vertraut ist, mag sich stattdessen auch einfacher aber weniger allgemein offene Teilmengen eines endlichdimensionalen reellen Raums denken.

**Korollar 2.7.9 (de-Rham-Kohomologie als Garbenkohomologie).** *Auf jeder parakompakten glatten Mannigfaltigkeit  $X$  stimmt die de-Rham-Kohomologie überein mit der Garbenkohomologie der konstanten Garbe  $\mathbb{R}_X$ .*

*Beweis.* Wir konstruieren im folgenden sogar einen ausgezeichneten Isomorphismus zwischen den fraglichen Kohomologiegruppen. Der **de-Rham-Komplex** einer glatten Mannigfaltigkeit  $X$  ist per definitionem der Komplex  $(\Omega^*(X), d)$  aller glatten Differentialformen auf  $X$  mit der äußeren Ableitung als Differential, und die **de-Rham-Kohomologie** ist per definitionem seine Kohomologie  $H^q(X)_{\text{dR}} := \mathcal{H}^q \Omega^*(X)$ . Nun können wir  $p$ -Formen auch auffassen als globale Schnitte der Garbe der  $p$ -Formen,  $\Omega^p(X) = \Gamma \Omega_X^p$ , und diese Garben bilden mit der äußeren Ableitung als Differential nach dem Poincaré-Lemma 2.7.13 eine Auflösung der konstanten Garbe

$$\mathbb{R}_X \hookrightarrow \Omega_X^*$$

Die Garben der Differentialformen sind nun aber weich nach 2.7.4 und damit azyklisch nach 2.7.6. Also berechnet unser Komplex nach 2.3.5 die Garbenkohomologie der konstanten Garbe  $\mathbb{R}_X$ , als da heißt, die natürlichen Abbildungen aus 2.3.2 sind Isomorphismen

$$H^q(X)_{\text{dR}} = \mathcal{H}^q \Gamma \Omega_X^* \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathbb{R}_X)_{\text{garb}} \quad \square$$

2.7.10. Die de-Rham-Kohomologie ist Berechnungen besonders gut zugänglich. Zum Beispiel sieht man in diesem Bild unmittelbar, daß die Kohomologie mit reellen Koeffizienten einer parakompakten Mannigfaltigkeit  $X$  oberhalb der Dimension unserer Mannigfaltigkeit verschwinden muß, in Formeln

$$H^q(X; \mathbb{R}_X) = 0 \quad \text{für } q > \dim X.$$

Der einzigen Nachteile dieser Kohomologietheorie sind, daß sie nur für glatte Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen sinnvoll definiert ist, und daß sie nur reelle Koeffizienten zuläßt.

2.7.11. Die Exponentialsequenz aus 1.11.4 liefert eine weiche und mithin nach 2.7.6 azyklische Auflösung der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}$  auf jedem reellen Intervall. Es folgt, daß ein reelles Intervall keine höhere Garbenkohomologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  besitzt. Allgemeinere Resultate in dieser Richtung werden wir mit elementareren Methoden in ?? herleiten.

*Übung 2.7.12.* Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine glatte Abbildung von glatten Mannigfaltigkeiten, so liefert das Zurückholen von Differentialformen eine Kettenabbildung  $\Omega^*Y \rightarrow \Omega^*X$ . Man zeige, daß die von dieser Kettenabbildung auf der Kohomologie induzierten Abbildungen  $H^i(Y)_{\text{dR}} \rightarrow H^i(X)_{\text{dR}}$  im Fall parakompakter Mannigfaltigkeiten  $X, Y$  unter unseren Isomorphismen dem Zurückholen auf der Garbenkohomologie entsprechen. Hinweis: 2.5.8.

**Lemma 2.7.13 (von Poincaré).** *Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Kreisscheibe, so erhalten wir einen exakten Komplex*

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

mit der Identifikation von Zahlen und konstanten Funktionen als erster Abbildung und der äußeren Ableitung als anderen Abbildungen.

*Ergänzung 2.7.14.* Ist  $U = \mathbb{R}^n$  und betrachten wir nur polynomiale Koeffizienten, so ist die entsprechende Aussage schnell gezeigt: In einer Veränderlichen liefert die Einbettung der Konstanten ja offensichtlich eine Homotopieäquivalenz

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] dx \\ \uparrow & & \uparrow d \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Tensorieren wir  $n$  Kopien dieser Homotopieäquivalenz miteinander, so ergibt sich das Poincaré-Lemma auf ganz  $\mathbb{R}^n$  für den Fall polynomialer Koeffizienten. Explizit ist die Komposition von Kettenabbildungen zwischen vertikal geschriebenen Komplexen mit jeweils höchstens zwei von Null verschiedenen Einträgen

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}[x] dx & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] dx \\ d \uparrow & & \uparrow & & \uparrow d \\ \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \end{array}$$

mit dem Auswerten bei Null in der Horizontale unten rechts homotop zur Identität vermittelt der Homotopie, die gegeben wird durch die Vorschrift  $\delta : \mathbb{R}[x] dx \rightarrow \mathbb{R}[x], f(x) dx \mapsto \int_0^x f(t) dt$ . In der Tat gilt ja  $d\delta = \text{id}$  und  $f -$



$f(0) = \delta df$ . Unser Beweis des Poincaré-Lemmas im glatten Fall verläuft analog.

*Beweis.* Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Ursprung das Zentrum unserer Kreisscheibe. Sei  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  das Vergessen der ersten Koordinate. So ist  $V := \pi(U) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  wieder eine offene Kreisscheibe und wir sind fertig mit Induktion, sobald wir zeigen können, daß das Zurückholen von Differentialformen

$$\pi^*: \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U)$$

Isomorphismen auf der Kohomologie induziert. Bezeichnet  $i: \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  das Davorschreiben einer Koordinate Null, so gilt sicher  $\pi \circ i = \text{id}$  und folglich  $i^* \circ \pi^* = \text{id}$ . Wir sind also fertig, wenn wir zusätzlich noch zeigen können, daß die Komposition  $\pi^* \circ i^*: \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$  homotopieäquivalent ist zur Identität. Dazu betrachten wir  $\delta: \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^{*-1}(U)$  gegeben durch

$$\delta: \sum a_I dx_I \mapsto \sum_{I \ni 1} (\int a_I) dx_{I \setminus 1}$$

wobei  $(\int a)$  zu verstehen ist als die Funktion

$$(\int a)(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_1} a(t, x_2, \dots, x_n) dt$$

So gilt  $\text{id} - \pi^* i^* = d\delta + \delta d$ , wie man separat für Formen der Gestalt  $a_I dx_I$  und  $b_I dx_1 \wedge dx_I$ , jeweils mit  $1 \notin I$ , ohne größere Schwierigkeiten prüft.  $\square$

## 2.8 Direktes Bild von Garben

2.8.1. Um die Diskussion der Beziehung zwischen Garbenkohomologie und singulärer Kohomologie vorzubereiten, bespreche ich in diesem Abschnitt das direkte Bild von Garben. Sie werden im weiteren Verlauf der Vorlesung sehen, daß diese Konstruktion in der Garbentheorie eine zentrale Stellung einnimmt.

**Definition 2.8.2.** Gegeben eine stetige Abbildung  $f: Y \rightarrow X$  definiert man das **direkte Bild** von Garben

$$f_*: \text{Ens}_Y \rightarrow \text{Ens}_X$$

durch die Vorschrift  $(f_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$  für  $U \Subset X$ . Es ist leicht einzusehen, daß die so auf  $X$  erklärte Prägarbe in der Tat eine Garbe ist.

2.8.3. Ich kann für diese Konstruktion leider kaum substantielle Anschauung anbieten. Im Fall der Projektion auf einen Punkt ist das direkte Bild im Wesentlichen der Funktor der globalen Schnitte. Für das direkte Bild unter einer abgeschlossenen Einbettung ist die Restriktion auf das Komplement des Bildes nach 1.4.3 konstant mit einelementiger Faser und die Restriktion auf das Bild ist nach 2.8.12 die ursprüngliche Garbe.

**Satz 2.8.4 (Adjunktion von direktem und inversem Bild).** *Gegeben  $f : Y \rightarrow X$  stetig erhalten wir eine Adjunktion  $(f^\circ, f_\circ)$  durch die Abbildungen*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ens}_Y(f^\circ \mathcal{G}, \mathcal{F}) & \rightarrow & \text{Ens}_X(\mathcal{G}, f_\circ \mathcal{F}) \\ \varphi & \mapsto & \tilde{\varphi} \end{array}$$

wobei  $\tilde{\varphi} : \mathcal{G}(U) \rightarrow (f_\circ \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$  für  $U \subseteq X$  einen Schnitt  $s \in \mathcal{G}(U)$  als Abbildung  $s : U \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$  versteht, sie zu  $(\text{id} \times s) : Y \times_X U \rightarrow Y \times_X \overline{\mathcal{G}}$  alias  $f^{-1}(U) \rightarrow \overline{f^\circ \mathcal{G}}$  zurückzieht und durch Verknüpfung mit  $\varphi : \overline{f^\circ \mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$  zu einem Schnitt von  $\mathcal{F}$  über  $f^{-1}(U)$  macht.

*Beweis.* Es gilt zu zeigen, daß die so konstruierte Abbildung  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  bijektiv ist. Sie ist injektiv, da ganz  $\overline{f^\circ \mathcal{G}}$  durch die Bilder solcher  $(\text{id} \times s)$  überdeckt wird. Zusätzlich sind die  $(\text{id} \times s)$  aber sogar Homöomorphismen auf offene Teilmengen von  $\overline{f^\circ \mathcal{G}}$ , und eine Sammlung von stetigen kompatiblen Abbildungen von diesen offenen Teilmengen nach  $\overline{\mathcal{F}}$  verklebt zu einer stetigen Abbildung  $\overline{f^\circ \mathcal{G}} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$  über  $Y$ .  $\square$

2.8.5. Auf genau dieselbe Weise erklären wir auch für abelsche Garben die direkten Bilder  $f_\circ : \text{Ab}_Y \rightarrow \text{Ab}_X$  und die Adjunktion  $(f^\circ, f_\circ)$ . In diesem Kontext benutzen wir manchmal auch die Notation  $(f^{(*)}, f_{(*)})$ .

2.8.6 (**Direkte Bilder aus Grundkonstruktionen**). Im Sinne einer größtmöglichen Reduktion auf unsere Grundkonstruktionen 2.4.10 wäre es wohl noch besser, unsere direkten Bilder schlicht als “die” linksadjungierten Funktoren der inversen Bilder zu erklären. Diese Vorgehensweise birgt einerseits die Schwierigkeit, daß die fraglichen Linksadjungierten nur bis auf eindeutige Isotransformation eindeutig bestimmt sind, vergleiche 1.4.9. Andererseits hätte sie den Vorteil, daß wir nicht extra prüfen müßten, daß die von unserer Isotransformation  $\text{can} : \text{id}^\circ \xrightarrow{\sim} \text{Id}$  auf den jeweils adjungierten Funktoren induzierte Isotransformation  $\text{id}_\circ \xrightarrow{\sim} \text{Id}$  gerade die Gleichheit  $\text{id}_\circ = \text{Id}$  ist, und daß weiter die von unserer Isotransformation  $c(g, f) : g^\circ f^\circ \xrightarrow{\sim} (fg)^\circ$  auf den jeweils adjungierten Funktoren induzierte Isotransformation gerade die Gleichheit  $(fg)_\circ = f_\circ g_\circ$  ist. Diese Prüfung birgt aber auch keine besonderen Schwierigkeiten und bleibe dem Leser überlassen.

**2.8.7 (Wolkenkratzer als direkte Bilder).** Gegeben ein Raum  $X$  und für  $x \in X$  die Einbettung mit Bild  $x$  der einpunktigen Menge  $i = i_x : \text{top} \hookrightarrow X$  und eine Menge  $G$  haben wir einen kanonischen Isomorphismus  $i_\circ G / \text{top} \xrightarrow{\sim} G_{(x)}$ . Das direkte Bild unter  $i$  macht also aus einer Menge  $G$ , aufgefaßt als Garbe auf der einpunktigen Menge  $\text{top}$  den Wolkenkratzer  $G_{(x)}$  mit Faser  $G$  bei  $x$ . Im Sinne der Reduktion der Grundkonstruktionen vereinbaren wir von nun an die linke Seite als die Definition der Wolkenkratzergarbe und setzen also

$$G_{(x)} := i_\circ G / \text{top}$$

Für den étalen Raum direkter Bilder habe ich nur im Fall einer abgeschlossenen Immersion eine gewisse Anschauung, die sich auf die Beschreibung 1.4.16 des étalen Raums eines Wolkenkratzers stützt. Statt  $f_\circ$  oder  $f_{(*)}$  wird in der Literatur meist die Notation  $f_*$  verwendet. Ich will mir jedoch die Notation  $f_*$  für das derivierte direkte Bild vorbehalten.

**2.8.8 (Schnitte direkter Bilder aus Grundkonstruktionen).** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  erhalten wir eine kanonische Bijektion

$$\Gamma \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma f_\circ \mathcal{F}$$

als Verknüpfung  $\text{Ens}_{/X}(\text{ens}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{/X}(f^\circ \text{ens}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Ens}_{/X}(\text{ens}_Y, f_\circ \mathcal{F})$  des Vorschaltens von  $f^\circ \text{ens}_Y \xrightarrow{\sim} \text{ens}_X$  mit der Adjunktionsabbildung. Diese Bijektion ist auch in unserer Definition des direkten Bildes sofort sichtbar.

**2.8.9.** Gegeben eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  erhalten wir in derselben Weise für abelsche Garben einen kanonischen Isomorphismus

$$\Gamma \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Gamma f_\circ \mathcal{F}$$

als Verknüpfung  $\text{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/X}(f^\circ \mathbb{Z}_Y, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}_{/X}(\mathbb{Z}_Y, f_\circ \mathcal{F})$  des Vorschaltens von  $f^\circ \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_X$  mit der Adjunktionsabbildung. Diese Bijektion ist auch in unserer Definition des direkten Bildes sofort sichtbar.

*Ergänzung 2.8.10 (Alternative Konstruktion des Rückzugs).* Sei  $f : Y \rightarrow X$  stetig. Eine andere Konstruktion des zum direkten Bild von Garben

$$f_\circ : \text{Ens}_{/Y} \rightarrow \text{Ens}_{/X}$$

linksadjungierten Funktors, die zwar weniger anschaulich ist, sich aber leichter verallgemeinern läßt, läuft so: Man bildet zu  $\mathcal{G} \in \text{Ens}_{/X}$  zunächst die Prägarbe  $f^{(\circ)} \mathcal{G}$  auf  $Y$  durch die Vorschrift

$$(f^{(\circ)} \mathcal{G})(V) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \supseteq f(V)}} \mathcal{G}(U)$$

für  $V \subseteq Y$ , wo der direkte Limes über alle  $U \subseteq X$  mit  $U \supset f(V)$  zu bilden ist und die Restriktionsabbildungen unserer Prägarbe  $f^{(\circ)}\mathcal{G}$  in der offensichtlichen Weise zu bilden sind. Dann erklärt man  $f^\circ\mathcal{G} = (f^{(\circ)}\mathcal{G})^+$  als die Garbifizierung dieser Prägarbe. Die Adjunktionsisomorphismen schließlich werden definiert als die Komposition

$$\begin{array}{ccc} \text{Ens}_Y(f^\circ\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & \text{pEns}_Y(f^{(\circ)}\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \text{Ens}_X(\mathcal{G}, f_\circ\mathcal{F}) \\ & & \wr \uparrow & \wr \uparrow \\ & & \left\{ \begin{array}{l} \text{Systeme von Abbildungen } \varphi_{UV}: \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) \\ \text{für } U \subseteq X, V \subseteq Y \text{ mit } f(V) \subset U \text{ derart, daß} \\ \text{die } \varphi_{UV} \text{ mit Einschränkungen verträglich sind} \end{array} \right\} \end{array}$$

wo die erste horizontale Bijektion durch die universelle Eigenschaft der Garbifizierung erklärt wird und das Ausführen der beiden vertikalen Bijektionen dem Leser überlassen bleiben mag.

*Übung 2.8.11.* Gegeben  $f: Y \hookrightarrow X$  eine abgeschlossene Immersion induziert das adjungierte Paar  $(f^\circ, f_\circ)$  eine Äquivalenz zwischen der Kategorie aller abelschen Garben auf  $Y$  und der Kategorie aller derjenigen abelschen Garben auf  $X$ , die nur an Punkten aus  $f(Y)$  von Null verschiedene Halme haben.

*Übung 2.8.12.* Ist  $f: Y \hookrightarrow X$  eine topologische Einbettung, so ist für jede Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ens}_Y$  die kanonische Abbildung ein Isomorphismus  $f^\circ f_\circ \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ .

*Übung 2.8.13.* Hat  $f: Y \rightarrow X$  zusammenhängende Fasern, so ist für jede Garbe  $\mathcal{G} \in \text{Ens}_X$  die kanonische Abbildung ein Isomorphismus  $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_\circ f^\circ \mathcal{G}$ . Ich erinnere daran, daß die leere Menge in den Konventionen dieses Textes nicht zusammenhängend genannt wird.

*Übung 2.8.14.* Für einen topologischen Raum  $X$  bezeichne  $X^{\text{dis}}$  die Menge  $X$  versehen mit der diskreten Topologie und  $d: X^{\text{dis}} \rightarrow X$  die Identität. Man zeige, daß für eine abelsche Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_X$  die kanonische Abbildung  $\mathcal{F} \rightarrow d_\circ d^\circ \mathcal{F}$  mit der Einbettung in die Garbe der unstetigen Schnitte aus 1.9.2 identifiziert werden kann.

*Übung 2.8.15.* Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig,  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf  $X$  und  $s \in \Gamma\mathcal{F}$  ein globaler Schnitt. Für den induzierten globalen Schnitt  $f_\circ s$  von  $f_\circ \mathcal{F}$  gilt

$$\text{supp}(f_\circ s) = \overline{f(\text{supp } s)}$$

*Übung 2.8.16.* Das Zurückholen abelscher Garben vertauscht mit direkten Summen und allgemeiner mit filtrierenden Kolimites, nicht jedoch mit filtrierenden Limites, ja noch nicht einmal mit beliebigen Produkten.

2.8.17 (**Basiswechsel in Kategorienfaserungen**). Sei eine Kategorienfaserung mit Basis  $\mathcal{B}$  gegeben, in der jeder Rückholfunktor  $f^\circ$  einen Rechtsadjungierten  $f_\circ$  besitzt. Gegeben ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

in der Basis können wir dann mittels der Adjunktionen  $(f^\circ, f_\circ)$  und  $(g^\circ, g_\circ)$  erklären wir den **Basiswechsel**, eine Transformation

$$f^\circ p_\circ \Rightarrow q_\circ g^\circ$$

als die Komposition  $f^\circ p_\circ \Rightarrow f^\circ p_\circ g_\circ g^\circ \xrightarrow{\sim} f^\circ f_\circ q_\circ g^\circ \Rightarrow q_\circ g^\circ$ . Alternativ kann man den Basiswechsel auch mittels der Adjunktionen  $(p^\circ, p_\circ)$  und  $(q^\circ, q_\circ)$  konstruieren als die Komposition  $f^\circ p^\circ \Rightarrow q_\circ q^\circ f^\circ p_\circ \xrightarrow{\sim} q_\circ g^\circ p^\circ p_\circ \Rightarrow q_\circ g^\circ$ . Daß diese Konstruktion in der Tat dieselbe Transformation liefert, mag der Leser zur Übung selbst zeigen. Wir besprechen es in einer etwas anderen Sprache in 6.6.1.

*Übung 2.8.18.* Gegeben  $X, Y$  topologische Räume mit  $Y$  kompakt und  $x \in X$  ein Punkt betrachte man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{x\} \times Y & \xrightarrow{i_x \times \text{id}} & X \times Y \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ \{x\} & \xrightarrow{i_x} & X \end{array}$$

und zeige, daß für jede Garbe von Mengen  $\mathcal{F}$  auf  $X \times Y$  der Basiswechsel einen Isomorphismus  $i_x^\circ p_\circ \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} q_\circ (i_x \times \text{id})^\circ \mathcal{F}$  induziert. Dieses Phänomen werden wir später noch in sehr viel größerer Allgemeinheit als "eigentlichen Basiswechsel" kennenlernen.

## 2.9 Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie

2.9.1. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß für lokal zusammenziehbare parakompakte Räume die Garbenkohomologie mit der singulären Kohomologie übereinstimmt. Vom rein logischen Standpunkt aus gesehen ist das überflüssig. Es erlaubt jedoch, Anschauung aus der singulären Kohomologie auf die Garbenkohomologie zu übertragen.

2.9.2. Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und  $q \geq 0$  betrachten wir die **Prägarbe der singulären  $q$ -Koketten**, die jeder offenen Menge  $U \subseteq X$  die Gruppe  $S^q(U)$  der singulären  $q$ -Koketten auf  $U$  zuordnet. Die Garbifizierung dieser Prägarbe bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}_X^q$  und nennen sie die **Garbe der lokalen singulären  $q$ -Koketten**. Für offene Teilmengen  $U \subseteq X$  haben wir sicher  $\mathcal{S}_X^q|_U = \mathcal{S}_U^q$ , aber für allgemeinere Teilmengen von  $X$  ist das im allgemeinen nicht mehr richtig. Die üblichen Korandabbildungen auf den Koketten induzieren Korandabbildungen  $\mathcal{S}_X^q \rightarrow \mathcal{S}_X^{q+1}$ . Auf diese Weise wird  $\mathcal{S}_X^*$  ein Komplex von Garben und die Kettenabbildung  $S^*X \rightarrow \Gamma\mathcal{S}_X^*$  liefert eine Abbildung

$$\text{can} : H_{\text{sing}}^q X \rightarrow \mathcal{H}^q \Gamma\mathcal{S}_X^*$$

2.9.3. Ist  $X$  lokal zusammenziehbar, so wird der Komplex der Garben der lokalen singulären Koketten nach der Augmentierung zu  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^*$  exakt: Das muß ja nur auf dem Halm an jeder Stelle  $x \in X$  gezeigt werden, und dort hat unser Komplex die Gestalt  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \varinjlim_U S^*(U)$ , wobei es nach II.5.1.20 nicht darauf ankommt, ob wir den direkten Limes über alle offenen Umgebungen von  $x$ , über alle Umgebungen von  $x$ , oder über alle zusammenziehbaren Umgebungen von  $x$  bilden. Dann folgt aber die behauptete Exaktheit aus der Exaktheit filtrierender direkter Limites II.5.1.28. Wir erhalten so mithilfe von 2.3.2 für jeden lokal zusammenziehbaren Raum Abbildungen

$$\text{nat} : \mathcal{H}^q \Gamma\mathcal{S}_X^* \rightarrow H^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

**Satz 2.9.4 (Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie).** *Für jeden parakompakten lokal zusammenziehbaren Raum  $X$  stimmt die singuläre Kohomologie überein mit der Garbenkohomologie der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$ . Genauer liefern unter diesen Voraussetzungen die in 2.9.2 und 2.9.3 konstruierten Abbildungen Isomorphismen*

$$H_{\text{sing}}^q X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \Gamma\mathcal{S}_X^* \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathbb{Z}_X) = H_{\text{garb}}^q X$$

*Darüber hinaus entspricht unter diesen Isomorphismen das Zurückholen auf der singulären Kohomologie im Sinne von II.4.1.8 dem Zurückholen auf der Garbenkohomologie im Sinne von 2.5.4.*

2.9.5. Dieselbe Aussage gilt mit demselben Beweis auch allgemeiner für Kohomologie mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe. Eine Version für Kohomologie mit kompaktem Träger zeigen wir als 2.11.34. Die Forderung "lokal zusammenziehbar" kann abgeschwächt werden zur Forderung, daß für jeden Punkt jede Umgebung verkleinert werden kann zu einer wegweise zusammenhängenden Umgebung mit verschwindender höherer singulärer Kohomologie. Der Beweis bleibt mutatis mutandis derselbe.

*Beweis.* Für  $X$  parakompakt sind die Garben  $\mathcal{S}_X^q$  weich nach dem anschließenden Lemma 2.9.6 und damit azyklisch nach 2.7.6. Nach 2.3.5 ist folglich die zweite Abbildung in obiger Sequenz ein Isomorphismus. Immer unter der Annahme  $X$  parakompakt zeigen wir dann in Lemma 2.9.11, daß auch die erste Abbildung ein Isomorphismus ist. Damit folgt der im ersten Teil des Satzes behauptete Isomorphismus zwischen der singulären Kohomologie und der Garbenkohomologie. Um die im zweiten Teil des Satzes behauptete Funktorialität dieses Isomorphismus zu zeigen, betrachten wir eine stetige Abbildung von topologischen Räumen  $f : X \rightarrow Y$ . Die Verknüpfungen  $S^q(V) \rightarrow S^q(f^{-1}(V)) \rightarrow \mathcal{S}_X^q(f^{-1}(V))$  induzieren mittels der universellen Eigenschaft der Garbifizierung Garbenhomomorphismen  $\mathcal{S}_Y^q \rightarrow f_*\mathcal{S}_X^q$ . Mithilfe unserer Adjunktion 2.8.4 erhalten wir daraus weiter Garbenhomomorphismen  $f^*\mathcal{S}_Y^q \rightarrow \mathcal{S}_X^q$ . Diese definieren einen Morphismus von Komplexen von Garben  $\tau : f^*\mathcal{S}_Y^* \rightarrow \mathcal{S}_X^*$ , und dieser Morphismus bzw. sein Effekt auf globalen Schnitten kann hinwiederum eingefügt werden in kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 S^*X & \longrightarrow & \Gamma\mathcal{S}_X^* \\
 \uparrow f^* & & \uparrow \Gamma\tau \\
 & & \Gamma f^*\mathcal{S}_Y^* \\
 & & \uparrow \\
 S^*Y & \longrightarrow & \Gamma\mathcal{S}_Y^*
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}_X & \longrightarrow & \mathcal{S}_X^* \\
 \wr \uparrow & & \uparrow \tau \\
 f^*\mathbb{Z}_Y & \longrightarrow & f^*\mathcal{S}_Y^*
 \end{array}$$

Wenden wir hier auf das linke Diagramm  $\mathcal{H}^q$  an, so erhalten wir die linke Hälfte eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{\text{sing}}^q X & \longrightarrow & \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{S}_X^* & \longrightarrow & H_{\text{garb}}^q X \\
 \uparrow f^* & & \uparrow & & \parallel \\
 & & \mathcal{H}^q \Gamma f^* \mathcal{S}_Y^* & \longrightarrow & H_{\text{garb}}^q X \\
 & & \uparrow & & \uparrow f^* \\
 H_{\text{sing}}^q Y & \longrightarrow & \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{S}_Y^* & \longrightarrow & H_{\text{garb}}^q Y
 \end{array}$$

In der rechten Hälfte sind die Horizontalen als natürliche Abbildungen im Sinne von 2.3.2 zu verstehen. Die Kommutativität des unteren Quadrats folgt aus 2.5.8, die Kommutativität des oberen mithilfe unseres rechten Quadrats von weiter oben aus 2.3.4.  $\square$

**Lemma 2.9.6.** *Auf jedem parakompakten Raum sind die Garben der lokalen singulären Koketten weich.*

*Ergänzung 2.9.7.* Sind alle offenen Teilmengen unseres Raums parakompakt, so sind die Garben der lokalen singulären Koketten nach 2.9.10 sogar welk.

*Beweis.* Sei  $X$  unser Raum. Einen Schnitt der Garbe der lokalen singulären Koketten über einer abgeschlossenen Menge  $A \Subset X$  können wir zunächst nach 2.7.1 ausdehnen zu einem Schnitt  $s$  auf einer offenen Umgebung  $U \Subset X$  von  $A$ . Da  $X$  nach 2.6.4 normal ist, finden wir  $V \Subset X$  mit  $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$ . Jetzt konstruieren wir einen Endomorphismus der Prägarbe der singulären Koketten auf  $U$ , indem wir einem Schnitt, d.h. einer Funktion auf den Simplizes diejenige neue Funktion zuordnen, die dasselbe macht mit allen Simplizes aus  $V$  und Null aus allen Simplizes, die nicht ganz in  $V$  liegen. Lassen wir den auf der Garbifizierung induzierten Endomorphismus auf unsere Ausdehnung  $s$  los, so erhalten wir eine Ausdehnung  $\tilde{s}$ , die auf  $U \setminus \bar{V}$  verschwindet. Damit können wir unsere abgeänderte Ausdehnung  $\tilde{s}$  aber durch Null auf ganz  $X$  fortsetzen.  $\square$

**Definition 2.9.8.** Wir sagen, eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf einem Raum  $X$  **erlaubt das Verkleben von Schnitten** genau dann, wenn gegeben ein System  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von offenen Teilmengen von  $X$  mit Vereinigung  $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  und gegeben für alle  $U \in \mathcal{U}$  Schnitte  $s_U \in \mathcal{F}(U)$  mit

$$s_U|_{U \cap W} = s_W|_{U \cap W} \quad \forall U, W \in \mathcal{U}$$

es stets einen Schnitt auf der Vereinigung  $s \in \mathcal{F}(V)$  gibt mit  $s|_U = s_U$  für alle  $U \in \mathcal{U}$ .

**Proposition 2.9.9.** *Erlaubt eine Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf einem parakompakten Raum das Verkleben von Schnitten und gilt  $|\mathcal{F}(\emptyset)| = 1$ , so gehen die globalen Schnitte unserer Prägarbe surjektiv auf die globalen Schnitte ihrer Garbifizierung, in Formeln*

$$\Gamma \mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma \mathcal{F}^+$$

*Beweis.* Sei  $s \in \Gamma \mathcal{F}^+$  ein globaler Schnitt der Garbifizierung. Sicher finden wir eine lokal endliche Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  und  $\tilde{s}_i \in \mathcal{F}(U_i)$  mit  $\tilde{s}_i \mapsto s|_{U_i}$  für alle  $i \in I$ . Sei  $V_i$  eine Schrumpfung dieser Überdeckung nach 2.6.6. Für jedes  $x \in X$  finden wir nun eine offene Umgebung  $W(x)$  mit  $x \in U_i \Rightarrow W(x) \subset U_i$  und  $x \notin \bar{V}_i \Rightarrow W(x) \cap V_i = \emptyset$  und so, daß für alle  $i$  mit  $x \in U_i$  die  $\tilde{s}_i$  zu demselben Schnitt  $\tilde{s}_{(x)} \in \mathcal{F}(W(x))$  einschränken. Dann folgt aus  $W(x) \cap W(y) \neq \emptyset$  bereits, daß es einen Index  $i$  gibt mit  $W(x), W(y) \subset U_i$ , zum Beispiel tut es jeder Index  $i$  mit  $W(x) \cap W(y) \cap V_i \neq \emptyset$ , denn für solch einen Index gilt notwendig  $x, y \in \bar{V}_i \subset U_i$ . Also verkleben die  $\tilde{s}_{(x)}$  zum gesuchten globalen Schnitt  $\tilde{s} \in \Gamma \mathcal{F}$  mit  $\tilde{s} \mapsto s$ .  $\square$



**Korollar 2.9.10.** Für jeden parakompakten Raum  $X$  liefern die kanonischen Abbildungen Surjektionen  $S^q X \rightarrow \Gamma S_X^q$ .

*Beweis.* Offensichtlich erlaubt für jedes  $q \geq 0$  die Prägarbe  $U \mapsto S^q(U)$  das Verkleben von Schnitten. Das Korollar folgt damit aus 2.9.9.  $\square$

**Lemma 2.9.11.** Für jeden parakompakten Raum  $X$  liefern die kanonischen Abbildungen Isomorphismen

$$H_{\text{sing}}^q X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \Gamma S_X^*$$

*Beweis.* Wir vervollständigen unsere Surjektionen aus 2.9.9 zu einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$K^* \hookrightarrow S^* X \rightarrow \Gamma S_X^*$$

Mit der langen exakten Homologiesequenz reicht es zu zeigen, daß  $K^*$  azyklisch ist. Aber liegt ein Kozykel  $s \in S^* X$  im Kern der Surjektion, so gibt es eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  derart, daß  $s$  verschwindet auf den  $\mathcal{U}$ -feinen Ketten, so daß  $s$  schon im Kern  $K_{\mathcal{U}}^*$  der Surjektion  $S^* X \rightarrow S_{\mathcal{U}}^* X$  liegt. Diese Surjektion induziert aber Isomorphismen auf der Kohomologie nach dem Satz über feine Ketten II.2.3.16, folglich ist ihr Kern azyklisch, folglich gibt es sogar  $r \in K_{\mathcal{U}}^*$  mit  $\partial r = s$ , und folglich ist unser Kozykel  $s$  ein Korand.  $\square$

## 2.10 Der Satz von de Rham

2.10.1. Der  $q$ -te Standardsimplex  $\Delta_q$  ist offensichtlich eine halboffene Teilmenge der durch die Gleichung  $\sum x_i = 1$  definierten affinen Hyperebene von  $\mathbb{R}^{q+1}$  und auch eine glatte Untermannigfaltigkeit mit Ecken von  $\mathbb{R}^{q+1}$  im Sinne von ???. Gegeben eine glatte Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums oder allgemeiner auch eine glatte abstrakte Mannigfaltigkeit  $X$  nennen wir glatte Abbildungen  $\Delta_q \rightarrow X$  auch **glatte  $q$ -Simplizes**, bilden die Gruppe der **glatte  $q$ -Ketten**  $C^\infty S_q X$  als die freie abelsche Gruppe über der Menge aller glatten  $q$ -Simplizes, und erhalten auf diese Weise einen Unterkomplex  $C^\infty S X \subset S X$  im Komplex der singulären Ketten von  $X$ .

**Proposition 2.10.2 (Homologie mit glatten Ketten).** Für jede glatte Mannigfaltigkeit  $X$  ist die Einbettung der Gruppe der glatten Ketten in die Gruppe der singulären Ketten eine Homotopieäquivalenz  $C^\infty S X \xrightarrow{\sim} S X$ .

2.10.3. Man könnte ähnlich wie beim Beweis von II.5.3.7 für diese Proposition auch einen elementaren Beweis zusammenstückeln. Das wäre aber kontraproduktiv, denn ich will ja gerade zeigen, wie die Garbentheorie derartige Konstruktionen in angenehmer Verpackung gebrauchsfertig bereitstellt.

*Beweis.* Nach II.4.6.3 reicht es zu zeigen, daß unsere Einbettung Isomorphismen auf der Homologie der besagten Komplexe induziert. Weiter dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X$  parakompakt annehmen, indem wir sonst beide Seiten als direkten Limes über offene parakompakte Teilmengen schreiben und die Exaktheit von filtrierenden direkten Limites verwenden. Jetzt wählen wir irgendeine abelsche Gruppe  $G$ , wenden  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, G)$  an auf die Einbettung in der Proposition, und erhalten eine Surjektion von Komplexen von Koketten  $\mathcal{C}^\infty S^*(X; G) \leftarrow S^*(X; G)$ , da unsere ursprüngliche Einbettung nämlich in jedem Grad spaltet. Diese Komplexe können wir auch für jede offene Teilmenge von  $X$  betrachten. Sie induzieren dann ihrerseits Komplexe von Prägarben auf  $X$ , die wir vergarben zu einer Surjektion von Komplexen von Garben

$$\mathcal{C}^\infty \mathcal{S}_{X,G}^* \leftarrow \mathcal{S}_{X,G}^*$$

Wir behaupten nun, daß im kommutativen Diagramm von Kettenabbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty S^*(X; G) & \leftarrow & S^*(X; G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma \mathcal{C}^\infty \mathcal{S}_{X,G}^* & \leftarrow & \Gamma \mathcal{S}_{X,G}^* \end{array}$$

alle Abbildungen Isomorphismen auf der Kohomologie induzieren. Für die rechte Vertikale ist das im Fall  $G = \mathbb{Z}$  genau die Aussage von 2.9.11, und für allgemeines  $G$  folgt es genauso. Für die linke Vertikale folgt es, indem man die Argumente des Beweises von 2.9.11 wiederholt, also insbesondere den Satz über feine Ketten auch im Fall glatter Ketten beweist. Das alles bietet keinerlei zusätzliche Schwierigkeiten. Für die untere Horizontale folgt es aus 2.3.4 und 2.3.5, sobald wir wissen, daß  $\mathcal{S}_{X,G}^*$  und  $\mathcal{C}^\infty \mathcal{S}_{X,G}^*$  beide azyklische Auflösungen der konstanten Garbe  $G_X$  sind. Im Fall von  $\mathcal{S}_{X,G}^*$  haben wir das für  $G = \mathbb{Z}$  bereits beim Beweis von 2.9.4 für beliebige parakompakte lokal zusammenziehbare Räume gezeigt, und derselbe Beweis funktioniert mit einer beliebigen Koeffizientengruppe  $G$ . Im Fall  $\mathcal{C}^\infty \mathcal{S}_{X,G}^*$  glatter Ketten auf Mannigfaltigkeiten können wir diesen Beweis im wesentlichen übernehmen. Die einzige zusätzliche Schwierigkeit liegt beim Nachweis der Tatsache, daß der augmentierte Komplex  $G_X \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty \mathcal{S}_{X,G}^*$  eine exakte Sequenz von Garben ist. Das diskutieren wir im anschließenden Lemma 2.10.4. Die Aussage für die obere Horizontale unseres Diagramms oben ergibt sich als Konsequenz. Betrachten wir nun den Kokern  $K_* = \text{cok}(\mathcal{C}^\infty S^* \hookrightarrow S^*)$ , so folgt, daß  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_*, G)$  azyklisch ist für alle  $G$ . Dann muß aber nach dem universellen Koeffiziententheorem II.4.10.5 der Komplex  $K_*$  von freien abelschen Gruppen bereits selbst azyklisch gewesen sein.  $\square$

**Lemma 2.10.4.** *Für jede glatte Mannigfaltigkeit  $X$  ist der augmentierte Komplex  $G_X \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty \mathcal{S}_{X,G}^*$  eine exakte Sequenz von Garben.*

*Beweis.* Das muß ja nur auf dem Halm an jeder Stelle  $x \in X$  gezeigt werden, und dort hat unser Komplex die Gestalt  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \varinjlim_U \mathcal{C}^\infty S^*(U)$ , wobei es nach II.5.1.20 nicht darauf ankommt, ob wir den direkten Limes über alle offenen Umgebungen von  $x$  oder nur über alle diejenigen Umgebungen von  $x$  bilden, die diffeomorph sind zu konvexen offenen Teilmengen eines  $\mathbb{R}^n$ . Für  $U \subset \mathbb{R}^n$  nicht leer und konvex ist jedoch die Sequenz  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty S^*(U)$  exakt: Das folgert man wie für die singuläre Homologie in II.1.2.14 durch die Konstruktion eines Prismenoperators, und wir haben bereits in II.1.2.15 erklärt, wie man einen Prismenoperator konstruieren kann, der glatte Ketten zu glatten Ketten macht. Dann folgt aber die behauptete Exaktheit aus der Exaktheit filtrierender direkter Limites II.5.1.28.  $\square$

2.10.5. Der  $q$ -te Standardsimplex  $\Delta_q$  ist in der affinen Hyperebene von  $\mathbb{R}^{q+1}$ , die durch die Gleichung  $\sum x_i = 1$  definiert wird, eine kompakte Untermannigfaltigkeit mit Ecken ???. Wir versehen unsere Hyperebene mit der Orientierung, die sie als Rand der berandeten Untermannigfaltigkeit, die durch die Gleichung  $\sum x_i \leq 1$  definiert wird, von der Standardorientierung des  $\mathbb{R}^{q+1}$  erbt, und bezeichnen die induzierte Orientierung auf dem regulären Teil von  $\Delta_q$  als die **Standardorientierung des Standardsimplex**. Ist dann  $X$  eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums oder allgemeiner eine glatte abstrakte Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine stetige  $q$ -Form auf  $X$  und  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  ein glatter  $q$ -Simplex, so setzen wir

$$\int_\sigma \omega = \int_{\vec{\Delta}_q} \sigma^* \omega$$

und ignorieren in unserer Notation, daß wir eigentlich das Integral über den regulären Teil des Simplex  $\Delta_q$  meinen, da nur dieser eine berandete Untermannigfaltigkeit ist und damit in den Rahmen fällt, in dem wir das Integral erklärt hatten. Diese Abbildung setzt sich linear fort und liefert einen Homomorphismus von abelschen Gruppen

$$\text{int} : \Omega^q X \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}^\infty S_q X, \mathbb{R})$$

und der Satz von Stokes mit Ecken ??? zeigt, daß die Familie dieser Homomorphismen für  $q \in \mathbb{Z}$  eine Kettenabbildung ist.

**Satz 2.10.6 (von de Rham).** *Gegeben eine parakompakte glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand  $X$  liefert das Integrieren von glatten  $q$ -Formen über glatte  $q$ -Ketten  $\text{int} : \Omega^* X \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}^\infty S X, \mathbb{R})$  Isomorphismen auf der Kohomologie.*

2.10.7. Zusammen mit 2.10.2 liefert unser Satz einen Isomorphismus zwischen der de-Rham-Kohomologie und der singulären Kohomologie mit reellen Koeffizienten einer glatten parakompakten Mannigfaltigkeit  $X$ , in Formeln

$$H^i(X)_{\text{dR}} \xrightarrow{\sim} H^i(X; \mathbb{R})_{\text{sing}}$$

In der Tat liefert 2.10.6 einen Isomorphismus der linken Seite und 2.10.2 einen Isomorphismus der rechten Seite mit der Kohomologie des Komplexes der glatten singulären Koketten  $\mathcal{H}^i \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C}^\infty SX, \mathbb{R})$ . Der Beweis unseres Satzes läuft im Wesentlichen auf den Nachweis hinaus, daß alle diese Kohomologietheorien schlicht die Garbenkohomologie von  $X$  mit Koeffizienten in der konstanten Garbe  $\mathbb{R}_X$  berechnen, nur eben mithilfe unterschiedlicher azyklischer Auflösungen.

*Beweis.* Hängen wir noch die Abbildung  $\mathcal{C}^\infty \mathcal{S}^*(X; \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma \mathcal{C}^\infty \mathcal{S}^*(X; \mathbb{R})$  dahinter, so ist die Verknüpfung der Effekt auf den globalen Schnitten von einem Morphismus zwischen zwei azyklischen Auflösungen  $\mathbb{R}_X \hookrightarrow \Omega_X^*$  und  $\mathbb{R}_X \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty \mathcal{S}^*(X; \mathbb{R})$  der konstanten Garbe  $\mathbb{R}_X$  und induziert folglich Isomorphismen auf der Kohomologie. Andererseits induziert auch die zusätzlich angehängte Abbildung nach 2.10.4 ebenfalls Isomorphismen auf der Kohomologie. Der Satz folgt.  $\square$

## 2.11 Kohomologie mit kompaktem Träger

**Definition 2.11.1.** Gegeben ein globaler Schnitt  $s \in \mathcal{F}(X)$  einer abelschen Garbe  $\mathcal{F}$  über einem topologischen Raum  $X$  definiert man den **Träger von  $s$**  (englisch und französisch **support**) als die Menge

$$\text{supp } s = \{x \in X \mid s_x \neq 0\}$$

Zur Übung mag der Leser zeigen, daß der Träger eines globalen Schnitts stets abgeschlossen ist.

2.11.2. Ein Schnitt  $s \in \mathcal{F}(A)$  einer abelschen Garbe  $\mathcal{F}$  über einer Teilmenge  $A \subset X$  ist ja nichts anderes als ein globaler Schnitt der Restriktion  $\mathcal{F}|_A$  unserer Garbe auf  $A$ . In diesem Fall definieren wir den **Träger von  $s$**  als den Träger dieses globalen Schnitts von  $\mathcal{F}|_A$ , in Formeln

$$\text{supp } s = \{x \in A \mid s_x \neq 0\}$$

2.11.3. Man beachte, daß für eine abelsche Garbe ein globaler Schnitt mit Träger in einer Teilmenge  $A$  etwas völlig anderes ist als ein Schnitt über  $A$

alias ein globaler Schnitt der Einschränkung unserer Garbe auf die Teilmenge  $A$ . Wir haben zwar eine Einbettung von ersterer Gruppe in letztere Gruppe,

$$\{s \in \mathcal{F}(X) \mid \text{supp } s \subset A\} \subset \mathcal{F}(A)$$

aber diese Einbettung ist im Allgemeinen kein Isomorphismus. Die konstante Garbe  $\mathcal{F} = \mathbb{Z}_X$  auf  $X = \mathbb{R}$  etwa besitzt keinen von Null verschiedenen Schnitt mit Träger im Ursprung, aber ihre Einschränkung auf den Ursprung besitzt durchaus von Null verschiedene Schnitte.

**Definition 2.11.4.** Gegeben eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem topologischen Raum  $X$  definieren wir die Gruppe der **Schnitte von  $\mathcal{F}$  mit kompaktem Träger** durch die Vorschrift

$$\Gamma_! \mathcal{F} := \Gamma_!(X; \mathcal{F}) := \{s \in \Gamma \mathcal{F} \mid (\text{supp } s) \text{ ist kompakt}\}$$

In der Literatur ist die alternative Notation  $\Gamma_c \mathcal{F} = \Gamma_c(X; \mathcal{F})$  üblich. Ist  $A \subset X$  eine Teilmenge, so verwenden wir die Abkürzung  $\Gamma_!(A; \mathcal{F}) := \Gamma_!(A; \mathcal{F}|_A)$

**Definition 2.11.5.** Die  $q$ -te **Kohomologie mit kompaktem Träger** eines Raums  $X$  mit Koeffizienten in einer abelschen Garbe  $\mathcal{F}$  ist die  $q$ -te Kohomologiegruppe des Komplexes der Schnitte mit kompaktem Träger ihrer Godement-Auflösung, in Formeln

$$H_!^q \mathcal{F} := H_!^q(X; \mathcal{F}) := \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{G}^* \mathcal{F}$$

In der Literatur ist die alternative Notation  $H_c^q \mathcal{F} = H_c^q(X; \mathcal{F})$  üblich. Ist  $A \subset X$  eine Teilmenge, so kürzen wir  $H_!^q(A; \mathcal{F}|_A) = H_!^q(A; \mathcal{F})$  ab. Die Kohomologie mit kompaktem Träger der konstanten Garbe  $G_X$  heißt die **garbentheoretische Kohomologie mit kompaktem Träger** unseres Raums  $X$  mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe  $G$  und wir notieren sie

$$H_!^q(X; G_X) = H_!^q(X; G)_{\text{garb}}$$

Manchmal schreiben wir auch kürzer  $H_!^q(X; G)$  und hoffen, daß der Leser aus dem Kontext erschließen kann, daß damit Garbentkohomologie und nicht etwa singuläre Kohomologie [II.5.2.1](#) mit kompaktem Träger gemeint ist, die wir manchmal auch ausführlicher  $H_!^q(X; G)_{\text{sing}}$  notieren.

2.11.6. Kohomologie mit kompaktem Träger hat nur für lokal kompakte Hausdorffräume so gute Eigenschaften, daß sie zu etwas nütze ist. Ich werde jedoch versuchen, die jeweils benötigten Bedingungen stets explizit dazuschreiben.

2.11.7. Gegeben eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem Raum  $X$  liefern die Einbettungen  $\Gamma_! \mathcal{G}^* \mathcal{F} \hookrightarrow \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F}$  kanonische Abbildungen  $H_!^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X; \mathcal{F})$ , die für kompaktes  $X$  Isomorphismen sind.

2.11.8 (**Funktorialitäten der Kohomologie mit kompaktem Träger**). Die Kohomologie mit kompaktem Träger hat andere Funktorialitätseigenschaften als die gewöhnliche Kohomologie. So ist es zum Beispiel nicht möglich, für beliebige stetige Abbildungen einen Rückzug der Kohomologie mit kompaktem Träger zu erklären: Das gelingt nur für sogenannte “eigentliche” Abbildungen, und ich erkläre es vorerst nur für abgeschlossene Einbettungen in 2.11.14. Stattdessen kann man jedoch bei Hausdorffräumen für die Kohomologie mit kompaktem Träger einen “Vorschub” unter étalen Abbildungen erklären, ich erkläre es vorerst nur für offene Einbettungen in 2.11.9, für die diese Konstruktion auch das “Ausdehnen durch Null” heißt. Beide Konstruktionen werden in der sogenannten “Gysin-Sequenz” 2.11.24 benötigt, mit deren meines Erachtens recht überzeugenden Anwendungen dieses Kapitel schließt.

2.11.9. Ist  $X$  ein Hausdorffraum, so liefert für jede offene Einbettung  $j : U \hookrightarrow X$  das “Ausdehnen eines Schnittes durch Null” eine natürliche Einbettung  $\Gamma_!(U; j^* \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma_!(X; \mathcal{F})$ . Für jede offene Einbettung  $j : U \hookrightarrow X$  und jede abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  liefert diese Konstruktion weiter natürliche Abbildungen

$$H_!^q(U; j^* \mathcal{F}) \rightarrow H_!^q(X; \mathcal{F})$$

und insbesondere auch  $H_!^q(U; G) \rightarrow H_!^q(X; G)$ . Man nennt sie das **Ausdehnen durch Null** auf der Kohomologie mit kompaktem Träger. Offensichtlich ist das für jedes feste  $G$  ein Funktor von der Kategorie der Hausdorffräume mit offenen Einbettungen als Morphismen in die Kategorie der abelschen Gruppen.

**Lemma 2.11.10.** *Sei  $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$ . Ist  $\mathcal{F}'$  *welk*, so induziert die Surjektion  $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$  eine Surjektion  $\Gamma_! \mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma_! \mathcal{F}''$ .*

*Beweis.* Sei  $s''$  ein Schnitt von  $\mathcal{F}''$  mit kompaktem Träger. Nach 1.10.5 gibt es einen Schnitt  $s \in \Gamma \mathcal{F}$  mit  $s \mapsto s''$ . Ist  $U$  das Komplement des Trägers von  $s''$ , so kommt  $s|_U$  per definitionem von einem Schnitt  $s' \in \mathcal{F}'(U)$  her. Dieser läßt sich jedoch, wenn  $\mathcal{F}'$  *welk* ist, zu einem globalen Schnitt  $s' \in \Gamma \mathcal{F}'$  ausdehnen, und  $s - s'$  ist dann der gesuchte Schnitt mit kompaktem Träger von  $\mathcal{F}$ , der auf  $s''$  abgebildet wird.  $\square$

2.11.11. Das vorhergehende Lemma 2.11.10 sagt uns insbesondere, daß für jede *welke* abelsche Garbe und a fortiori für jede injektive abelsche Garbe

$\mathcal{F}$  gilt

$$H_!^q \mathcal{F} = 0 \quad \forall q > 0$$

2.11.12. Jede kurze exakte Sequenz  $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$  von abelschen Garben liefert mit 1.9.8 und 2.11.10 eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen  $\Gamma_! \mathcal{G}^* \mathcal{F}' \hookrightarrow \Gamma_! \mathcal{G}^* \mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma_! \mathcal{G}^* \mathcal{F}''$  und mit II.2.2.2 dann die **lange exakte Sequenz der Kohomologie mit kompaktem Träger**

$$\dots \rightarrow H_!^q \mathcal{F}' \rightarrow H_!^q \mathcal{F} \rightarrow H_!^q \mathcal{F}'' \rightarrow H_!^{q+1} \mathcal{F}' \rightarrow \dots$$

Ist  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{A}^1 \rightarrow \dots$  eine Auflösung, so erhalten wir für alle  $q$  analog wie in 2.3.2 natürliche Abbildungen  $\text{nat} : \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{A}^* \rightarrow H_!^q \mathcal{F}$ . Ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F} & \hookrightarrow & \mathcal{A}^0 & \rightarrow & \mathcal{A}^1 & \rightarrow & \mathcal{A}^2 & \rightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{G} & \hookrightarrow & \mathcal{B}^0 & \rightarrow & \mathcal{B}^1 & \rightarrow & \mathcal{B}^2 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

gegeben mit Auflösungen von abelschen Garben  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{G}$  als Zeilen, so kommutiert mit den offensichtlichen Vertikalen und den eben beschriebenen natürlichen Abbildungen als Horizontalen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{A}^* & \rightarrow & H_!^q \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{B}^* & \rightarrow & H_!^q \mathcal{G} \end{array}$$

Gilt schließlich  $H_!^i \mathcal{A}^j = 0$  für alle  $i > 0$  und  $j \geq 0$ , so sind mit denselben Argumenten wie in 2.3.5 unsere natürlichen Abbildungen sämtlich Isomorphismen

$$\text{nat} : \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{A}^* \xrightarrow{\sim} H_!^q \mathcal{F}$$

Ganz allgemein bezeichnen wir eine abelsche Garbe  $\mathcal{A}$  als  $\Gamma_!$ -azyklisch genau dann, wenn gilt  $H_!^i \mathcal{A} = 0$  für alle  $i > 0$ . Die vorhergehende Aussage können wir dann dahingehend zusammenfassen, daß die **Kohomologie mit kompaktem Träger mit beliebigen  $\Gamma_!$ -azyklischen Auflösungen berechnet werden kann**. Wie in 2.3.17 kann man mithilfe injektiver Auflösungen auch unschwer einsehen, daß die natürliche Abbildung zur Godement-Auflösung schlicht die Identität  $\text{nat} = \text{id} : \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{G}^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} H_!^q \mathcal{F}$  ist.

2.11.13. Ist  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge eines Hausdorffraums, so kommutiert mit der Ausdehnung durch Null in den Vertikalen und den eben beschriebenen natürlichen Abbildungen als Horizontalen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q \Gamma_! (\mathcal{A}^*|_U) & \rightarrow & H_!^q(U; \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{A}^* & \rightarrow & H_!^q(X; \mathcal{F}) \end{array}$$

Man folgert das leicht aus der Tatsache, daß die Godement-Auflösung der Einschränkung einer Garbe auf eine offene Teilmenge kanonisch isomorph ist zur Einschränkung der Godement-Auflösung.

**2.11.14 (Abgeschlossener Rückzug).** Für jede abgeschlossene Einbettung  $A \hookrightarrow X$  induziert das Zurückholen von Schnitten Abbildungen  $\Gamma_!(X; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_!(A; \mathcal{F})$ . Damit erhalten wir auch Abbildungen  $H_!^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H_!^q(A; \mathcal{F})$  als die Komposition

$$H_!^q(X; \mathcal{F}) = \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^q \Gamma_! ((\mathcal{G}^* \mathcal{F})|_A) \rightarrow H_!^q(A; \mathcal{F})$$

mit der natürlichen Abbildung zur Auflösung  $\mathcal{F}|_A \hookrightarrow (\mathcal{G}^* \mathcal{F})|_A$  ganz rechts, die wir im übrigen in 2.11.21 im Fall lokal kompakter Hausdorffräume als Isomorphismus entlarven werden. Unser abgeschlossener Rückzug ist verträglich mit dem Rückzug aus 2.5.2 in dem Sinne, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_!^q(X; \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_!^q(A; \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X; \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^q(A; \mathcal{F}) \end{array}$$

mit dem Zurückholen in den Horizontalen und den kanonischen Abbildungen 2.11.7 in den Vertikalen kommutiert.

**2.11.15 (Transitivität des abgeschlossenen Rückzugs).** Der abgeschlossene Rückzug mit der Identität ist offensichtlich die Identität auf der Kohomologie mit kompaktem Träger. Gegeben abgeschlossene Einbettungen  $B \hookrightarrow A \hookrightarrow X$  von lokal kompakten Hausdorffräumen und eine abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  stimmt weiter der Rückzug  $H_!^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H_!^q(B; \mathcal{F})$  überein mit der Komposition von Rückzügen  $H_!^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H_!^q(A; \mathcal{F}) \rightarrow H_!^q(B; \mathcal{F})$ . Um das zu zeigen, argumentiert man wie beim gewöhnlichen Rückzug 2.5.9, ersetzt nur  $\Gamma$  durch  $\Gamma_!$ , und beachtet, daß der Rückzug unter abgeschlossenen Einbettungen Schnitte mit kompaktem Träger auf ebensolche abbildet. Die Details können dem Leser überlassen bleiben.

**Definition 2.11.16.** Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **relativ Hausdorff** genau dann, wenn je zwei verschiedene Punkte unserer Teilmenge disjunkte Umgebungen im ursprünglichen Raum besitzen.

**Proposition 2.11.17 (Fortsetzen von Schnitten über Kompakta).** Gegeben eine Garbe  $\mathcal{F} \in \text{Ens}/_X$  auf einem topologischen Raum  $X$  läßt sich jeder Schnitt von  $\mathcal{F}$  über einem relativ Hausdorff'schen Kompaktum  $K \subset X$  stetig auf eine offene Umgebung von  $K$  fortsetzen.



2.11.18. Für den dreielementigen Raum  $X$  mit zwei abgeschlossenen Punkten, die eine kompakte Teilmenge  $K$  bilden und beide im Abschluß des dritten Punktes liegen, läßt sich nicht jeder Schnitt über  $K$  der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$  auf eine offene Umgebung von  $K$  fortsetzen. In parakompakten Räumen wissen wir dahingegen nach 2.7.1 sogar, daß sich jeder Schnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge auf eine offene Umgebung derselben fortsetzen läßt. Die beiden Aussagen 2.7.1 und 2.11.17 sind die beiden einzigen allgemeinen Fortsetzungsergebnisse dieser Art, die ich kenne.

*Beweis.* Sei  $s \in \mathcal{F}(K)$  unser Schnitt. Da  $K$  als kompakter Hausdorffraum nach ?? lokal kompakt ist, finden wir eine Überdeckung von  $K$  durch Kompakta  $K_1, \dots, K_n$  und für diese Kompakta offene Umgebungen  $U_1, \dots, U_n \Subset X$  und Schnitte  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  mit  $s_i|_{K_i} = s|_{K_i}$ . Sicher gibt es eine offene Umgebung  $W$  von  $K_1 \cap K_2$  in  $U_1 \cap U_2$  mit  $s_1|_W = s_2|_W$ . Weiter finden wir ähnlich wie in ?? für  $i = 1, 2$  disjunkte offene Umgebungen  $U'_i \Subset U_i$  von  $K_i \setminus W$ . Dann verkleben die beiden  $s_i|_{U'_i}$  und  $s_1|_W = s_2|_W$  zu einem Schnitt auf  $U'_1 \cup U'_2 \cup W$ , der unseren Schnitt auf  $K_1 \cup K_2$  fortsetzt. Eine offensichtliche Induktion beendet den Beweis.  $\square$

**Definition 2.11.19.** Eine Garbe heißt **kompaktweich** (englisch **c-soft**, französisch **c-mou**) genau dann, wenn sich jeder Schnitt über einer kompakten Teilmenge zu einem globalen Schnitt fortsetzen läßt.

**Lemma 2.11.20.** Gegeben eine kompaktweiche abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  und  $Z \Subset X$  abgeschlossen induziert das Einschränken von Schnitten eine Surjektion

$$\Gamma_1(X; \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_1(Z; \mathcal{F})$$

*Beweis.* Sei  $s \in \Gamma(Z; \mathcal{F})$  ein Schnitt mit kompaktem Träger  $K$ . Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $K$  in  $X$  mit kompaktem Abschluß. Man kann einen Schnitt

$$\tilde{s} \in \Gamma(\partial U \cup (Z \cap \bar{U}); \mathcal{F})$$

erklären durch  $\tilde{s}|_{Z \cap \bar{U}} = s|_{Z \cap \bar{U}}$  und  $\tilde{s}|_{\partial U} = 0$ . Da  $\mathcal{F}$  kompaktweich ist, kann  $\tilde{s}$  zu einem globalen Schnitt  $t \in \Gamma(X; \mathcal{F})$  fortgesetzt werden. Dieser Schnitt verschwindet jedoch auf  $\partial U$  und wir können folglich einen neuen Schnitt  $\hat{s} \in \Gamma(X; \mathcal{F})$  bilden, der auf  $\bar{U}$  mit  $\tilde{s}$  übereinstimmt und der auf  $X \setminus U$  verschwindet. Dieser Schnitt  $\hat{s}$  ist dann der gesuchte Schnitt  $\hat{s} \in \Gamma_1(X; \mathcal{F})$  mit  $\hat{s} \mapsto s$ .  $\square$



Illustration zum Beweis des Fortsetzens von Schnitten über Kompakta  
[2.11.17](#)

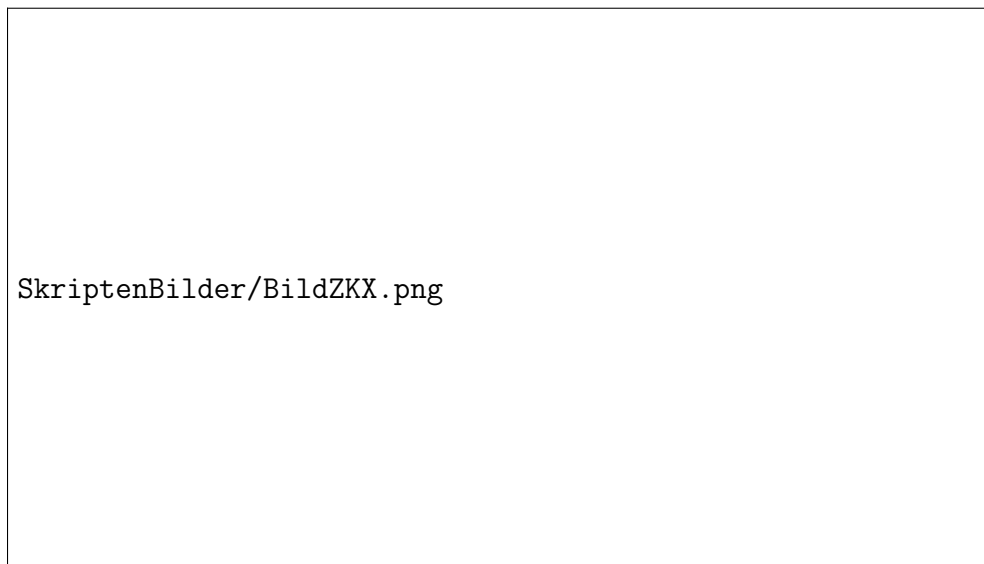


Illustration zum Beweis von [2.11.20](#)

*Beispiele 2.11.21.* Jede weiche Garbe auf einem Hausdorffraum ist kompaktweich. Jede welke Garbe auf einem Hausdorffraum ist kompaktweich nach 2.11.17. Die Einschränkung einer kompaktweichen Garbe auf einen Teilraum ist stets auch kompaktweich.

**Proposition 2.11.22 (Kompaktweiche Garben sind  $\Gamma_!$ -azyklisch).** Für jede kompaktweiche abelsche Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem lokal kompakten Hausdorffraum  $X$  verschwinden die höheren Kohomologiegruppen mit kompaktem Träger, in Formeln

$$H_!^q(X; \mathcal{F}) = 0 \quad \forall q > 0$$

*Beweis.* Analog wie in 1.10.3 folgt das aus dem anschließenden Lemma.  $\square$

**Lemma 2.11.23.** Seien gegeben ein lokal kompakter Hausdorffraum  $X$  und eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben  $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$  auf  $X$ .

1. Ist  $\mathcal{F}'$  kompaktweich, so induziert die Surjektion  $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}''$  eine Surjektion  $\Gamma_! \mathcal{F} \twoheadrightarrow \Gamma_! \mathcal{F}''$  auf den globalen Schnitten mit kompaktem Träger.
2. Sind  $\mathcal{F}'$  und  $\mathcal{F}$  kompaktweich, so ist auch  $\mathcal{F}''$  kompaktweich.

*Beweis.* 1. Sei  $s''$  ein Schnitt von  $\mathcal{F}''$  mit Träger im Kompaktum  $K$ . Wir wählen eine offene Umgebung  $U \Subset X$  von  $K$  mit kompaktem Abschluß  $\bar{U}$ . Offensichtlich ist  $\mathcal{F}'|_{\bar{U}}$  weich, nach 2.7.7 finden wir also ein Urbild  $s \in \mathcal{F}(\bar{U})$  von  $s''|_{\bar{U}}$ . Wählen wir noch eine Ausdehnung  $s' \in \mathcal{F}'(\bar{U})$  von der Einschränkung  $s|_{\partial U}$  von  $s$  auf den Rand von  $U$  im Sinne der mengentheoretischen Topologie und ersetzen  $s$  durch  $s - s'$ , so dürfen wir  $s|_{\partial U} = 0$  annehmen und können  $s$  durch Null zu einem globalen Schnitt ausdehnen.

2. Für  $K \subset X$  kompakt betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}''(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(K) & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}''(K) \end{array}$$

Die linke Vertikale ist surjektiv, da  $\mathcal{F}$  kompaktweich ist. Die untere Horizontale ist surjektiv nach 1, da mit  $\mathcal{F}'$  auch  $\mathcal{F}'|_K$  kompaktweich ist. Also ist die rechte Vertikale surjektiv.  $\square$

2.11.24 (**Gysin-Sequenz**). Seien  $A \Subset X$  eine abgeschlossene Teilmenge in einem lokal kompakten Hausdorffraum und  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf  $X$ . Die Godementauflösung  $\mathcal{G}^* \mathcal{F}$  besteht aus welchen Garben. Da wir unseren Raum Hausdorff angenommen haben, sind sie nach 2.11.21 also kompaktweich, und nach 2.11.20 erhalten wir folglich eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$\Gamma_!(X \setminus A; \mathcal{G}^* \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma_!(X; \mathcal{G}^* \mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_!(A; \mathcal{G}^* \mathcal{F})$$

Weiter sind nach 2.11.21 auch die Einschränkungen  $(\mathcal{G}^q \mathcal{F})|_A$  kompaktweich. Nach 2.11.22 ist also  $\mathcal{F}|_A \hookrightarrow (\mathcal{G}^* \mathcal{F})|_A$  eine  $\Gamma_!$ -azyklische Auflösung. Gehen wir zur langen exakten Kohomologiesequenz über und verwenden, daß nach 2.11.21 die natürliche Abbildung aus 2.11.12 notwendig einen Isomorphismus  $\mathcal{H}^q \Gamma_!(\mathcal{G}^* \mathcal{F})|_A \xrightarrow{\sim} H_!^q(A; \mathcal{F})$  liefert, so erhalten wir eine lange exakte Sequenz, die sogenannte **Gysin-Sequenz**

$$\dots \rightarrow H_!^{q-1}(A; \mathcal{F}) \rightarrow H_!^q(X \setminus A; \mathcal{F}) \rightarrow H_!^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H_!^q(A; \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

mit der Ausdehnung durch Null als mittlerem Pfeil und der Restriktion auf eine abgeschlossene Teilmenge als rechtem Pfeil.

2.11.25 (**Funktorialität der Gysin-Sequenz**). Ist  $X$  ein lokal kompakter Hausdorffraum mit abgeschlossenen Teilmengen  $B \subset A \subset X$  und  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf  $X$ , so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_!^{q-1}(A; \mathcal{F}) & \rightarrow & H_!^q(X \setminus A; \mathcal{F}) & \rightarrow & H_!^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H_!^q(A; \mathcal{F}) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & H_!^{q-1}(B; \mathcal{F}) & \rightarrow & H_!^q(X \setminus B; \mathcal{F}) & \rightarrow & H_!^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H_!^q(B; \mathcal{F}) \rightarrow \dots \end{array}$$

mit Gysinsequenzen in den Horizontalen und dem Ausdehnen durch Null bzw. dem abgeschlossenen Rückzug in den Vertikalen. In der Tat haben wir für jede kompaktweiche abelsche Garbe  $\mathcal{G}$  auf  $X$  ein kommutatives Diagramm mit kurzen exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_!(X \setminus A; \mathcal{G}) & \hookrightarrow & \Gamma_!(X; \mathcal{G}) & \twoheadrightarrow & \Gamma_!(A; \mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_!(X \setminus B; \mathcal{G}) & \hookrightarrow & \Gamma_!(X; \mathcal{G}) & \twoheadrightarrow & \Gamma_!(B; \mathcal{G}) \end{array}$$

Wenden wir diese Erkenntnis an auf alle Garben der Godement-Auflösung  $\mathcal{G}^* \mathcal{F}$ , so steht die Behauptung schon im Wesentlichen da. Der Rest des Arguments kann dem Leser zur Übung überlassen bleiben.

*Ergänzende Übung 2.11.26.* Man zeige, daß gegeben  $s^{n-1} \subset S^n$  zwei ineinander enthaltene Sphären benachbarter Dimensionen und eine beliebige zwei-punktige Teilmenge  $Z \subset S^n$  bestehend aus einem Punkt in jeder Komponente des Komplements  $S^n \setminus s^{n-1}$  die Einbettung  $s^{n-1} \hookrightarrow S^n \setminus Z$  einen Isomorphismus auf der Kohomologie induziert. Hinweis: Man vergrößere  $Z$  zu einer offenen Menge  $\tilde{Z}$  bestehend aus je einem offenen Ball um jeden der beiden Punkte, der  $s^{n-1}$  nicht trifft. Mithilfe der Natürlichkeit der Gysinsequenz zeige man dann, daß der abgeschlossene Rückzug Isomorphismen  $H_!^q(S^n \setminus \tilde{Z}) \xrightarrow{\sim} H_!^q(s^{n-1})$  induziert.

*Ergänzung 2.11.27 (de-Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger).* Gegeben eine glatte Mannigfaltigkeit  $X$  ist der de-Rham-Komplex aus 2.7.9 eine Auflösung

$$\mathbb{R}_X \hookrightarrow \Omega_X^*$$

der konstanten Garbe  $\mathbb{R}_X$ . Mit 2.11.17 sieht man leicht, daß das sogar eine Ausdehnung durch kompaktweiche Garben ist, indem man einen Schnitt auf einem Kompaktum erst auf eine offene Umgebung desselben fortsetzt, ihn dann dort nach Null herunterbiegt, und dann mit Null weiter fortsetzt. Alternativ kann man im Fall einer parakompakten Mannigfaltigkeit auch auf 2.7.4 zurückgreifen. In jedem Fall ist der de-Rham-Komplex eine  $\Gamma_1$ -azyklische Auflösung und folglich liefern die natürlichen Abbildungen Isomorphismen

$$\text{nat} : \mathcal{H}^q \Gamma_1 \Omega_X^* \xrightarrow{\sim} H_1^q(X; \mathbb{R}_X)$$

Die linke Seite heißt manchmal auch die de-Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger von  $X$ . Der Leser wird zur Übung unschwer zeigen können, daß das Ausdehnen durch Null in diesem Fall über das Ausdehnen durch Null von Differentialformen mit kompaktem Träger berechnet werden kann und ebenso der abgeschlossene Rückzug auf eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit durch Rückzug von Differentialformen mit kompaktem Träger.

2.11.28. Die de-Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger ist Berechnungen besonders gut zugänglich. Zum Beispiel sieht man in diesem Bild unmittelbar, daß die Kohomologie mit kompaktem Träger und reellen Koeffizienten einer Mannigfaltigkeit  $X$  oberhalb der Dimension unserer Mannigfaltigkeit verschwinden muß, in Formeln

$$H_1^q(X; \mathbb{R}_X) = 0 \quad \text{für } q > \dim X.$$

*Beispiel 2.11.29.* Für die Kohomologie mit kompaktem Träger und reellen Koeffizienten der Zahlengerade gilt

$$H_1^q(\mathbb{R}; \mathbb{R}_{\mathbb{R}}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & q = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Tat erhalten wir mit dem Integrieren über die ganze reelle Gerade als zweitem Pfeil eine kurze exakte Sequenz  $\Gamma_1 \Omega_{\mathbb{R}}^0 \hookrightarrow \Gamma_1 \Omega_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Insbesondere ist die Kohomologie mit kompaktem Träger nicht homotopieinvariant!

*Übung 2.11.30.* Man berechne die Kohomologie der Kreislinie mit reellen Koeffizienten mithilfe der Gysinsequenz aus dem vorhergehenden Beispiel.

2.11.31. Im folgenden will ich zeigen, daß für jeden lokal kompakten lokal zusammenziehbaren Hausdorffraum die singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger mit der Garbenkohomologie mit kompaktem Träger übereinstimmt. Wieder ist das Ziel, Anschauung zu übertragen.

2.11.32. Gegeben ein Hausdorffraum  $X$  und ein Kompaktum  $K \subset X$  induzieren die offensichtlichen Abbildungen  $S^q X \rightarrow \Gamma \mathcal{S}_X^q$  von den singulären Koketten auf  $X$  in die globalen Schnitte der Garbe der lokalen singulären Koketten sicher Kettenabbildungen  $S^*(X, X \setminus K) \rightarrow \Gamma_! \mathcal{S}_X^*$ . Aufgrund der Exaktheit des direkten Limes liefern sie auch Homomorphismen

$$H_!^q(X; \mathbb{Z})_{\text{sing}} \rightarrow \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_X^*$$

auf der singulären Kohomologie mit kompaktem Träger nach II.5.2.1. Für  $U \Subset X$  eine offene Teilmenge kommutiert weiter das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_!^q(U; \mathbb{Z})_{\text{sing}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_U^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_!^q(X; \mathbb{Z})_{\text{sing}} & \longrightarrow & \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_X^* \end{array}$$

mit der Ausdehnung durch Null im Sinne von II.5.2.1 in der linken Vertikalen und der mittels der Ausdehnung durch Null von Schnitten mit kompaktem Träger von  $\mathcal{S}_U^* = \mathcal{S}_X^*|_U$  induzierten Abbildung in der rechten Vertikalen. In der Tat liefert der Rückzug ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^*(U, U \setminus K) & \rightarrow & \Gamma_K \mathcal{S}_U^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^*(X, X \setminus K) & \rightarrow & \Gamma_K \mathcal{S}_X^* \end{array}$$

wobei rechts Schnitte mit Träger in  $K$  gemeint sind. In der rechten Vertikalen stehen hier Isomorphismen, und in der linken Vertikale entstehen Isomorphismen, eben die Ausschneidungsisomorphismen, beim Übergang zur Kohomologie. Diese Isomorphismen müssen wir dann nur noch durch ihre Inversen ersetzen und in geeigneter Weise zum direkten Limes übergehen.

2.11.33. Gegeben ein lokal zusammenziehbarer topologischer Raum  $X$  ist nach 2.9.3 der Komplex der lokalen singulären Koketten eine Auflösung  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^*$  der konstanten Garbe. Wir erhalten so mithilfe von 2.11.12 für jeden lokal zusammenziehbaren Hausdorffraum natürliche Abbildungen

$$\mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_X^* \rightarrow H_!^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

und für  $U \Subset X$  folgern wir aus 2.11.12 mit diesen Abbildungen in den Horizontalen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_U^* & \rightarrow & H_!^q(U; \mathbb{Z}_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_X^* & \rightarrow & H_!^q(X; \mathbb{Z}_X) \end{array}$$

mit Ausdehnung durch Null in den Vertikalen.

**Satz 2.11.34 (Singuläre Kohomologie als Garbenkohomologie).** *Gegeben ein lokal kompakter lokal zusammenziehbarer Hausdorffraum  $X$  liefern die in 2.11.32 und 2.11.33 erklärten Konstruktionen Isomorphismen*

$$H_!^q(X; \mathbb{Z})_{\text{sing}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_X^* \xrightarrow{\sim} H_!^q(X; \mathbb{Z}_X)$$

*zwischen der singulären Kohomologie mit kompaktem Träger von  $X$  und der Garbenkohomologie mit kompaktem Träger der konstanten Garbe  $\mathbb{Z}_X$  auf  $X$ , und diese Isomorphismen sind verträglich mit der Fortsetzung durch Null von offenen Teilmengen.*

*Bemerkung 2.11.35.* Dieselbe Aussage gilt mit demselben Beweis auch allgemeiner mit Koeffizienten in einer beliebigen abelschen Gruppe. Die Verträglichkeit mit offenen Einbettungen hatten wir schon in 2.11.32 und 2.11.33 geprüft. Der Beweis, daß unsere Abbildungen Isomorphismen sind, braucht einige technische Hilfsmittel, die wir nun entwickeln. Der eigentliche Beweis wird gegeben im Anschluß an den Beweis von 2.11.23. Eine Version für die gewöhnliche Kohomologie hatten wir bereits als 2.9.4 gezeigt.

**Lemma 2.11.36.** *Auf jedem lokal kompakten Hausdorffraum sind die Garben der lokalen singulären Koketten kompaktweich.*

*Beweis.* Dieser Beweis ist eine Variante des Beweises von 2.9.6. Sei  $X$  unser Raum. Einen Schnitt über einer kompakten Teilmenge  $K \Subset X$  können wir zunächst nach 2.11.17 ausdehnen zu einem Schnitt  $s$  auf einer offenen Umgebung  $V \Subset X$  von  $K$ . Ohne Schwierigkeiten finden wir weiter  $W \Subset X$  mit  $K \subset W \subset \bar{W} \subset V$ . Jetzt konstruieren wir einen Endomorphismus der Prägarbe der singulären Koketten auf  $V$ , indem wir einem Schnitt, d.h. einer Funktion auf den Simplizes diejenige neue Funktion zuordnen, die dasselbe macht mit allen Simplizes aus  $W$  und die alle Simplizes zu Null macht, die nicht ganz in  $W$  liegen. Lassen wir den auf der Garbifizierung induzierten Endomorphismus auf unsere Ausdehnung  $s$  los, so erhalten wir eine Ausdehnung  $\tilde{s}$ , die auf  $V \setminus \bar{W}$  verschwindet. Damit können wir unsere abgeänderte Ausdehnung  $\tilde{s}$  aber durch Null fortsetzen auf ganz  $X$ .  $\square$

*Beweis von 2.11.34.* Der zweite in unserem Satz behauptete Isomorphismus  $\mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_X^* \xrightarrow{\sim} H_!^q(X; \mathbb{Z}_X)$  folgt ohne Mühe aus 2.11.12, da der Komplex  $\mathcal{S}_X^*$  nach 2.9.3 eine Auflösung der konstanten Garbe bildet durch nach 2.11.36 kompaktweiche Garben, deren höhere Kohomologiegruppen mit kompaktem Träger nach 2.11.22 verschwinden. Der Beweis des ersten im Satz behaupteten Isomorphismus  $H_!^q X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_X^*$  wird uns noch etwas Arbeit machen.

Ist  $X$  parakompakt, so erhalten wir für jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$  ein kommutatives Diagramm von Komplexen abelscher Gruppen

$$\begin{array}{ccccc} S^*(X, X \setminus U) & \hookrightarrow & S^*X & \twoheadrightarrow & S^*(X \setminus U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ker_U^* & \hookrightarrow & \mathcal{S}_X^*(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_{X \setminus U}^*(X \setminus U) \end{array}$$

wie folgt: Wir gehen aus von den beiden rechten Vertikalen, die nach 2.9.10 Surjektionen sind; die rechte untere Horizontale kann durch das Kommutieren des Diagramms definiert werden, da der Kern der mittleren Vertikale unter dem Weg über  $S^*(X \setminus U)$  nach rechts unten offensichtlich auf Null abgebildet wird; und  $\ker_U^*$  erklären wir schlicht als den Kern der rechten unteren Horizontale. Wir haben dann kurze exakte Sequenzen als Zeilen, und da die beiden rechten Vertikalen nach 2.9.11 Isomorphismen auf der Kohomologie induzieren, trifft das auch für die linke Vertikale zu. Da in einem lokal kompakten Raum sowohl die kompakten Mengen als auch die offenen Mengen  $U$  mit kompaktem Abschluß kofinal sind im System aller Mengen mit kompaktem Abschluß, erhalten wir nun mit Limites jeweils über alle offenen Mengen  $U$  mit kompaktem Abschluß

$$\begin{aligned} H_!^q X &= \varinjlim_U H^q(X, X \setminus U) && \text{nach der Definition in II.5.2.1,} \\ &\cong \varinjlim_U \mathcal{H}^q \ker_U^* && \text{nach unserer Vorüberlegung,} \\ &\cong \mathcal{H}^q \varinjlim_U \ker_U^* && \text{wegen der Exaktheit von } \varinjlim, \\ &\cong \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_X^* && \text{wie wir im Anschluß zeigen.} \end{aligned}$$

Ist zunächst  $Z$  ein beliebiger topologischer Raum und  $U \subseteq Z$  eine offene Teilmenge, so induziert das Zurückholen von Koketten sicher einen Isomorphismus  $\mathcal{S}_Z^q|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_U^q$  und damit auch einen Isomorphismus  $\mathcal{S}_Z^q(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_U^q(U)$ . Das liefert den Isomorphismus in der unteren Horizontale eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_X^q(X) & \longrightarrow & \mathcal{S}_{X \setminus U}^q(X \setminus U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}_X^q(X \setminus \bar{U}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{S}_{X \setminus U}^q(X \setminus \bar{U}) \end{array}$$

dessen obere Horizontale wir bereits aus dem vorhergehenden Diagramm kennen. Jeder Schnitt von  $\mathcal{S}_X^q(X)$  aus  $\ker_U^q$  hat folglich Träger in  $\bar{U}$ . Hat umgekehrt ein Schnitt von  $\mathcal{S}_X^q(X)$  kompakten Träger und ist  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß, die besagten Träger umfaßt, so geht unser Schnitt in  $\mathcal{S}_X^q(X \setminus U)$  nach Null. Nun faktorisiert unsere Surjektion  $S^q X \twoheadrightarrow \mathcal{S}_{X \setminus U}^q(X \setminus U)$  aus dem ersten Diagramm des Beweises aber sogar als  $S^q X \twoheadrightarrow \mathcal{S}_X^q(X) \twoheadrightarrow \mathcal{S}_X^q(X \setminus U) \twoheadrightarrow \mathcal{S}_{X \setminus U}^q(X \setminus U)$ , wo die zweite Surjektion aus



der Weichheit von  $\mathcal{S}_X^q$  nach 2.9.6 folgt und die dritte Surjektion sich ergibt, da der Kern der Komposition der ersten beiden Abbildungen im Kern unserer ursprünglichen Surjektion enthalten ist. Damit geht unser Schnitt mit kompaktem Träger erst recht in  $\mathcal{S}_{X \setminus U}^q(X \setminus U)$  nach Null und liegt folglich in  $\ker_U^q$ , und wir haben den ersten in 2.11.34 behaupteten Isomorphismus für jeden lokal kompakten parakompakten Raum hergeleitet. Fordern wir statt der Parakompaktheit nur Hausdorff, so müssen wir noch etwas mehr arbeiten, und ich fürchte fast, diese Arbeit lohnt recht eigentlich nicht, da wir unseren Satz eh nur auf parakompakte Räume anwenden werden. Aber sei's drum! Ist zunächst  $K \triangleleft X$  kompakt und  $U \subseteq X$  offen mit  $\bar{U} \subset K^\circ$ , so konstruieren wir ein kommutatives Diagramm von Komplexen abelscher Gruppen

$$\begin{array}{ccccc} S^*(K, K \setminus U) & \hookrightarrow & S^*K & \twoheadrightarrow & S^*(K \setminus U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ker_{K,U}^* & \hookrightarrow & \mathcal{S}_K^*(K) & \twoheadrightarrow & \mathcal{S}_{K \setminus U}^*(K \setminus U) \end{array}$$

in derselben Weise wie zuvor,  $K$  und  $K \setminus U$  sind ja kompakt und damit insbesondere auch parakompakt, und  $\ker_{K,U}^*$  erklären wir eben als den Kern der rechten unteren Horizontale. Wir haben dann kurze exakte Sequenzen als Zeilen, und da die beiden rechten Vertikalen nach 2.9.11 Isomorphismen auf der Kohomologie induzieren, trifft das auch für die linke Vertikale zu. Nach dem Ausschneidungssatz induziert weiter auch die Restriktion  $S^*(X, X \setminus U) \rightarrow S^*(K, K \setminus U)$  Isomorphismen auf der Kohomologie. Nun beachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \{s \in \mathcal{S}_K^*(K) \mid \text{supp } s \subset U\} & \hookrightarrow & \ker_{K,U}^* & \hookrightarrow & \{s \in \mathcal{S}_K^*(K) \mid \text{supp } s \subset \bar{U}\} \\ \wr \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ \{s \in \mathcal{S}_{K^\circ}^*(K^\circ) \mid \text{supp } s \subset U\} & & \wr & & \{s \in \mathcal{S}_{K^\circ}^*(K^\circ) \mid \text{supp } s \subset \bar{U}\} \\ \wr \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \wr \\ \{s \in \mathcal{S}_X^*(X) \mid \text{supp } s \subset U\} & \hookrightarrow & \ker_U^* & \hookrightarrow & \{s \in \mathcal{S}_X^*(X) \mid \text{supp } s \subset \bar{U}\} \end{array}$$

wobei die kurzen vertikalen Isomorphismen durch Restriktion definiert werden und  $\ker_U^*$  dadurch erklärt wird, daß es eben unter diesen Isomorphismen unserem  $\ker_{K,U}^*$  entspricht. Die Notation bringt zum Ausdruck, daß  $\ker_U^*$  von  $K$  gar nicht mehr abhängt, was man auch unschwer einsieht. Nun ergänzen wir die rechte Zelle des vorhergehenden Diagramms zu einem weiteren

kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{S}^*(K, K \setminus U) & \longrightarrow & \ker_{K,U}^* & \hookrightarrow & \{s \in \mathcal{S}_K^*(K) \mid \text{supp } s \subset \bar{U}\} \\
 \uparrow & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 \mathcal{S}^*(X, X \setminus U) & \dashrightarrow & \ker_U^* & \hookrightarrow & \{s \in \mathcal{S}_X^*(X) \mid \text{supp } s \subset \bar{U}\}
 \end{array}$$

wobei der gestrichelte Pfeil dadurch entsteht, daß die offensichtliche Abbildung von unten links nach unten rechts zu einem kommutativen Rechteck führt und folglich in Anbetracht der Definition von  $\ker_U^*$  wie durch den gestrichelten Pfeil angedeutet über  $\ker_U^*$  faktorisiert. Alle Pfeile des linken Quadrats bis auf den gestrichelten Pfeil induzieren nun Isomorphismen auf der Kohomologie. Folglich gilt das auch für den gestrichelten Pfeil. Aus der Definition von  $\ker_U^*$  folgt wieder  $\varinjlim \ker_U^* = \Gamma_! \mathcal{S}_X^*$  für den direkten Limes über alle offenen Teilmengen mit kompaktem Abschluß, und damit finden wir wieder

$$\begin{aligned}
 H_!^q X &= \varinjlim_U H^q(X, X \setminus U) && \text{nach der Definition in II.5.2.1,} \\
 &\cong \varinjlim_U \mathcal{H}^q \ker_U^* && \text{nach unserer Vorüberlegung,} \\
 &\cong \mathcal{H}^q \varinjlim_U \ker_U^* && \text{wegen der Exaktheit von } \varinjlim, \\
 &\cong \mathcal{H}^q \Gamma_! \mathcal{S}_X^* && \text{nach der Definition von } \Gamma_! \quad \square
 \end{aligned}$$

**Korollar 2.11.37 (Alexander-Dualität).** *Ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine abgeschlossene Teilmenge und  $G$  eine abelsche Gruppe, so liefern der Randoperator der Gysinsequenz 2.11.24 zusammen mit der Poincaré-Dualität II.5.3.7 Isomorphismen*

$$H_!^q(A; G_A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A; G)$$

Gegeben eine weitere abgeschlossene Teilmenge  $B \subset A$  kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H_!^q(A; G_A) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \setminus A; G) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_!^q(B; G_B) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n \setminus B; G)
 \end{array}$$

mit den Isomorphismen der Alexanderdualität in den Horizontalen und der Einschränkung kompakter Kohomologie und dem direkten Bild der reduzierten Homologie in den Vertikalen.

2.11.38. Schneiden wir etwa aus der Ebene  $\mathbb{R}^2$  zwei disjunkte kompakte abgeschlossene zusammenhängende Teilmengen heraus, so ist die erste Homologie des Komplements frei vom Rang zwei. Anschaulich wird eine Basis eben gegeben durch die Klassen zweier Zyklen, die jeweils um eines der beiden beim Herausschneiden entstandenen Löcher laufen. Man kann sich auch den Fall

denken, daß eine der besagten kompakten abgeschlossenen zusammenhängenden Teilmengen als Ring um die andere liegt: Unser Satz wird dann auch für  $q = 1$  gehaltvoll. Schneiden wir dahingegen eine nichtkompakte zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge heraus, so verschwindet die erste Homologie des Komplements, da anschaulich gesprochen “unsere nichtkompakte Teilmenge in irgendeiner Richtung nach Unendlich läuft und nicht von einem Zykel umrundet werden kann”. Im Fall  $q = 0$  fällt der Isomorphismus der Alexanderdualität im übrigen zusammen mit dem Isomorphismus II.2.10.24, und im Fall  $q = 0, n = 2$  ist es im Wesentlichen der Isomorphismus aus II.1.6.3.

*Beweis.* Wir wenden die Gysin-Sequenz 2.11.24 an mit  $X = \mathbb{R}^n$ , verwandeln darin zwei Garbenkohomologiegruppen mit kompaktem Träger mithilfe von 2.11.34 in singuläre Kohomologiegruppen mit kompaktem Träger und diese mit Poincaré-Dualität II.5.3.7 in gewöhnliche Homologiegruppen. Schließlich gehen wir noch zur reduzierten Homologie über, wobei wir bemerken, daß die obere und die untere Horizontale im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(X \setminus A) & \rightarrow & H_q X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{H}_q(X \setminus A) & \rightarrow & \tilde{H}_q X \end{array}$$

für alle  $q$  denselben Kern und Kokern haben. □

*Bemerkung 2.11.39.* Das vorstehende Korollar ist eine weitere Illustration für die Nützlichkeit der Garbenkohomologie: Ersetzen wir auf der linken Seite die Garbenkohomologie durch die singuläre Kohomologie, so gilt es im allgemeinen nicht mehr, zum Beispiel im Fall  $n = 2, q = 1, G = \mathbb{Z}$  für  $A$  den Schnitt der Sinuskurve des Topologen mit der Einheitskreisscheibe.

**Korollar 2.11.40.** *Seien  $r, n \geq -1$  und sei  $s^r \subset S^n$  eine Teilmenge der  $n$ -Sphäre, die homöomorph ist zur  $r$ -Sphäre  $S^r$ . So gilt*

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus s^r) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n - r - 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Wir erhalten wie eben mit Poincaré-Dualität und Übergang zur reduzierten Homologie eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{n-q}(S^n \setminus s^r) \rightarrow \tilde{H}_{n-q}(S^n) \rightarrow H_!^q(s^r; \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{H}_{n-q-1}(S^n \setminus s^r) \rightarrow \dots$$

Für das weitere überlassen wir die Fälle  $r = -1$  und  $r = 0$  dem Leser. Bei  $r \geq 1$  ist  $H_!^q(s^r; \mathbb{Z})$  nur für  $q = 0$  und  $q = r$  von Null verschieden und dann isomorph zu  $\mathbb{Z}$ . Im Fall  $q = 0$  haben wir

$$\tilde{H}_n(S^n) \cong H_!^0(S^n; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_!^0(s^r; \mathbb{Z}),$$

für alle anderen  $q$  gilt  $\tilde{H}_{n-q}(S^n) = 0$ . Das Korollar folgt.  $\square$

**Korollar 2.11.41.** *Ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension Eins mit  $k$  Zusammenhangskomponenten, so besteht ihr Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus A$  aus  $(k + 1)$  Zusammenhangskomponenten.*

*Beweis.* Wir finden  $H_0(A; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_1^{n-1}(A; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_0(\mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  mit Poincaré-Dualität II.5.3.7 und Alexander-Dualität. Man beachte hierbei, daß nach II.5.3.8 Poincaré-Dualität mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  auch für beliebige, als da heißt auch für nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten gilt.  $\square$

**Korollar 2.11.42.** *Eine kompakte aber nicht orientierbare  $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit  $A$  kann nicht in den  $\mathbb{R}^n$  eingebettet werden.*

*Bemerkung 2.11.43.* Das folgende Korollar 2.11.44 ist sogar noch etwas stärker, sein Beweis aber auch entsprechend verwickelter.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $A$  zusammenhängend. Ist  $A$  nicht orientierbar, so liefert unser Satz über hohe Homologie von Mannigfaltigkeiten mit Alexander-Dualität

$$0 = H^{n-1}(A; \mathbb{Z}) = \tilde{H}_0(\mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Z})$$

und  $\mathbb{R}^n \setminus A$  wäre zusammenhängend im Widerspruch zum vorhergehenden Korollar 2.11.41.  $\square$

**Korollar 2.11.44.** *Eine nicht orientierbare  $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit  $A$  kann nicht als abgeschlossene Teilmenge in den  $\mathbb{R}^n$  eingebettet werden.*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $A$  zusammenhängend. Wir zeigen zunächst  $H_1^{n-1}(A; \mathbb{Q}) = 0$ . In der Tat ist das der direkte Limes der  $H^{n-1}(A, A \setminus K; \mathbb{Q})$  über alle kompakten  $K$  oder gleichbedeutend der direkte Limes der  $H_{n-1}(A, A \setminus K; \mathbb{Q})^*$  oder mit II.3.1.6 gleichbedeutend der direkte Limes der Dualräume  $(\Gamma_! K)^*$  der Schnitte über  $K$  in die Orientierungsgarbe mit  $\mathbb{Q}$ -Koeffizienten. Dieser direkte Limes hinwiederum kann identifiziert werden mit dem Dualraum des inversen Limes der  $\Gamma_! K$ , und dieser inverse Limes kann auch gleichbedeutend über alle  $K \subset A$  mit kompaktem Abschluß oder über alle offenen  $K \subset A$  mit kompaktem Abschluß gebildet werden. Dann aber ist klar, daß unser inverser Limes mit dem Raum der globalen Schnitte der Orientierungsgarbe übereinstimmt. Dieser Raum hinwiederum ist Null, wenn unsere Mannigfaltigkeit nicht orientierbar und zusammenhängend ist, und das zeigt schließlich  $H_1^{n-1}(A; \mathbb{Q}) = 0$ . Dann aber liefert Alexander-Dualität

$$\tilde{H}_0(\mathbb{R}^n \setminus A; \mathbb{Q}) = 0$$

und  $\mathbb{R}^n \setminus A$  wäre zusammenhängend im Widerspruch zum vorhergehenden Korollar 2.11.41.  $\square$

**Korollar 2.11.45.** Eine Homotopieklasse  $(a, b)$  in  $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  kann genau dann durch einen auf  $[0, 1)$  injektiven Weg dargestellt werden, wenn  $a$  und  $b$  teilerfremd sind oder wenn gilt  $a = b = 0$ .

*Beweis.* Wir wenden die Gysin-Sequenz 2.11.24 an auf den Fall  $X = S^1 \times S^1$  und das Bild eines injektiven Weges  $A \cong S^1 \triangleleft X$  und folgern eine exakte Sequenz

$$H_1^1 X \rightarrow H_1^1 A \rightarrow H_1^2(X \setminus A)$$

Da  $H_1^2(X \setminus A) \cong H_0(X \setminus A)$  frei ist über  $\mathbb{Z}$ , muß  $H_1^1 X \rightarrow H_1^1 A$  surjektiv oder Null sein. Diese Abbildung wird jedoch nach 2.11.14 unter geeigneten Identifikationen  $H_1^1 X \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,  $H_1^1 A \cong \mathbb{Z}$  gegeben durch die Zeilenmatrix  $(a, b)$ .  $\square$

*Bemerkung 2.11.46.* Frage: Sei  $M$  eine orientierbare Fläche, nicht notwendig kompakt, aber separabel. Ist  $H_1 M$  stets eine freie abelsche Gruppe? Ich denke schon: 1) Kompakte orientierbare mit Rand ok, kann Löcher füllen; 2) Falls lasse Rand weg, auch ok; 3) Schreibe als aufsteigende Vereinigung von sowas; und prüfe mit Gysinsequenz, daß die induzierten Abbildungen spalten.

*Bemerkung 2.11.47.* Gegeben ein lokal kompakter Hausdorff-Raum  $X$  und ein Körper  $k$  kann man die **Borel-Moore-Homologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $k$**  schlicht definieren als den Dualraum der Kohomologie mit kompaktem Träger. Wir notieren die  $i$ -te Borel-Moore-Homologie als  $H_i^!$  und haben also in Formeln

$$H_i^!(X; k) := H_i^i(X; k)^*$$

Diese Notation ist allerdings unüblich, öfter verwendet man statt  $H_i^!$  die Notation  $H_i^{\text{BM}}$ . Ist  $X$  der Polyeder  $X = \Delta(\mathcal{K})$  eines lokal endlichen Simplicialkomplexes  $\mathcal{K}$ , so kann man folglich die Borel-Moore-Homologie mit Koeffizienten in unserem Körper  $k$  berechnen mit dem Komplex, den man durch Dualisieren erhält aus dem Komplex  $S_{\text{os!}}^*(\Delta(\mathcal{K}); k)$  der simplicialen Koketten mit kompaktem Träger, der in II.5.3.3 eingeführt wird und von dem dort gezeigt wird, daß er die Kohomologie mit kompaktem Träger des Polyeders  $\Delta(\mathcal{K})$  berechnet. Der duale Komplex zu  $S_{\text{os!}}^*(\Delta(\mathcal{K}); k)$  ist aber offensichtlich gerade der Komplex  $\text{Ens}(\mathcal{K}_*, k)$  aller nicht notwendig endlichen formalen Linearkombinationen von Simplizes mit dem durch die übliche Formel wie in II.1.1.3 gegebenen Randoperator, der weiter sinnvoll definiert ist, da wir unseren Simplicialkomplex lokal endlich angenommen hatten. Erlaubt man also in dieser Situation auch unendliche formale Linearkombinationen von Simplizes als Ketten, so gelangt man von der üblichen Homologie zur Borel-Moore-Homologie. Das geht natürlich auch mit beliebigen Koeffizienten, jedoch ist es dann schwieriger, die Unabhängigkeit der so erklärten Gruppe von der Triangulierung nachzuweisen.

*Bemerkung 2.11.48.* Unsere allgemeine Poincaré-Dualität [II.5.3.7](#) liefert zumindest mit Koeffizienten in einem Körper eine Paarung

$$H_q^{BM}(M; k) \times H_{n-q}(M; k) \rightarrow k$$

die wir anschaulich als Schnittpaarung verstehen können. Eigentlich sollte wohl auch der Isomorphismus [II.5.3.7](#) zu verstehen sein als partielles Auswerten auf dem Fundamentalzykel  $\omega \in H_n^{BM}(M)$  von  $M$  in der Borel-Moore-Homologie, der eben auch für nicht notwendig kompaktes aber orientiertes  $M$  existiert.

*Bemerkung 2.11.49.* Der sogenannte Kreisraum aus [I.4.5.16](#) zeigt, daß der Dualraum der singulären Kohomologie mit kompaktem Träger im Allgemeinen nicht durch den Komplex der lokal endlichen singulären Koketten berechnet werden kann. Ich wüßte gerne, unter welchen Bedingungen das doch geht. Ich weiß es noch nicht einmal für die Polyeder lokal endlicher Simplizialkomplexe.

### 3 Abstrakte homologische Algebra

#### 3.1 Die lange exakte Kohomologiesequenz

3.1.1. Man erinnere die Definition einer präabelschen Kategorie 1.6.2.

**Definition 3.1.2.** Gegeben ein Komplex  $\dots \rightarrow A^{q-1} \xrightarrow{d^{q-1}} A^q \xrightarrow{d^q} A^{q+1} \rightarrow \dots$  in einer präabelschen Kategorie erklären wir seine  $q$ -te **Kohomologie** als

$$\mathcal{H}^q A = \text{cok}(A^{q-1} \rightarrow \ker d^q)$$

*Übung 3.1.3.* Wir setzen dual  $\bar{\mathcal{H}}^q A = \ker(\text{cok } d^{q-1} \rightarrow A^{q+1})$ . Man zeige, daß sich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q A & & \bar{\mathcal{H}}^q A \\ \uparrow & & \downarrow \\ \ker d^q & \hookrightarrow A^q \twoheadrightarrow & \text{cok } d^{q-1} \end{array}$$

auf genau eine Weise durch einen Morphismus in der oberen Horizontalen kommutativ ergänzen läßt, und daß diese Ergänzung notwendig ein Isomorphismus ist.

3.1.4. An dieser Stelle will ich einen technischen Punkt diskutieren, der bald wichtig werden wird: Wir haben bei der Definition einer präabelschen Kategorie zwar vorausgesetzt, daß jeder Morphismus einen Kern besitzt, aber keineswegs, daß dieser Kern eindeutig bestimmt sein soll. Um dennoch mit gutem Gewissen von *dem* Kern und *der* Kohomologie und dergleichen reden zu können, treffen wir einige Vereinbarungen.

**Definition 3.1.5.** Eine **konstante Kategorie** ist eine Kategorie, die äquivalent ist zu einer Kategorie mit einem einzigen Objekt und einem einzigen Morphismus. Ein **bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmtes Objekt** einer Kategorie  $\mathcal{A}$  ist ein Funktor von einer konstanten Kategorie nach  $\mathcal{A}$ . Diese bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmten Objekte von  $\mathcal{A}$  sind die Objekte einer neuen Kategorie  $\bar{\mathcal{A}}$ , deren Morphismen wir wie folgt erklären: Gegeben  $X, Y \in \bar{\mathcal{A}}$ , sagen wir als  $X : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $Y : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$ , setzen wir

$$\bar{\mathcal{A}}(X, Y) = \left( \bigsqcup_{(k,j) \in \mathcal{K} \times \mathcal{J}} \mathcal{A}(X(k), Y(j)) \right) / \sim$$

mit einer Äquivalenzrelation  $\sim$  auf der disjunkten Vereinigung, deren Definition wir dem Leser ebenso überlassen wie die Definition der Verknüpfung von Morphismen in  $\bar{\mathcal{A}}$ .

3.1.6. Wir erhalten eine Äquivalenz von Kategorien  $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{A}}$ , indem wir zu jedem Objekt  $A \in \mathcal{A}$  die konstante Unterkategorie  $\mathcal{K}_A$  von  $\mathcal{A}$  mit dem einzigen Objekt  $A$  bilden und dem Objekt  $A$  den Einbettungsfunktor  $\bar{A} : \mathcal{K}_A \rightarrow \mathcal{A}$  zuordnen. Jeder Funktor  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  läßt sich in kanonischer Weise zu einem Funktor  $\bar{\mathcal{A}} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$  ausdehnen. Darüber hinaus können wir für die Äquivalenz  $\bar{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{A}}$  einen adjungierten Funktor explizit konstruieren, indem wir ein durch  $\mathcal{K}$  indiziertes System von durch gewisse  $\mathcal{J}_k$  für  $k \in \mathcal{K}$  indizierten Systemen von Objekten von  $\mathcal{A}$  in hoffentlich offensichtlicher Weise verwandeln in ein durch  $\bigsqcup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{J}_k$  indiziertes System von Objekten von  $\mathcal{A}$ .

3.1.7. Reden wir nun zum Beispiel mit bestimmtem Artikel von *dem* Kern eines Morphismus  $f : A \rightarrow B$  in  $\mathcal{A}$ , so meinen wir das bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmte Objekt  $(\ker f)$  von  $\mathcal{A}$ , das durch den offensichtlichen Funktor von der konstanten Kategorie  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}_A$  aller Kerne von  $f$  in die Kategorie  $\mathcal{A}$  definiert wird, oder noch genauer den offensichtlichen Morphismus  $(\ker f) \rightarrow \bar{A}$  in  $\bar{\mathcal{A}}$ .

3.1.8. In Zukunft werden wir derlei Details meist unterschlagen und die Kategorie  $\bar{\mathcal{A}}$  kurzerhand auch mit  $\mathcal{A}$  bezeichnen. Ich hoffe, daß die vorhergehenden Bemerkungen den Leser überzeugt haben, daß in dieser Richtung keine echten Schwierigkeiten lauern. Dafür aber lauern dort Elefanten der Notation, vor denen man sich durchaus auch in acht nehmen muß, da sie die Verständlichkeit sehr schnell erdrücken können.

**Satz 3.1.9 (Lange exakte Kohomologiesequenz).** *Sei  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in einer präabelschen Kategorie.*

1. *Es gibt für jedes  $q$  genau einen Morphismus  $\mathcal{H}^q C \rightarrow \mathcal{H}^{q+1} A$ , der mit den kanonischen Morphismen von  $\ker(d_C \circ g) = \ker(g \circ d_B)$  nach  $\mathcal{H}^q C$  bzw.  $\mathcal{H}^{q+1} A$  verträglich ist.*
2. *Mit diesen Morphismen erhalten wir eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}^{q-1} C \rightarrow \mathcal{H}^q A \rightarrow \mathcal{H}^q B \rightarrow \mathcal{H}^q C \rightarrow \mathcal{H}^{q+1} A \rightarrow \dots$$

*Bemerkung 3.1.10.* Ich kenne den hier gegebenen Beweis aus [Ive87]. Er braucht einige Vorbereitungen und wird erst am Ende dieses Abschnitts gegeben. Alle Anwendungen, die mir in den Sinn kommen, betreffen Kategorien von Moduln über Ringen oder von abelschen Garben, und diese Fälle führt man leicht auf den bereits in II.2.2.2 behandelten Fall der Kategorie aller abelschen Gruppen zurück, im Fall von Garben durch Betrachtung der Halme.



**Lemma 3.1.11.** *Sei in einer präabelschen Kategorie ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

gegeben. So gilt:

1. Die induzierte Kernsequenz  $0 \rightarrow \ker a \rightarrow \ker b \rightarrow \ker c$  ist exakt.

2. Ist  $c$  ein Monomorphismus, so ist auch  $0 \rightarrow \operatorname{cok} a \rightarrow \operatorname{cok} b$  exakt.

*Beweis.* 1 bleibt dem Leser überlassen, wir zeigen nur 2. Ist  $c$  ein Monomorphismus, so folgt aus 1 die Exaktheit der oberen Zeile im kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \ker a & \rightarrow & \ker b & \rightarrow & 0 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & \operatorname{cok} f \rightarrow 0 \end{array}$$

und die duale Aussage zum ersten Teil liefert dann die Exaktheit (in der Mitte, Exaktheit vorne erkennt man aus dem Diagramm) der oberen Zeile im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \operatorname{im} a & \rightarrow & \operatorname{im} b & \rightarrow & \operatorname{cok} f \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' \end{array}$$

Hier ist die rechte Vertikale ein Monomorphismus nach unserer Annahme und wir haben uns so auf den Fall zurückgezogen, daß  $a, b$  und  $c$  alle drei Monomorphismen sind. Unter dieser Voraussetzung sieht man jedoch explizit, daß  $a$  ein Kern ist für  $A' \rightarrow \operatorname{cok} b$  und daraus folgt, daß  $A' \twoheadrightarrow \operatorname{cok} a \hookrightarrow \operatorname{cok} b$  die kanonische Faktorisierung in einen Epimorphismus und einen Monomorphismus sein muß.  $\square$

**Lemma 3.1.12 (Schlangenlemma).** *Sei in einer präabelschen Kategorie ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

gegeben. Wir kürzen  $\ker(B \rightarrow C') = K$  und  $\operatorname{cok}(A \rightarrow B') = K'$  ab und behaupten: Es gibt genau einen Morphismus  $\ker c \rightarrow \operatorname{cok} a$  derart, daß

$$\begin{array}{ccccc} \ker c & \leftarrow & K & \rightarrow & B \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \operatorname{cok} a & \rightarrow & K' & \leftarrow & B' \end{array}$$

kommutiert, und mit diesem Morphismus erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\ker a \rightarrow \ker b \rightarrow \ker c \rightarrow \operatorname{cok} a \rightarrow \operatorname{cok} b \rightarrow \operatorname{cok} c$$

*Beweis.* Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \ker g & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & C' & = & C' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

liefert mit dem vorhergehenden Lemma und seinem Dualen die Exaktheit der obersten Zeile in der nun folgenden Erweiterung unseres Diagramms. Die Exaktheit der untersten Zeile erhält man dual, wir haben also ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A & \rightarrow & K & \rightarrow & \ker c & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & \operatorname{cok} a & \rightarrow & K' & \rightarrow & C' & & \end{array}$$

Diesem Diagramm sieht man die Existenz und Eindeutigkeit unseres Morphismus  $\ker c \rightarrow \operatorname{cok} a$  nun unschwer an. Die Exaktheit unserer Sequenz bei  $\ker b$  erhält man durch Anwenden von Lemma 3.1.11 auf die Diagramme mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \ker f & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \operatorname{im} f & \rightarrow & 0 & \quad & 0 & \rightarrow & \operatorname{im} f & \hookrightarrow & B & \rightarrow & C \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \ker f' & \hookrightarrow & A' & \twoheadrightarrow & \operatorname{im} f' & \rightarrow & 0 & \quad & 0 & \rightarrow & \operatorname{im} f' & \hookrightarrow & B' & \rightarrow & C \end{array}$$

Um die Exaktheit bei  $\ker c$  zu zeigen reicht es, die Exaktheit von

$$\ker b \rightarrow \ker c \rightarrow K'$$

nachzuweisen. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} A & \rightarrow & K & \rightarrow & \ker c & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A & \rightarrow & B' & \rightarrow & K' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

und wenden ein letztes Mal Lemma 3.1.11 an. Da gilt  $\ker(K \rightarrow B') = \ker b$  folgt  $\ker b \rightarrow \ker(\ker c \rightarrow K')$  und wir haben die Exaktheit bei  $\ker c$  nachgewiesen. Der Rest des Lemmas folgt mit Dualität.  $\square$

*Herleitung der langen exakten Homologiesequenz.* Wir erinnern uns ans 3.1.3 und wenden das Schlangenlemma an auf das Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} \text{cok } d_A^{q-1} & \rightarrow & \text{cok } d_B^{q-1} & \rightarrow & \text{cok } d_C^{q-1} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \ker d_A^{q+1} & \rightarrow & \ker d_B^{q+1} & \rightarrow & \ker d_C^{q+1} \end{array} \quad \square$$

*Übung 3.1.13.* Man zeige in einer beliebigen präabelschen Kategorie das Fünferlemma.

## 3.2 Höhere derivierte Funktoren

**Definition 3.2.1.** 1. Eine **Auflösung** oder genauer **Rechtsauflösung** eines Objekts  $A$  einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  ist eine exakte Sequenz  $A \hookrightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots$  alias ein Komplex  $C^*$ , der in negativen Graden verschwindet, mitsamt einem Morphismus von Komplexen  $A[0] \rightarrow C^*$ , der einen Isomorphismus auf der Homologie induziert.

2. Eine **injektive Auflösung** eines Objekts  $A$  einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  ist eine Auflösung von  $A$  durch injektive Objekte, d.h. eine Auflösung  $A \hookrightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$  mit  $I^0, I^1, \dots$  injektiv.

3.2.2. Wir kürzen eine Auflösung mit  $A \hookrightarrow C^*$  ab. Gibt es in  $\mathcal{A}$  genügend Injektive, so besitzt jedes Objekt von  $\mathcal{A}$  eine injektive Auflösung. Die additive Kategorie aller injektiven Objekte einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  notieren wir im folgenden  $i\mathcal{A}$ .

3.2.3. Gegeben ein Morphismus  $f : A \rightarrow B$  in einer abelschen Kategorie und Auflösungen  $A \hookrightarrow C^*$  und  $B \hookrightarrow D^*$  verstehen wir unter einem **Lift von  $f$**  einen Morphismus von Komplexen  $\tilde{f} : C^* \rightarrow D^*$ , der in der offensichtlichen Weise mit  $f$  verträglich ist. Mit  $\tilde{f}$  ist sicher auch jeder dazu homotope Morphismus ein Lift von  $f$ . Eine Homotopieklasse von Lifts nennen wir einen **Homotopielift**. Das Hauptlemma der homologischen Algebra 2.3.13 sagt insbesondere, daß für eine beliebige Auflösung  $A \hookrightarrow C^*$  und eine injektive Auflösung  $B \hookrightarrow J^*$  jeder Morphismus  $f : A \rightarrow B$  genau einen Homotopielift  $[\tilde{f}] : C^* \rightarrow J^*$  besitzt. Insbesondere bilden die injektiven Auflösungen eines Objekts, wenn es sie überhaupt gibt, mit den Homotopielifts der Identität als Morphismen eine konstante Kategorie  $\text{Inj}_{\mathcal{A}}$  im Sinne von 3.1.5.

**Definition 3.2.4.** Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  mit genügend Injektiven und ein linksexakter Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  in eine weitere abelsche Kategorie definiert man zu  $F$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$  seinen  **$i$ -ten rechtsderivierten Funktor**

$$R^i F : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$$

von der Kategorie  $\mathcal{A}$  in die Kategorie  $\bar{\mathcal{B}}$  der bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmten Objekte von  $\mathcal{B}$  im Sinne von 3.1.4, indem man jedem Objekt  $A \in \mathcal{A}$  den Funktor  $\text{Inj}_A \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $I^* \mapsto \mathcal{H}^i(FI^*)$  zuordnet und jedem Morphismus  $f : A \rightarrow B$  das mit  $(J^*, I^*) \in \text{Inj}_B \times \text{Inj}_A$  indizierte System von Morphismen  $\mathcal{H}^i([\tilde{f}]_{J^*I^*}) : \mathcal{H}^i(FI^*) \rightarrow \mathcal{H}^i(FJ^*)$ .

3.2.5. Es ist üblich, in der Notation zu vergessen, daß unsere Funktoren nur in der Kategorie der bis auf eindeutigen Isomorphismus wohlbestimmten Objekte von  $\mathcal{B}$  landen, und einfach so zu tun, als hätten wir Funktoren  $R^i F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  definiert. Die Linksexaktheit von  $F$  liefert eine Isotransformation  $F \xrightarrow{\sim} R^0 F$ .

*Beispiel 3.2.6 (Erweiterungen als derivierte Funktoren).* Die Kategorie der abelschen Gruppen hat genügend Injektive nach II.4.9.5. Gegeben eine feste abelsche Gruppe  $M$  betrachten wir den linksexakten Funktor  $F = \text{Hom}(M, \_) : \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ . Sei  $N$  eine weitere abelsche Gruppe. Um  $R^i F(N)$  zu bestimmen, können wir nach II.4.9.5 eine injektive Auflösung der Gestalt  $N \hookrightarrow I^0 \twoheadrightarrow I^1$  wählen. Dann hat die lange exakte Ext-Sequenz im zweiten Eintrag II.4.8.5 die Gestalt

$$\text{Hom}(M, N) \hookrightarrow \text{Hom}(M, I^0) \rightarrow \text{Hom}(M, I^1) \rightarrow \text{Ext}(M, N)$$

und wir folgern kanonische Isomorphismen

$$R^i F(N) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \text{Hom}(M, N) & i = 0; \\ \text{Ext}(M, N) & i = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Lemma 3.2.7.** *Die Kategorie aller Moduln über einem gegebenen Ring besitzt genug Injektive, d.h. jeder Modul läßt sich in einen injektiven Modul einbetten.*

*Beweis.* Sei  $R$  unser Ring. Der Vergissfunktors  $\text{res}_R^{\mathbb{Z}} : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$  besitzt zum Beispiel nach II.3.2.28 einen Rechtsadjungierten, nämlich den Funktor  $\text{ind}_{\mathbb{Z}}^R : N \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, N)$ . Wollen wir nun einen  $R$ -Modul  $M$  in einen injektiven  $R$ -Modul einbetten, so beginnen wir mit einer Einbettung  $\text{res}_R^{\mathbb{Z}} M \hookrightarrow I$  von  $M$  in eine injektive abelsche Gruppe, die es nach II.4.9.5 geben muß, und bilden dann die Verknüpfung

$$M \rightarrow \text{ind}_{\mathbb{Z}}^R \text{res}_R^{\mathbb{Z}} M \rightarrow \text{ind}_{\mathbb{Z}}^R I$$

Hier ist das rechte Ende offensichtlich ein injektiver  $R$ -Modul und der rechte Pfeil eine Injektion. Der linke Pfeil ist aber auch eine Injektion, entweder nach 1.6.12 oder explizit als die Einbettung  $\text{Hom}_R(R, M) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ .  $\square$

*Übung 3.2.8.* In der Kategorie aller graduierten Moduln über einem graduierten Ring gibt es auch genügend injektive Objekte.

3.2.9. Die Kategorie der Moduln über einem vorgegebenen Ring  $R$  hat genügend Injektive nach 3.2.7. Gegeben ein fester  $R$ -Modul  $M$  betrachte man den linksexakten Funktor  $F = \text{Hom}_R(M, \_): R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ . Ist  $N$  ein weiterer  $R$ -Modul, so erklärt man die abelschen Gruppen  $\text{Ext}_R^i(M, N)$  als Werte der derivierten Funktoren, in Formeln

$$\text{Ext}_R^i(M, N) := (R^i F)(N)$$

Diese Gruppen heißen auch die **höheren Erweiterungen** unserer beiden Moduln.

3.2.10. Wir zeigen als nächstes, wie sich auch die Garbenkohomologie dem Formalismus der derivierten Funktoren unterordnet.

*Beispiel 3.2.11.* Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Rechtsderivierten des linksexakten Funktors  $\Gamma: \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}$  der globalen Schnitte können wir per definitionem mit jeder injektiven Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  berechnen, und nach 2.3.5 ist für jede injektive Auflösung die kanonische Abbildung ein Isomorphismus

$$R^i \Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i \Gamma \mathcal{I}^* \xrightarrow{\sim} H^i(X; \mathcal{F})$$

Nach 2.3.4 hängt dieser Isomorphismus darüber hinaus nicht von der Wahl der injektiven Auflösung ab und alle diese Isomorphismen zusammen bilden eine Isotransformation  $R^i \Gamma \xrightarrow{\sim} H^i(X; \_)$ . Ebenso erhalten wir für die Rechtsderivierten des linksexakten Funktors der Schnitte mit kompaktem Träger  $\Gamma_! : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}$  mithilfe von 2.11.12 kanonische Isomorphismen

$$R^i \Gamma_!(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i \Gamma_! \mathcal{I}^* \xrightarrow{\sim} H_!^i(X; \mathcal{F})$$

und alle diese Isomorphismen zusammen bilden eine Isotransformation  $R^i \Gamma_! \xrightarrow{\sim} H_!^i(X; \_)$ .

*Beispiel 3.2.12.* Gegeben eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist das direkte Bild nach 1.6.11 oder auch direkter Argumentation ein linksexakter Funktor  $f_{(*)}: \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}_{/Y}$ . Die zugehörigen derivierten Funktoren  $R^i f_{(*)}$  beschreibt der folgende Satz.

**Satz 3.2.13 (Beschreibung der höheren direkten Bildgarben).** *Seien  $f: X \rightarrow Y$  stetig und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_{/X}$  eine abelsche Garbe auf  $X$ . So ist ihr  $i$ -tes deriviertes direktes Bild  $R^i f_{(*)} \mathcal{F}$  kanonisch isomorph zu der zur Prägarbe  $U \mapsto H^i(f^{-1}(U); \mathcal{F})$  assoziierten Garbe.*

3.2.14. Ist insbesondere  $c = c_X : X \rightarrow \text{pt}$  die konstante Abbildung, so liefern die Definitionen einen kanonischen Isomorphismus  $R^i c_{(*)} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} H^i(X; \mathcal{F})_{\text{pt}}$  von Garben auf  $\text{pt}$ . Ist andererseits etwa  $f : X \rightarrow Y$  ein Sphärenbündel, hat also jeder Punkt in  $Y$  eine Umgebung  $U$  derart, daß es einen mit der Projektion auf  $U$  verträglichen Homöomorphismus  $f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times S^n$  mit festem  $n \geq 1$  gibt, so verschwindet  $R^i f_{(*)} \mathbb{Z}_X$  für  $i \neq 0, n$  und wir haben  $R^0 f_{(*)} \mathbb{Z}_X \cong \mathbb{Z}_Y$  und  $R^n f_{(*)} \mathbb{Z}_X$  ist eine lokal konstante, ja lokal zu  $\mathbb{Z}_Y$  isomorphe Garbe auf  $Y$ . Man folgert das unmittelbar aus dem Satz für  $Y$  lokal zusammenziehbar, im allgemeinen wird es aus dem Basiswechsel ?? folgen, angewandt auf das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^n \times U & \xrightarrow{q} & S^n \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{p} & \text{top} \end{array}$$

und die konstante Garbe aus  $S^n$ .

*Beweis.* Gegeben ein Komplex  $\mathcal{A}^*$  von abelschen Garben auf einem topologischen Raum  $X$  induzieren die in offensichtlicher Weise für alle  $U \subseteq X$  erklärten Abbildungen  $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}^*(U)) \rightarrow (\mathcal{H}^i \mathcal{A}^*)(U)$  mittels der universellen Eigenschaft der Garbifizierung Isomorphismen zwischen den Garbifizierungen der Prägarben  $U \mapsto \mathcal{H}^i(\mathcal{A}^*(U))$  und den Kohomologiegarben  $\mathcal{H}^i \mathcal{A}^*$ . Diese Behauptung folgt unmittelbar aus unserer Konstruktion des Garbenkokerns als Garbifizierung des Prägarbenkokerns. Ist nun  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  eine injektive Auflösung, so erhalten wir insbesondere Isomorphismen zwischen den Kohomologiegarben des Komplexes  $f_{(*)} \mathcal{I}^*$  und den Garbifizierungen der Prägarben  $U \mapsto \mathcal{H}^i((f_{(*)} \mathcal{I}^*)(U)) = \mathcal{H}^i(\mathcal{I}^*(f^{-1}(U)))$ . Da die Restriktionen auf die offenen Teilmengen  $f^{-1}(U)$  der welchen Garben  $\mathcal{I}^*$  wieder welche sind, liefern die natürlichen Abbildungen aus 2.3.2 nach 2.3.5 weiter Isomorphismen  $\mathcal{H}^i(\mathcal{I}^*(f^{-1}(U))) \xrightarrow{\sim} H^i(f^{-1}(U); \mathcal{F})$ , und nach 2.5.8 bilden diese Isomorphismen zusammen einen Isomorphismus von Prägarben auf  $X$ . Diese Isomorphismen sind nach 2.3.4 weiter verträglich mit Morphismen von injektiven Auflösungen und definieren damit den gesuchten Isomorphismus zwischen dem bis auf eindeutigen Isomorphismus definierten Objekt  $R^i f_{(*)} \mathcal{F}$  und der Garbifizierung der Prägarbe  $U \mapsto H^i(f^{-1}(U); \mathcal{F})$ .  $\square$

3.2.15. Wir erhalten weitere Beispiele durch Übergang zu den opponierten abelschen Kategorien. In diesem Zusammenhang sind eigenständige Sprechweisen üblich, die wir im folgenden erläutern.

**Definition 3.2.16.** 1. Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Ein Objekt  $P \in \mathcal{A}$  heißt **projektiv** genau dann, wenn der Funktor der Homomorphismen von unserem Objekt  $\mathcal{A}(P, ) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$  exakt ist.

2. Eine abelsche Kategorie **hat genug Projektive** genau dann, wenn es für jedes Objekt  $A$  einen Epimorphismus  $P \twoheadrightarrow A$  gibt mit  $P$  projektiv.
3. Eine **Linksauflösung** eines Objekts  $A \in \mathcal{A}$  ist ein exakter Komplex

$$\dots \rightarrow C^{-1} \rightarrow C^0 \twoheadrightarrow A$$

4. Eine **projektive Auflösung** eines Objekts  $A \in \mathcal{A}$  ist eine Linksauflösung  $P^* \twoheadrightarrow A$  mit  $P^0, P^{-1}, \dots$  projektiv.

3.2.17. Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  mit genügend Projektiven und ein rechtsexakter Funktor  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  in eine weitere abelsche Kategorie erklären wir analog zu 3.2.4 seine **Linksderivierten**

$$L_i G : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$$

und haben insbesondere kanonische Isomorphismen  $L_i G(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-i} G P^*$  für jede projektive Auflösung  $P^* \twoheadrightarrow A$  von  $A$ .

*Beispiel* 3.2.18 (**Nochmal Erweiterungen als derivierte Funktoren**). Gegeben eine feste abelsche Gruppe  $N$  betrachten wir den rechtsexakten Funktor  $G = \text{Hom}(\_, N) : \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$ . Um  $L_i G(M)$  zu bestimmen, können wir nach II.3.5.7 eine projektive Auflösung von  $M$  der Gestalt  $0 \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \twoheadrightarrow M$  wählen. Dann hat die lange exakte Ext-Sequenz im ersten Eintrag die Gestalt

$$\text{Hom}(M, N) \hookrightarrow \text{Hom}(P^0, N) \rightarrow \text{Hom}(P^{-1}, N) \twoheadrightarrow \text{Ext}(M, N)$$

und wir erhalten kanonische Isomorphismen

$$L_i G(M) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \text{Hom}(M, N) & i = 0; \\ \text{Ext}(M, N) & i = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Vergleich mit 3.2.6 zeigt insbesondere, daß wir unsere Ext sogar auf zweierlei Weise als derivierte Funktoren erhalten können.

*Beispiel* 3.2.19 (**Tor als derivierter Funktor**). Für eine feste abelsche Gruppe  $M$  betrachten wir den rechtsexakten Funktor  $G = M \otimes_{\mathbb{Z}} \_ : \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ . Aus der Definition des Torsionsprodukts erhalten wir sofort kanonische Isomorphismen

$$L_i G(N) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} M \otimes_{\mathbb{Z}} N & i = 0; \\ M * N & i = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.2.20. Die Kategorie der Moduln über einem vorgegebenen Ring  $R$  hat auch genügend Projektive. Gegeben ein fester  $R$ -Rechtsmodul  $M$  betrachten wir den rechtsexakten Funktor  $F = M \otimes_R : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ . Ist  $N$  ein weiterer  $R$ -Modul, so erklärt man die abelschen Gruppen  $\text{Tor}_i^R(M, N)$  als Werte der linksderivierten Funktoren, in Formeln

$$\text{Tor}_i^R(M, N) := (L_i F)(N)$$

Diese Gruppen heißen auch die **höheren Torsionsgruppen** unserer beiden Moduln.

**Lemma 3.2.21 (Lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren).**

*Sei  $F$  ein linksexakter Funktor von einer abelschen Kategorie mit genügend Injektiven in eine weitere abelsche Kategorie. Ist  $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$  eine kurze exakte Sequenz in der Ausgangskategorie, so gibt es in der Zielkategorie eine lange exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow FA \rightarrow FB \rightarrow FC \rightarrow R^1F(A) \rightarrow R^1F(B) \rightarrow R^1F(C) \rightarrow R^2F(A) \dots$$

*Beweis.* Wenden wir in der Konstruktion aus der anschließenden Bemerkung 3.2.22 unseren Funktor  $F$  an und streichen die unterste Zeile, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Bilden wir dazu die lange exakte Homologiesequenz, so ergibt sich der Satz.  $\square$

3.2.22. Gegeben eine kurze exakte Sequenz  $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$  in einer abelschen Kategorie und injektive Auflösungen  $A \hookrightarrow I^*$  und  $C \hookrightarrow J^*$  können wir im folgenden Diagramm in der Mitte induktiv von unten beginnend senkrechte Pfeile ergänzen derart, daß die mittlere Senkrechte auch ein Komplex wird und daß das ganze Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & & & \uparrow \\ I^2 & \hookrightarrow & I^2 \oplus J^2 & \twoheadrightarrow & J^2 \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ I^1 & \hookrightarrow & I^1 \oplus J^1 & \twoheadrightarrow & J^1 \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ I^0 & \hookrightarrow & I^0 \oplus J^0 & \twoheadrightarrow & J^0 \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ A & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C \end{array}$$

Hierbei sollen die höheren Horizontalen die offensichtlichen Morphismen sein. Die mittleren Vertikalen konstruieren wir induktiv, indem wir zunächst unter Verwendung der Injektivität von  $I^0$  den Monomorphismus  $A \hookrightarrow I^0$  zu einem Morphismus  $B \hookrightarrow I^0$  fortsetzen, der dann mit dem offensichtlichen Morphismus  $B \twoheadrightarrow J^0$  einen Morphismus  $B \twoheadrightarrow I^0 \oplus J^0$  liefert, der offensichtlich ein



Monomorphismus ist. Die drei Kokerne der drei unteren Vertikalen bilden dann nach dem Neuenerlemma eine kurze exakte Sequenz, und damit sind wir eine Etage höher gekommen und können per Induktion weiterklettern. Die mittleren Vertikalen in unserem Diagramm sind zwei-mal-zwei-Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \partial & u \\ 0 & \partial \end{pmatrix}$$

für eine geeignete Kettenabbildung  $u : J \rightarrow [1]I$  in den Konventionen aus II.3.6.24.

*Bemerkung 3.2.23.* Eigentlich hätten wir im vorhergehenden Lemma 3.2.21 gerne eine schärfere Aussage: Statt die bloße Existenz derartiger langer exakter Sequenzen nachzuweisen wollen wir in Wirklichkeit einen Funktor konstruieren, der jeder Ausgangssequenz solch eine lange exakte Sequenz zuordnet. Insbesondere müssen wir also zeigen, daß der Randoperator bis auf die kanonischen Identifikationen nicht von der Wahl in 3.2.22 abhängt und in geeigneter Weise verträglich ist mit Morphismen von kurzen exakten Sequenzen. Das kann man alles in unserer jetzigen Sprache ausdrücken, aber es scheint mir sinnvoller, gleich den derzeit in der homologischen Algebra gebräuchlichen Formalismus einzuführen und die Schwierigkeit in diesem Kontext aufzulösen. Das alles geschieht in Abschnitt 3.3. Genauer geben wir auch erst in 3.3.14 unsere endgültige Definition der langen exakten Sequenz der derivierten Funktoren.

3.2.24. Vielleicht als Beispiel Ext in Polynomringen und Koszul-Komplex und Hilbert's **Syzygiensatz** diskutieren.

3.2.25. Als Spezialfälle erhalten wir in unseren Beispielen: Die lange exakte Ext-Sequenz im ersten bzw. zweiten Eintrag, die lange exakte Tor-Sequenz im ersten bzw. zweiten Eintrag, die lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie und die lange exakte Sequenz der Garbenkohomologie mit kompaktem Träger. Wir müssen jedoch noch zeigen, daß diese Sequenzen auch in der Tat mit den hier abstrakt konstruierten Sequenzen übereinstimmen.

**Definition 3.2.26.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter Funktor in eine weitere abelsche Kategorie. Gegeben eine Auflösung  $A \hookrightarrow J^*$  erklären wir die **kanonischen Morphismen**

$$\mathcal{H}^i F J^* \rightarrow R^i F(A)$$

indem wir eine injektive Auflösung  $A \hookrightarrow I^*$  wählen, den nach dem Hauptlemma 2.3.13 bis auf Homotopie eindeutigen Lift  $J^* \rightarrow I^*$  der Identität von  $A$  betrachten, durch  $F$  eine bis auf Homotopie eindeutige Kettenabbildung  $F J^* \rightarrow F I^*$  erhalten und die davon induzierte Abbildung  $\mathcal{H}^i F J^* \rightarrow R^i F(A)$  auf der Kohomologie nehmen.

**Definition 3.2.27.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter Funktor in eine weitere abelsche Kategorie. Ein Objekt  $J \in \mathcal{A}$  heißt  **$F$ -azyklisch** genau dann, wenn gilt

$$R^i F(J) = 0 \text{ für alle } i > 0$$

*Beispiele 3.2.28.* Ein injektives Objekt ist  $F$ -azyklisch für jeden linksexakten Funktor  $F$ . Eine  $\Gamma$ -azyklische Garbe hatten wir kürzer eine azyklische Garbe genannt. Kompaktweiche Garben sind  $\Gamma_!$ -azyklisch auf lokal kompakten Hausdorff-Räumen nach 2.11.22.

3.2.29. Injektive Auflösungen sind der Berechnung meist schwer zugänglich und eher für theoretische Überlegungen von Interesse. Für praktische Anwendungen ist es bedeutsam, daß man die Derivierten eines gegebenen Funktors  $F$  auch schon über  $F$ -azyklische Auflösungen berechnen kann. Einen typischen Spezialfall dieser Erkenntnis haben wir bereits in 2.3.5 kennengelernt.

**Proposition 3.2.30 (Derivieren mit azyklischen Auflösungen).** *Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven und  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter Funktor in eine weitere abelsche Kategorie. Sei  $A \hookrightarrow J^*$  eine  $F$ -azyklische Auflösung eines Objekts  $A \in \mathcal{A}$ . So sind unsere kanonischen Morphismen aus 3.2.26 Isomorphismen*

$$\mathcal{H}^i F J^* \xrightarrow{\sim} R^i F(A)$$

*Beweis.* Sei  $A \hookrightarrow I^*$  eine injektive Auflösung von  $A$  und  $f^* : J^* \rightarrow I^*$  die bis auf Homotopie wohldefinierte Fortsetzung der Identität auf  $A$  nach 2.3.13. Genauer als in der Proposition formuliert werden wir zeigen, daß die Kettenabbildung

$$F f^* : F J^* \rightarrow F I^*$$

Isomorphismen auf der Homologie induziert. In der Tat, da  $f^* : J^* \rightarrow I^*$  Isomorphismen auf der Homologie induziert, muß die Homologie des Abbildungskegels  $K(f^*)$  identisch verschwinden. Dieser Abbildungskegel beginnt im Grad  $-1$  und wir können ihn aufspalten in kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} K^{-1} & \hookrightarrow & K^0 & \twoheadrightarrow & C^0 & & \\ & & C^0 & \hookrightarrow & K^1 & \twoheadrightarrow & C^1 \\ & & & & C^1 & \hookrightarrow & K^2 \twoheadrightarrow C^2 \dots \end{array}$$

Aus der langen exakten Sequenz der derivierten Funktoren 3.2.21 folgt induktiv, daß alle in diesen kurzen exakten Sequenzen auftauchenden Objekte  $F$ -azyklisch sind. Damit sehen wir dann, daß  $K(f^*)$  exakt bleibt unter  $F$ , und da nun  $FK(f^*) = K(Ff^*)$  exakt ist, muß  $Ff^*$  Isomorphismen auf der Homologie induzieren.  $\square$

### 3.3 Ausgezeichnete Dreiecke

3.3.1. Wir erinnern daran, daß wir in II.3.6.24 für einen Komplex  $X = (X^n, d_X^n)$  mit  $d^n : X^n \rightarrow X^{n+1}$  den Komplex  $[1]X$  definiert hatten, indem wir den Komplex um eins gegen die Richtung der Pfeile verschieben, in Formeln  $([1]X)^n := X^{n+1}$ , und die Randoperatoren mit Minuszeichen versehen, in Formeln

$$d_{[1]X}^n := -d_X^{n+1}$$

Jede Kettenabbildung  $u : X \rightarrow Y$  liefert in offensichtlicher Weise eine Kettenabbildung  $u : [1]X \rightarrow [1]Y$ , hier fügen wir also keine Vorzeichen ein.

**Definition 3.3.2.** Sei  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie und  $\text{Hot}(\mathcal{I}) = \text{Hot}_{\mathcal{I}}$  die Homotopiekategorie der Komplexe in  $\mathcal{I}$ .

1. Ein **Dreieck** in  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  ist die Vorgabe von Objekten und Morphismen der Gestalt

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} [1]X$$

2. Ein **Morphismus von einem Dreieck in ein anderes Dreieck** ist ein Tripel von Morphismen  $(f, g, h)$  derart, daß das folgende Diagramm mit unseren beiden Dreiecken in den Zeilen kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & [1]X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & [1]X' \end{array}$$

3. Ein Dreieck in  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  heißt ein **ausgezeichnetes Dreieck** (englisch **distinguished triangle**, französisch **triangle distingué**) genau dann, wenn es isomorph ist zu einem Dreieck der Gestalt

$$X \xrightarrow{u} Y \rightarrow K(u) \rightarrow [1]X$$

mit  $u$  einer Kettenabbildung,  $K(u)$  dem Abbildungskegel von  $u$  wie in II.4.6.4 und den offensichtlichen Injektionen und Projektionen  $Y \rightarrow K(u) \rightarrow [1]X$  als weiteren Morphismen.

3.3.3. Ein Dreieck, das zu einem ausgezeichneten Dreieck wird, wenn wir alle drei Morphismen durch ihre Negativen ersetzen, heißt **antiausgezeichnet**. Jede triangulierte Kategorie liefert eine weitere triangulierte Kategorie, wenn man statt den ausgezeichneten Dreiecken die antiausgezeichneten Dreiecke auszeichnet.

**Proposition 3.3.4 (Drehen von Dreiecken).** *Sei  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie. Ist  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  ein ausgezeichnetes Dreieck in  $\text{Hot}(\mathcal{I})$ , so ist auch  $Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X \xrightarrow{-u} [1]Y$  ein ausgezeichnetes Dreieck in  $\text{Hot}(\mathcal{I})$ .*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit hat unser erstes Dreieck die Gestalt

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\alpha} K(u) \xrightarrow{\beta} [1]X$$

mit  $\alpha, \beta$  den kanonischen Abbildungen. Es gilt also, eine Homotopieäquivalenz  $\psi : K(\alpha) \xrightarrow{\sim} [1]X$  anzugeben derart, daß kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & K(u) & \rightarrow & K(\alpha) & \rightarrow & [1]Y \\ \parallel & & \parallel & & \psi \downarrow & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & K(u) & \rightarrow & [1]X & \xrightarrow{-u} & [1]Y \end{array}$$

Per definitionem haben wir  $K(\alpha)^n = Y^{n+1} \oplus K(u)^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$  und der Randoperator wird gegeben durch die Matrix

$$\partial_{K(\alpha)} = \begin{pmatrix} -\partial_Y & 0 & 0 \\ \alpha & \partial_{K(u)} & 0 \\ \text{id} & u & \partial_Y \end{pmatrix}$$

Wir nehmen nun  $\psi = (0, \text{id}, 0)$  und erhalten offensichtlich eine Kettenabbildung derart, daß das mittlere Quadrat kommutiert. In die andere Richtung nehmen wir  $\phi = (-u, \text{id}, 0)^\top : [1]X \rightarrow K(\alpha)$  und erkennen, daß  $\phi$  eine Kettenabbildung ist und daß mit  $\phi$  nach oben statt  $\psi$  nach unten das rechte Quadrat kommutiert. Offensichtlich gilt  $\psi\phi = \text{id}$  auf  $[1]X$ . Wir haben gewonnen, wenn wir die Homotopie  $\phi\psi \simeq \text{id}$  zeigen. Dazu muß man nur prüfen, daß für

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{id} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : K(\alpha)^{n+1} \rightarrow K(\alpha)^n$$

die Gleichung  $\partial s + s\partial = \text{id} - \phi\psi$  erfüllt ist.  $\square$

**Proposition 3.3.5 (Morphismen von Dreiecken).** *Sei  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie. Gegeben ein kommutatives Diagramm in  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  der Gestalt*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & [1]X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & & & f \downarrow \\ \hat{X} & \longrightarrow & \hat{Y} & \longrightarrow & \hat{Z} & \longrightarrow & [1]\hat{X} \end{array}$$

mit ausgezeichneten Dreiecken als Zeilen gibt es ein  $h : Z \rightarrow \hat{Z}$  derart, daß  $(f, g, h)$  ein Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken wird.

*Bemerkung 3.3.6.* Dieses  $h$  ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Unter geeigneten Zusatzannahmen gilt das aber doch, vergleiche 3.3.10.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß beide Dreiecke die Standarddreiecke für  $u$  bzw.  $\hat{u}$  sind mit  $Z = K(u)$  und  $\hat{Z} = K(\hat{u})$ . Sei  $s^n : X^n \rightarrow \hat{Y}^{n-1}$  eine Homotopie, die die Kommutativität des ersten Quadrats liefert, also  $sd + ds = gu - \hat{u}f$ . Wir behaupten, daß

$$h = \begin{pmatrix} f & 0 \\ s & g \end{pmatrix} : K(u) \rightarrow K(\hat{u})$$

eine Kettenabbildung ist und daß mit diesem  $h$  die beiden anderen Quadrate sogar kommutieren, ohne daß man zu Homotopieklassen übergehen muß. Diese Rechnung überlassen wir dem Leser.  $\square$

3.3.7. Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie, so definiert das Bilden der Kohomologie eines Komplexes Funktoren  $\mathcal{H}^i : \text{Hot}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  und wir haben natürlich  $\mathcal{H}^0([i]X) = \mathcal{H}^i X$  für beliebiges  $X \in \text{Hot}(\mathcal{A})$ .

**Lemma 3.3.8 (Homologiesequenz eines ausgezeichneten Dreiecks).**

*Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  ein ausgezeichnetes Dreieck in  $\text{Hot}(\mathcal{A})$ , so erhalten wir mit den natürlichen Abbildungen eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}^{-1}Z \rightarrow \mathcal{H}^0X \rightarrow \mathcal{H}^0Y \rightarrow \mathcal{H}^0Z \rightarrow \mathcal{H}^1X \rightarrow \dots$$

*Beweis.* Da wir nach 3.3.4 Dreiecke drehen können, reicht es, die Exaktheit von  $\mathcal{H}^0Y \rightarrow \mathcal{H}^0Z \rightarrow \mathcal{H}^0[1]X$  zu zeigen. Dazu dürfen wir ausgehen von einem Dreieck der Gestalt  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow K(u) \rightarrow [1]X$ , und dann haben wir schlicht einen Ausschnitt der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen  $Y \hookrightarrow K(u) \twoheadrightarrow [1]X$  vor uns.  $\square$

**Lemma 3.3.9.** *Ist  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie und  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  ein ausgezeichnetes Dreieck in  $\text{Hot}(\mathcal{I})$ , so bilden für jedes Objekt  $W \in \text{Hot}(\mathcal{I})$  die Homomorphismen nach  $W$  eine lange exakte Sequenz von abelschen Gruppen*

$$\dots \leftarrow \text{Hot}_{\mathcal{I}}(X, W) \leftarrow \text{Hot}_{\mathcal{I}}(Y, W) \leftarrow \text{Hot}_{\mathcal{I}}(Z, W) \leftarrow \text{Hot}_{\mathcal{I}}([1]X, W) \leftarrow \dots$$

*Dasselbe gilt dual auch für die Morphismen von  $W$  in die Objekte unseres ausgezeichneten Dreiecks.*

*Beweis.* In einem ausgezeichneten Dreieck ist die Komposition zweier aufeinanderfolgender Morphismen stets null, also ist unsere lange Sequenz schon einmal ein Komplex. Andererseits ist  $0 \rightarrow W \xrightarrow{\text{id}} W \rightarrow [1]0$  stets ein ausgezeichnetes Dreieck, wir können also nach 3.3.5 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & W & \xrightarrow{\sim} & W & \rightarrow & 0 \end{array}$$

stets kommutativ ergänzen, und das zeigt die Exaktheit unseres Komplexes bei  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}(Y, W)$ . Drehen von Dreiecken nach 3.3.4 liefert den Rest.  $\square$

*Übung 3.3.10.* Gegeben ein kommutatives Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' & \rightarrow & [1]X' \end{array}$$

gibt es nach 3.3.5 einen Morphismus  $Z \rightarrow Z'$ , der es kommutativ vervollständigt. Man zeige, daß unter der Annahme  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}([1]X, Z') = 0$  dieser Morphismus  $Z \rightarrow Z'$  sogar eindeutig bestimmt ist.

*Übung 3.3.11.* Gibt es zu einem Morphismus aus einem ausgezeichneten Dreieck keinen von Null verschiedenen Morphismus in die Gegenrichtung, so wird der fragliche Morphismus bereits durch die beiden anderen eindeutig festgelegt. Sind also in Formeln  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{r,s} [1]X$  ausgezeichnete Dreiecke für zwei Morphismen  $r, s : Z \rightarrow [1]X$  und gilt  $\text{Hot}_{\mathcal{I}}([1]X, Z) = 0$ , so folgt  $r = s$ .

**Satz 3.3.12 (Exakte Sequenzen als ausgezeichnete Dreiecke).** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven und  $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$  die Kategorie aller injektiven Objekte von  $\mathcal{A}$ . Bezeichne  $\text{Hot}^{0+}(\mathcal{I})$  die Kategorie  $\text{Hot}^{0+}(\mathcal{I}) = \{X \in \text{Hot}(\mathcal{I}) \mid X^q = 0 \text{ falls } q < 0 \text{ und } \mathcal{H}^q X = 0 \text{ falls } q \neq 0\}$ . So gilt:

1. Das Bilden der nullten Homologie induziert eine Äquivalenz von Kategorien  $\mathcal{H}^0 : \text{Hot}^{0+}(\mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ .
2. Das Bilden der nullten Homologie induziert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ausgezeichnete Dreiecke} \\ X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X \\ \text{in } \text{Hot}(\mathcal{I}) \text{ mit } X, Y, Z \in \text{Hot}^{0+}(\mathcal{I}) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{kurze exakte} \\ \text{Sequenzen in } \mathcal{A} \end{array} \right\}$$

*Ergänzung 3.3.13.* Viel klarer werden wir dieses Resultat in einer ausgefeilten Terminologie in 5.6.4 wiederfinden.

*Beweis.* Der erste Teil folgt sofort aus dem Hauptlemma der homologischen Algebra 2.3.13. Für den Rest des Beweises führen wir eine bequeme Terminologie ein und nennen die im Satz beschriebenen ausgezeichneten Dreiecke von  $\text{Hot}(\mathcal{T})$  “speziell”. Aus 3.3.8 folgt, daß  $\mathcal{H}^0$  aus jedem unserer speziellen ausgezeichneten Dreiecke eine kurze exakte Sequenz macht. Nach Teil 1 liefert also  $\mathcal{H}^0$  schon mal einen treuen Funktor von unserer Kategorie von speziellen ausgezeichneten Dreiecken in die Kategorie der kurzen exakten Sequenzen aus  $\mathcal{A}$ . Als nächstes zeigen wir, daß unser Funktor surjektiv ist auf Isomorphieklassen von Objekten. Hierzu müssen wir uns daran erinnern, wie wir in 3.2.22 zu einer kurzen exakten Sequenz  $A \hookrightarrow B \rightarrow C$  mit injektiven Auflösungen  $A \hookrightarrow I^*$  und  $C \hookrightarrow J^*$  eine injektive Auflösung  $B \hookrightarrow I^* \oplus J^*$  der Mitte gebildet hatten: Diese Auflösung war nämlich gerade der Abbildungskegel  $K(u)$  einer Kettenabbildung  $u : [-1]J \rightarrow I$  und das ausgezeichnete Dreieck  $[-1]J \rightarrow I \rightarrow K(u) \rightarrow J$  liefert mit Drehen ein ausgezeichnetes Dreieck  $I \rightarrow K(u) \rightarrow J \rightarrow [1]I$ . Jetzt müssen wir noch zeigen, daß unser Funktor volltreu ist. Seien dazu zwei spezielle ausgezeichnete Dreiecke  $(X, Y, Z)$  und  $(X', Y', Z')$  gegeben. Jeder Morphismus der zugehörigen kurzen exakten Sequenzen liefert ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & [1]X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f \downarrow \\ X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' & \rightarrow & [1]X' \end{array}$$

bei dem die beiden linken Quadrate kommutieren. Nun beachten wir

$$\text{Hot}([1]X, Z') = 0$$

nach dem Lemma 2.3.13 über injektive Auflösungen und folgern aus 3.3.9 die Injektivität von  $\text{Hot}(Z, Z') \rightarrow \text{Hot}(Y, Z')$ . In anderen Worten ist unser Morphismus  $h : Z \rightarrow Z'$  der einzige Morphismus von  $Z$  nach  $Z'$ , der das mittlere Quadrat zum Kommutieren bringt. Andererseits gibt es aber nach 3.3.5 einen Morphismus von  $Z$  nach  $Z'$ , der alle drei Quadrate zum Kommutieren bringt. Damit ist klar, daß  $(f, g, h)$  schon ein Morphismus von Dreiecken sein muß.  $\square$

**Definition 3.3.14.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Sei  $A \hookrightarrow B \rightarrow C$  eine kurze exakte Sequenz in  $\mathcal{A}$  und seien  $A \hookrightarrow I^*$ ,  $B \hookrightarrow J^*$  und  $C \hookrightarrow K^*$  die zur Definition der  $R^i F$  gewählten injektiven Auflösungen

von  $A, B$  und  $C$ . Bilden wir in  $\text{Hot}(\mathcal{A})$  das durch diese Daten nach 3.3.12 eindeutig bestimmte ausgezeichnete Dreieck

$$I^* \rightarrow J^* \rightarrow K^* \rightarrow [1]I^*$$

und wenden  $F$  an, so erhalten wir ein ausgezeichnetes Dreieck

$$FI^* \rightarrow FJ^* \rightarrow FK^* \rightarrow [1]FI^*$$

in  $\text{Hot}(\mathcal{B})$ . Die lange exakte Homologiesequenz dieses Dreiecks nennen wir die **lange exakte Sequenz der derivierten Funktoren** zu unserer kurzen exakten Sequenz  $A \hookrightarrow B \rightarrow C$ . Diese lange exakte Sequenz hat also die Gestalt

$$0 \rightarrow FA \rightarrow FB \rightarrow FC \rightarrow R^1FA \rightarrow R^1FB \rightarrow R^1FC \rightarrow R^2FA \dots$$

und sie ist nach ?? natürlich in dem Sinne, daß jeder Morphismus von kurzen exakten Sequenzen zu einem Morphismus der zugehörigen langen exakten  $R^iF$ -Sequenzen führt.

*Übung 3.3.15.* Man prüfe, ob diese exakte Sequenz übereinstimmt mit der im Beweis von 3.2.21 konstruierten Sequenz. Es geht hierbei im Wesentlichen nur um das Vorzeichen des Randoperators, und ich hoffe, daß das auch wirklich paßt.

### 3.4 Abstrakte Interpretation des Kohomologierings

**Definition 3.4.1.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Ein Morphismus in der Kategorie der Komplexe  $\text{Ket}(\mathcal{A})$  oder auch in der Homotopiekategorie  $\text{Hot}(\mathcal{A})$  heißt ein **Quasiisomorphismus** genau dann, wenn er Isomorphismen auf der Homologie induziert. Ich will Quasiisomorphismen  $\overset{\sim}{\rightarrow}$  notieren, denn sie sind noch etwas ferner von üblichen Isomorphismen als unsere Isomorphismen  $\overset{\sim}{\rightarrow}$  in Homotopiekategorien.

**Definition 3.4.2.** Ein Komplex in einer Kategorie mit Nullobjekt heißt **beschränkt gegen die Pfeile** genau dann, wenn wir gegen die Richtung der Pfeile gehend irgendwann nur noch das Nullobjekt treffen. Die Homotopiekategorie aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe in einer additiven Kategorie  $\mathcal{I}$  bezeichnen wir mit  $\text{Hot}^+(\mathcal{I})$ .

**Lemma 3.4.3.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Ist  $A^* \overset{\sim}{\rightarrow} B^*$  ein Quasiisomorphismus in  $\text{Hot}(\mathcal{A})$  und  $I^* \in \text{Hot}^+(\mathcal{A})$  ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex von injektiven Objekten, so induziert die Verknüpfung mit unserem Quasiisomorphismus eine Bijektion

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(B^*, I^*) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{A}}(A^*, I^*)$$



*Beweis.* Vervollständigen wir unseren Quasiisomorphismus durch seinen Abbildungskegel  $K^*$  zu einem ausgezeichneten Dreieck, so muß dieser Abbildungskegel  $K^*$  exakt sein und wir folgern aus 2.3.13 in der Homotopiekategorie  $\text{Hot}([-1]K^*, I^*) = \text{Hot}(K^*, I^*) = 0$ . Mit der langen exakten Sequenz 3.3.9 folgt das Lemma.  $\square$

*Übung 3.4.4.* Ein Quasiisomorphismus zwischen zwei injektiven gegen die Pfeile beschränkten Komplexen ist stets eine Homotopieäquivalenz, in anderen Worten ein Isomorphismus in  $\text{Hot}(\mathcal{A})$ .

**Definition 3.4.5.** Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven und ist  $M \in \mathcal{A}$  gegeben, so kürzt man die Derivierten des Funktors

$$F = \mathcal{A}(M, \_) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}^{\text{opp}}$$

meist ab mit  $R^i F(N) = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, N)$  und bezeichnet sie als **Erweiterungen**. Ich verwende für diese Erweiterungen auch gerne die alternative Notation

$$\mathcal{A}^{[i]}(M, N)$$

3.4.6. Natürlich haben wir speziell  $\mathcal{A}^{[0]}(M, N) = \mathcal{A}(M, N)$ . Ganz analog wie im Fall abelscher Gruppen II.4.8.6 kann man auch allgemein die Elemente von  $\mathcal{A}^{[1]}(M, N)$  interpretieren als Isomorphieklassen von kurzen exakten Sequenzen  $N \hookrightarrow E \rightarrow M$  in  $\mathcal{A}$ .

3.4.7. Sind  $M \hookrightarrow I^*$  und  $N \hookrightarrow J^*$  injektive Auflösungen, so erhalten wir kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{[i]}(M, N) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i \mathcal{A}(M, J^*) && \text{nach 3.2.4,} \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{A}}(M, J^*[i]) && \text{nach II.1.4.10,} \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{A}}(I^*, J^*[i]) && \text{nach 3.4.3.} \end{aligned}$$

**Definition 3.4.8.** Die Interpretation aus 3.4.7 von Erweiterungen in einer abelschen Kategorie mit genug Injektiven als Morphismen in der Homotopiekategorie zwischen geeignet im Grad verschobenen injektiven Auflösungen liefert in natürlicher Weise die sogenannten **Yoneda-Produkte**

$$\mathcal{A}^{[i]}(M, N) \times \mathcal{A}^{[j]}(N, L) \rightarrow \mathcal{A}^{[i+j]}(M, L)$$

als die Verknüpfung von Morphismen. Insbesondere erhalten wir für jedes Objekt  $M \in \mathcal{A}$  den graduierten **Ring der Selbsterweiterungen**

$$\mathcal{A}^{[*]}(M) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{A}^{[i]}(M, M)$$

3.4.9. Ist speziell  $X$  ein topologischer Raum und bezeichnet  $\text{Ab}/_X$  wie in 1.4.5 die Kategorie aller abelschen Garben auf  $X$ , so haben wir kanonische Isomorphismen  $\Gamma\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \text{Ab}/_X(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \quad \forall \mathcal{F} \in \text{Ab}/_X$  und mit 2.3.10 ergeben sich kanonische Isomorphismen  $H^i(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Ab}/_X^{[i]}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F})$ . Auf diese Weise erhält insbesondere

$$H^*(X; \mathbb{Z}_X) \cong \text{Ab}/_X^{[*]}(\mathbb{Z}_X)$$

in natürlicher Weise die Struktur eines graduierten Rings, den wir den **garbentheoretischen Kohomologiering** von  $X$  nennen, um ihn von unserem singulären Kohomologiering aus II.4.3.2 zu unterscheiden. Offensichtlich trägt die Kohomologie jeder abelschen Garbe in natürlicher Weise die Struktur eines graduierten Rechtsmoduls über dem garbentheoretischen Kohomologiering.

3.4.10. Ist  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie und sind  $I^*, J^* \in \text{Ket } \mathcal{I}$  Komplexe in  $\mathcal{I}$ , so bilden wir wie in II.1.4.10 den Komplex von abelschen Gruppen  $\text{Hom}_{\mathcal{I}}(I^*, J^*)$ . Speziell wird  $\text{End}_{\mathcal{I}}(I^*)$  unter der Verknüpfung von Morphismen ein dg-Ring.

**Satz 3.4.11 (Abstrakte Interpretation des cup-Produkts).** *Ist  $X$  ein parakompakter lokal zusammenziehbarer Raum, so ist die Identifikation aus 2.9.4 ein Ringisomorphismus zwischen dem singulären Kohomologiering und dem garbentheoretischen Kohomologiering*

$$H_{\text{sing}}^* X \xrightarrow{\sim} \text{Ab}/_X^{[*]}(\mathbb{Z}_X)$$

3.4.12. Unter einem **Quasiisomorphismus** von einem dg-Ring  $A$  in einen dg-Ring  $B$  verstehen wir einen Homomorphismus von dg-Ringen, der einen Isomorphismus auf der Kohomologie induziert. Unter einem **Quasimorphismus** von einem dg-Ring  $A$  in einen dg-Ring  $B$  verstehen wir ein Paar  $(M, c)$  bestehend aus einem  $A$ - $B$ -dg-Bimodul  $M$  nebst einer Klasse  $c \in \mathcal{H}^0 M$ , die eine Basis von  $\mathcal{H}M$  als  $\mathcal{H}B$ -Rechtsmodul bildet. Wir sagen dann auch,  $c$  sei eine **Quasibasis** des  $B$ -dg-Moduls  $M$ . Ist zusätzlich  $c$  auch eine Basis von  $\mathcal{H}M$  als  $\mathcal{H}A$ -Linksmodul, so nennen wir  $(M, c)$  eine **Quasiäquivalenz**. Jeder Quasimorphismus zwischen dg-Ringen liefert einen Homomorphismus zwischen ihren Kohomologieringen, der dadurch charakterisiert werden kann, daß  $a \mapsto b$  gleichbedeutend ist zu  $ac = cb$ . Ist unser Quasimorphismus eine Quasiäquivalenz, so ist besagter Homomorphismus sogar ein Isomorphismus. Jeder Quasiisomorphismus liefert eine Quasiäquivalenz in offensichtlicher Weise.

*Beweis von 3.4.11.* Wir wählen eine injektive Auflösung  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  und faktorisieren sie mithilfe von 3.4.3 über die Auflösung durch lokale singuläre

Koketten  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^*$  als  $\mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{S}_X^* \rightarrow \mathcal{I}^*$ . Nach 3.4.12 reicht es zu zeigen, daß unsere Faktorisierung  $\mathcal{S}_X^* \rightarrow \mathcal{I}^*$  eine Quasibasis des Komplexes

$$\text{Hom}(\mathcal{S}_X^*, \mathcal{I}^*)$$

ist, und zwar sowohl für die Linksoperation von  $\text{End } \mathcal{I}^*$  als auch für die Rechtsoperation von  $S^*X$ , die vom dg-Algebren-Homomorphismus  $S^*X \rightarrow \text{End } \mathcal{S}_X^*$ ,  $c \mapsto c \cup$  induziert wird. Der erste Teil dieser Behauptung folgt mit 3.4.3 aus dem Quasiisomorphismus  $\mathcal{S}_X^* \xrightarrow{\cong} \mathcal{I}^*$ . Für den zweiten Teil betrachten wir das kommutative Diagramm von Komplexen

$$\begin{array}{ccc} S^*X & = & S^*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(\mathcal{S}_X^*, \mathcal{S}_X^*) & & \text{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{S}_X^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(\mathcal{S}_X^*, \mathcal{I}^*) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{I}^*) \end{array}$$

wo die obere linke Vertikale durch  $c \mapsto c \cup$  definiert ist und die anderen Pfeile sich hoffentlich selbst erklären. Nach 2.9.4 sind die rechten Vertikalen Quasiisomorphismen. Nach 3.4.3 ist auch die unterste Horizontale ein Quasiisomorphismus, folglich ist auch die Verknüpfung in der linken Vertikalen ein Quasiisomorphismus. Des weiteren besteht die linke Vertikale aus dg-Rechtsmoduln über  $S^*X$  in natürlicher Weise und die Morphismen sind mit dieser Operation verträglich. Das zeigt den zweiten Teil der Behauptung. Auf diese Weise vermittelt also unser dg-Bimodul in der Tat einen Isomorphismus zwischen den beiden fraglichen Kohomologierungen, und es ist nicht schwer zu sehen, daß dieser Isomorphismus übereinstimmt mit dem in 2.9.4 konstruierten Isomorphismus.  $\square$

*Übung 3.4.13.* Sei  $X$  eine parakompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{H}^*(\Omega^*(X))$  der Kohomologiering der differentiellen graduierten Algebra  $\Omega^*(X)$  der Differentialformen auf  $X$ . Man konstruiere man einen Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Algebren  $\mathcal{H}^*(\Omega^*(X)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}\text{-Mod}_{/X}^{[*]}(\mathbb{R}_X)$ .

*Ergänzung 3.4.14.* Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  heißt das Supremum

$$\text{hdim}(\mathcal{A}) = \sup\{i \mid \exists M, N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{A}^{[i]}(M, N) \neq 0\}$$

die **homologische Dimension von  $\mathcal{A}$** . Homologische Dimension  $-\infty$  haben genau die **Nullkategorien**, als da heißt, diejenigen abelschen Kategorien, bei denen alle Objekte Nullobjekte sind. Homologische Dimension  $\leq 0$  haben genau diejenigen abelschen Kategorien, bei denen alle kurzen exakten Sequenzen spalten. Derartige Kategorien heißen **halbeinfach**. Abelsche Kategorien einer homologischen Dimension  $\leq 1$  bezeichnet man gleichbedeutend

auch als **erbliche Kategorien**, da sich bei ihnen die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt. Diese Terminologie ist allerdings gefährlich, denn es gibt durchaus abelsche Kategorien, die in diesem Sinne nicht erblich sind, bei denen sich aber dennoch die Eigenschaft der Projektivität auf Untermoduln vererbt, etwa weil sie gar keine projektiven Objekte besitzen.

*Übung 3.4.15.* Gegeben eine abelsche Kategorie von endlicher homologischer Dimension  $d \in \mathbb{N}$  und  $M \hookrightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots \rightarrow I^{d-1} \twoheadrightarrow N$  exakt mit injektiven  $I^i$  zeige man, daß auch  $N$  injektiv ist.

## 4 Lokalisierung in Kategorien

### 4.1 Köcher

**Definition 4.1.1.** Ein **Köcher** (englisch **quiver**, französisch **carquois**) ist ein Datum  $\mathcal{K} = (P, E, a, e)$  bestehend aus zwei Mengen  $P, E$  und zwei Abbildungen  $a, e : P \rightarrow E$ . Wir nennen die Elemente von  $E$  die **Ecken** des Köchers und die Elemente von  $P$  seine **Pfeile**. Für einen Pfeil  $p \in P$  nennen wir  $a(p)$  seinen **Anfangspunkt** und  $e(p)$  seinen **Endpunkt**. Ein **Morphismus**  $F$  von unserem Köcher in einen weiteren Köcher  $(P', E', a', e')$  ist ein Paar bestehend aus einer Abbildung  $F : P \rightarrow P'$  und einer Abbildung  $F : E \rightarrow E'$  derart, daß gilt  $Fa = a'F$  und  $Fe = e'F$ . Wir erhalten so die Kategorie aller Köcher

Car

4.1.2. Jede Kategorie liefert einen Köcher, mit den Objekten als Ecken und den Morphismen als Pfeilen. Ein Köcher heißt **endlich** genau dann, wenn er nur endlich viele Punkte und Pfeile hat. Manche Autoren benutzen gleichbedeutend auch die Bezeichnung **Diagrammschema**.

**Definition 4.1.3.** Gegeben ein Köcher  $\mathcal{K}$  bilden wir seine **Wegekategorie**  $\tilde{\mathcal{K}}$  wie folgt: Als Objekte nehmen wir die Ecken des Köchers,  $\text{Ob } \tilde{\mathcal{K}} = E$ , als Menge von Morphismen von einer Ecke  $x$  in eine weitere Ecke  $y$  die Menge aller Folgen von Pfeilen  $p_1, \dots, p_n$  mit  $a(p_1) = x$ ,  $e(p_n) = y$  und  $e(p_i) = a(p_{i+1})$  für  $1 \leq i < n$ , disjunkt vereinigt mit einem weiteren Element  $\text{Id}_x$  im Fall  $y = x$ . Die Verknüpfung ist das "Aneinanderhängen", unsere Folge wäre also die Verknüpfung  $p_n \circ \dots \circ p_1 \in \tilde{\mathcal{K}}(x, y)$ . Wir nennen die Morphismen in der Wegekategorie  $\tilde{\mathcal{K}}$  die **Wege** in unserem Köcher.

4.1.4. Der offensichtliche Köchermorphismus von einem Köcher in seine Wegekategorie  $\text{can} : \mathcal{K} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$  hat die folgende **universelle Eigenschaft**: Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Morphismus von Köchern, so gibt es genau einen Funktor  $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $\tilde{\varphi} \circ \text{can} = \varphi$ .

**Definition 4.1.5.** Seien  $\mathcal{K}$  ein Köcher,  $\mathcal{B}$  eine Kategorie und  $F, G : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{B}$  Köchermorphismen. Eine **Transformation**  $\tau : F \Rightarrow G$  ist eine Vorschrift, die jeder Ecke  $x \in \mathcal{K}$  einen Morphismus  $\tau_x \in \mathcal{B}(F(x), G(x))$  zuordnet derart, daß für jeden Pfeil  $p : x \rightarrow y$  in unserem Köcher  $\mathcal{K}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\tau_x} & G(x) \\ F(p) \downarrow & & \downarrow G(p) \\ F(y) & \xrightarrow{\tau_y} & G(y) \end{array}$$

in unserer Kategorie  $\mathcal{B}$  kommutiert. Sind alle  $\tau_x$  Isomorphismen, so heißt  $\tau$  eine **Isotransformation**. Die Menge aller Transformationen bezeichnen wir mit  $\text{Car}(\mathcal{K}, \mathcal{B})(F, )$  oder  $\text{Trans}_{\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{B}}(F, G)$  oder abkürzend mit  $\text{Trans}_{\mathcal{K}}(F, G)$  oder auch nur mit  $\text{Trans}(F, G)$ .

4.1.6. Ist  $\mathcal{K}$  ein Köcher und  $\mathcal{B}$  eine Kategorie, so definiert die Restriktion einen Isomorphismus von Kategorien  $\text{Cat}(\tilde{\mathcal{K}}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \text{Car}(\mathcal{K}, \mathcal{B})$ , wo wir beide Seiten dadurch zu Kategorien machen, daß wir als Morphismen die Transformationen nehmen.

**Definition 4.1.7.** Gegeben eine Menge  $\mathfrak{U}$  verstehen wir unter einem  **$\mathfrak{U}$ -Köcher** einen Köcher  $\mathcal{K}$  derart, daß die Menge aller Ecken eine Teilmenge von  $\mathfrak{U}$  ist und die Menge aller Pfeile zwischen je zwei vorgegebenen Ecken ein Element von  $\mathfrak{U}$ .

4.1.8. Eine  $\mathfrak{U}$ -Kategorie im Sinne von [I.2.3.11](#) ist damit dasselbe wie eine Kategorie, deren zugrundeliegender Köcher ein  $\mathfrak{U}$ -Köcher ist.

*Ergänzung* 4.1.9. Gegeben eine Menge  $\mathfrak{U}$  und ein Universum  $\mathfrak{V}$  mit  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{V}$  ist für jeden  $\mathfrak{U}$ -Köcher seine Wegekategorie eine  $\mathfrak{V}$ -Kategorie.

## 4.2 Lokalisierung von Kategorien

**Definition 4.2.1.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  eine Menge von Morphismen in  $\mathcal{C}$ . Eine **Lokalisierung von  $\mathcal{C}$  an  $S$**  ist ein Paar  $(\mathcal{C}_S, \text{can})$  bestehend aus einer Kategorie  $\mathcal{C}_S$  mitsamt einem Funktor  $\text{can} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  derart, daß gilt:

1. Jeder Morphismus aus  $S$  wird unter  $\text{can}$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{C}_S$ ;
2. Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  irgendein Funktor, der alle Morphismen aus  $S$  zu Isomorphismen macht, so gibt es genau einen Funktor  $\tilde{F} : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $F = \tilde{F} \circ \text{can}$ .

4.2.2. Der Begriff der Lokalisierung kommt aus der Ringtheorie, in der man das formale Einführen von Inversen aus geometrischen Gründen als Lokalisierung bezeichnet, vergleiche [??](#). Mehr zur Kategorientheorie findet man in [\[Bor94\]](#). Eine Lokalisierung ist, wenn sie existiert, in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Ihre Existenz zeigen wir gleich im Anschluß.

**Satz 4.2.3 (Lokalisierung von Kategorien).** *Gegeben eine Kategorie und darin eine Menge von Morphismen existiert stets eine Lokalisierung unserer Kategorie an unserer Menge von Morphismen.*

*Ergänzung 4.2.4.* Sind  $\mathfrak{U} \in \mathfrak{V}$  Universen, so konstruiert der folgende Beweis genauer für jede Menge von Morphismen einer  $\mathfrak{U}$ -Kategorie eine Lokalisierung, die eine  $\mathfrak{V}$ -Kategorie ist.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{C}$  unsere Kategorie und  $S$  unsere Menge von Morphismen. Wir vergrößern den unserer Kategorie  $\mathcal{C}$  zugrundeliegenden Köcher zu einem neuen Köcher  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ , indem wir für jeden Morphismus  $s : X \rightarrow Y$  aus  $S$  einen Pfeil  $\bar{s} : Y \rightarrow X$  neu hinzunehmen. Zu dem so vergrößerten Köcher bilden wir dann die Wegekategorie. Wir notieren  $[p]$  den Morphismus in der Wegekategorie zu einem Pfeil  $p$  aus dem Köcher  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  und  $\text{Id}_X$  bzw.  $\text{id}_X$  die Identität auf einem Objekt  $X$  in unserer Wegekategorie bzw. in unserer ursprünglichen Kategorie  $\mathcal{C}$ . Nun betrachten wir auf der Menge der Morphismen unserer Wegekategorie die kleinste Äquivalenzrelation  $\sim$  derart, daß gilt:

1.  $[s] \circ [\bar{s}] \sim \text{Id}_Y$  und  $[\bar{s}] \circ [s] \sim \text{Id}_X$  für alle  $s : X \rightarrow Y$  aus  $S$ ;
2.  $\text{Id}_X \sim [\text{id}_X]$  und  $[f] \circ [g] \sim [f \circ g]$  für alle verknüpfbaren Morphismen  $f$  und  $g$  aus  $\mathcal{C}$ ;
3.  $v \sim w \Rightarrow u \circ v \sim u \circ w$  und  $v \circ x \sim w \circ x$  für beliebige entsprechend verknüpfbare Morphismen  $u, v, w, x$  unserer Wegekategorie.

Schließlich erklären wir eine Kategorie  $\mathcal{C}_S$ , indem wir als Objekte die Objekte von  $\mathcal{C}$  nehmen, als Morphismen jedoch Äquivalenzklassen von Wegen in der Wegekategorie des Köchers  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ . Die letzte Bedingung an unsere Äquivalenzrelation stellt hierbei sicher, daß die Verknüpfung solcher Äquivalenzklassen wohldefiniert ist. Man folgert leicht, daß  $\mathcal{C}_S$  mit dieser Verknüpfung von Morphismen eine Kategorie ist. Bezeichne nun wie zuvor  $\tilde{\mathcal{K}}$  die Wegekategorie eines Köchers  $\mathcal{K}$ . Die vorletzte Bedingung in unserer Definition der Äquivalenzrelation erzwingt, daß die Verknüpfung

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}] \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}[S^{-1}]} \rightarrow \mathcal{C}_S$$

von Morphismen von Köchern sogar ein Funktor ist, und die erste Bedingung erzwingt, daß jeder Morphismus aus  $S$  unter diesem Funktor ein Isomorphismus der Kategorie  $\mathcal{C}_S$  wird. Wir bezeichnen diesen Funktor mit  $\text{can} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  und überlassen den Nachweis der universellen Eigenschaft dem Leser.  $\square$

4.2.5. Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt ein **Lokalisierungsfunktor** genau dann, wenn für die Menge  $S$  aller Morphismen von  $\mathcal{C}$ , die er zu Isomorphismen macht, eine Lokalisierung  $\mathcal{C}_S$  existiert und wenn zusätzlich der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien  $\tilde{F} : \mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$  liefert.

*Beispiel 4.2.6.* Der Funktor  $\text{Ab} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mod}$  gegeben durch  $M \mapsto \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$  ist ein Lokalisierungsfunktor. Gegeben ein Köcher mit zwei Ecken und einem Pfeil von der einen zu der anderen erhalten wir zwei Lokalisierungsfunktoren von der Kategorie der Darstellungen unseres Köchers in die Kategorie der abelschen Gruppen, indem wir jeder Darstellung den Wert an einer festen unserer beiden Ecken zuordnen.

4.2.7. Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Lokalisierungsfunktor, so ist  $F$  surjektiv auf Isomorphieklassen von Objekten und jeder Morphismus in  $\mathcal{D}(FA, FB)$  läßt sich schreiben als eine Verknüpfung

$$F(g_1) \circ F(s_1)^{-1} \circ F(g_2) \circ F(s_2)^{-1} \circ \dots \circ F(g_n) \circ F(s_n)^{-1}$$

mit Morphismen  $g_i$  in  $\mathcal{C}$  und  $s_i \in S$ . In der Tat reicht es sicher, diese Aussagen für jede Lokalisierung zu zeigen. In diesem Fall hat jedoch die Teilkategorie  $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}_S$  mit Objekten allen Objekten im Bild von  $\text{can}$  und Morphismen den durch Zusammenfügungen der beschriebenen Art darstellbaren Morphismen von  $\mathcal{C}_S$  offensichtlich auch die von einer Lokalisierung geforderte universelle Eigenschaft und fällt demnach mit  $\mathcal{C}_S$  zusammen.

4.2.8. Die für uns wesentlichen allgemeinen Aussagen zur Lokalisierung von Kategorien faßt der folgende Satz zusammen, vergleiche auch [GZ67]. Die Aussagen 1 und 2 gelten natürlich genauso auch für jeden Lokalisierungsfunktor.

**Satz 4.2.9 (Eigenschaften der Lokalisierung).** *Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  eine Menge von Morphismen in  $\mathcal{C}$ .*

1. *Ist  $\text{can} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  eine Lokalisierung und sind gegeben eine weitere Kategorie  $\mathcal{D}$  und Funktoren  $F, G : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}$ , so induziert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion*

$$\text{Cat}(\mathcal{C}_S, \mathcal{D})(F, G) \xrightarrow{\sim} \text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})(F \circ \text{can}, G \circ \text{can})$$

2. *Ist  $\text{can} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  eine Lokalisierung und  $A \in \mathcal{C}$  ein Objekt derart, daß der Funktor  $\mathcal{C}(A, \_) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  alle Morphismen aus  $S$  zu Bijektionen macht, so liefert die Lokalisierung für alle  $B \in \mathcal{C}$  Bijektionen*

$$\mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(A, B)$$

3. *Jeder Rechts- und jeder Linksadjungierte eines Lokalisierungsfunktors ist volltreu. Sogar jeder partielle Rechts- und jeder Linksadjungierte eines Lokalisierungsfunktors ist volltreu.*



4. *Besitzt ein Funktor einen volltreuen Rechts- oder Linksadjungierten, so ist er ein Lokalisierungsfunktor.*

*Beweis.* 1. Das folgt mit 4.2.7 ohne größere Schwierigkeiten daraus, daß ein quadratisches Diagramm mit Isomorphismen in den Horizontalen kommutiert genau dann, wenn es kommutiert nach Ersetzen der Horizontalen durch ihre Inversen.

2. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung gibt es für unser spezielles  $A$  genau einen Funktor  $F : \mathcal{C}_S \rightarrow \text{Ens}$  mit  $F \circ \text{can} = \mathcal{C}(A, \_)$ . Wir können nun eine inverse Abbildung zur im Satz behaupteten Bijektion explizit angeben durch die Abbildungsvorschrift  $g \mapsto (Fg)(\text{id}_A)$ . Etwas genauer liefert der Funktor zur Lokalisierung eine Transformation  $\tau : \mathcal{C}(A, \_) \Rightarrow \mathcal{C}_S(A, \_) \circ \text{can}$ , die wir für unser spezielles  $A$  als Äquivalenz entlarven wollen. Das Element  $\text{id}_A \in F(A)$  liefert mit dem Yonedalemma I.2.3.12 eine Transformation  $\eta : \mathcal{C}_S(A, \_) \Rightarrow F$ , und wir behaupten, daß die induzierte Transformation  $\eta \text{can} : \mathcal{C}_S(A, \_) \circ \text{can} \Rightarrow F \circ \text{can} = \mathcal{C}(A, \_)$  invers ist zu  $\tau$ . Das aber ist nun mit dem bereits bewiesenen Teil 1 und dem Yonedalemma sehr einfach.

3. Wir zeigen das nur im Fall eines Linksadjungierten  $L : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}$ . Nach Teil 2 induziert der Funktor zur Lokalisierung für alle  $A \in \mathcal{C}_S$  und  $B \in \mathcal{C}$  Isomorphismen  $\mathcal{C}(LA, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(LA, B)$ . Da jedes Objekt in  $\mathcal{C}_S$  von einem Objekt  $B \in \mathcal{C}$  herkommt, ist damit der kanonische Morphismus für alle  $A \in \mathcal{C}_S$  ein Isomorphismus  $A \xrightarrow{\sim} LA$  in  $\mathcal{C}_S$ . Das aber bedeutet nach I.4.9.13 gerade, daß  $L$  volltreu ist. Im Fall partieller Adjungierter ist das Argument mutatis mutandis dasselbe.

4. Wir behandeln nur den Fall eines Rechtsadjungierten. Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  unser Funktor und  $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  sein volltreuer Rechtsadjungierter. Sei  $S$  die Klasse aller Morphismen in  $\mathcal{C}$ , die unter  $F$  Isomorphismen werden. Erklären wir eine Kategorie  $\mathcal{C}_S$ , indem wir als Objekte dieselben nehmen wie die Objekte von  $\mathcal{C}$ , als Morphismen jedoch setzen  $\mathcal{C}_S(X, Y) := \mathcal{D}(FX, FY)$  mit der offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen, so ist der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz  $\mathcal{C}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ , da ja gilt  $FRD \xrightarrow{\sim} D$  für alle  $D \in \mathcal{D}$  nach I.4.9.13. Wenden wir diesen Isomorphismus an auf  $FX$  für  $X \in \mathcal{C}$ , so folgt mit I.4.9.12, daß die Sequenz von kanonischen Morphismen  $FX \rightarrow FRFX \rightarrow FX$ , die man mithilfe der Adjunktion erhält, aus Isomorphismen besteht. Ist nun  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  ein Funktor, der Morphismen aus  $S$  zu Isomorphismen macht, so faktorisiert er über  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  mittels eines Funktors  $\tilde{G} : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{E}$ , wobei wir auf den Morphismen  $\tilde{G} : \mathcal{C}_S(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}(GX, GY)$  für  $f_S \in \mathcal{C}_S(X, Y)$  erklären durch die Kommutativität des Diagramms mit Isomorphismen in den

Vertikalen

$$\begin{array}{ccc} GX & \longrightarrow & GY \\ \downarrow & & \downarrow \\ GRFX & \xrightarrow{GRf_S} & GRFY \end{array}$$

Diese Faktorisierung ist, wie man leicht sieht, auch die einzig mögliche.  $\square$

*Übung 4.2.10.* Jede Lokalisierung bzw. jeder Lokalisierungsfunktor ist auch als Funktor zwischen den zugehörigen opponierten Kategorien eine Lokalisierung bzw. ein Lokalisierungsfunktor. Gegeben zwei Lokalisierungen bzw. Lokalisierungsfunktoren  $F : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$  ist auch ihr Produkt  $(F \times G) : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}}$  eine Lokalisierung bzw. ein Lokalisierungsfunktor.

### 4.3 Lokalisierung unter Ore-Bedingungen

4.3.1. Stellen wir zusätzliche Bedingungen an das System der zu invertierenden Morphismen, so übertragen sich manche Eigenschaften der Ausgangskategorie auf die Lokalisierung, wie wir im folgenden näher ausführen.

**Definition 4.3.2.** Eine Menge  $S$  von Morphismen einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt ein **rechtsmultiplikatives System** genau dann, wenn es (a) die Identität auf jedem Objekt enthält, wenn es (b) abgeschlossen ist unter Verknüpfung, und wenn (c) zusätzlich die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Gegeben  $E \xrightarrow{g} X \xleftarrow{s} D$  mit  $s \in S$  gibt es  $E \xleftarrow{t} W \xrightarrow{h} D$  mit  $t \in S$  und  $sh = gt$ ;
2. Seien gegeben  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ . Gibt es  $s \in S$  mit  $sf = sg$ , so gibt es auch  $t \in S$  mit  $ft = gt$ .

4.3.3. Hat unsere Kategorie nur ein Objekt und ist die Verknüpfung von Morphismen die Multiplikation einer Ringstruktur auf diesem Objekt, so sind diese Bedingungen Varianten der bei der Lokalisierung nichtkommutativer Ringe üblichen **Ore-Bedingungen**.

**Definition 4.3.4.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein rechtsmultiplikatives System von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . Wir betrachten für  $X, Y \in \mathcal{C}$  die Menge  $\mathcal{D}(X, Y)$  aller Diagramme  $D = (s, D, f)$  der Gestalt

$$X \xleftarrow{s} D \xrightarrow{f} Y$$

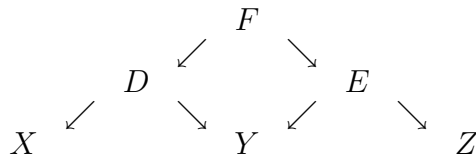
mit  $s \in S$  und nennen derartige Diagramme **Brüche** oder genauer **Rechtsbrüche von  $X$  nach  $Y$** . Wir sagen, ein Bruch  $(s, D, f)$  gehe hervor aus einem weiteren Bruch  $(s', D', f') \in \mathcal{D}(X, Y)$  durch **Kürzen** und schreiben

$D' \dashrightarrow D$  genau dann, wenn es einen Morphismus  $h : D' \rightarrow D$  gibt mit  $s' = sh$  und  $f' = fh$ . Bezeichne  $\bar{\mathcal{D}}(X, Y)$  die Menge aller Äquivalenzklassen von Brüchen von  $X$  nach  $Y$  unter der durch Kürzen erzeugten Äquivalenzrelation und bezeichne  $[D] = [s, D, f]$  die Äquivalenzklasse eines Bruches.

**Proposition 4.3.5 (Kategorien von Brüchen).** *Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein rechtsmultiplikatives System von Morphismen von  $\mathcal{C}$ . So liefert die offensichtliche Abbildung eine Bijektion zwischen Äquivalenzklassen von Brüchen und Morphismen in der lokalisierten Kategorie*

$$\bar{\mathcal{D}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_S(X, Y)$$

*Beweis.* Gegeben Brüche mit Kürzungen  $D' \dashrightarrow D \dashleftarrow D''$  gibt es einen Bruch  $D'''$  mit Kürzungen  $D' \dashleftarrow D''' \dashrightarrow D''$ . In der Tat finden wir mit der ersten Bedingung in 4.3.2 Morphismen  $D' \leftarrow W \rightarrow D''$  mit  $W \rightarrow D''$  in  $S$  derart, daß mit den Morphismen nach  $D$  ein kommutatives Quadrat entsteht. Es folgt insbesondere, daß für die durch Kürzen erzeugte Äquivalenzrelation auf  $\bar{\mathcal{D}}(X, Y)$  zwei Brüche äquivalent sind genau dann, wenn sie durch Kürzen aus ein- und demselben Bruch hervorgehen. Wir erklären nun Verknüpfungen  $\bar{\mathcal{D}}(X, Y) \times \bar{\mathcal{D}}(Y, Z) \rightarrow \bar{\mathcal{D}}(X, Z)$  wie folgt: Wir beginnen mit Verknüpfungen  $\mathcal{D}(X, Y) \times \mathcal{D}(Y, Z) \rightarrow \bar{\mathcal{D}}(X, Z)$  gegeben dadurch, daß  $((s, D, f), (t, E, g))$  abgebildet wird auf die Äquivalenzklasse eines Bruches der Gestalt



mit  $F \rightarrow D$  aus  $S$  und kommutierendem schiefen Quadrat. Die so gebildete Äquivalenzklasse unabhängig ist von der Wahl von  $F$  und den beiden von  $F$  ausgehenden Morphismen: Ist  $D \leftarrow F' \rightarrow E$  eine zweite Wahl, so vervollständigen wir  $F \rightarrow D \leftarrow F'$  durch  $F \leftarrow F'' \rightarrow F'$  zu einem kommutativen Quadrat mit  $F'' \rightarrow F'$  aus  $S$  und folgern aus  $F'' \rightarrow F' \rightarrow E \rightarrow Y = F'' \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow Y$  mit der zweiten Bedingung aus 4.3.2 die Existenz von  $F''' \rightarrow F''$  aus  $S$  mit  $F''' \rightarrow F'' \rightarrow F' \rightarrow E = F''' \rightarrow F'' \rightarrow F \rightarrow E$ . Es ist klar, daß unsere Verknüpfung unter Kürzen dieselbe bleibt und somit absteigt zu einer Verknüpfung  $\bar{\mathcal{D}}(X, Y) \times \bar{\mathcal{D}}(Y, Z) \rightarrow \bar{\mathcal{D}}(X, Z)$ . Schließlich zeigen wir noch, daß die Objekte von  $\mathcal{C}$  mit den Morphismenmengen  $\bar{\mathcal{D}}(X, Y)$  und der eben eingeführten Verknüpfung eine Kategorie bilden. Die Identitätsmorphismen sind hier unproblematisch, und die Assoziativität der Verknüpfung scheint mir auch recht offensichtlich. Nun ist aus der Konstruktion jedoch klar, daß die eben konstruierte Kategorie  $\bar{\mathcal{D}}$  dieselbe universelle Eigenschaft hat wie unsere Lokalisierung  $\mathcal{C}_S$ . □

**Proposition 4.3.6 (Lokalisierung voller Unterkategorien).** *Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit einem rechtsmultiplikativen System von Morphismen  $S$ . Ist  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  eine volle Unterkategorie und  $S' \subset S$  ein rechtsmultiplikatives System von Morphismen von  $\mathcal{C}'$  mit der Eigenschaft, daß es für alle  $s \in S$  mit Ziel in  $\mathcal{C}'$  einen Morphismus  $h$  gibt mit  $s \circ h \in S'$ , so ist der offensichtliche Funktor  $\mathcal{C}'_{S'} \rightarrow \mathcal{C}_S$  volltreu.*

*Beweis.* Das erkennt man sofort an der Realisierung 4.3.5 der lokalisierten Kategorie als Kategorie von Brüchen.  $\square$

4.3.7. Je zwei Brüche  $(r, E, f) \in \mathcal{D}(X, Y)$  und  $(t, F, g) \in \mathcal{D}(X, Z)$  lassen sich **auf einen Hauptnenner bringen**. In der Tat finden wir Morphismen von Objekten  $E \leftarrow D \rightarrow F$  so, daß  $D \rightarrow E$  zu  $S$  gehört und daß beide denselben Pfeil  $s : D \rightarrow X$  liefern, der dann notwendig auch zu  $S$  gehört. Damit entstehen unsere beiden Brüche durch Kürzen aus Brüchen der Gestalt  $(s, D, f')$  und  $(s, D, g')$ .

**Proposition 4.3.8 (Produkte in Lokalisierungen).** *Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein rechtsmultiplikatives System von Morphismen von  $\mathcal{C}$ , so vertauscht der Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  mit dem Bilden von endlichen Produkten und von Egalisatoren.*

*Beweis.* Wir konzentrieren uns darauf, das Kommutieren mit dem Produkt zweier Objekte zu prüfen. Wir dürfen und werden das nachweisen für die Kategorie von Brüchen  $\bar{\mathcal{D}}$  aus 4.3.4 statt  $\mathcal{C}_S$ . Gegeben zwei Brüche in  $\bar{\mathcal{D}}(X, A')$  und  $\bar{\mathcal{D}}(X, A'')$  finden wir mit 4.3.7 Repräsentanten “mit demselben Nenner”, d.h. von der Form  $(s, D, f)$  und  $(s, D, g)$  mit  $f : D \rightarrow A'$  und  $g : D \rightarrow A''$ , und bilden dann den Bruch  $(s, D, (f, g))$  in das Produkt  $A' \times A''$ . Die Verknüpfung mit den Projektionen liefert dann natürlich die beiden ursprünglichen Brüche. Ist umgekehrt ein Morphismus  $[s', D', h] \in \bar{\mathcal{D}}(X, A' \times A'')$  gegeben, der bei Nachschalten der Projektionen  $[s, D, f]$  und  $[s, D, g]$  liefert, so bringen wir zunächst alle drei Brüche auf einen Hauptnenner und dürfen dann auch für unseren Bruch in das Produkt einen Repräsentanten der Gestalt  $(s, D, h)$  annehmen. Gilt nun

$$[s, D, \text{pr}_1 \circ h] = [s, D, f] \quad \text{und} \quad [s, D, \text{pr}_2 \circ h] = [s, D, g]$$

so können wir den Hauptnenner weiter vergrößern derart, daß gilt  $\text{pr}_2 \circ h = g$ ,  $\text{pr}_1 \circ h = f$ , und das zeigt dann  $h = (f, g)$ . Daß finale Objekte in finale Objekte übergehen und daß Egalisatoren zu Egalisatoren werden, zeigt man ähnlich aber einfacher.  $\square$

4.3.9. Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $S$  ein rechtsmultiplikatives System von Morphismen. Jede additive Struktur auf  $\mathcal{C}$  im Sinne von 1.7.1 induziert eine additive Struktur auf  $\mathcal{C}_S$ , man addiert eben Brüche, indem man sie auf einen Hauptnenner bringt. Besitzt  $\mathcal{C}$  nur ein Objekt, so ist diese Konstruktion die sogenannte **Ore-Lokalisierung** von nicht notwendig kommutativen Ringen.

**Proposition 4.3.10.** *Ist  $\mathcal{C}$  eine additive Kategorie und  $S$  ein rechtsmultiplikatives System von Morphismen, so ist auch  $\mathcal{C}_S$  eine additive Kategorie und der kanonische Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$  ist additiv.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus 4.3.9 und 4.3.8. □

**Definition 4.3.11.** Ein **multiplikatives System** in einer Kategorie ist ein System von Morphismen, das rechtsmultiplikativ ist im Sinne von 4.3.2 sowohl in unserer Kategorie als auch in ihrer opponierten Kategorie.

*Ergänzung 4.3.12.* In ?? diskutieren wir Lokalisierungen abelscher Kategorien und zeigen insbesondere, daß solch eine Lokalisierung an einem multiplikativen System stets wieder eine abelsche Kategorie liefert.

## 5 Derivierte Kategorien und Funktoren

### 5.1 Triangulierte Kategorien

**Definition 5.1.1.** Eine  $\mathbb{Z}$ -Kategorie ist eine Kategorie  $\mathcal{A}$  mitsamt einem Automorphismus  $[1] : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ . Mit Automorphismus meine ich wirklich einen Isomorphismus der Kategorie auf sich selbst, nicht etwa bloß eine Äquivalenz von Kategorien. Ein  $\mathbb{Z}$ -Funktork  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  von  $\mathbb{Z}$ -Kategorien ist definiert als ein Paar  $(F, u)$  bestehend aus einem Funktor  $F$  nebst einer Isotransformation  $u : [1] \circ F \xrightarrow{\sim} F \circ [1]$ , die ich die  $\mathbb{Z}$ -Struktur unseres  $\mathbb{Z}$ -Funktors nennen will.

5.1.2. Gegeben eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur  $u$  eines Funktors wie eben ist natürlich auch ihr Negatives  $(-u)$  eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur für denselben Funktor.

*Ergänzung 5.1.3.* Es gibt durchaus interessante Situationen, in denen man die hier entwickelten Begriffsbildungen auf den Fall erweitern muß, daß unsere Verschiebung  $[1] : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  nur eine Äquivalenz von Kategorien ist. Das weckt jedoch Elefanten der Notation, die ich noch schlafen lassen will.

**Definition 5.1.4.** Eine **verträgliche Transformation**  $(F, u) \Rightarrow (G, v)$  zwischen  $\mathbb{Z}$ -Funktoren ist eine Transformation  $\tau : F \Rightarrow G$ , die mit den jeweiligen  $\mathbb{Z}$ -Strukturen verträglich ist in dem Sinne, daß das folgende Diagramm von Transformationen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [1] \circ F & \xrightarrow{u} & F \circ [1] \\ [1]\tau \downarrow & & \downarrow \tau[1] \\ [1] \circ G & \xrightarrow{v} & G \circ [1] \end{array}$$

Wir notieren die Menge der verträglichen Transformation

$$\text{Trans}^{\mathbb{Z}}(F, G)$$

Eine Adjunktion  $(L, R)$  von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren nennen wir **verträglich** genau dann, wenn die zugehörigen Transformationen  $\text{Id} \Rightarrow RL$  und  $LR \Rightarrow \text{Id}$  verträglich sind. Gegeben eine Adjunktion zwischen Funktoren zwischen zwei  $\mathbb{Z}$ -Kategorien existiert für jede  $\mathbb{Z}$ -Struktur auf einem der beiden genau eine  $\mathbb{Z}$ -Struktur auf dem anderen derart, daß die Adjunktion mit diesen  $\mathbb{Z}$ -Strukturen verträglich ist.

**Definition 5.1.5.** Unter einem **Dreieck** in einer  $\mathbb{Z}$ -Kategorie versteht man ein Diagramm der Gestalt  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{y} Z \xrightarrow{w} [1]X$ , das suggestiver aber weniger präzise auch in der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & [1] & Z \end{array}$$

geschrieben werden mag. Ein **Morphismus von Dreiecken** wird definiert wie in 3.3.2.

**Definition 5.1.6.** Eine **triangulierte Kategorie** ist eine additive  $\mathbb{Z}$ -Kategorie mitsamt einer Vorschrift, die unter allen Dreiecken unserer  $\mathbb{Z}$ -Kategorie gewisse Dreiecke auszeichnet derart, daß die folgenden von 3.3 motivierten Axiome erfüllt sind:

1. Jedes Dreieck, das isomorph ist zu einem ausgezeichneten Dreieck, ist auch selbst ein ausgezeichnetes Dreieck.
2. Für jedes Objekt  $X$  ist das Dreieck  $X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow 0 \rightarrow [1]X$  ausgezeichnet.
3. Jeder Morphismus  $X \rightarrow Y$  unserer Kategorie kann in ein ausgezeichnetes Dreieck  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  eingebettet werden. Es wird sich später herausstellen, daß hier  $Z$  nur eindeutig ist bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus, vergleiche Axiom 5. Wir nennen  $Z$  in Erinnerung an 3.3.2 auch im allgemeinen den **Abbildungskegel** über dem Morphismus  $X \rightarrow Y$ .
4. Ein Dreieck  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  ist ausgezeichnet genau dann, wenn das "gedrehte" Dreieck  $Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X \xrightarrow{-u} [1]Y$  ausgezeichnet ist.
5. Gegeben ein Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen und einem kommutativen Quadrat links

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & [1]X \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & [1]f \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & [1]X' \end{array}$$

gibt es einen Morphismus  $h : Z \rightarrow Z'$  derart, daß die beiden dadurch in der Mitte und rechts entstehenden Quadrate kommutieren. Von diesem Morphismus  $h$  wird nur die Existenz und nicht die Eindeutigkeit gefordert.

6. (**Oktaederaxiom**) Gegeben ausgezeichnete Dreiecke

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow [1]X$$

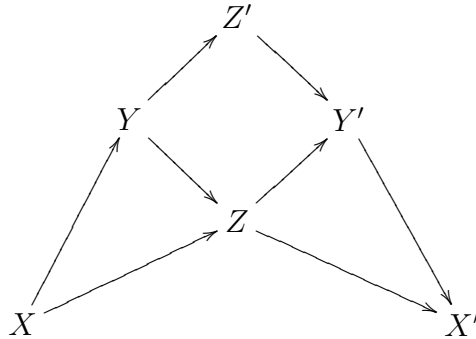
$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow [1]Y$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow [1]X$$

gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck  $Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow [1]Z'$  derart, daß im nebenstehenden Oktaeder die beiden Quadrate im Schnitt mit senkrechten Ebenen kommutieren und sämtliche acht Dreiecke entweder kommutieren oder ausgezeichnete Dreiecke sind.

Die ausgezeichneten Dreiecke einer triangulierten Kategorie heißen, nun, eben **ausgezeichnete Dreiecke**. Eingeführt wurden sie ursprünglich auf französisch als **triangles distingués**. Auf englisch nennt man sie **distinguished triangles**.

5.1.7. Wir notieren Oktaeder oft vereinfacht in der Form




In dieser Gestalt sind alle vier ausgezeichneten Dreiecke als lediglich gerade Pfeilsequenzen erkennbar, einige kommutative Dreiecke und ein kommutatives Quadrat sind jedoch nicht sichtbar. Eine andere Darstellung ist

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & [1]X \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & [1]X \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & [1]Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 Z' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & [1]Z'
 \end{array}$$

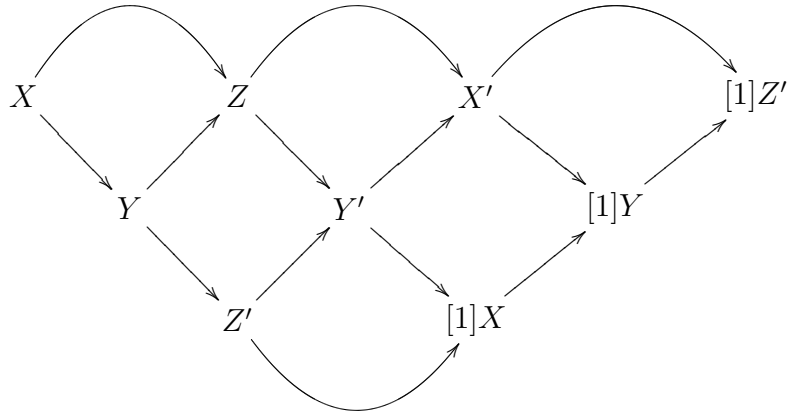
mit einigen Identitäten in den Vertikalen, kommutativen Quadraten und ausgezeichneten Dreiecken als Zeilen. In dieser Darstellung sehen wir alle Information unseres Oktaeders: Alle vier ausgezeichneten Dreiecke als Zeilen, alle vier kommutativen Dreiecke als Quadrate mit einer Ist-gleich-Seite, davon eines sogar doppelt, und beide kommutativen Quadrate, davon eines sogar doppelt. Als letzte Variante gebe ich





SkriptenBilder/BildOkt.png

Die Struktur der Pfeile soll den Aufbau eines solchen Oktaeders verdeutlichen: Man beginnt mit zwei verknüpfbaren Morphismen und ihrer Komposition, dargestellt durch durchgehende Pfeile zwischen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ . Jeden dieser Morphismen ergänzt man zu einem ausgezeichneten Dreieck, angedeutet durch die gestrichelten Pfeile. Und dann fordert man die Existenz von gepunkteten Pfeilen, die die drei eben konstruierten Objekte zu einem vierten ausgezeichneten Dreieck verbinden, die drei anderen so entstehenden Dreiecke zum Kommutieren bringen (was den horizontalen gepunkteten Pfeil im übrigen bereits eindeutig festlegt), und die beiden in Schnitten unseres Oktaeders mit geeigneten senkrechten Ebenen entstehenden Quadrate zum Kommutieren bringen. Von zwei gegenüberliegenden Flächen ist also stets eine ein kommutatives Diagramm und die andere ein ausgezeichnetes Dreieck. Unser Oktaederdiagramm hat weitaus weniger Symmetrien als ein echter Oktaeder, genauer ist die Symmetriegruppe eine zyklische Gruppe der Ordnung vier, erzeugt vom Drehen um die senkrechte Achse um einen rechten Winkel gefolgt vom Vertauschen der oberen und der unteren Ecke.



Dies Diagramm soll man sich periodisch nach rechts und links fortgesetzt denken. Alle vier ausgezeichneten Dreiecke sind hier gut als eckenlose Wege erkennbar, und die vier kommutativen Dreiecke ebenso wie die beiden kommutativen Vierecke sind gleichfalls gut zu sehen.

5.1.8. Aus 1.7.10 folgt, daß jeder Isomorphismus zwischen additiven Kategorien additiv ist. Insbesondere brauchen wir die Additivität des Funktors  $[1]$  einer triangulierten Kategorie nicht extra zu fordern.

5.1.9. In einem ausgezeichneten Dreieck ist die Komposition von je zwei aufeinanderfolgenden Morphismen Null. In der Tat gibt es für jedes ausgezeichnete Dreieck  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow$  notwendig einen Morphismus von Dreiecken nach  $0 \rightarrow Z \rightarrow Z \rightarrow$  der Gestalt  $(?, v, \text{id})$  mit  $v : Y \rightarrow Z$  dem zweiten Morphismus unseres Ausgangsdreiecks. Folglich ist  $(0, v, \text{id})$  ein Morphismus von Dreiecken, und damit gilt  $v \circ u = 0$  für  $u : X \rightarrow Y$  den ersten Morphismus unseres Ausgangsdreiecks.

**Lemma 5.1.10.** *Ist  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie und  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$  darin ein ausgezeichnetes Dreieck, so bilden für jedes Objekt  $W \in \mathcal{T}$  die Morphismen nach  $W$  eine lange exakte Sequenz von abelschen Gruppen*

$$\dots \leftarrow \mathcal{T}(X, W) \leftarrow \mathcal{T}(Y, W) \leftarrow \mathcal{T}(Z, W) \leftarrow \mathcal{T}([1]X, W) \leftarrow \dots$$

*Dasselbe gilt dual auch für die Morphismen von  $W$  in die Objekte unseres ausgezeichneten Dreiecks.*

*Beweis.* Fast gleich zum Beweis von 3.3.9 und dem Leser überlassen.  $\square$

*Übung 5.1.11.* Sei  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie. Gegeben ein kommutatives Diagramm mit ausgezeichneten Dreiecken in den Horizontalen

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & \rightarrow & [1]X \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' & \rightarrow & [1]X' \end{array}$$

gibt es nach Annahme einen Morphismus  $Z \rightarrow Z'$ , der es kommutativ vervollständigt. Man zeige, daß sowohl unter der Annahme  $\mathcal{T}([1]X, Z') = 0$  als auch unter der Annahme  $\mathcal{T}(Z, Y') = 0$  dieser Morphismus  $Z \rightarrow Z'$  sogar eindeutig bestimmt ist. Im Spezialfall von Homotopiekategorien war das 3.3.10. Hinweis: Dieser Morphismus  $Z \rightarrow Z'$  ist sogar bereits dadurch eindeutig bestimmt, daß er das linke bzw. das rechte durch ihn neu entstehende Quadrat zum Kommutieren bringt.

*Übung 5.1.12.* Sei  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie. Gibt es zu einem Morphismus aus einem ausgezeichneten Dreieck keinen von Null verschiedenen Morphismus in die Gegenrichtung, so wird der fragliche Morphismus bereits durch die beiden anderen eindeutig festgelegt. Sind also in Formeln  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{r,s} [1]X$  ausgezeichnete Dreiecke für zwei Morphismen  $r, s : Z \rightarrow [1]X$  und gilt  $\mathcal{T}([1]X, Z) = 0$ , so folgt  $r = s$ . Im Spezialfall von Homotopiekategorien war das 3.3.11.

*Übung 5.1.13.* Wenn man in einem ausgezeichneten Dreieck bei zwei Morphismen das Vorzeichen ändert, entsteht wieder ein ausgezeichnetes Dreieck.

*Übung 5.1.14.* Die opponierte Kategorie einer triangulierten Kategorie ist mit der entgegengesetzten homologischen Verschiebung und “denselben” ausgezeichneten Dreiecken versehen auch eine triangulierte Kategorie. Sie heißt die **opponierte triangulierte Kategorie**.

## 5.2 Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien

**Satz 5.2.1 (Homotopiekategorien als triangulierte Kategorien).** *Für jede additive Kategorie  $\mathcal{I}$  ist die Homotopiekategorie  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  mit ihrer durch Verschiebung erklärten  $\mathbb{Z}$ -Operation und den in 3.3.2 durch Abbildungskegel erklärten ausgezeichneten Dreiecken eine triangulierte Kategorie.*

*Beweis.* Alle Axiome mit Ausnahme des Oktaederaxioms sind entweder offensichtlich erfüllt oder werden in 3.3 bewiesen. Um auch noch das Oktaederaxiom zu prüfen, reicht es zu zeigen, daß für Morphismen von Komplexen  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  die Sequenz

$$K(f) \xrightarrow{u} K(g \circ f) \xrightarrow{v} K(g) \xrightarrow{w} [1]K(f)$$

ein ausgezeichnetes Dreieck ist, wenn diese Komplexe und Morphismen ge-

geben werden durch

$$\begin{array}{ccccccc}
 X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & Y^{n+1} \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \\
 \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ g \circ f & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -\partial & 0 \\ g & \partial \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ -f & -\partial \end{pmatrix} \\
 X^{n+2} \oplus Y^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Z^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & Y^{n+2} \oplus Z^{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & X^{n+3} \oplus Y^{n+2}
 \end{array}$$

Hier und im Folgenden verwenden wir die Konvention  $??$ , nach der Elemente von direkten Summen als Spaltenmatrizen aufgefaßt werden, mit denvorne stehenden Komponenten oben, und Morphismen zwischen direkten Summen durch Matrizen von Homomorphismen zwischen den Summanden, die durch Matrixmultiplikation von links operieren. Um zu zeigen, daß dies Dreieck ausgezeichnet ist, gilt es, eine Homotopieäquivalenz  $h : K(g) \xrightarrow{\sim} K(u)$  anzugeben derart, daß

$$\begin{array}{ccccc}
 K(g \circ f) & \xrightarrow{v} & K(g) & \xrightarrow{w} & [1]K(f) \\
 \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\
 K(g \circ f) & \longrightarrow & K(u) & \longrightarrow & [1]K(f)
 \end{array}$$

in der Homotopiekategorie kommutiert. Nun haben wir ja

$$K(u)^n = X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

mit Randoperator

$$\begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 & 0 \\ f & -\partial & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\partial & 0 \\ 0 & g & g \circ f & \partial \end{pmatrix}$$

und es reicht zu zeigen, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : Y^{n+1} \oplus Z^n \rightarrow X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

eine Homotopieäquivalenz  $h$  mit den gewünschten Eigenschaften liefert. Explizite Rechnung zeigt, daß sie eine Kettenabbildung definiert und das rechte Quadrat unseres Diagramms der sechs Komplexe von eben zum Kommutieren bringt. Definieren wir eine Abbildung in die Gegenrichtung  $k : K(u) \rightarrow K(g)$  durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n \rightarrow Y^{n+1} \oplus Z^n$$

so erhalten wir auch eine Kettenabbildung, von der klar ist, daß sie das linke Quadrat mit umgekehrtem Mittelpfeil zum Kommutieren bringt. Weiter gilt offensichtlich  $k \circ h = \text{id}$ , so daß nur zu zeigen bleibt, daß  $h \circ k$  homotop ist zur Identität auf  $K(u)$ . Solch eine Homotopie wird jedoch gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

### 5.3 Triangulierte Kategorien und dg-Moduln

5.3.1. Auf der Kategorie  $\text{dgMod}_{-R}$  aller dg-Rechtsmoduln über einem dg-Ring  $R$  liefert die  $\mathbb{Z}$ -Operation  $M \mapsto [1]M$  auf Komplexen aus II.3.6.24 in offensichtlicher Weise eine  $\mathbb{Z}$ -Operation.

5.3.2. Auf der Kategorie  $\text{dgMod}_R$  aller dg-Moduln über einem dg-Ring  $R$  können wir eine  $\mathbb{Z}$ -Operation erklären, indem wir von unserer  $\mathbb{Z}$ -Operation  $M \mapsto [1]M$  auf Komplexen aus II.3.6.24 ausgehen und die  $R$ -Operation erklären durch die Vorschrift

$$r([1]m) := (-1)^{|r|}[1](rm)$$

für homogene  $r \in R$ . Das Vorzeichen ist nötig, damit  $[1]M$  mit seinem negativ gemachten Differential wieder ein dg-Modul ist.

5.3.3. Die Homotopiekategorie  $\text{dgHot}_{-R}$  aus II.4.4.14 aller dg-Rechtsmoduln über einem dg-Ring  $R$  wird eine triangulierte Kategorie, wenn wir sie mit der  $\mathbb{Z}$ -Operation durch Verschiebung versehen und die Dreiecke auszeichnen, die isomorph sind zu Dreiecken der Gestalt

$$M \xrightarrow{f} N \rightarrow K(f) \rightarrow [1]M$$

mit  $K(f)$  dem Abbildungskegel, den wir uns hier mit seiner offensichtlichen Struktur als dg-Rechtsmodul versehen denken müssen. Um die Axiome einer triangulierten Kategorie zu verifizieren, müssen wir nur den Beweis des Satzes 5.2.1 durchgehen und prüfen, daß alle Kettenabbildungen und Homotopien daraus unter unseren zusätzlichen Voraussetzungen mit der Operation von  $R$  verträglich sind. Für Linksmoduln gilt Entsprechendes, wenn wir auf dem Abbildungskegel die nicht ganz so offensichtliche  $R$ -Operation betrachten, bei der ein homogenes  $r \in R$  in den Notationen von II.4.6.4 durch die Diagonalmatrix  $\text{diag}((-1)^{|r|}r, r)$  operiert. Im Folgenden will ich die Bedeutung dieser Verallgemeinerungen im Rahmen der Theorie verdeutlichen.

**Definition 5.3.4.** Ein **triangulierter Funktor** von einer triangulierten Kategorie in eine weitere ist ein additiver  $\mathbb{Z}$ -Funktor, der ausgezeichnete Dreiecke zu ausgezeichneten Dreiecken macht.

*Übung 5.3.5.* Ist ein triangulierter Funktor eine Äquivalenz von Kategorien, so ist auch jeder dazu quasiinverse Funktor trianguliert. In anderen Worten kann man unter keinen Umständen in einer triangulierten Kategorie noch zusätzliche Dreiecke auszeichnen derart, daß man wieder eine triangulierte Kategorie erhält.

*Übung 5.3.6.* Der Funktor  $\mathbb{D}$ , der jedem Komplex  $C$  von abelschen Gruppen seinen dualen Komplex  $\mathbb{D}C := C^*$  im Sinne von II.4.1.5 zuordnet, wird ein triangulierter Funktor

$$\mathrm{Hot}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathrm{Hot}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{opp}}$$

wenn wir ihn mit der  $\mathbb{Z}$ -Struktur versehen, die durch diejenigen Morphismen  $[1]\mathbb{D}C \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}[1]C$  erklärt wird, die auf der Komponente vom Grad  $n$  beider Komplexe das  $(-1)^n$ -fache der offensichtlichen Identifikation sind.

*Ergänzende Übung 5.3.7.* Gegeben dg-Ringe  $A, B$  und ein  $A$ - $B$ -dg-Bimodul  $X$  liefern die Konstruktionen II.4.4.13 und II.4.4.14 triangulierte Funktoren

$$X \otimes_B : \mathrm{dgHot}_B \rightarrow \mathrm{dgHot}_A$$

$$\otimes_A X : \mathrm{dgHot}_{-A} \rightarrow \mathrm{dgHot}_{-B}$$

$$\mathrm{Hom}_A(X, \ ) : \mathrm{dgHot}_A \rightarrow \mathrm{dgHot}_B$$

$$\mathrm{Hom}_{-B}(X, \ ) : \mathrm{dgHot}_{-B} \rightarrow \mathrm{dgHot}_{-A}$$

$$\mathrm{Hom}_A(\ , X) : \mathrm{dgHot}_A \rightarrow \mathrm{dgHot}_B^{\mathrm{opp}}$$

$$\mathrm{Hom}_{-B}(\ , X) : \mathrm{dgHot}_{-B} \rightarrow \mathrm{dgHot}_{-A}^{\mathrm{opp}}$$

wenn wir sie in geeigneter Weise durch  $\mathbb{Z}$ -Strukturen ergänzen.

**Definition 5.3.8.** Eine Klasse von Objekten einer triangulierten Kategorie heißt ein **trianguliertes System** genau dann, wenn gilt:

1. Das Nullobjekt gehört zu unserer Klasse;
2. Mit je zwei Objekten eines ausgezeichneten Dreiecks gehört auch das Dritte zu unserer Klasse;

Ein trianguliertes System, das mit einem Objekt auch alle seine direkten Summanden enthält, nennen wir ein **Verdiersystem**.

5.3.9. Nach der Definition einer triangulierten Kategorie 5.1.6 haben wir für jedes Objekt  $X$  ein ausgezeichnetes Dreieck  $(X, 0, [1]X)$  und jeder Isomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} Y$  paßt in ein ausgezeichnetes Dreieck  $(X, Y, 0)$ . Folglich gehören zu einem gegebenen triangulierten System mit einem Objekt  $X$  auch alle seine Shifts und alle zu ihm isomorphen Objekte.

5.3.10. Kashiwara und Schapira verwenden in [KS90] die Bezeichnung **Nullsystem** für das, was ich ein trianguliertes System nenne. Die Terminologie von Kashiwara und Schapira gefällt mir nicht, da ich derartige Systeme keineswegs nur betrachten will, um sie wegzuteilen. Die Bezeichnung “Verdiersystem” ist nicht üblich. Verdier selbst benutzt die Bezeichnung **souscatégorie épaisse**.

5.3.11. Verstehen wir ein trianguliertes System als volle Unterkategorie, so erbt es in natürlicher Weise die Struktur einer triangulierten Kategorie. Alle diejenigen Objekte, die von einem triangulierten Funktor zu Null gemacht werden, bilden offensichtlich sogar ein Verdiersystem. Das kleinste triangulierte System bzw. Verdiersystem, das eine vorgegebene Klasse von Objekten umfaßt, bezeichnen wir als das **von dieser Klasse erzeugte triangulierte System** bzw. **Verdiersystem**. Das von einer Klasse von Objekten  $\mathcal{N}$  erzeugte triangulierte System notieren wir  $\langle \mathcal{N} \rangle = \langle {}_t\mathcal{N} \rangle_\Delta$ , wobei wir einen unteren Index  $\Delta$  verwenden, wenn wir betonen wollen, daß das triangulierte Erzeugnis gemeint ist, und in Anlehnung an unsere Vereinbarung aus ?? das untere Ausrufezeichen, wenn wir betonen wollen, daß das Symbol in der Klammer nicht einen einzelnen Erzeuger meint, sondern ein ganzes System von Erzeugern. Besteht  $\mathcal{N}$  aus einem einzigen Objekt  $N$ , so schreiben wir auch kürzer  $\langle N \rangle$  oder  $\langle N \rangle_\Delta$ . Für das von was auch immer erzeugte Verdiersystem verwenden wir analog die Notation  $\langle \rangle_{\Delta\ominus}$ .

*Beispiel* 5.3.12. In der Homotopiekategorie der Kategorie der Vektorräume über einem Körper  $k$  besteht das von  $k^2$  erzeugte Verdiersystem aus allen in beide Richtungen beschränkten Komplexen mit endlichdimensionalen Einträgen. Das von  $k^2$  erzeugte triangulierte System enthält jedoch nur beschränkte Komplexe mit endlichdimensionalen Einträgen und gerader Eulercharakteristik, wir haben also  $\langle k^2 \rangle_\Delta \neq \langle k^2 \rangle_{\Delta\ominus}$ .

5.3.13. Ist ein triangulierter Funktor volltreu auf einer vollen Unterkategorie, so ist er auch volltreu auf dem von dieser Unterkategorie erzeugten Verdiersystem. Das folgt sofort aus 5.1.10 und dem Fünferlemma. Das Anwenden dieser Erkenntnis bezeichnet man oft als **dévissage**, französisch für “Aufschrauben”.

**Definition 5.3.14.** Gegeben ein dg-Ring  $E$  nennen wir das von  $E$  in  $\text{dgHot}_E$  erzeugte triangulierte System die **freie triangulierte Kategorie zu  $E$**  und

notieren es

$$\langle E \rangle_{\Delta} = E\text{-dgFrei} = \text{dgFrei}_E$$

Diese Terminologie befriedigt mich nicht vollständig, da es sich bei den Objekten ja eher um eine Art “freie und endlich erzeugte Objekte” handelt, aber mir ist nichts besseres eingefallen. Das von  $E$  in  $\text{dgHot}_E$  erzeugte Verdiersystem nennen wir dahingegen die **perfekte triangulierte Kategorie zu  $E$**  und notieren es

$$\langle E \rangle_{\Delta \ominus} = E\text{-dgPer} = \text{dgPer}_E$$

Analog bilden wir die freie bzw. perfekte triangulierte Kategorie zum opponierten Ring und notieren sie alternativ  $\text{dgFrei-}E = \text{dgFrei}_{-E}$  beziehungsweise  $\text{dgPer-}E = \text{dgPer}_{-E}$ .

*Übung 5.3.15.* Ist  $A \xrightarrow{\sim} B$  ein Quasiisomorphismus von dg-Ringen, so induziert der durch Restriktion gegebene Funktor  $B\text{-dgHot} \rightarrow A\text{-dgHot}$  eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien  $B\text{-dgFrei} \rightarrow A\text{-dgFrei}$ .

**Proposition 5.3.16 (Triangulierte Kategorien und dg-Moduln).** *Sei  $\mathcal{I}$  eine additive Kategorie,  $T \in \text{Ket}(\mathcal{I})$  ein Komplex,  $E = \text{End}_{\mathcal{I}} T$  sein Endomorphismenkomplex mit der natürlichen Struktur als dg-Ring und  $\langle T \rangle_{\Delta}$  das von  $T$  in  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  erzeugte triangulierte System. So induziert der Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{I}}(T, \ )$  eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien*

$$\langle T \rangle_{\Delta} \xrightarrow{\sim} \text{dgFrei-}E$$

5.3.17. Ich sehe diese Proposition als Analogon zu Übung 1.7.18, die eine ähnliche Aussage für additive Kategorien bereitstellt. Arbeiten wir allgemeiner mit dg-Ringoiden im Sinne von ??, so können wir diese Proposition ohne Schwierigkeiten zu einer Beschreibung des von einer beliebigen Menge von Komplexen erzeugten triangulierten Systems ausbauen. In 5.8.3 folgern wir eine analoge Aussage für die sogenannten “derivierten Kategorien”.

*Beweis.* Der Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{I}}(T, \ ) : \text{Ket}(\mathcal{I}) \rightarrow \text{dgMod-}E$  induziert einen triangulierten Funktor  $\text{Hot}(\mathcal{I}) \rightarrow \text{dgHot-}E$  mit  $T \mapsto E$ . Besonders transparent sieht man das in der Notation der “opponierten Hom-Räume” aus II.4.4.6 mit II.4.4.7. Dieser Funktor induziert Bijektionen

$$\text{Hot}_{\mathcal{I}}(T, [n]T) \xrightarrow{\sim} \text{dgHot}_{-E}(E, [n]E)$$

für alle  $n$ , da beide Seiten mit  $\mathcal{H}^n E$  identifiziert werden können in natürlicher und verträglicher Weise, vergleiche II.4.4.16. Nach 5.3.13 induziert er folglich eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien wie behauptet.  $\square$



*Ergänzung 5.3.18.* Sei  $\mathcal{A}$  eine additive Kategorie und seien  $P, I \in \text{Ket}(\mathcal{A})$  Komplexe. Wir betrachten die dg-Ringe  $E = \text{End}_{\mathcal{A}} I$  und den  $F$ - $E$ -dg-Bimodul  $X = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, I)$ . So erhalten wir eine verträgliche Transformation  $\tau$  von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren wie im Diagramm als Doppelpfeil angedeutet

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ket}(\mathcal{A}) & \xlongequal{\quad} & \text{Ket}(\mathcal{A}) \\
 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, I) \downarrow & \swarrow \tau & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot) \\
 \text{dgMod}_F^{\text{opp}} & \xrightarrow{\text{Hom}_F(\cdot, X)} & \text{dgMod}_{-E}
 \end{array}$$

durch die Morphismen  $\tau_A : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A) \rightarrow \text{Hom}_F(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I), X)$  mit  $\tau_A : \varphi \mapsto (\circ\varphi)$ . Im Fall  $A = I$  ist  $\tau_I$  sogar ein Isomorphismus. Des weiteren steigt unser Diagramm zu den Homotopie-Kategorien ab und unser  $\tau$  liefert auch eine verträgliche Transformation  $\tilde{\tau}$  von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren wie im folgenden Diagramm als Doppelpfeil angedeutet:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hot}(\mathcal{A}) & \xlongequal{\quad} & \text{Hot}(\mathcal{A}) \\
 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, I) \downarrow & \swarrow \tilde{\tau} & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot) \\
 \text{dgHot}_F^{\text{opp}} & \xrightarrow{\text{Hom}_F(\cdot, X)} & \text{dgHot}_{-E}
 \end{array}$$

Diese Transformation  $\tilde{\tau}$  liefert dann sogar Isomorphismen  $\tilde{\tau}_A$  für alle Objekte  $A$  im triangulierten Erzeugnis  $\langle I \rangle_{\Delta} \subset \text{Hot}(\mathcal{A})$  von  $I$  und damit eine Isotransformation wie im folgenden Diagramm durch einen Doppelpfeil angedeutet:

$$\begin{array}{ccc}
 \langle I \rangle_{\Delta} \hookrightarrow & \longrightarrow & \text{Hot}(\mathcal{A}) \\
 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, I) \downarrow \wr & \swarrow \sim & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot) \\
 \text{dgFrei}_F^{\text{opp}} & \xrightarrow{\text{Hom}_F(\cdot, X)} & \text{dgHot}_{-E}
 \end{array}$$

### 5.4 Quotienten triangulierter Kategorien

**Definition 5.4.1.** Sei  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie und  $\mathcal{N}$  eine Klasse von Objekten in  $\mathcal{T}$ . Ein **Quotient von  $\mathcal{T}$  nach  $\mathcal{N}$**  ist ein Paar  $(\mathcal{T}/\mathcal{N}, \text{can})$  bestehend aus einer triangulierten Kategorie  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$  und einem triangulierten Funktor  $\text{can} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  derart, daß gilt:

1. Jedes Objekt aus  $\mathcal{N}$  wird unter  $\text{can}$  ein Nullobjekt in  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ ;
2. Ist  $\mathcal{D}$  eine weitere triangulierte Kategorie und  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  ein triangulierter Funktor, der alle Objekte aus  $\mathcal{N}$  zu Null macht, so gibt es genau einen triangulierten Funktor  $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{D}$  mit  $F = \tilde{F} \circ \text{can}$ .

5.4.2. Solch ein Quotient ist, wenn er existiert, in der üblichen Weise eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Existiert ein Quotient wie in der Definition gefordert und ist  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$  ein triangulierter Funktor in eine weitere triangulierte Kategorie, der die Objekte aus  $\mathcal{N}$  zu Null macht und für den der induzierte Funktor eine Äquivalenz von Kategorien  $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$  ist, so nenne ich  $F$  einen **Quotientenfunktor** oder genauer, wenn ich Verwechslungen mit Quotientenfunktoren im Kontext abelscher Kategorien vermeiden will, einen **triangulierten Quotientenfunktor**.

**Satz 5.4.3 (Konstruktion triangulierter Quotienten).** *Ist  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$  ein Verdiersystem, so gilt:*

1. *Die Menge  $S(\mathcal{N})$  aller Morphismen mit Abbildungskegel in  $\mathcal{N}$  ist ein multiplikatives System im Sinne von 4.3.11.*
2. *Die an  $S(\mathcal{N})$  lokalisierte Kategorie  $\mathcal{T}_{S(\mathcal{N})}$  im Sinne von 4.2.9 wird eine triangulierte Kategorie, wenn wir sie mit der von  $\mathcal{T}$  herkommenden  $\mathbb{Z}$ -Operation [1] versehen und als ausgezeichnete Dreiecke alle Dreiecke nehmen, die isomorph sind zu Bildern ausgezeichneter Dreiecke von  $\mathcal{T}$ .*
3. *Der kanonische Funktor  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_{S(\mathcal{N})}$  ist ein Quotient von  $\mathcal{T}$  nach  $\mathcal{N}$ , die davon annullierten Objekte sind genau die Objekte von  $\mathcal{N}$ , und die davon zu Isomorphismen gemachten Morphismen sind genau die Morphismen mit Abbildungskegel aus  $\mathcal{N}$ .*

5.4.4. Mit diesem Satz ist auch klar, daß für eine beliebig vorgegebene Menge von Objekten einer triangulierten Kategorie der Quotient existiert: Man wendet schlicht die Konstruktion aus dem Satz an auf das von dieser Menge erzeugte Verdiersystem.

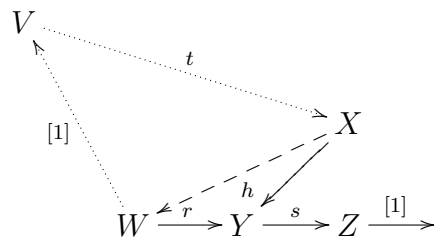
*Beweis.* 1. Daß unser System  $S := S(\mathcal{N})$  stabil ist unter Verknüpfung, folgt sofort aus dem Oktaederaxiom. Daß sich jeder Winkel

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow s \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

mit  $s \in S$  ergänzen läßt zu einem kommutativen Diagramm

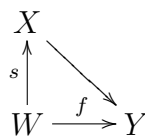
$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & X \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

mit  $t \in S$  folgt auch aus dem Oktaederaxiom, indem man nämlich erst das Dreieck  $X \rightarrow Z \rightarrow N \rightarrow$  über  $s$  bildet und dann den Oktaeder zur Komposition  $Y \rightarrow Z \rightarrow N$ : Dessen untere Ecke, also die dritte Ecke des Dreiecks über der Komposition, ist dann das gesuchte  $W$ . Sind schließlich  $f, g : X \rightarrow Y$  gegeben und  $s \in S$  und  $sf = sg$ , also  $s \circ (f - g) = 0$ , so betrachten wir das ausgezeichnete Dreieck über  $s$  und folgern mit 5.1.10 die Existenz von  $h : X \rightarrow W$  mit  $(f - g) = r \circ h$ .



Bilden wir nun, wie durch die gepunkteten Pfeile angedeutet, das ausgezeichnete Dreieck über  $h$ , so haben wir  $t \in S$  und  $(f - g) \circ t = 0$ . Damit haben wir gezeigt, daß unser System rechtsmultiplikativ ist im Sinne von 4.3.2. Daß es auch linksmultiplikativ sein muß, folgt durch Übergang zur opponierten Kategorie.

2. Nach 4.3.10 ist unsere lokalisierte Kategorie  $\mathcal{T}_S$  additiv und der kanonische Funktor  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_S$  desgleichen. Die  $\mathbb{Z}$ -Operation geht ohne Schwierigkeiten auf die Lokalisierung über. Daß unsere in 5.4.3 ausgezeichneten Dreiecke die Lokalisierung sogar zu einer triangulierten Kategorie machen, scheint mir klar, da sich ja jeder Morphismus  $X \rightarrow Y$  der lokalisierten Kategorie einbetten läßt in ein kommutatives Diagramm



wo  $s$  und  $f$  von Morphismen in  $\mathcal{T}$  herkommen und  $s$  in  $\mathcal{T}_S$  ein Isomorphismus wird. Und nun muß man sich nur überlegen, daß jedes kommutative Dreieck oder Viereck in der lokalisierten Kategorie bis auf Isomorphismus von einem kommutativen Dreieck oder Viereck in der ursprünglichen Kategorie herkommt.

3. Die universelle Eigenschaft scheint mir evident. Geht ein Objekt unter dem Quotientenfunktor nach Null, so muß die Identität darauf zur Nullabbildung werden. Schreiben wir diese Bedingung in der Kategorie der Brüche, so impliziert sie leicht, daß unser Objekt direkter Summand eines Objekts von

$\mathcal{N}$  sein muß. Aufgrund unserer Definition eines Verdiersystems gehört unser Objekt dann aber sogar selbst bereits zu  $\mathcal{N}$ .  $\square$

## 5.5 Derivierte Kategorien

**Definition 5.5.1.** Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie, so bezeichnen wir den Quotienten der zugehörigen Homotopiekategorie nach dem Verdiersystem aller azyklischen Komplexe mit

$$\text{Der}_{\mathcal{A}} = \text{Der}(\mathcal{A}) = \text{Hot}(\mathcal{A}) / (\text{azyklische Komplexe})$$

und nennen diese triangulierte Kategorie die **derivierte Kategorie von  $\mathcal{A}$** . Nach der in 5.4.3 gegebenen Konstruktion ist die derivierte Kategorie also genau die Lokalisierung der Homotopiekategorie an den Quasiisomorphismen aus 3.4.1. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert uns also Funktoren

$$\mathcal{H}^i : \text{Der}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

mit der Eigenschaft, daß jedes ausgezeichnete Dreieck eine lange exakte Sequenz liefert und daß ein Morphismus ein Isomorphismus ist genau dann, wenn er Isomorphismen auf allen  $\mathcal{H}^i$  induziert. Ich werde Isomorphismen in der derivierten Kategorie selbst dann manchmal  $\xrightarrow{\cong}$  notieren, wenn sie nicht durch eine Kettenabbildung repräsentiert werden können und diese Notation demnach nicht bereits durch unsere Konvention 3.4.1 abgedeckt ist.

**Definition 5.5.2.** Ist  $A$  ein dg-Ring und  $\mathfrak{U}$  ein Universum mit  $A \in \mathfrak{U}$ , so bilden wir die triangulierte Kategorie

$$A\text{-dgDer} = \text{dgDer}_A = \text{dgHot}_A / (\text{azyklische Komplexe})$$

und analog  $\text{dgDer-}A = \text{dgDer}_{-A}$  für dg-Rechtsmoduln und nennen sie die **derivierte Kategorie der dg-Moduln bzw. dg-Rechtsmoduln über  $A$  in  $\mathfrak{U}$** . Das fragliche Universum notieren wir nicht mit, um die Notation nicht zu überladen. Ist unser dg-Ring ein Ring  $A$  konzentriert im Grad Null, so haben wir mit unseren Definitionen also

$$\text{dgDer}_A = \text{Der}(A\text{-Mod}) = \text{Der}_{A\text{-Mod}}$$

$$\text{dgDer}_{-A} = \text{Der}(\text{Mod-}A) = \text{Der}_{\text{Mod-}A}$$

*Übung 5.5.3.* Für jeden dg-Ring  $A$  ist der Quotientenfunktor  $A\text{-dgHot} \rightarrow A\text{-dgDer}$  volltreu auf  $A\text{-dgPer}$ . Wir können  $A\text{-dgPer}$  also auch als das von  $A$  in  $A\text{-dgDer}$  erzeugte Verdiersystem auffassen. Analoges gilt für  $A\text{-dgFrei}$ .

5.5.4. Gegeben eine kurze exakte Sequenz  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  von Komplexen in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  bilden wir in  $\text{Der}(\mathcal{A})$  das **der kurzen exakten Sequenz zugeordnete ausgezeichnete Dreieck**

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow [1]X$$

indem wir im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \rightarrow & K(f) & \rightarrow & [1]X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \\ X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z & & \end{array}$$

mit dritter Vertikale  $(0, g)$  beachten, daß diese dritte Vertikale ein Quasiisomorphismus sein muß. Das hinwiederum erkennt man an der langen exakten Homologiesequenz der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$K(\text{id}_X) \hookrightarrow K(f) \xrightarrow{(0, g)} Z$$

wenn man bemerkt, daß die Homologie von  $K(\text{id}_X)$  verschwindet. Analoges gilt in der derivierten Kategorie der dg-Moduln über einem vorgegebenen dg-Ring. Diese Konstruktion liefert sogar einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in die Kategorie der ausgezeichneten Dreiecke.

## 5.6 Beschränkte derivierte Kategorien

**Definition 5.6.1.** Gegeben eine additive Kategorie  $\mathcal{I}$  betrachten wir in der triangulierten Kategorie  $\text{Hot}(\mathcal{I})$  die Verdiersysteme

$$\begin{aligned} \text{Hot}_{\mathcal{I}}^+ &= \text{Hot}^+(\mathcal{I}) \quad \text{aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe;} \\ \text{Hot}_{\mathcal{I}}^- &= \text{Hot}^-(\mathcal{I}) \quad \text{aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe;} \\ \text{Hot}_{\mathcal{I}}^b &= \text{Hot}^b(\mathcal{I}) \quad \text{aller beidseitig beschränkten Komplexe,} \end{aligned}$$

und schreiben im Fall einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  kurz

$$\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\sharp} = \text{Der}^{\sharp}(\mathcal{A})$$

mit  $\sharp \in \{+, -, b\}$  für die Quotienten dieser triangulierten Kategorien nach dem Verdiersystem aller azyklischen Komplexe in der jeweiligen Kategorie von Komplexen.

**Lemma 5.6.2.** *Für jede abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  liefern die offensichtlichen Funktoren volltreue Einbettungen*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Der}^+(\mathcal{A}) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \mathcal{A} & \hookrightarrow & \text{Der}^b(\mathcal{A}) & & \text{Der}(\mathcal{A}) \\
 & & \searrow & \nearrow & \\
 & & \text{Der}^-(\mathcal{A}) & & 
 \end{array}$$

und ein Komplex im  $\text{Der}(\mathcal{A})$  ist isomorph zum Bild eines Objekts unter einer unserer Einbettungen genau dann, wenn seine Kohomologie nach oben beschränkt bzw. nach unten beschränkt bzw. beschränkt bzw. nur im Grad Null konzentriert ist.

*Beweis.* Wir verwenden die Abschneidefunktoren, wie sie in 5.6.3 eingeführt werden. Um zu zeigen, daß  $\text{Der}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$  volltreu ist, wenden wir 4.3.6 an: Ist  $s : X \rightarrow Y$  ein Quasiisomorphismus mit  $Y \in \text{Hot}^-(\mathcal{A})$ , so ist für hinreichend großes  $n$  der Morphismus  $h : \tau^{\leq n} X \rightarrow X$  ein Quasiisomorphismus und leistet das Gewünschte. Die anderen Fälle mit Ausnahme der Einbettung von  $\mathcal{A}$  behandelt man ähnlich. Im Fall der Einbettung von  $\mathcal{A}$  zeigt der Funktor  $\mathcal{H}^0$ , daß sie treu ist. Ist andererseits  $X$  ein Komplex, dessen Kohomologie nur im Grad Null lebt, so liefern die Quasiisomorphismen  $X \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq 0} X \xleftarrow{\sim} \tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0} X$  einen Isomorphismus  $X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 X$  in der derivierten Kategorie, wo wir  $\mathcal{H}^0 X$  als im Grad Null konzentrierten Komplex auffassen. Also ist jeder Komplex mit trivialer Kohomologie außerhalb von Null in der derivierten Kategorie isomorph zu seiner Kohomologie. Damit gilt es nur noch zu zeigen, daß die Einbettung  $\mathcal{A} \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A})$  surjektiv ist auf Morphismen. Dazu stellen wir für  $A, B \in \mathcal{A}$  einen Morphismus als Bruch  $A \xleftarrow{\sim} X \rightarrow B$  in der Homotopiekategorie dar mit  $A \xleftarrow{\sim} X$  einem Quasiisomorphismus. Wenden wir nun die Abschneidefunktoren in der Homotopiekategorie auf unseren Bruch an, so erhalten wir einen Bruch  $A \xleftarrow{\sim} \tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0} X \rightarrow B$ , der offensichtlich denselben Morphismus darstellt. Nun steht jedoch links ein echter Isomorphismus und wir sind fertig.  $\square$

5.6.3. Gegeben ein Komplex  $X = (X^n, d^n)$  in einer abelschen Kategorie erklären wir für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die Komplexe

$$\begin{array}{cccccccc}
 \tau^{\leq n} X & \dots \rightarrow & X^{n-1} & \rightarrow & \ker d^n & \rightarrow & 0 & \rightarrow \dots \\
 \tau^{< n+1} X & \dots \rightarrow & X^{n-1} & \rightarrow & X^n & \rightarrow & \text{im } d^n & \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\
 \tau^{> n} X & \dots \rightarrow & 0 & \rightarrow & \text{im } d^n & \rightarrow & X^{n+1} & \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \dots \\
 \tau^{\geq n+1} X & \dots \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \text{cok } d^n & \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \dots
 \end{array}$$

Der Buchstabe  $\tau$  steht für englisch “truncated” oder französisch “tronqué”. Wir haben ein offensichtliches kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Quasiisomorphismen in den Vertikalen

$$\begin{array}{ccccc}
 \tau^{<n+1} X & \hookrightarrow & X & \twoheadrightarrow & \tau^{\geq n+1} X \\
 \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\
 \tau^{\leq n} X & \hookrightarrow & X & \twoheadrightarrow & \tau^{>n} X
 \end{array}$$

Sicher gilt  $\mathcal{H}^i(\tau^{\leq n} X) = \mathcal{H}^i(\tau^{<n+1} X) = 0$  für  $i > n$  und die offensichtlichen Morphismen  $\tau^{\leq n} X \rightarrow \tau^{<n+1} X \rightarrow X$  induzieren für  $i \leq n$  Isomorphismen auf den  $i$ -ten Kohomologiegruppen. Der offensichtliche Morphismus ist also stets ein Isomorphismus  $\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\cong} \tau^{<n+1} X$  in der derivierten Kategorie, und verschwinden alle  $\mathcal{H}^i X$  für  $i > n$ , so liefern die offensichtlichen Morphismen in der derivierten Kategorie Isomorphismen  $\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\cong} \tau^{<n+1} X \xrightarrow{\cong} X$ . Analoges gilt für das andere Abschneiden. Offensichtlich machen alle diese Abschneidefunktoren homotope Abbildungen zu homotopen Abbildungen und Quasiisomorphismen zu Quasiisomorphismen und induzieren folglich Abschneidefunktoren sowohl auf der Homotopiekategorie als auch auf der derivierten Kategorie. Wir verwenden für diese induzierten Funktoren dieselbe Notation.

*Übung 5.6.4.* Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  liefert der Funktor  $\mathcal{H}^0$  eine Äquivalenz zwischen der Kategorie derjenigen ausgezeichneten Dreiecke  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow$  in  $\text{Der}(\mathcal{A})$ , bei denen die Objekte zum Bild von  $\mathcal{A}$  gehören, und der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in  $\mathcal{A}$ . Ein quasiinverser Funktor kann wie in 5.5.4 beschrieben konstruiert werden.

5.6.5. Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  setzen wir

$$\begin{aligned}
 \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} &= \{X \in \text{Der}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{H}^i X = 0 \text{ für } i > n\} \\
 \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} &= \{X \in \text{Der}_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{H}^i X = 0 \text{ für } i < n\}
 \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} \subset \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n+1}$  und  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} \supset \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}$ .

**Proposition 5.6.6 (über Abschneidefunktoren).** *Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie und  $n \in \mathbb{Z}$ . So haben wir:*

1. Für alle  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$  und  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n+1}$  gilt  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y) = 0$ .
2. Die Einbettung  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$  besitzt stets einen Rechtsadjungierten  $\tau^{\leq n} : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$ .
3. Die Einbettung  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$  besitzt stets einen Linksadjungierten  $\tau^{\geq n} : \text{Der}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\geq n}$ .

4. Die kanonischen Abbildungen zu diesen Adjunktionen lassen sich für jedes  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}$  auf genau eine Weise ergänzen zu einem ausgezeichneten Dreieck

$$\tau^{\leq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq n+1} X \rightarrow [1]\tau^{\leq n} X$$

*Beweis.* 1. Jeder Morphismus aus  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  läßt sich natürlich darstellen als ein Bruch  $X \xleftarrow{\sim} Z \rightarrow Y$  von Morphismen in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  mit einem Quasiisomorphismus  $Z \xrightarrow{\sim} X$ . Unter der Annahme  $X \in \text{Der}^{\leq n}(\mathcal{A})$  können wir diesen Bruch erweitern durch den Quasiisomorphismus  $\tau^{\leq n} Z \xrightarrow{\sim} Z$ . Unter der Annahme  $Y \in \text{Der}^{\geq n+1}(\mathcal{A})$  dürfen wir weiter aufgrund des Quasiisomorphismus  $Y \xrightarrow{\sim} \tau^{\leq n+1} Y$  annehmen, daß  $Y$  durch einen Komplex dargestellt wird, der Null ist in Graden  $\leq n$ . Die erste Aussage folgt nun wegen  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}(\tau^{\leq n} Z, Y) = 0$ , es gibt ja noch nicht einmal von Null verschiedene Kettenabbildungen zwischen diesen beiden Komplexen.

4. Wir erhalten offensichtlich eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen  $\tau^{\leq n} X \hookrightarrow X \rightarrow X/\tau^{\leq n} X$  nebst einem offensichtlichen Quasiisomorphismus  $X/\tau^{\leq n} X \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq n+1} X$  und so mit 5.5.4 ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\tau^{\leq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq n+1} X \rightarrow [1]\tau^{\leq n} X$$

in der derivierten Kategorie  $\text{Der}(\mathcal{A})$ . Die Eindeutigkeit des dritten Morphismus folgt mit 5.1.12 aus Teil 1.

3&4. Um nun die erste Adjunktion zu zeigen, müssen wir für  $X \in \text{Der}_{\mathcal{A}}$  und  $Y \in \text{Der}_{\mathcal{A}}^{\leq n}$  zeigen  $\text{Der}_{\mathcal{A}}(Y, \tau^{\leq n} X) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(Y, X)$ . Das folgt jedoch sofort aus den bereits bewiesenen Teilen. Die andere Adjunktion zeigt man genauso.  $\square$

5.6.7 (**Gysin-Sequenz**). Wie wir in 3.2.14 modulo eigentlichem Basiswechsel gezeigt hatten, verschwindet für  $f : X \rightarrow Y$  ein Sphärenbündel mit Faser  $S^n$  das derivierte Bild der konstanten Garbe  $\mathcal{H}^i f_* \mathbb{Z}_X$  für  $i \neq 0, n$  und die Adjunktionsabbildung  $\mathbb{Z}_Y \rightarrow f_* f^* \mathbb{Z}_Y$  induziert einen Isomorphismus auf  $\mathcal{H}^0$ . Wir erhalten somit ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\mathbb{Z}_Y \rightarrow f_* f^* \mathbb{Z}_Y \rightarrow [-n] \mathcal{H}^n f_* \mathbb{Z}_X \xrightarrow{[1]}$$

Weiter nach 3.2.14 ist  $\mathcal{H}^n f_* \mathbb{Z}_X$  eine lokal konstante, ja lokal zu  $\mathbb{Z}_Y$  isomorphe Garbe auf  $Y$ . Ist unser Sphärenbündel orientierbar und ist darauf eine Orientierung gewählt, in Formeln ein Isomorphismus  $\mathbb{Z}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n f_* \mathbb{Z}_X$ , so transformiert diese Wahl unser ausgezeichnetes Dreieck von oben in ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\mathbb{Z}_Y \rightarrow f_* f^* \mathbb{Z}_Y \rightarrow [-n] \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{[1]}$$



Die Randabbildung  $[-n]\mathbb{Z}_Y \rightarrow [1]\mathbb{Z}_Y$  liefert nun unter  $[n]$  einen Morphismus  $\mathbb{Z}_Y \rightarrow [n+1]\mathbb{Z}_Y$  alias nach 3.4.9 ein wohlbestimmtes Element von  $H^{n+1}(Y; \mathbb{Z})$ , die sogenannten **Eulerklasse** unseres orientierten Sphärenbündels. Drücken wir unser ausgezeichnetes Dreieck herunter auf den einpunktigen Raum und nehmen dort seine lange exakte Kohomologiesequenz, so entsteht eine lange exakte Sequenz der Gestalt

$$\dots \rightarrow H^i(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{i-n}(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{i+1}(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

mit dem Rückzug als erster Abbildung und dem Daranmultiplizieren der Eulerklasse als dritter Abbildung. Das ist die ursprüngliche **Gysin-Sequenz**.

## 5.7 Derivierte Kategorien durch Auflösungen

**Definition 5.7.1.** Gegeben eine triangulierte Kategorie  $\mathcal{T}$  und darin eine Menge von Objekten  $\mathcal{N}$  setzen wir  $\mathcal{N}^\perp = \{I \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(N, I) = 0 \quad \forall N \in \mathcal{N}\}$  und erklären analog  ${}^\perp\mathcal{N} = \{P \in \mathcal{T} \mid \mathcal{T}(P, N) = 0 \quad \forall N \in \mathcal{N}\}$ .

5.7.2. Sicher ist  ${}^\perp\mathcal{N}$  ein Verdiersystem. Ist  $\mathcal{N}$  das Verdiersystem aller azyklischen Komplexe bzw. dg-Moduln in der Homotopiekategorie zu einer abelschen Kategorie bzw. zu einem dg-Ring, so bezeichnen wir die Objekte von  $\mathcal{N}^\perp$  als **homotopieinjektiv** und die Objekte von  ${}^\perp\mathcal{N}$  als **homotopieprojektiv**. Mehr dazu diskutieren wir in ??.

**Lemma 5.7.3.** *Gegeben eine triangulierte Kategorie  $\mathcal{T}$  und ein Verdiersystem  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$  ist der offensichtliche Funktor  $\mathcal{N}^\perp \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  volltreu und es sind gleichbedeutend:*

1. Für jedes  $X \in \mathcal{T}$  existiert ein ausgezeichnetes Dreieck  $N \rightarrow X \rightarrow I \rightarrow$  mit  $N \in \mathcal{N}$  und  $I \in \mathcal{N}^\perp$ ;
2. Besagter volltreuer Funktor  $\mathcal{N}^\perp \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  ist eine Äquivalenz;
3. Der Funktor  $\text{can} = Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  besitzt einen Rechtsadjungierten.

*Sind diese äquivalenten Eigenschaften erfüllt, so liefert für jeden Quasiinversen  $R : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^\perp$  unserer Äquivalenz  $Q : \mathcal{N}^\perp \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  die kanonische Transformation  $\text{Id} \Rightarrow QR$  auch eine Adjunktion  $(Q, R)$  von  $R$  mit dem Quotientenfunktor  $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$ .*

*Beweis.* Aufgrund von 4.2.9.2 oder auch durch explizite Inspektion im Fall einer Lokalisierung unter Ore-Bedingungen liefert für alle  $I \in \mathcal{N}^\perp$  und  $Y \in \mathcal{T}$  der Quotientenfunktor eine Bijektion  $\mathcal{T}(Y, I) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T}/\mathcal{N})(Y, I)$ . Also ist die Restriktion des Quotientenfunktors auf  $\mathcal{N}^\perp$  volltreu. Unter der Annahme

(1) induziert das  $X \rightarrow I$  von dort einen Isomorphismus in  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$  und es folgt (2). Gilt (2), so liefert jedes Quasiinverse zu unserer Äquivalenz einen Rechtsadjungierten  $R$  von  $Q$  nach dem bereits erwähnten Isomorphismus  $\mathcal{T}(Y, I) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T}/\mathcal{N})(Y, I)$  bei  $I \in \mathcal{N}^\perp$  und es folgt (3). Gilt schließlich (3), so betrachten wir zu  $X \in \mathcal{T}$  den Adjunktionsmorphismus  $X \rightarrow RQX$ . Wenden wir darauf  $Q$  an, so erhalten wir einen Isomorphismus: In der Tat ist die Komposition von Adjunktionsabbildungen  $QX \rightarrow QRQX \rightarrow QX$  nach [I.4.9.12](#) die Identität, es reicht also zu zeigen, daß hier der zweite Pfeil ein Isomorphismus ist. Besagter Pfeil wird jedoch von der Transformation  $QR \Rightarrow \text{Id}$  vermittelt, die in unserem Fall nach [I.4.9.13](#) ein Isomorphismus ist, da nämlich  $R$  nach [4.2.9](#) volltreu ist als Adjungierter eines Lokalisierungsfunktors. Dann gehört nach [5.4.3](#) aber der Kegel über  $X \rightarrow RQX$  zu  $\mathcal{N}$ , und das zeigt (1) und den Rest unseres Lemmas.  $\square$

**Satz 5.7.4 (Derivierte Kategorien über injektive Auflösungen).** *Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  mit genügend Injektiven und  $i\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$  die Unterkategorie aller injektiven Objekte liefert der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz von Kategorien*

$$Q : \text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^+(\mathcal{A})$$

und für jeden Quasiinversen  $R$  dieser Äquivalenz definiert die kanonische Transformation  $\text{id} \Rightarrow QR$  auch eine Adjunktion  $(Q, R)$  von  $R$  mit dem Quotientenfunktor  $Q : \text{Hot}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}^+(\mathcal{A})$ .

**Satz 5.7.5 (Derivierte Kategorien über projektive Auflösungen).** *Gegeben eine abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  mit genügend Projektiven und  $p\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$  die Unterkategorie aller projektiven Objekte liefert dual der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\text{Hot}^-(p\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^-(\mathcal{A})$$

und jeder Quasiinverse dieser Äquivalenz ist ein Linksadjungierter des Quotientenfunktors  $\text{Hot}^-(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}^-(\mathcal{A})$ .

*Beweis von 5.7.4.* Für  $\mathcal{N} \subset \text{Hot}^+(\mathcal{A})$  das Verdiersystem der azyklischen Komplexe liefert das Hauptlemma der homologischen Algebra  $\text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \subset \mathcal{N}^\perp$ . Nach [5.7.3](#) ist also der offensichtliche Funktor  $\text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}^+(\mathcal{A})$  volltreu. In [5.7.8](#) zeigen wir, daß es für jeden Komplex  $X \in \text{Hot}^+(\mathcal{A})$  in dieser Homotopiekategorie ein ausgezeichnetes Dreieck  $N \rightarrow X \rightarrow I \rightarrow$  gibt mit  $I \in \text{Hot}^+(i\mathcal{A})$  und  $N \in \mathcal{N}$ , wieder nach [5.7.3](#) induziert unser volltreuer Funktor folglich eine Äquivalenz  $\text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^+(\mathcal{A})$ . Wir sehen so, daß die Einbettung eine Äquivalenz  $\text{Hot}^+(i\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}^\perp$  liefert, und damit folgt auch der Rest des Satzes aus [5.7.3](#).  $\square$

**Korollar 5.7.6 (Erweiterungen in  $\mathcal{A}$  als Morphismen in  $\text{Der}_{\mathcal{A}}$ ).** *Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven, so liefert 3.4.7 für beliebige Objekte  $M, N \in \mathcal{A}$  kanonische Isomorphismen*

$$\mathcal{A}^{[i]}(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(M, [i]N)$$

*zwischen Erweiterungen und Morphismen in der derivierten Kategorie. Das Yoneda-Produkt von Erweiterungen entspricht hierbei der Verknüpfung geeignet verschobener Morphismen in der derivierten Kategorie.*

*Beweis.* Das folgt unmittelbar aus Satz 5.7.4 und den Definitionen. □

**Definition 5.7.7.** Sei  $A^* \in \text{Hot}^+(\mathcal{A})$  ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex in einer abelschen Kategorie. Eine **injektive Auflösung** von  $A^*$  ist ein Quasiisomorphismus  $A^* \rightarrow I^*$  in einen gegen die Pfeile beschränkten Komplex  $I^* \in \text{Hot}^+(\mathcal{A})$ , der aus injektiven Objekten besteht.

**Proposition 5.7.8 (Existenz injektiver Auflösungen).** *Ist  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven, so existiert für jeden Komplex  $A^* \in \text{Hot}^+(\mathcal{A})$  eine injektive Auflösung  $A^* \rightarrow I^*$ .*

*Beweis.* Wir konstruieren  $I^*$  induktiv mit der Zusatzeigenschaft, daß jeweils Monomorphismen zwischen den Kokernen der Randoperatoren induziert werden. Sind wir schon bei

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & A^p & \rightarrow & A^{p+1} & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & & & \\ \dots & \xrightarrow{d} & I^p & & & & \end{array}$$

angekommen in einer Weise, daß Isomorphismen  $\mathcal{H}^q A \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q I$  induziert werden für  $q < p$  und ein Monomorphismus zwischen den Kokernen der explizit mit  $d$  notierten Ränder, so bilden wir den Pushout von

$$\begin{array}{ccc} \text{cok } d & \rightarrow & A^{p+1} \\ \downarrow & & \\ \text{cok } d & & \end{array}$$

und wählen eine Einbettung dieses Pushout in ein injektives Objekt  $I^{p+1}$ . Mit 5.7.9 dualisiert folgt, daß wir so im Grad  $p$  einen Epimorphismus auf der Homologie erhalten, und da unser vertikaler Morphismus zwischen den Kokernen nach Induktionsannahme ein Monomorphismus ist, erhalten wir hier sogar einen Isomorphismus. Um unsere Induktion am Laufen zu halten müssen wir nur noch zeigen, daß nun wieder ein Monomorphismus auf den Kokernen der Ränder im Grad eins höher induziert wird. Das folgt jedoch aus  $\text{cok}(A^p \rightarrow A^{p+1}) \xrightarrow{\sim} \text{cok}(I^p \rightarrow \text{Pushout}) \hookrightarrow \text{cok}(I^p \rightarrow I^{p+1})$ . □

**Proposition 5.7.9.** *Jedes kartesische Diagramm in einer abelschen Kategorie induziert Isomorphismen zwischen den Kernen paralleler Pfeile und Monomorphismen zwischen den Kokernen paralleler Pfeile.*

5.7.10. Die erste Aussage ist ein Spezialfall von Übung 1.5.9. Wir beweisen die zweite Aussage zu Ende dieses Abschnitts im Anschluß an die Behandlung von zwei Spezialfällen. Im Fall von abelschen Gruppen prüft man die zweite Aussage auch leicht explizit. Die Proposition selbst wird benötigt bei der Konstruktion injektiver Auflösungen von Komplexen in 5.7.8.

**Lemma 5.7.11.** *Ist in einem kartesischen Diagramm in einer abelschen Kategorie ein Ursprungspfeil epi, so auch der gegenüberliegende Pfeil aus dem Faserprodukt.*

*Beweis.* Wir notieren unser kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \rightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{g} & Q \end{array}$$

Ersetzen wir  $M$  durch  $M_0 := \text{im}(P \rightarrow M)$ , so bleibt unser Diagramm kartesisch. Jetzt betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M_0 \times N & \hookrightarrow & M \times N & \twoheadrightarrow & \text{cok} \times N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Q & = & Q & \rightarrow & 0 \end{array}$$

wo die nichttrivialen Vertikalen durch die Zeilenmatrix  $(f, -g)$  erklärt seien. Die Kerne der beiden linken Vertikalen sind gerade die beiden Faserprodukte  $M_0 \times_Q N$  bzw.  $M \times_Q N$  und wir folgern aus der langen exakten Homologiesequenz  $\text{cok} \times N = 0$ , also  $\text{cok} = 0$  und  $M = M_0$ .  $\square$

**Lemma 5.7.12.** *Ein kartesisches Diagramm in einer präabelschen Kategorie, in dem zwei gegenüberliegende Pfeile Monomorphismen sind, induziert Monomorphismen zwischen den Kokernen dieser Pfeile.*

*Beweis.* Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & \text{cok} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N & \hookrightarrow & Q & \twoheadrightarrow & \text{cok} \end{array}$$

In diesem Diagramm sieht man leicht, daß  $M \hookrightarrow P$  der Kern der Verknüpfung  $P \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow \text{cok}$  ist. Damit ist aber  $P \twoheadrightarrow \text{cok}$  in der oberen Horizontalen gerade das Bild dieser Verknüpfung und damit ist die rechte Vertikale ein Monomorphismus.  $\square$

*Beweis von 5.7.9.* Nun zeigen wir die Proposition. Faktorisieren wir einen Ursprungspfeil in  $\text{mono} \circ \text{epi}$ , so ist die induzierte Faktorisierung des gegenüberliegenden Pfeils auch eine Faktorisierung in  $\text{mono} \circ \text{epi}$  wegen der ersten Aussage der Proposition und 5.7.11. Wir dürfen also annehmen, daß wir die Kokerne von zwei gegenüberliegenden Monomorphismen zu vergleichen haben, und das erledigt 5.7.12.  $\square$

## 5.8 Derivierte Kategorien als dg-Modulkategorien

**Definition 5.8.1.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Eine Menge von Komplexen  $\mathcal{C} \subset \text{Ket}(\mathcal{A})$  heiße **endazyklisch** genau dann, wenn fur alle  $T, T' \in \mathcal{C}$  und alle  $n \in \mathbb{Z}$  die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(T, [n]T') \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\mathcal{A}}(T, [n]T')$$

zwischen Morphismen in der Homotopiekategorie und Morphismen in der derivierten Kategorie liefert. Ein Komplex heiße **endazyklisch** genau dann, wenn die aus diesem einzigen Komplex bestehende Menge endazyklisch ist.

*Beispiele 5.8.2.* Jede Menge von Objekten  $\mathcal{K}$  einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  derart, daß es zwischen je zwei von ihnen keine hoheren Selbsterweiterungen gibt, in Formeln  $\mathcal{A}^{[i]}(K, K') = 0 \quad \forall K, K' \in \mathcal{K} \text{ und } i > 0$ , liefert unter der ublichen Einbettung  $\mathcal{A} \hookrightarrow \text{Ket}(\mathcal{A})$  eine endazyklische Menge von Komplexen. Das von einer endazyklischen Menge erzeugte Verdiersystem ist auch selbst wieder endazyklisch. Die Mengen aller gegen die Pfeile beschränkten Komplexe injektiver Objekte und aller mit den Pfeilen beschränkten Komplexe projektiver Objekte sind endazyklisch. Allgemeiner sind die Mengen aller homotopieinjektiven Komplexe und aller homotopieprojektiven Komplexe, die wir bald kennenlernen werden, beide endazyklisch.

**Satz 5.8.3 (Derivierte Kategorien als dg-Modulkategorien).** *Seien  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie,  $T \in \text{Ket}(\mathcal{A})$  ein endazyklischer Komplex und  $E = \text{End}_{\mathcal{A}} T$  sein Endomorphismenkomplex mit der natürlichen Struktur als dg-Ring. So induziert der Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, \_)$  eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien zwischen dem von  $T$  in der derivierten Kategorie erzeugten triangulierten System  $\langle T \rangle_{\Delta} \subset \text{Der}(\mathcal{A})$  und der freien derivierten Kategorie von Rechtsmoduln über seinem Endomorphismenkomplex*

$$\langle T \rangle_{\Delta} \xrightarrow{\sim} \text{dgFrei-} E$$

5.8.4. Um Mißverständnissen vorzubeugen: Ich behaupte hier nicht, daß der auf  $\text{Hot}(\mathcal{A})$  erklärte Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, \_)$  auf die derivierte Kategorie absteigt und der im Satz gemeinte Funktor durch Einschränkung entsteht. Im

Fall eines homotopieprojektiven Komplexes  $T$  gilt das jedoch zusätzlich auch noch.

5.8.5. Etwas allgemeiner erhält man für eine endliche endazyklische Familie  $T_1, \dots, T_l$  und  $E = \text{End}_{\mathcal{A}}(\bigoplus T_i)$  mit den Projektoren  $1_i \in E$  auf die Summanden eine Äquivalenz

$$\langle T_1, \dots, T_l \rangle_{\Delta} \xrightarrow{\sim} \langle 1_1 E, \dots, 1_l E \rangle_{\Delta} \subset \text{dgDer-} E$$

Nach einer offensichtlichen Verallgemeinerung von 5.5.3 induziert der Quotientenfunktor  $\text{dgHot-} E \rightarrow \text{dgDer-} E$  eine Äquivalenz zwischen den triangulierten Erzeugnissen von  $1_1 E, \dots, 1_l E$  in den besagten Kategorien.

*Beweis.* Nach 5.3.13 liefert der Quotientenfunktor  $\text{Hot}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Der}_{\mathcal{A}}$  eine Äquivalenz zwischen den jeweils von  $T$  erzeugten triangulierten Systemen, so daß die Kategorie  $\langle T \rangle$  auch in  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}$  interpretiert werden darf. Erst in dieser Interpretation kann  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, \_)$  angewandt werden. Man erhält die behauptete Äquivalenz dann mithilfe von 5.3.16.  $\square$

5.8.6. Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Ein Objekt  $T \in \mathcal{A}$  heißt ein **Kippobjekt** (englisch **tilting object**, französisch **objet basculant**) genau dann, wenn alle seine höheren Selbsterweiterungen verschwinden, wenn also in Formeln gilt  $\mathcal{A}^{[i]}(T, T) = 0$  für  $i > 0$ . In diesem Fall ist also die Kohomologie von  $E = \text{End}_{\mathcal{A}} T$  im Grad Null konzentriert. Die Einbettung  $Z \hookrightarrow E$  des dg-Teilrings mit Zykeln im Grad Null, Null in positiven Graden, und allen Elementen von  $E$  in negativen Graden ist also ein Quasiisomorphismus, und dasselbe gilt für die Projektion  $Z \twoheadrightarrow H$  auf die Homologie. Mithilfe von 5.3.15 erhalten wir dann triangulierte Äquivalenzen  $\text{dgFrei-} E \xrightarrow{\sim} \text{dgFrei-} Z \xleftarrow{\sim} \text{dgFrei-} H$ . Da nun  $H$  nur im Grad Null konzentriert ist, ergibt sich zusammen mit unserem Satz schließlich eine Äquivalenz von triangulierten Kategorien

$$\langle T \rangle_{\Delta} \xrightarrow{\sim} \langle H \rangle_{\Delta}$$

wo rechts das triangulierte Erzeugnis des Objekts  $H$  in der derivierten Kategorie  $\text{Der}(\text{Mod-} H)$  zu verstehen ist.

*Ergänzung 5.8.7.* Der vorstehende Satz verallgemeinert Resultate von [Kel94]. In manchen Situationen ist auch die Variante ?? nützlich. Im Zusammenspiel mit ?? kann man auch in allgemeineren Fällen als dem eben besprochenen Fall der Kipp-Komplexe zu einer Beschreibung durch explizit besser zugängliche dg-Ringe übergehen.

## 5.9 Rechtsderivierte Funktoren

**Definition 5.9.1.** Seien  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  ein triangulierter Funktor zwischen triangulierten Kategorien und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$  eine Menge von Objekten. Unter einer **Rechtsapproximation** oder genauer einer **triangulierten Rechtsapproximation an  $F$  auf  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$**  verstehen wir ein Paar  $(G, \sigma)$  bestehend aus einem triangulierten Funktor  $G : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}'$  nebst einer verträglichen Transformation  $\sigma : F \Rightarrow GQ$ , im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T} & \xrightarrow{F} & \mathcal{T}' \\
 & \searrow Q & \nearrow G \\
 & & \mathcal{T}/\mathcal{N}
 \end{array}$$

$\sigma$

Unter einer **initialen Rechtsapproximation** oder genauer einer **triangulierten initialen Rechtsapproximation** verstehen wir eine Rechtsapproximation  $(\bar{F}, \tau)$  derart, daß für alle triangulierten Funktoren  $G : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}'$  die Abbildung  $\alpha \mapsto (\alpha Q) \circ \tau$  eine Bijektion zwischen den entsprechenden Räumen von verträglichen Transformationen induziert, in Formeln eine Bijektion

$$\mathrm{Trans}^{\mathbb{Z}}(\bar{F}, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Trans}^{\mathbb{Z}}(F, GQ)$$

5.9.2. Verstehen wir die Menge der Rechtsapproximationen an  $F$  auf  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$  in geeigneter Weise als eine Kategorie, so ist eine initiale Rechtsapproximation ein initiales Objekt dieser Kategorie. So weit will ich jedoch nicht gehen, da es mir auch so schon klar scheint, daß eine initiale Rechtsapproximation eindeutig ist bis auf eindeutigen Isomorphismus, falls sie existiert.

*Beispiel 5.9.3 (Rechtsapproximation durch Rechtsadjungierte).* Sei  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  ein triangulierter Funktor zwischen triangulierten Kategorien und sei  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$  eine Menge von Objekten. Besitzt der Quotientenfunktor  $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  einen Rechtsadjungierten  $R$ , so ist  $FR$  mit der durch die Adjunktion induzierten Transformation  $F \Rightarrow FRQ$  eine triangulierte initiale Rechtsapproximation an  $F$ . In der Tat ist  $R$  trianguliert nach 5.7.3. Um die universelle Eigenschaft zu zeigen, begeben wir uns in eine noch größere Allgemeinheit, betrachten beliebige Kategorien  $\mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{Q}$  und Funktoren  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  sowie  $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Q}$  und zeigen, daß für jeden Rechtsadjungierten  $R$  von  $Q$  die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$\text{Trans}(FR, G) \xrightarrow{\sim} \text{Trans}(F, GQ)$  definiert. Dazu betrachte man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Trans}(FR, GQR) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \text{Trans}(FR, G) & & \text{Trans}(F, GQ) \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & \text{Trans}(FRQ, GQ) &
 \end{array}$$

mit hoffentlich offensichtlichen Abbildungen und überlege sich mithilfe von [I.4.9.12](#), daß darin die Wege “untenherum” und “obenherum” zueinander inverse Bijektionen zwischen der linken Ecke und der rechten Ecke liefern. Dasselbe gilt dann auch für die Teilräume der verträglichen Transformationen und unser Beispiel ist etabliert.

5.9.4. Man kann auch in der größeren Allgemeinheit des vorhergehenden Beispiels in der hoffentlich offensichtlichen Weise Rechtsapproximationen und initiale Rechtsapproximationen erklären und die Letzteren als eine Verallgemeinerung von Rechtsadjungierten ansehen, die dann ihrerseits als “Rechtsapproximationen der Identität” verstanden werden können. Ich rede von triangulierten Rechtsapproximationen, wenn ich hervorheben will, daß diese Allgemeinheit nicht gemeint ist.

**Definition 5.9.5.** Sei  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Die initiale Rechtsapproximation auf  $\text{Der}^+(\mathcal{B})$  an die Verknüpfung  $\text{Hot}^+(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Hot}^+(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Der}^+(\mathcal{C})$  heißt, falls sie existiert, der **rechtsderivierte Funktor** zu  $F$  und wird notiert

$$RF : \text{Der}^+(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}^+(\mathcal{C})$$

Genau genommen gehört zu  $RF$  also noch eine verträgliche Transformation wie ich sie im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hot}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{F} & \text{Hot}^+(\mathcal{C}) \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 \text{Der}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{RF} & \text{Der}^+(\mathcal{C})
 \end{array}$$

durch einen Doppelpfeil angedeutet habe, und erst dieses Paar bestehend aus dem Funktor  $RF$  und besagter Transformation ist dann eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.



5.9.6. Wenn wir es ganz genau nehmen wollen, hätten wir unseren derivierten Funktor von eben vielleicht  $R^{++}F$  nennen sollen, denn natürlich mag man in derselben Weise auch Funktoren  $RF : \text{Der}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{C})$  oder  $R^{+b}F : \text{Der}^b(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}^+(\mathcal{C})$  und dergleichen mehr definieren, und es scheint mir im allgemeinen keineswegs offensichtlich, inwieweit hier die einen mit den Einschränkungen der anderen zusammenfallen, sofern alle schon mal überhaupt existieren. Bei der konkreten Arbeit mit Garben erweisen sich jedoch die gegen die Pfeile beschränkten derivierten Kategorien als technisch geschickter Rahmen, und ich schneide die Definitionen deshalb auf diesen Fall zu. Der Fall der vollen derivierten Kategorien im Fall von Moduln über Ringen wird in ?? mit behandelt.

*Es gibt auch eine Definition bei Deligne in SGA4. Guck da nochmal nach!*

*Beispiel 5.9.7.* Ist  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und hat  $\mathcal{B}$  genügend Injektive, so ist für jedes Quasiinverse  $R$  der Äquivalenz  $Q : \text{Hot}^+(i\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}^+(\mathcal{B})$  die Verknüpfung

$$RF : \text{Der}^+(\mathcal{B}) \xrightarrow{R} \text{Hot}^+(i\mathcal{B}) \xrightarrow{F} \text{Hot}^+(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \text{Der}^+(\mathcal{C})$$

ein Rechtsderivierter von  $F$ , wobei wir alle Quotientenfunktoren mit demselben Buchstaben  $Q$  bezeichnen und die Transformation  $QF \Rightarrow QFRQ$  daraus erhalten, daß wir erst wie in 5.7.4 die Adjunktion  $(Q, R)$  aus der Definition des Quasiinversen zu einer Adjunktion  $(Q, R)$  mit  $Q : \text{Hot}^+(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}^+(\mathcal{B})$  fortsetzen und dann die von  $\text{Id} \Rightarrow RQ$  induzierte Transformation nehmen. In der Tat folgt diese Behauptung sofort aus 5.9.3. Insbesondere können wir unsere "höheren derivierten Funktoren" aus 3.2.4 in unserer neuen Terminologie beschreiben als

$$(R^i F)(A) = \mathcal{H}^i RF(A)$$

Die lange exakte Sequenz der höheren derivierten Funktoren 3.2.21 zu einer kurzen exakten Sequenz erhalten wir in unserem neuen Formalismus, indem wir unsere kurze exakte Sequenz als kurze exakte Sequenz von im Grad Null konzentrierten Komplexen lesen, dazu im Sinne von 5.5.4 das zugehörige ausgezeichnete Dreieck in  $\text{Der}^+(\mathcal{B})$  bilden, darauf  $RF$  anwenden, und zu dem so entstehenden ausgezeichneten Dreieck in  $\text{Der}^+(\mathcal{C})$  die lange exakte Homologiesequenz im Sinne von 5.5.1 betrachten. Die kanonischen Morphismen  $\mathcal{H}^i FJ^* \rightarrow R^i F(A)$  aus 3.2.26 für eine beliebige Auflösung  $A \xrightarrow{\sim} J^*$  schließlich erhalten wir nun durch Anwenden der  $\mathcal{H}^i$  auf den Effekt der Transformation  $QF \Rightarrow (RF)Q$  auf  $J^*$  unter Beachtung von  $QA \xrightarrow{\sim} QJ^*$  in der derivierten Kategorie. Ist weiter  $B^* \in \text{Hot}^+(\mathcal{B})$  ein Komplex  $F$ -azyklischer Objekte, so induziert die Transformation  $F \Rightarrow RF \circ Q$  einen Isomorphismus

$$FB^* \xrightarrow{\sim} RF(QB^*)$$

Ist in der Tat  $B^* \xrightarrow{\sim} I^*$  eine injektive Auflösung, so ist der Abbildungskegel  $K^*$  azyklisch und besteht aus  $F$ -azyklischen Objekten. Nach 3.2.30 ist dann auch  $FK^*$  azyklisch und das ausgezeichnete Dreieck  $FB^* \rightarrow FI^* \rightarrow FK^* \rightarrow$  in  $\text{Hot}^+(\mathcal{C})$  liefert  $FB^* \xrightarrow{\sim} FI^*$  in  $\text{Der}^+(\mathcal{C})$ .

**Lemma 5.9.8 (Adjunktionen derivierter Funktoren).** *Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  abelsche Kategorien und  $(F, G)$  ein Paar von adjungierten Funktoren*

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$$

*Ist  $F$  exakt und besitzt  $\mathcal{B}$  genug Injektive, so erhalten wir beim Derivieren wieder ein Paar  $(F, RG)$  von adjungierten Funktoren*

$$\text{Der}^+ \mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{RG} \end{array} \text{Der}^+ \mathcal{B}$$

*Beweis.* Da  $F$  exakt ist, macht  $G$  Injektive zu Injektiven. Gegeben ein beliebiger Komplex  $A \in \text{Ket}^+ \mathcal{A}$  und ein injektiver Komplex  $I \in \text{Ket}^+ i\mathcal{B}$  liefert unsere Adjunktion  $(F, G)$  dann natürliche Isomorphismen

$$\text{Hot}_{\mathcal{A}}(A, GI) \xrightarrow{\sim} \text{Hot}_{\mathcal{B}}(FB, I)$$

aus denen die Behauptung unmittelbar folgt. □

**Proposition 5.9.9.** *Sei  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien und es habe  $\mathcal{A}$  genug Injektive. So haben wir für alle  $A^* \in \text{Der}^+ \mathcal{A}$  eine konvergierende  $E_2$ -Spektralsequenz*

$$(R^q F)(\mathcal{H}^p A^*) \Rightarrow \mathcal{H}^n(RF(A^*))$$

*Beweis.* Wir betrachten eine simultane injektive Auflösung  $(A^p) \hookrightarrow (I^{p,q})$  im Sinne von ???. Der Totalkomplex ist dann nach 2.1.3 oder vielmehr einer Variante für beliebige abelsche Kategorien eine injektive Auflösung  $(A^p) \xrightarrow{\sim} \text{tot}(I^{p,q})$  und es folgt

$$\mathcal{H}^n(RF)(A^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n F(\text{tot}(I^{*,*})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n \text{tot}(FI^{*,*})$$

Berechnen wir nun die Homologie des Totalkomplexes dieses letzten Doppelkomplexes mithilfe der üblichen Spektralsequenz 6.1, so ergibt sich als  $E_1$ -Term  $E_1^{p,q} = F\mathcal{H}^p(I^{*,q}, \partial)$ , und da die  $\mathcal{H}^p(I^{*,q}, \partial)$  nach Annahme injektive Auflösungen der  $\mathcal{H}^p A^*$  sind, erhalten wir  $E_2$ -Terme  $E_2^{p,q} = (R^q F)(\mathcal{H}^p A^*)$ . □

*Ergänzende Übung 5.9.10.* Hat unter den Voraussetzungen von Proposition 5.9.9 etwas allgemeiner  $A^* \in \text{Ket}^+ \mathcal{A}$  eine Filtrierung  $A^* = A^{*, \geq 0} \supset A^{*, \geq 1} \supset \dots$  durch Unterkomplexe derart, daß für jedes  $p$  gilt  $A^{p, \geq i} = 0$  ab einem gewissen  $i = i(p)$ , so zeige man analog die Existenz einer konvergierenden  $E_2$ -Spektralsequenz

$$(R^q F)(\text{gr}^p A^*) \Rightarrow \mathcal{H}^n(RF(A^*))$$

5.9.11. Seien abelsche Kategorien  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  gegeben und additive Funktoren  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  und  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Haben  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  genug Injektive, so können wir jeweils rechtsderivierte Funktoren bilden wie im folgenden Diagramm angedeutet:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hot}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{F} & \text{Hot}^+(\mathcal{C}) & \xrightarrow{G} & \text{Hot}^+(\mathcal{D}) \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \text{Der}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{RF} & \text{Der}^+(\mathcal{C}) & \xrightarrow{RG} & \text{Der}^+(\mathcal{D}) \end{array}$$

Andererseits können wir natürlich auch den derivierten Funktor der Veknüpung  $R(G \circ F)$  betrachten, und da er eine initiale Rechtsapproximation ist, erhalten wir eine durch die zu unseren Derivierten  $R(G)$  und  $R(F)$  gehörigen Transformationen wohldefinierte Transformation

$$R(G \circ F) \Rightarrow RG \circ RF$$

**Satz 5.9.12 (Grothendieck’s Spektralsequenz).** *Macht in den Notationen der vorhergehenden Bemerkung unser Funktor  $F$  injektive Objekte zu  $G$ -azyklischen Objekten, so ist die in 5.9.11 erklärte Transformation eine Isotransformation*

$$R(G \circ F) \xrightarrow{\cong} RG \circ RF$$

*Beweis.* Gegeben  $I^* \in \text{Hot}^+(i\mathcal{B})$  haben wir  $FI^* \xrightarrow{\cong} RF(QI^*)$  nach der Konstruktion des Rechtsderivierten und dann

$$G(FI^*) \xrightarrow{\cong} RG(RF(QI^*))$$

nach 5.9.7, da ja  $FI^*$  nach Annahme ein Komplex von  $G$ -azyklischen Objekten ist. Andererseits haben wir aber auch  $G(FI^*) \xrightarrow{\cong} R(G \circ F)(QI^*)$ .  $\square$

5.9.13. Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von topologischen Räumen. Das direkte Bild ist nach 3.2.12 ein linksexakter Funktor

$$f_{(*)} : \text{Ab}_X \rightarrow \text{Ab}_Y$$

und da die Kategorie  $\text{Ab}/_X$  der abelschen Garben auf  $X$  genug Injektive besitzt, existiert hier der rechtsderivierte Funktor. Wir notieren ihn

$$f_* := \text{R}f_{(*)} : \text{Der}^+(\text{Ab}/_X) \rightarrow \text{Der}^+(\text{Ab}/_Y)$$

Üblicher ist die Notation  $f_*$  statt unserem  $f_{(*)}$  für das direkte Bild von Garben und  $\text{R}f_*$  statt unserem  $f_{(*)}$ , aber  $\text{R}f_*$  durch  $f_*$  abzukürzen ist insbesondere in der neueren Literatur nicht unüblich.

5.9.14. Nach 3.2.13 sind nun welche abelsche Garben azyklisch für das Bilden direkter Bilder unter stetigen Abbildungen. Weiter sieht man leicht ein, dass das direkte Bild einer welchen Garbe wieder welche ist. Damit liefert Grothendieck's Spektralsequenz 5.9.12 für jede weitere stetige Abbildung  $g: Y \rightarrow Z$  eine verträgliche Isotransformation

$$(g \circ f)_* \xrightarrow{\cong} g_* \circ f_*$$

von triangulierten Funktoren  $\text{Der}^+(\text{Ab}/_X) \rightarrow \text{Der}^+(\text{Ab}/_Z)$ .

*Beispiel* 5.9.15. Betrachten wir als konkretes Beispiel etwa die Abbildungen

$$S^3 \xrightarrow{f} S^2 \xrightarrow{c} \text{pt}$$

mit  $f$  der  $S^1$ -Faserung, die man durch die Abbildung  $S^3 \rightarrow \text{SO}(3)$  aus ?? gefolgt von der Wirkung der Drehgruppe  $\text{SO}(3)$  auf einen fest gewählten Punkt der Kugelschale  $S^2$  erhält. Zur Vermeidung von Subindizes notieren wir die konstante Garbe  $\mathbb{Z}$  auf einem topologischen Raum  $X$  nun  $\underline{\mathbb{Z}}_X = \underline{X}$ . Nach 3.2.14 finden wir

$$\mathcal{H}^p f_* \underline{S}^3 \cong \begin{cases} \underline{S}^2 & p = 0, 1 ; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also liefert 5.6.6 ein ausgezeichnetes Dreieck

$$\underline{S}^2 \rightarrow f_* \underline{S}^3 \rightarrow \underline{S}^2[-1] \xrightarrow{[1]}$$

dessen Pfeil vom Grad Eins nach 5.7.6 und 3.4.9 als Element von  $\text{H}^2(S^2; \mathbb{Z})$  aufgefasst werden kann. Wendet man auf dieses ausgezeichnete Dreieck den triangulierten Funktor  $c_*$  an, so ergibt sich ein ausgezeichnetes Dreieck

$$c_* \underline{S}^2 \rightarrow (c \circ f)_* \underline{S}^3 \rightarrow c_* \underline{S}^2[-1] \xrightarrow{[1]}$$

Betrachten wir dazu nun die lange exakte Kohomologiesequenz und erinnern unsere Resultate über die Kohomologie von Sphären, so folgt, dass der Pfeil

vom Grad Eins unseres ursprünglichen ausgezeichneten Dreiecks einem Erzeuger von  $H^2(S^2; \mathbb{Z})$  entsprochen haben muss, in anderen Worten ist  $f_*\underline{S}^3$  also isomorph zum Abbildungskegel eines durch einen Erzeuger  $H^2(S^2; \mathbb{Z})$  definierten Morphismus  $\underline{S}^2[-2] \rightarrow \underline{S}^2$  in der derivierten Kategorie der abelschen Garben auf der Sphäre  $S^2$ .

5.9.16 (**Leray-Spektralsequenz**). Sei  $f: Y \rightarrow X$  stetig und  $\mathcal{F} \in \text{Ab}_Y$  eine abelsche Garbe. Ist weiter  $c: X \rightarrow \text{top}$  die konstante Abbildung zum einpunktigen Raum, so finden wir

$$\begin{aligned} H^n(Y; \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} \Gamma \mathcal{H}^n((c \circ f)_* \mathcal{F}) \text{ nach 3.2.11} \\ &\xrightarrow{\sim} \Gamma \mathcal{H}^n(c_*(f_* \mathcal{F})) \text{ nach 5.9.14.} \end{aligned}$$

Mit 5.9.9 ergibt sich dann eine konvergierende  $E_2$ -Spektralsequenz

$$H^q(X; \mathcal{H}^p(f_* \mathcal{F})) \Rightarrow H^n(Y; \mathcal{F})$$

Ist speziell  $\mathcal{F} = \underline{Y}$  die konstante Garbe  $\underline{Y} = \mathbb{Z}Y$  und  $f$  eine Faserung mit Faser  $F$  und ist die Basis  $X$  offenkonal azyklisch, so sind die  $\mathcal{H}^p f_* \underline{Y}$  nach ?? lokal konstant mit Halm  $H^p(f^{-1}(x); \mathbb{Z})$  bei  $x \in X$ . Ist  $X$  darüber hinaus einfach zusammenhängend, so ist für jeden Punkt  $x \in X$  die Garbe  $\mathcal{H}^p f_* \underline{Y}$  kanonisch isomorph zur konstanten Garbe mit Faser  $H^p(f^{-1}(x); \mathbb{Z})$  und wir finden eine konvergierende  $E_2$ -Spektralsequenz

$$H^q(X; H^p(f^{-1}(x); \mathbb{Z})) \Rightarrow H^n(Y; \mathbb{Z})$$

Das ist die ursprüngliche Leray-Spektralsequenz.

## 5.10 Approximieren durch azyklische Auflösungen

5.10.1. Der folgende Satz liefert Konstruktionen derivierter Funktoren in allgemeineren Fällen, wenn es etwa in einer abelschen Kategorie nicht genug Injektive gibt, oder wenn wir nicht nur für die gegen die Pfeile beschränkten derivierten Kategorien derivierte Funktoren konstruieren wollen, oder wenn wir an den derivierten Funktoren im Fall der derivierten Kategorie zu einem differentiellen graduierten Ring interessiert sind, die wir bisher noch gar nicht definiert haben.

**Satz 5.10.2 (Rechtsapproximieren durch azyklische Auflösungen).** Seien  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  triangulierte Kategorien,  $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  ein triangulierter Funktor und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$  ein Verdiersystem. Es gebe weiter ein Verdiersystem  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$  derart, daß gilt:

1. Der Schnitt  $\mathcal{A} \cap \mathcal{N}$  geht unter  $F$  nach Null;

2. Zu jedem Objekt  $X \in \mathcal{T}$  finden wir mindestens ein ausgezeichnetes Dreieck  $\mathcal{N} \rightarrow X \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow$  mit  $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$  und  $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ .

So besitzt  $F$  eine initiale Rechtsapproximation  $(\bar{F}, \tau)$  mit  $\bar{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}'$  und für jede initiale Rechtsapproximation  $(\bar{F}, \tau)$  gilt  $\tau : FA \xrightarrow{\sim} \bar{F}QA$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ .

*Beweis.* Wir behaupten zunächst, daß der offensichtliche Funktor eine Äquivalenz von Kategorien

$$J : \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}/\mathcal{N}$$

induziert. In der Tat ist nach der zweiten Bedingung jedes Objekt von  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$  isomorph zu einem Objekt aus dem Bild unseres Funktors, und wir müssen nach 4.3.6 oder vielmehr seiner opponierten Version nur prüfen, daß sich jeder Morphismus von einem Objekt  $B \in \mathcal{A}$  in ein Objekt  $X \in \mathcal{T}$  mit Abbildungskegel in  $\mathcal{N}$  verlängern läßt zu einer Komposition  $B \rightarrow X \rightarrow A$  mit  $A \in \mathcal{A}$  derart, daß der Abbildungskegel dieser Komposition auch in  $\mathcal{N}$  liegt. Das ist jedoch klar nach unserer zweiten Annahme. Somit können wir schon einmal einen triangulierten Funktor  $\bar{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}'$  konstruieren, indem wir zu unserer Äquivalenz  $J$  einen Rechtsadjungierten alias Quasiinversen  $R : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{N}$  wählen und den aufgrund der ersten Annahme von  $F$  induzierten Funktor  $\hat{F} : \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}'$  dahinterhängen, in Formeln  $\bar{F} = \hat{F}R$ . Wir bezeichnen den Quotientenfunktor  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{N}$  mit  $P$  und erhalten so die im folgenden Diagramm überblicksartig dargestellten Kategorien und Funktoren:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A} & \xrightarrow{I} & \mathcal{T} & \xrightarrow{F} & \mathcal{T}' \\
 P \downarrow & & \downarrow Q & \dashrightarrow & \\
 \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{N} & \xrightarrow{\hat{F}} & \mathcal{T}' & & \\
 & \dashrightarrow J & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{T}/\mathcal{N} & & \\
 & \xleftarrow{R} & & & 
 \end{array}$$

Als nächstes konstruieren wir eine Transformation  $\tau : F \Rightarrow \bar{F}Q$  und zeigen, dass  $(\bar{F}, \tau)$  eine initiale Rechtsapproximation ist. Sicher können wir eine Transformation, ja sogar eine Isotransformation  $\hat{\tau} : FI \Rightarrow \bar{F}QI$  erklären als die Komposition

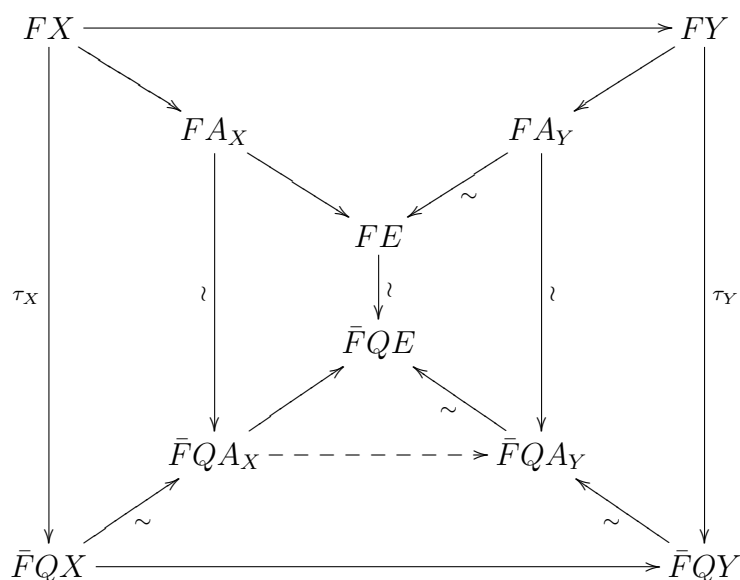
$$FI = \hat{F}P \Rightarrow \hat{F}RJP = \hat{F}RQI$$

mit der Adjunktionstransformation in der Mitte. Nun kommt aber diese Transformation  $\hat{\tau} : FI \Rightarrow \bar{F}QI$  von genau einer Transformation  $\tau$  her durch Vorschalten von  $I$ : In der Tat erhalten wir für jede Transformation  $\tau : F \Rightarrow \bar{F}Q$  mit  $\tau I = \hat{\tau}$  und alle Objekte  $X \in \mathcal{T}$  und jeden Morphismus

$X \rightarrow A_X$  mit Kegel aus  $\mathcal{N}$  in ein Objekt von  $\mathcal{A}$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} FX & \longrightarrow & FA_X \\ \tau \downarrow & & \downarrow \hat{\tau} \\ \bar{F}QX & \xrightarrow{\sim} & \bar{F}QA_X \end{array}$$

und da hier die rechte Vertikale ein Isomorphismus ist, wird  $\tau$  durch die Bedingung  $\tau I = \hat{\tau}$  schon eindeutig festgelegt. Umgekehrt zeigen wir nun, daß die so zu  $X \rightarrow A_X$  gebildeten  $\tau_X$  von der Wahl des Morphismus  $X \rightarrow A_X$  nicht abhängen und eine Transformation  $\tau : F \Rightarrow \bar{F}Q$  definieren. Sei also  $X \rightarrow Y$  ein Morphismus in  $\mathcal{T}$  und  $Y \rightarrow A_Y$  ein Morphismus mit Kegel in  $\mathcal{N}$  in ein Objekt  $A_Y \in \mathcal{A}$ . Es gilt, die Kommutativität des äußeren Quadrats zu zeigen im Diagramm



Die Kommutativität des linken und rechten Trapezes definiert  $\tau_X$  und  $\tau_Y$  und ist unproblematisch. Der gestrichelte Pfeil meint den Effekt von  $\bar{F}$  auf dem Morphismus in  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ , der durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} & QA_X \dashrightarrow QA_Y & \\ & \nearrow \sim \quad \nwarrow \sim & \\ QX & \xrightarrow{\quad} & QY \end{array}$$

definiert wird. Wir können ihn als Bruch  $A_X \rightarrow D \leftarrow A_Y$  schreiben und

unseren Bruch so erweitern, daß wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & A_X & A_Y \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & E &
 \end{array}$$

in  $\mathcal{T}$  erhalten, wobei also der Kegel von  $A_Y \rightarrow E$  in  $\mathcal{N}$  liegen soll und wir durch eine weitere Erweiterung sogar zusätzlich  $E \in \mathcal{A}$  annehmen dürfen. So entsteht dann das gesamte obige mehrzellige Diagramm, bei dem die Kommutativität sämtlicher Zellen offensichtlich ist. Die Kommutativität des äußeren Quadrats folgt ohne Schwierigkeiten, und damit haben wir dann schon einmal eine Transformation  $\tau : F \Rightarrow \bar{F}Q$  konstruiert und es bleibt nur noch, die Universalität des Paares  $(\bar{F}, \tau)$  zu zeigen. Ist dazu  $G : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}'$  ein weiterer triangulierter Funktor, so erhalten wir sicher ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Trans}(\bar{F}, G) & \xrightarrow{\sim} & \text{Trans}(\bar{F}QI, GQI) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 \text{Trans}(\bar{F}Q, GQ) & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Trans}(F, GQ) & \longrightarrow & \text{Trans}(FI, GQI)
 \end{array}$$

wobei die rechte Vertikale eine Bijektion ist wegen  $\tau I : FI \xrightarrow{\cong} \bar{F}QI$  und die beiden Pfeile aus der oberen linken Ecke nach 4.2.9, da nämlich  $Q$  und  $QI$  Lokalisierungsfunktoren sind. Nun ist jedoch auch die untere Horizontale injektiv, da wir für  $X \rightarrow A_X$  wie zuvor und  $\sigma : F \Rightarrow GQ$  eine Transformation ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 FX & \longrightarrow & GQX \\
 \downarrow & & \downarrow \wr \\
 FA_X & \longrightarrow & GQA_X
 \end{array}$$

erhalten, dessen obere Horizontale bereits durch die untere festgelegt wird. Mithin besteht unser Diagramm aus Bijektionen. Dasselbe folgt, wenn wir an jeder Stelle die Teilmenge der verträglichen Transformationen betrachten, und daraus folgt dann die behauptete Universalität von  $(\bar{F}, \tau)$ .  $\square$



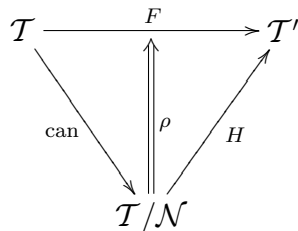
*Beispiel 5.10.3.* Sei  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und  $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$  eine unter endlichen direkten Summen stabile Unterkategorie derart, daß (1) kurze exakte Sequenzen von Objekten aus  $\mathcal{I}$  exakt bleiben unter  $F$ , daß (2) der Kokern eines Monomorphismus zwischen je zwei Objekten von  $\mathcal{I}$  wieder zu  $\mathcal{I}$  gehört, und daß (3) jedes Objekt von  $\mathcal{B}$  in ein Objekt von  $\mathcal{I}$  eingebettet werden kann. So hat  $\text{Hot}^+(\mathcal{I}) \subset \text{Hot}^+(\mathcal{B})$  die in 5.10.2 geforderten Eigenschaften: Es gilt hier nur, die Argumente aus dem Beweis von 5.7.8 zu wiederholen. Folglich besitzt  $F$  einen Rechtsderivierten  $\text{RF} : \text{Der}^+(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}^+(\mathcal{C})$  und auf Objekten  $I$  aus  $\text{Hot}^+(\mathcal{I})$  liefert die Transformation aus der Definition des Rechtsderivierten Isomorphismen

$$FI \xrightarrow{\cong} \text{RF}(I)$$

### 5.11 Linksderivierte Funktoren

5.11.1. Die Definitionen und Resultate dieses Abschnitts sind dual zu denen des vorhergehenden Abschnitts, weshalb ich auf sämtliche Beweise verzichte.

**Definition 5.11.2.** Sei  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  ein triangulierter Funktor zwischen triangulierten Kategorien und sei  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$  eine Menge von Objekten. Eine **Linksapproximation** an  $F$  auf  $\mathcal{T}/\mathcal{N}$  ist ein Paar  $(H, \rho)$  bestehend aus einem triangulierten Funktor  $H$  nebst einer verträglichen Transformation  $\rho$  wie im Diagramm



angedeutet, und erklären eine **finale Linksapproximation** als eine Linksapproximation  $(\underline{F}, \tau)$  derart, daß für alle triangulierten Funktoren  $G : \mathcal{T}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{T}'$  die Abbildung  $\alpha \Rightarrow \tau \circ (\alpha Q)$  eine Bijektion zwischen den entsprechenden Räumen von verträglichen Transformationen induziert, in Formeln eine Bijektion

$$\text{Trans}^{\mathbb{Z}}(G, \underline{F}) \xrightarrow{\cong} \text{Trans}^{\mathbb{Z}}(GQ, F)$$

*Beispiel 5.11.3.* Sei  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  ein triangulierter Funktor zwischen triangulierten Kategorien und sei  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$  eine Menge von Objekten. Besitzt der Quotientenfunktor  $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$  einen Linksadjungierten  $L$ , so ist  $FL$  mit der durch die Adjunktion induzierten Transformation  $FLQ \Rightarrow F$  eine triangulierte finale Linksapproximation an  $F$ .

**Definition 5.11.4.** Sei  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  ein rechtsexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien. Die finale Linksapproximation auf  $\text{Der}^-(\mathcal{B})$  an die Verknüpfung  $\text{Hot}^-(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Hot}^-(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Der}^-(\mathcal{C})$  heißt, falls sie existiert, der **linksderivierte Funktor** zu  $F$  und wird notiert

$$LF : \text{Der}^-(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}^-(\mathcal{C})$$

Genau genommen gehört zu  $LF$  also noch eine verträgliche Transformation, die ich im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hot}^-(\mathcal{B}) & \xrightarrow{F} & \text{Hot}^-(\mathcal{C}) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \text{Der}^-(\mathcal{B}) & \xrightarrow{LF} & \text{Der}^-(\mathcal{C}) \end{array}$$

durch einen Doppelpfeil angedeutet habe, und das Paar bestehend aus dem derivierten Funktor und besagter Transformation ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

**Satz 5.11.5 (Linksapproximieren durch azyklische Auflösungen).** Seien  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  triangulierte Kategorien,  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  ein triangulierter Funktor und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$  ein Verdiersystem. Es gebe weiter ein Verdiersystem  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$  derart, daß gilt:

1. Der Schnitt  $\mathcal{A} \cap \mathcal{N}$  geht unter  $F$  nach Null;
2. Zu jedem Objekt  $X \in \mathcal{T}$  finden wir mindestens ein ausgezeichnetes Dreieck  $A \rightarrow X \rightarrow N \rightarrow$  mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $N \in \mathcal{N}$ .

So besitzt  $F$  eine finale Linksapproximation, und gegeben eine finale Linksapproximation  $(\underline{F}, \tau)$  gilt  $\tau : \underline{F}QA \xrightarrow{\sim} FA$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ .

*Beispiel 5.11.6.* Sei  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$  eine unter endlichen direkten Summen stabile Unterkategorie derart, daß (1) kurze exakte Sequenzen von Objekten aus  $\mathcal{P}$  exakt bleiben unter  $F$ , daß (2) der Kern eines Epimorphismus zwischen je zwei Objekten von  $\mathcal{P}$  wieder zu  $\mathcal{P}$  gehört, und daß (3) jedes Objekt von  $\mathcal{B}$  Quotient eines Objekt von  $\mathcal{P}$  ist. So hat  $\text{Hot}^-(\mathcal{P}) \subset \text{Hot}^-(\mathcal{B})$  die in 5.11.5 geforderten Eigenschaften, es gilt hier die Argumente aus dem Beweis von 5.7.8 zu wiederholen, und  $F$  besitzt folglich einen Linksderivierten  $LF : \text{Der}^-(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Der}^-(\mathcal{C})$  und auf Objekten aus  $\text{Hot}^-(\mathcal{P})$  liefert die Transformation aus der Definition des Linksderivierten Isomorphismen. Besitzt  $\mathcal{B}$  genügend Projektive, so besitzt folglich jeder additive Funktor einen Linksderivierten, und dieser kann durch "projektive Auflösungen" berechnet werden.

### 5.12 Wohl nicht hier

**Proposition 5.12.1.** *Sei  $\mathcal{T}$  eine triangulierte Kategorie mit zwei Verdier-systemen  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{N}$ . Faktorisiert jeder Morphismus  $U \rightarrow N$  mit  $U \in \mathcal{U}$  und  $N \in \mathcal{N}$  über ein Objekt von  $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}$ , so definiert der offensichtliche Funktor eine volltreue Einbettung*

$$\mathcal{U}/\mathcal{U} \cap \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{N}$$

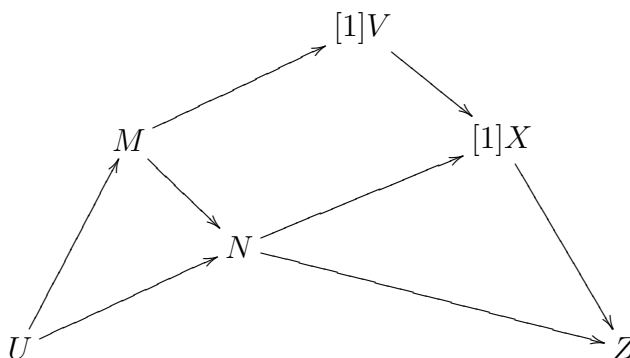
*Dasselbe gilt, wenn jeder Morphismus  $N \rightarrow U$  mit  $N \in \mathcal{N}$  und  $U \in \mathcal{U}$  über ein Objekt von  $\mathcal{N} \cap \mathcal{U}$  faktorisiert.*

5.12.2. Ich bin noch nicht sicher, ob diese Proposition wirklich hilfreich ist.

*Beweis.* Wir wenden 4.3.6 an und müssen nur zeigen, daß es für jeden Morphismus  $s; X \rightarrow U$  mit Abbildungskegel in  $\mathcal{N}$  und  $X \in \mathcal{T}, U \in \mathcal{U}$  einen Morphismus  $h : V \rightarrow X$  gibt mit  $V \in \mathcal{U}$  und dem Abbildungskegel von  $s \circ h$  in  $\mathcal{N}$ . Dazu betrachten wir das ausgezeichnete Dreieck

$$X \rightarrow U \rightarrow N \rightarrow$$

und faktorisieren den zweiten Pfeil als  $U \rightarrow M \rightarrow N$  mit  $N \in \mathcal{U} \cap \mathcal{N}$  in den Annahmen unserer Proposition. Bilden wir zu dieser Komposition den Oktaeder



so haben wir sicher  $V \in \mathcal{U}$  und der Abbildungskegel über  $h : V \rightarrow X$  ist  $[-1]M$ , woraus sofort folgt, daß auch der Abbildungskegel von  $s \circ h$  in  $\mathcal{N}$  liegt. □

### 5.13 Derivierte Kategorien, ALT

**Definition 5.13.1.** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. So definieren wir die **gegen die Pfeile beschränkte derivierte Kategorie**  $\text{Der}^+(\mathcal{A})$  (oder  $\text{Der}_{\mathcal{A}}^+$  und in der Literatur meist  $D^+\mathcal{A}$ ) wie folgt:

Als Objekte von  $\text{Der}^+(\mathcal{A})$  nehmen wir die Objekte von  $\text{Hot}^+(\mathcal{A})$ . Die Morphismen  $A^* \rightarrow B^*$  sind formal abhängig von der Wahl einer injektiven Auflösung  $I^*(A^*)$  für jeden Komplex  $A^* \in \text{Hot}^+(\mathcal{A})$  und werden gegeben durch die Vorschrift

$$\text{Der}_{\mathcal{A}}^+(A^*, B^*) = \text{Hot}_{\mathcal{A}}^+(I^*(A^*), I^*(B^*))$$

*Bemerkungen 5.13.2.* 1. Ist  $A^* \rightarrow J^*(A^*)$  eine andere Wahl von injektiven Auflösungen, so liefert die Identität auf  $A^*$  in der Homotopiekategorie wohlbestimmte Isomorphismen  $I^*(A^*) \xrightarrow{\sim} J^*(A^*)$ . Das zeigt, daß die Morphismen in unserer derivierten Kategorie im Wesentlichen nicht von der Wahl der injektiven Auflösungen abhängen.

2. Eine konzeptionell vielleicht befriedigendere, aber technisch mühsamere Alternative zur obigen Definition ist, auf der disjunkten Vereinigung der  $\text{Hot}_{\mathcal{A}}^+(I^*, J^*)$  über alle injektiven Auflösungen  $A \rightarrow I^*$ ,  $B \rightarrow J^*$  eine geeignete Äquivalenzrelation einzuführen und die Homomorphismenmengen in  $\text{Der}^+(\mathcal{A})$  als Äquivalenzklassen zu erklären. Diese Vorgehensweise hätte jedoch den Nachteil, uns in Randgebiete der Mengenlehre zu locken.

3. Für eine beliebige abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  definiert man die derivierten Kategorien  $\text{Der}(\mathcal{A})$  bzw.  $\text{Der}^+(\mathcal{A})$ , indem man in den Homotopiekategorien  $\text{Hot}(\mathcal{A})$  bzw.  $\text{Hot}^+(\mathcal{A})$  alle Quasiisomorphismen "formal invertiert", ähnlich wie beim Übergang von  $\mathbb{Z}$  zu  $\mathbb{Q}$  alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen formal invertiert werden. Im Kontext der Ringtheorie hat sich für Konstruktionen dieser Art die Bezeichnung "Lokalisierung" eingebürgert, und in Anlehnung daran spricht man dann auch von der "Lokalisierung der Homotopiekategorie nach allen Quasiisomorphismen".

Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Bezeichnet  $\mathcal{I}$  die additive Kategorie der injektiven Objekte von  $\mathcal{A}$ , so haben wir per definitionem eine Äquivalenz von Kategorien

$$\text{Hot}^+(\mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} \text{Der}^+(\mathcal{A})$$

Wir nennen ein Dreieck in  $\text{Der}^+(\mathcal{A})$  **ausgezeichnet** genau dann, wenn es zu einem ausgezeichneten Dreieck aus  $\text{Hot}^+(\mathcal{I})$  isomorph ist. Lemma 3.4.3 liefert uns einen additiven Funktor

$$\text{Hot}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Der}^+(\mathcal{A})$$

der ausgezeichnete Dreiecke zu ausgezeichneten Dreiecken macht und der nach ?? volltreu ist auf der Unterkategorie  $\mathcal{A} \hookrightarrow \text{Hot}^+(\mathcal{A})$  der in Grad Null

konzentrierten Komplexe. Die Homologiefunktoren  $\mathcal{H}^i : \text{Hot}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  faktorisieren per definitionem über Funktoren  $\mathcal{H}^i : \text{Der}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  und jedes ausgezeichnete Dreieck in  $\text{Der}^+(\mathcal{A})$  liefert so eine lange exakte Homologiesequenz in  $\mathcal{A}$ .

## 6 Viel Später?!

### 6.1 Spektralsequenzen

6.1.1. Man betrachte eine filtrierte differentielle abelsche Gruppe, also eine differentielle abelsche Gruppe  $(T, \partial)$  im Sinne von II.1.3.8 mit einer Filtrierung  $\dots \supset T^{\geq q} \supset T^{\geq q+1} \supset \dots$  durch unter  $\partial$  stabile Untergruppen. Die sogenannten ‘‘Spektralsequenzen’’ sind ein Begriffsapparat, der es erlaubt, die assoziierte graduierte Gruppe  $\text{gr}\mathcal{H}T$  zur auf der Homologie induzierten Filtrierung mit der Homologie  $\mathcal{H}\text{gr}T$  der assoziierten graduierten differentiellen abelschen Gruppe zu vergleichen. Eine präzise Formulierung der Beziehung zwischen diesen beiden graduierten abelschen Gruppen wird in 6.1.8 gegeben. Die auf der Homologie  $\mathcal{H}T = \ker \partial / \text{im } \partial$  induzierte Filtrierung ist hierbei im Sinne von ?? zu verstehen. Man beachte, daß diese assoziierte graduierte differentielle abelsche Gruppe keine dg-Gruppe im Sinne unserer Definition II.1.3.8 ist. Vielmehr hat im vorliegenden Fall das Differential Grad Null, so daß wir in anderen Worten eine durch  $q \in \mathbb{Z}$  indizierte direkte Summe von differentiellen abelschen Gruppen vor uns haben.

6.1.2. In den meisten Anwendungen trägt unsere differentielle abelsche Gruppe zusätzlich noch eine Graduierung, bezüglich derer das Differential Grad Eins hat und bezüglich derer die Untergruppen unserer Filtrierung homogen sind. In anderen Worten geht man dann also aus von einem Komplex

$$\dots \rightarrow T^n \xrightarrow{\partial} T^{n+1} \rightarrow \dots$$

von filtrierten abelschen Gruppen  $\dots \supset T^{n, \geq q} \supset T^{n, \geq q+1} \supset \dots$ . Ich denke mir den Komplex ‘‘horizontal’’ und die Filtrierung ‘‘vertikal’’, aber das mag jeder halten, wie er will. Da ich nun obere Indizes schreibe und das Differential Grad Eins hat, muß und werde ich in Übereinstimmung mit unseren allgemeinen Konventionen statt ‘‘Homologie’’ von nun an ‘‘Kohomologie’’ sagen. Ich gebe gleich ein Beispiel in diesem graduierten Fall, bespreche dann jedoch die Theorie zunächst einmal im ungraduierten Fall.

*Beispiel 6.1.3.* Im Spezialfall einer zwei-Schritt-Filtrierung, wenn wir also etwa haben  $T^n = T^{n, \geq -1} \supset T^{n, \geq 0} \supset T^{n, \geq 1} = 0$  für alle  $n$ , wird der gewünschte Vergleich geleistet von der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz  $\text{gr}^0 T^* \hookrightarrow T^* \twoheadrightarrow \text{gr}^{-1} T^*$  von Komplexen. Diese Kohomologiesequenz kann man in der Tat auch lesen als eine Sammlung von exakten Sequenzen

$$\text{gr}^{-1} \mathcal{H}^{n-1} T^* \hookrightarrow \mathcal{H}^{n-1} \text{gr}^{-1} T^* \rightarrow \mathcal{H}^n \text{gr}^0 T^* \twoheadrightarrow \text{gr}^0 \mathcal{H}^n T^*$$

**Definition 6.1.4.** Eine (**ungraduierte**) **Spektralsequenz** ist ein Datum  $(E_r^q, \partial, \text{can})$  bestehend aus abelschen Gruppen  $E_r^q$  für alle  $r \in \mathbb{N}$  und  $q \in \mathbb{Z}$  sowie Homomorphismen  $\partial = \partial_r^q : E_r^q \rightarrow E_r^{q+r}$  mit  $\partial^2 = 0$  und Identifikationen  $\text{can} = \text{can}_r^q : E_{r+1}^q \xrightarrow{\sim} \ker \partial_r^q / \text{im } \partial_r^{q-r}$  oder salopp geschrieben

$$\text{can} : E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}E_r$$

Ein Homomorphismus von (ungraduierten) Spektralsequenzen ist definiert in der offensichtlichen Weise: Ist  $(F_r^q, \partial, \text{can})$  eine weitere Spektralsequenz, so verstehen wir darunter eine Familie von Homomorphismen  $f_r^q : E_r^q \rightarrow F_r^q$  derart, daß “alles mögliche” kommutiert.

### 6.1.5 (Spektralsequenz filtrierter differentieller abelscher Gruppen).

Gegeben eine filtrierte differentielle abelsche Gruppe  $(T, \partial)$  setze man für  $r \in \mathbb{Z}$  ganz allgemein  $T_r^{\geq q} = \{a \in T^{\geq q} \mid \partial a \in T^{\geq q+r}\}$ . In Worten ist das für  $r \geq 0$  der Raum aller Elemente aus der Filtrierungsstufe  $\geq q$ , die unter dem Differential in der um  $r$  höheren Filtrierungsstufe landen, und für  $r \leq 0$  haben wir  $T_r^{\geq q} = T^{\geq q}$ . Dann betrachte man die Quotienten

$$E_r^q := T_r^{\geq q} / (\partial T_{r-1}^{\geq q-(r-1)} + T_{r-1}^{\geq q+1})$$

und die von  $\partial$  induzierten Gruppenhomomorphismen

$$\partial_r = \partial_r^q : E_r^q \rightarrow E_r^{q+r}$$

Man erkennt unschwer, daß die Surjektionen  $T_r^{\geq q} \rightarrow E_r^q$  auch Surjektionen  $s : T_{r+1}^{\geq q} \rightarrow \ker \partial_r^q$  induzieren. Wir zeigen im Anschluß in 6.1.6 noch, daß diese Surjektionen hinwiederum Isomorphismen  $\text{can} : E_{r+1}^q \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}E_r$  oder genauer

$$\text{can} : E_{r+1}^q \xrightarrow{\sim} \ker \partial_r^q / \text{im } \partial_r^{q-r}$$

liefern. Damit steht die Spektralsequenz einer filtrierten differentiellen abelschen Gruppe dann auch schon da. Wir interessieren uns nur  $E_r, \partial_r$  und  $\text{can}_r$  für  $r \geq 0$ , da für  $r < 0$  gilt  $\partial_r = 0$  und da dann  $\text{can}_r$  die offensichtliche Identifikation ist.

6.1.6. Es reicht in 6.1.5, wenn wir zeigen  $s^{-1}(\text{im } \partial_r^{q-r}) = \partial T_r^{\geq q-r} + T_r^{\geq q+1}$ . Links steht die Menge aller  $a \in T_{r+1}^{\geq q}$  mit  $a \in \partial T_r^{\geq q-r} + \partial T_{r-1}^{\geq q-(r-1)} + T_{r-1}^{\geq q+1}$ . Der letzte Summand ist hier eh im ersten Summanden enthalten, so daß es reicht, die Identität  $T_{r+1}^{\geq q} \cap (\partial T_r^{\geq q-r} + T_{r-1}^{\geq q+1}) = \partial T_r^{\geq q-r} + T_r^{\geq q+1}$  zu zeigen. Die Inklusion  $\supset$  ist dabei offensichtlich. Um die andere Inklusion einzusehen bemerken wir, daß aus  $a = b + c$  mit  $a \in T_{r+1}^{\geq q}$ ,  $b \in \partial T_r^{\geq q-r}$  und  $c \in T_{r-1}^{\geq q+1}$  bereits folgt  $\partial a = \partial c \in T^{\geq q+(r-1)}$  und somit  $c \in T_r^{\geq q+1}$ .

**Definition 6.1.7** ( $E_\infty$ -Term einer ungraduerten Spektralsequenz). Falls es bei einer ungraduerten Spektralsequenz an einer Stelle  $q$  ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt derart, daß für alle  $n \geq k$  das nach  $E_n^q$  einlaufende Differential und das von  $E_n^q$  auslaufende Differential verschwinden, so liefern unsere Isomorphismen can aus der Definition Identifikationen  $E_k^q \xrightarrow{\sim} E_{k+1}^q \xrightarrow{\sim} \dots$  und wir bezeichnen diese Gruppe oder präziser den direkten Limes dieses Systems mit  $E_\infty^q$ .

6.1.8. Gegeben eine filtrierte differentielle abelsche Gruppe  $(T, \partial)$  haben wir nach unserer Definition 6.1.5 stets

$$\mathrm{gr}^q T = E_0^q$$

und das Differential  $\partial_0$  fällt zusammen mit  $\mathrm{gr} \partial$ , so daß wir auch kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{H}\mathrm{gr}^q T \xrightarrow{\sim} E_1^q$$

erhalten. Ist unsere ursprüngliche Filtrierung endlich, gibt es also  $k$  und  $g$  mit  $T^{\geq g} = 0$  und  $T^{\geq k} = T$ , so sind für  $r \geq g - k$  offensichtlich alle Differentiale  $\partial_r$  Null und die Identität  $T^{\geq q} \cap (\ker \partial) = T_r^{\geq q}$  liefert Isomorphismen  $\mathrm{gr}^q \mathcal{H}T \xrightarrow{\sim} E_r^q$  und damit natürlich auch

$$\mathrm{gr}^q \mathcal{H}T \xrightarrow{\sim} E_\infty^q$$

Die in 6.1.1 versprochene Beschreibung der Beziehung zwischen  $\mathcal{H}\mathrm{gr}^q T = E_1^q$  und  $\mathrm{gr}^q \mathcal{H}T \cong E_\infty^q$  ist also im allgemeinen leider recht unübersichtlich. In vielen konkreten Anwendungsfällen ist die hier gegebene Beschreibung aber dennoch nützlich.

6.1.9 (**Funktorialität der Spektralsequenz**). Die eben vorgestellte Konstruktion der Spektralsequenz ist in offensichtlicher Weise funktoriell: Jeder Morphismus  $(T, \partial) \rightarrow (S, \partial)$  von filtrierten differentiiellen abelschen Gruppen induziert Gruppenhomomorphismen  $E_r^q(T) \rightarrow E_r^q(S)$ , die verträglich sind mit den Differentialen  $\partial_r$  und den Identifikationen  $\mathrm{can} : E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}E_r$ .

6.1.10 (**Produktstruktur der Spektralsequenz**). Das Tensorprodukt zweier differentiieller abelscher Gruppen kann meines Wissens nicht in natürlicher Weise mit einem Differential versehen werden, weshalb wir uns im folgenden auf differentielle graduierte Gruppen beschränken. Gegeben filtrierte dg-Gruppen  $T, S$  versehen wir ihr Tensorprodukt  $T \otimes S$  mit seiner dg-Struktur aus II.3.4.1 und erklären darauf eine Filtrierung durch die Vorschrift

$$(T \otimes S)^{\geq q} := \sum_{k+l=q} \mathrm{ten}(T^{\geq k} \otimes S^{\geq l})$$



für ten das Tensorprodukt der jeweiligen Einbettungsabbildungen. Man prüft unschwer, daß das Tensorprodukt der jeweiligen Einbettungsabbildungen Abbildungen  $T_r^{\geq k} \otimes S_r^{\geq l} \rightarrow (T \otimes S)_r^{\geq k+l}$  induziert und dann auch Abbildungen

$$E_r^k(T) \otimes E_r^l(S) \rightarrow E_r^{k+l}(T \otimes S)$$

die ihrerseits Morphismen von dg-Gruppen für die von den Differentialen  $\partial_r$  induzierten Differentiale werden.

**6.1.11 (Spektralsequenz im graduierten Fall).** Jetzt gehen wir den graduierten Fall an, bei dem man wie bereits erwähnt von einem Komplex

$$\dots \rightarrow T^n \xrightarrow{\partial} T^{n+1} \rightarrow \dots$$

von filtrierten abelschen Gruppen  $\dots \supset T^{n, \geq q} \supset T^{n, \geq q+1} \supset \dots$  ausgeht. Dafür bilde man ganz allgemein  $T_r^{n, \geq q} = \{a \in T^{n, \geq q} \mid \partial a \in T^{n+1, \geq q+r}\}$  alias in Worten den Raum aller Elemente homogen vom Grad  $n$  aus der Filtrierungsstufe  $\geq q$ , die unter dem Differential in einer um  $r$  höheren Filtrierungsstufe landen, und betrachte die Quotienten

$$E_r^{(n, q)} = T_r^{n, \geq q} / (\partial T_{r-1}^{n-1, \geq q-(r-1)} + T_{r-1}^{n, \geq q+1})$$

und die von  $\partial$  induzierten Gruppenhomomorphismen

$$\partial_r : E_r^{(n, q)} \rightarrow E_r^{(n+1, q+r)}$$

Man erkennt unschwer, daß die Surjektionen  $T_r^{n, \geq q} \twoheadrightarrow E_r^{(n, q)}$  auch Surjektionen  $s : T_{r+1}^{n, \geq q} \twoheadrightarrow \ker \partial_r$  induzieren. Genau wie in 6.1.6 zeigt man, daß diese Surjektionen hinwiederum Isomorphismen  $\text{can} : E_{r+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}E_r$  liefern.

**6.1.12.** Das Vorhergehende ist eine offensichtliche Variante des ungraduierten Falles, und damit haben wir dann unsere Spektralsequenz einer filtrierten differentiellen graduierten abelschen Gruppe im Wesentlichen auch schon konstruiert. Die einzige zusätzliche Schwierigkeit und der Grund für die merkwürdigen Klammern, mit denen wir die oberen Indizes bei den Termen unserer graduierten Spektralsequenz versehen haben, besteht nun darin, daß üblicherweise die Indizierung noch dem besonders häufig auftretenden Fall eines Doppelkomplexes  $(A^{p, q}, \partial, \delta)$  im Sinne von 2.1.1 angepaßt wird. Wir denken uns  $p$  nach rechts und  $q$  nach oben aufgetragen. Betrachtet man in diesem Fall auf dem Totalkomplex  $T^n$  aus 2.1.1 die Filtrierung durch

$$T^{n, \geq q} = \bigoplus_{p+j=n, j \geq q} A^{p, j}$$

so ergibt sich mit unseren Notationen von oben gerade  $E_0^{(n,q)} = A^{n-q,q}$  und als Differential  $\partial_0$  erhalten wir schlicht das horizontale Differential  $\partial$  unseres Doppelkomplexes. Es ist nun sinnvoll und üblich, die Indizierung umzustellen durch  $E_r^{p,q} := E_r^{(p+q,q)}$  alias  $E_r^{(n,q)} = E_r^{n-q,q}$  derart, daß wir mit dieser Notation in unserem Spezialfall eines Doppelkomplexes die Formel

$$E_0^{p,q} = A^{p,q}$$

und  $\partial_0 = \partial$  das horizontale Differential unseres Doppelkomplexes erhalten. Weiter prüft man, daß in diesem Fall eines Doppelkomplexes  $E_1^{p,q} = \mathcal{H}^p(A^{*,q}, \partial)$  die Kohomologie der waagerechten Komplexe ist und  $\partial_1$  vom mit geeigneten Vorzeichen versehenen senkrechten Differential  $\delta$  unseres Doppelkomplexes induziert wird. Dieses Umindizieren hat aber dann natürlich auch den Effekt, daß die Differentiale Abbildungen  $\partial_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+1-r,q+r}$  werden. Wir erhalten so ganz allgemein zu jeder filtrierten dg-Gruppe eine graduierte Spektralsequenz im Sinne der folgenden Definition.

**Definition 6.1.13.** Eine (**graduierte**) **Spektralsequenz** ist ein Datum  $(E_r^{p,q}, \partial, \text{can})$  bestehend aus

1. Einer Familie von abelschen Gruppen  $(E_r^{p,q})$  für  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $r \in \mathbb{N}$  mitsamt Gruppenhomomorphismen  $\partial = \partial_r = \partial_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+1-r,q+r}$  mit der Eigenschaft  $\partial^2 = 0$ ; die  $\partial_r$  haben also "Bigrad"  $(1-r, r)$ ;
2. Einer Familie von Isomorphismen  $\text{can} : E_{r+1}^{p,q} \xrightarrow{\sim} (\ker \partial_r / \text{im } \partial_r)$  für  $\partial_r$  das von  $E_r^{p,q}$  auslaufende bzw. das nach  $E_r^{p,q}$  einlaufende Differential, die also die  $E_{r+1}^{p,q}$  mit der Kohomologie von  $(E_r^{p,q}, \partial_r)$  identifizieren.

Die bigraduierte differentielle abelsche Gruppe  $E_r^{p,q}$  heißt der  $E_r$ -**Term** unserer Spektralsequenz. Wie zuvor hängen die Gruppen  $E_{r+1}^{p,q}$  hierbei zwar bis auf Isomorphismus nur von den Daten  $(E_r^{p,q}, \partial_r)$  ab, das Differential  $\partial_{r+1}$  wird jedoch durch diese Daten nicht bestimmt.

**Definition 6.1.14** ( **$E_\infty$ -Term einer graduierten Spektralsequenz**). Falls es bei einer graduierten Spektralsequenz an einer Stelle  $(p, q)$  ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt derart, daß für alle  $n \geq k$  das nach  $E_n^{p,q}$  einlaufende Differential und das von  $E_n^{p,q}$  auslaufende Differential verschwinden, so liefern unsere Isomorphismen  $\text{can}$  aus der Definition Identifikationen  $E_k^{p,q} \xrightarrow{\sim} E_{k+1}^{p,q} \xrightarrow{\sim} \dots$  und wir bezeichnen diese Gruppe oder präziser den direkten Limes dieses Systems mit  $E_\infty^{p,q}$ .

6.1.15. Gegeben  $(T^{n,\geq q}, \partial)$  eine filtrierte differentielle graduierte abelsche Gruppe haben wir nach unserer Definition 6.1.11 stets

$$\text{gr}^q T^n = E_0^{(n,q)}$$

und das Differential  $\partial_0$  fällt zusammen mit  $\text{gr } \partial$ , so daß wir auch kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{H}^n \text{gr}^q T \xrightarrow{\sim} E_1^{(n,q)} \quad \text{alias} \quad \mathcal{H}^{p+q} \text{gr}^q T \xrightarrow{\sim} E_1^{p,q}$$

erhalten. Ist unsere ursprüngliche Filtrierung in jedem Grad  $n$  endlich, gibt es also für alle  $n$  Indizes  $k = k_n$  und  $g = g_n$  mit  $T^{n, \geq g} = 0$  und  $T^{n, \geq k} = T^n$ , so sind für hinreichend großes  $r$  offensichtlich alle Differentiale  $\partial_r$  Null und die Identität  $T^{n, \geq q} \cap (\ker \partial) = T_r^{n, \geq q}$  liefert Isomorphismen  $\text{gr}^q \mathcal{H}^n T \xrightarrow{\sim} E_r^{(n,q)}$  und damit natürlich auch

$$\text{gr}^q \mathcal{H}^n T \xrightarrow{\sim} E_\infty^{(n,q)} \quad \text{alias} \quad \text{gr}^q \mathcal{H}^{p+q} T \xrightarrow{\sim} E_\infty^{p,q}$$

6.1.16. Betrachten wir speziell einen Doppelkomplex im ersten Quadranten und sind wie in 2.1.3 alle Zeilen unseres Doppelkomplexes exakt an allen Stellen  $A^{p,q}$  mit  $p \neq 0$ , so liefert unser Formalismus hier mit den Notationen 2.1.3 unmittelbar  $E_1^{0,q} = K_\uparrow^q$  und  $E_1^{p,q} = 0$  für  $p \neq 0$  sowie  $E_2^{0,q} = E_\infty^{0,q} = \mathcal{H}^q(K_\uparrow^*)$  und natürlich auch  $E_\infty^{p,q} = 0$  für  $p \neq 0$ . Jede Kohomologiegruppe des Totalkomplexes besteht mithin aus einer einzigen Filtrierungsstufe und wir erhalten so unsere Isomorphismen  $\mathcal{H}^n(K_\uparrow^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^n T$  aus 2.1.3 zwischen der Kohomologie des senkrechten Kernkomplexes und der Kohomologie des Totalkomplexes nocheinmal neu als Konsequenzen der allgemeinen Theorie.

*Beispiel* 6.1.17. Sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer Folge

$$X = X_a \supset X_{a+1} \supset \dots \supset X_b = \emptyset$$

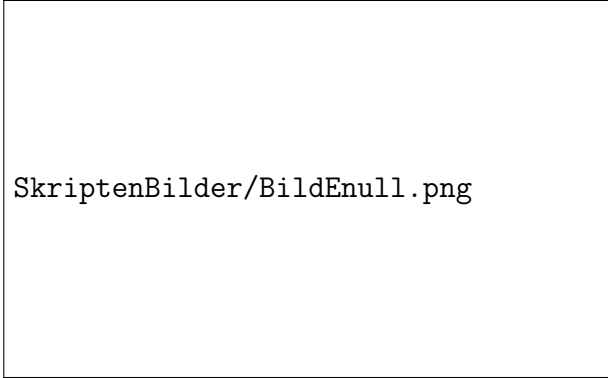
von abgeschlossenen Teilräumen. Sei  $\mathcal{F} \in \text{Der}^+(\text{Ab}/X)$  ein gegen die Pfeile beschränkter Komplex abelscher Garben auf  $X$ . Um die Hyperkohomologie  $\mathbb{H}^n(X; \mathcal{F})$  zu berechnen, wählt man eine gegen die Pfeile beschränkte injektive Auflösung  $\mathcal{F} \xrightarrow{\text{inj}} \mathcal{I}$  und findet per definitionem  $\mathbb{H}^n(X; \mathcal{F}) = \mathcal{H}^n \Gamma(X; \mathcal{I}^*)$ . Der Komplex der globalen Schnitte  $\Gamma(X; \mathcal{I}^n)$  ist nun sicher filtriert durch die

$$\Gamma(X; \mathcal{I}^n)^{\geq q} := \{s \in \Gamma(X; \mathcal{I}^n) \mid \text{sup } s \subset X_q\}$$

Seine Kohomologie ist also nach 6.1.11 und ?? (zu ergänzen!) der Grenzwert einer Spektralsequenz mit  $E_1$ -Term

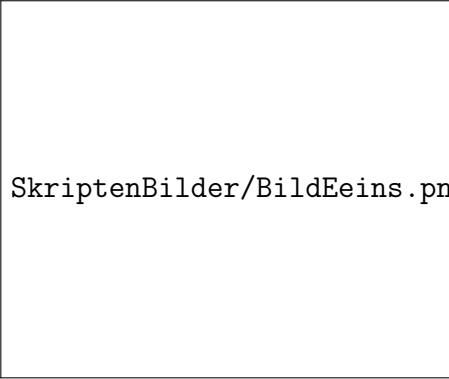
$$E_1^{p,q} = \mathbb{H}^{p+q} i_q^! \mathcal{F}$$

für  $i_q : X_q \setminus X_{q+1} \hookrightarrow X$  die Einbettung und mit einem Differential  $\partial_r$  vom Bigrad  $(1-r, r)$ .




SkriptenBilder/BildEnull.png

Die  $E_0$ -Terme einer Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen




SkriptenBilder/BildEeins.png

Die  $E_1$ -Terme einer Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen




SkriptenBilder/BildEdrei.png

Die  $E_2$ -Terme einer Spektralsequenz mit den zugehörigen Differentialen



SkriptenBilder/BildDnull.png

Die  $E_0$ -Terme der Spektralsequenz zu einem Komplex mit  
Zwei-Schritt-Filtrierung



SkriptenBilder/BildDeins.png

Die  $E_1$ -Terme der Spektralsequenz zu einem Komplex mit  
Zwei-Schritt-Filtrierung. Die Differentiale  $\partial_n$  für  $n \geq 2$  laufen alle nach Null  
oder kommen von Null, folglich haben wir  $E_2 = E_\infty$ .

## 6.2 Bidualität für Kettenkomplexe

6.2.1. Gegeben ein Komplex von abelschen Gruppen  $M$  erklären wir den **dualen Komplex** als

$$\mathbb{D}M = R\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}[0])$$

Ausgeschrieben können wir etwa zu  $\mathbb{Z}$  die injektive Auflösung  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  betrachten, sie abkürzen zu  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$  und  $\mathbb{D}M$  als den Hom-Komplex  $\mathbb{D}M = \mathrm{Hom}(M, \tilde{\mathbb{Z}})$  beschreiben. Das Einsetzen liefert eine kanonische Kettenabbildung  $M \rightarrow \mathbb{D}M$  und ich behaupte, daß diese Kettenabbildung für Komplexe  $M$ , für die alle Kohomologiegruppen  $\mathcal{H}^q M$  endlich erzeugt sind, ein Quasiisomorphismus

$$M \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}M$$

ist. In der Tat hängen wegen der Endlichkeit des Komplexes  $\tilde{\mathbb{Z}}$  die Einträge von  $\mathbb{D}M$  nur von den höchstens um Zwei im Grad entfernten Einträgen von  $M$  ab, so daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $M$  beschränkt annehmen dürfen. Mit dévissage ziehen wir uns dann auf den Fall  $M = \mathbb{Z}$  zurück, und der ist klar.

## 6.3 Relative Kategorientheorie

**Definition 6.3.1.** Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor. Wir sagen, ein Morphismus von  $\mathcal{C}$  **liege über** einem Morphismus von  $\mathcal{B}$  genau dann, wenn er unter unserem Funktor darauf abgebildet wird. Gegeben ein Objekt  $B \in \mathcal{B}$  definiert man die **Faser von  $F$  über  $B$**  als die Kategorie  $\mathcal{C}_B$  mit Objekten  $\{C \in \mathcal{C} \mid F(C) = B\}$  und Morphismen

$$\mathcal{C}_B(C, C') = \{\varphi \in \mathcal{C}(C, C') \mid F(\varphi) = \mathrm{id}_B\}$$

und der von  $\mathcal{C}$  induzierten Verknüpfung.

6.3.2. Ich hoffe, daß diese Notation nicht zu Verwirrung mit unserer Notation  $\mathcal{C}_X$  aus I.3.1.1 führt. Die genaue Beziehung wird in 6.3.5 erklärt. Gegeben die terminale Kategorie  $\mathrm{cat}$  mit einem Objekt und einem Morphismus läßt sich die Faser auch beschreiben als das Faserprodukt  $\mathrm{cat} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{C}$  in der Kategorie  $\mathrm{Cat}$  der Kategorien, zu verstehen in Bezug auf den durch das Objekt  $B$  gegebenen Funktor  $\mathrm{cat} \rightarrow \mathcal{B}$ .

**Definition 6.3.3.** Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor. Ein Morphismus  $m : C' \rightarrow C$  in  $\mathcal{C}$  heißt  **$F$ -kartesisch** oder auch abkürzend **kartesisch** genau dann, wenn für alle  $A \in \mathcal{C}_{F(C')}$  das Nachschalten von  $m$  eine Bijektion liefert

$$(m \circ) : \mathcal{C}_{F(C')}(A, C') \xrightarrow{\sim} \{\varphi : A \rightarrow C \mid F(\varphi) = F(m)\}$$

*Beispiel 6.3.4.* Gilt hier  $F(C') = F(C)$ , so sind die  $F$ -kartesischen Morphismen  $C' \rightarrow C$  genau alle Isomorphismen, die unter  $F$  die Identität werden.

*Beispiel 6.3.5.* Sei  $\mathcal{B}$  irgendeine Kategorie und  $\mathcal{C}$  die Kategorie aller Köcher-morphismen nach  $\mathcal{B}$  des Köchers  $\downarrow$  mit zwei Punkten und einem Pfeil vom einen zum anderen, in Formeln

$$\mathcal{C} := \text{Car}(\downarrow, \mathcal{B})$$

Denken wir uns den einzigen Pfeil dieses Köchers wie angedeutet “vertikal”, so sind die Objekte von  $\mathcal{C}$  “vertikale” Morphismen in  $\mathcal{B}$  und Morphismen in  $\mathcal{C}$  Paare von “horizontalen” Morphismen in  $\mathcal{B}$  derart, daß mit den gegebenen vertikalen Morphismen kommutative Quadrate entstehen. Ist schließlich  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  der Funktor, der jedem Morphismus sein Ziel zuordnet, so ist die Faser  $\mathcal{C}_B$  über  $B \in \mathcal{B}$  gerade unsere Kategorie  $\mathcal{B}_B$  aller Objekte von  $\mathcal{B}$  über  $B$  aus I.3.1.1, und die bezüglich  $F$  kartesischen Morphismen in  $\mathcal{C}$  sind genau diejenigen Paare von Morphismen in  $\mathcal{B}$ , die in  $\mathcal{B}$  kartesische Quadrate entstehen lassen.

*Beispiel 6.3.6.* Hier kommt noch eine konkretere Variante. Sei  $\mathcal{B} = \text{Top}$  die Kategorie der topologischen Räume und  $\mathcal{C} = \acute{\text{E}}\text{t}$  die Kategorie, deren Objekte étale Abbildungen  $(p : \tilde{X} \rightarrow X)$  sind und deren Morphismen Paare  $\tilde{f} = (\tilde{f}, f)$  stetiger Abbildungen derart, daß

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

kommutiert. Betrachten wir den Funktor  $F : \acute{\text{E}}\text{t} \rightarrow \text{Top}, (p : \tilde{X} \rightarrow X) \mapsto X$ , so sind die kartesischen Morphismen in  $\acute{\text{E}}\text{t}$  gerade diejenigen Morphismen  $(\tilde{f}, f)$ , für die das obige Diagramm kartesisch ist.

## 6.4 Faserungen von Kategorien

**Definition 6.4.1.** Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt ein **Faserfunkt**or von der Ausgangskategorie  $\mathcal{C}$  zur Basiskategorie  $\mathcal{B}$  genau dann, wenn (1) die Verknüpfung  $F$ -kartesischer Morphismen in  $\mathcal{C}$  stets  $F$ -kartesisch ist und wenn es darüber hinaus (2) für jeden Morphismus  $g : B' \rightarrow B$  in  $\mathcal{B}$  und jedes Objekt  $C \in \mathcal{C}_B$  über  $B$  einen  $F$ -kartesischen Morphismus  $\tilde{g} : C' \rightarrow C$  gibt mit  $F(\tilde{g}) = g$ . Ein Funktor heißt ein **Kofaserfunkt**or genau dann, wenn der auf den opponierten Kategorien induzierte Funktor ein Faserfunktor ist.

6.4.2. Man beachte, daß ein Faserfunktors gefolgt von einer Äquivalenz kein Faserfunktors mehr zu sein braucht.

*Beispiel 6.4.3.* Unser Funktors  $\dot{\text{Et}} \rightarrow \text{Top}$  von eben ist ein Faserfunktors. Bezeichnet  $\text{Ens}_{\text{Top}}$  die Kategorie, deren Objekte Garben über topologischen Räumen sind und deren Morphismen  $(\mathcal{F}, X) \rightarrow (\mathcal{G}, Y)$  Paare bestehend aus einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  nebst einem stetigen Lift  $\tilde{f} : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ , so ist auch der offensichtliche Funktors  $\text{Ens}_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  ein Faserfunktors. Bezeichnet weiter  $\text{Ab}_{\text{Top}}$  die Kategorie, deren Objekte abelsche Garben über topologischen Räumen sind und deren Morphismen  $(\mathcal{F}, X) \rightarrow (\mathcal{G}, Y)$  Paare bestehend aus einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  nebst einem Lift  $\tilde{f} : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ , der Gruppenhomomorphismen auf den Halmen induziert, so ist ebenso der offensichtliche Funktors  $\text{Ab}_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  ein Faserfunktors.

6.4.4. Faserfunktors trifft man meist in der weniger eleganten Verkleidung einer ‘‘Kategorienfaserung’’ an, die ich in 2.4.1 eingeführt habe. Die Beziehung zwischen beiden Begriffsbildungen besprechen wir in den beiden anschließenden Bemerkungen.

6.4.5. Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Faserfunktors, und ordnen wir jedem Objekt  $B \in \mathcal{B}$  als Kategorie seine Faser  $\mathcal{C}_B$  zu und bilden zu jedem Morphismus  $f : B' \rightarrow B$  einen Funktors  $f^* : \mathcal{C}_B \rightarrow \mathcal{C}_{B'}$ , indem wir erst willkürlich zu jedem Objekt  $X \in \mathcal{C}_B$  einen kartesischen Lift  $\tilde{f}_X : X' \rightarrow X$  von  $f$  wählen und  $f^*(X) = X'$  setzen, dann für Morphismen  $\varphi : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}_B$  als  $f^*(\varphi)$  den aufgrund der kartesischen Eigenschaft der unteren Horizontale eindeutig bestimmten Morphismus in  $\mathcal{C}_{B'}$  nehmen, für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^*(X) & \xrightarrow{\tilde{f}_X} & X \\ f^*(\varphi) \downarrow & & \varphi \downarrow \\ f^*(Y) & \xrightarrow{\tilde{f}_Y} & Y \end{array}$$

kommutiert, und dann Isotransformationen  $c : g^* \circ f^* \xrightarrow{\sim} (f \circ g)^*$  bilden in hoffentlich offensichtlicher Weise, so erhalten wir aus unserem Faserfunktors eine Kategorienfaserung. Die nach dem vorhergehenden im wesentlichen eindeutigen Funktors  $f^*$  heißen **inverse Bilder** unseres Faserfunktors. Im Fall eines Kofaserfunktors nennen wir die entsprechenden Funktors **direkte Bilder** und notieren sie oft  $f_*$ .

**Satz 6.4.6 (Von Kategorienfaserungen zu Faserfunktors).** *Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{B}$  und eine Kategorienfaserung  $\mathcal{C}$  über  $\mathcal{B}$  im Sinne und mit den Notationen von 2.4.1 erhalten wir einen Faserfunktors wie folgt:*



6.4.7. Umgekehrt liefert auch jede Kategorienfaserung einen Faserfunktorkomplex: Als Objekte von  $\mathcal{C}$  nehme man alle Paare  $(B, C)$  mit  $B \in \mathcal{B}$  und  $C \in \mathcal{C}_B$ , als Morphismen  $(B', C') \rightarrow (B, C)$  alle Paare  $(f, \varphi)$  mit  $f : B' \rightarrow B$  und  $\varphi : C' \rightarrow f^*C$  und die Verknüpfung mit einem weiteren Morphismus  $(g, \psi) : (B'', C'') \rightarrow (B', C')$  sei erklärt durch  $(f \circ g, \psi \circ g^*\varphi \circ \psi)$ , wobei der zweite Eintrag der zweiten Klammer gemeint ist als die Verknüpfung

$$C'' \rightarrow g^*C' \rightarrow g^*f^*C \rightarrow (f \circ g)^*C$$

Unser kommutatives Diagramm von Transformationen liefert die Assoziativität dieser Verknüpfung. Um die Existenz der Identitäten auf Objekten nachzuweisen beachten wir, daß für  $C \in \mathcal{C}_B$  der Isomorphismus  $c : \text{id}^*(\text{id}^*C) \xrightarrow{\sim} \text{id}^*C$  notwendig vermittelt  $\text{id}^*$  von einem  $\tau = \tau_C : \text{id}^*C \xrightarrow{\sim} C$  herkommt, und überlegen uns, daß  $(\text{id}, \tau^{-1})$  die von einer Identität auf  $(B, C)$  geforderte Eigenschaft besitzt. Für  $(f, \varphi) : (B, C) \rightarrow (B_1, C_1)$  haben wir zunächst einmal  $(f, \varphi) \circ (\text{id}, \tau^{-1}) = (f, c \circ \text{id}^*\varphi \circ \tau^{-1})$  und müssen zeigen, daß  $\varphi$  übereinstimmt mit der Verknüpfung

$$C \xrightarrow{\tau^{-1}} \text{id}^*C \xrightarrow{\text{id}^*\varphi} \text{id}^*f^*C_1 \xrightarrow{c} f^*C_1$$

daß also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{id}^*C & \xrightarrow{\text{id}^*\varphi} & \text{id}^*f^*C_1 \\ \tau \downarrow & & \downarrow c \\ C & \xrightarrow{\varphi} & f^*C_1 \end{array}$$

kommutiert. Dazu reicht es zu zeigen, daß es kommutiert nach Anwenden von  $\text{id}^*$ , daß also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{id}^*\text{id}^*C & \xrightarrow{\text{id}^*\text{id}^*\varphi} & \text{id}^*\text{id}^*f^*C_1 \\ c(\text{id}, \text{id}) \downarrow & & \downarrow \text{id}^*c(\text{id}, f) \\ \text{id}^* & \xrightarrow{\text{id}^*\varphi} & \text{id}^*f^*C_1 \end{array}$$

kommutiert. Das wiederum ist klar, sobald wir zeigen, daß der Morphismus  $\text{id}^*c(\text{id}, f)$  in der rechten Vertikalen übereinstimmt mit  $c(\text{id}, \text{id})f^*$ . Um das zu zeigen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{id}^* \circ \text{id}^* \circ f^* & \xrightarrow{c(\text{id}, \text{id})f^*} & (\text{id} \circ \text{id})^* \circ f^* \\ \text{id}^* c(\text{id}, f) \Downarrow & & \Downarrow c(\text{id} \circ \text{id}, f) \\ \text{id}^* \circ (f \circ \text{id})^* & \xrightarrow{c(\text{id}, f \circ \text{id})} & (f \circ \text{id} \circ \text{id})^* \end{array}$$

Lassen wir nämlich darin alle Verknüpfungen mit Identitäten weg, so ergibt sich genau die Behauptung. Für  $(g, \psi) : (B', C') \rightarrow (B, C)$  haben wir umgekehrt  $(\text{id}, \tau^{-1}) \circ (g, \psi) = (g, c \circ g^* \tau^{-1} \circ \psi)$ , wo mit dem zweiten Eintrag der zweiten Klammer die Verknüpfung

$$C' \rightarrow g^* C \rightarrow g^* \text{id}^* C \rightarrow g^* C$$

gemeint ist. Es gilt also, die Gleichheit  $c = g^* \tau : g^* \text{id}^* C \rightarrow g^* C$  zu zeigen. Nun reicht es sicher, das für alle Objekte der Gestalt  $C = \text{id}^* D$  zu prüfen. Zunächst einmal behaupte ich dazu die Identität

$$\tau_{\text{id}^* D} = \text{id}^* \tau_D : \text{id}^* \text{id}^* D \rightarrow \text{id}^* D$$

Wieder reicht es, das nach Anwenden von  $\text{id}^*$  zu zeigen. Nun ist  $\text{id}^* \tau_C = c(\text{id}, \text{id})$  per definitionem, zu zeigen ist also  $c(\text{id}, \text{id}) \text{id}^* = \text{id}^* c(\text{id}, \text{id})$ , was wir ja gerade sogar in größerer Allgemeinheit geprüft haben. Also bleibt zu zeigen, daß die beiden Morphismen

$$g^* \text{id}^* \text{id}^* D \rightarrow g^* \text{id}^* D$$

gegeben durch  $c(g, \text{id}) \text{id}^*$  und  $g^* c(\text{id}, \text{id})$  übereinstimmen. Das leistet aber ein zu dem obigen analoges Argument.

*Bemerkung 6.4.8. Wohin?* Hat bei einer Kategorienfaserung  $\mathcal{C}$  über  $\mathcal{B}$  jeder Funktor  $f^* : \mathcal{C}_B \rightarrow \mathcal{C}_{B'}$  einen Rechtsadjungierten  $f_* : \mathcal{C}_{B'} \rightarrow \mathcal{C}_B$ , so machen diese Funktoren mitsamt den Äquivalenzen  $f_* \circ g_* \xrightarrow{\sim} (f \circ g)_*$ , die ich gleich erklären werde,  $\mathcal{C}$  zu einer Kategorienfaserung über der opponierten Kategorie  $\mathcal{B}^\circ$ . Um die fraglichen Äquivalenzen zu erklären vereinbaren wir die Notation  $\rho F$  für “den” Rechtsadjungierten eines Funktors  $F$  und konstruieren unsere Äquivalenzen als die Verknüpfungen

$$f_* \circ g_* = \rho f^* \circ \rho g^* \xrightarrow{\sim} \rho(g^* \circ f^*) \xrightarrow{\sim} \rho((f \circ g)^*) = (f \circ g)_*$$

wo die erste Äquivalenz von [I.4.9.23](#) herkommt und die zweite von  $c(g, f)$  induziert wird. Dasselbe gilt, wenn wir statt Rechtsadjungierten mit Linksadjungierten arbeiten.

*Bemerkung 6.4.9.* Gegeben eine Kategorienfaserung  $\mathcal{C}$  über  $\mathcal{B}$  können wir ohne Schwierigkeiten zur opponierten Kategorienfaserung  $\mathcal{C}^\circ$  mit  $\mathcal{C}_B^\circ = (\mathcal{C}_B)^\circ$  für alle  $B \in \mathcal{B}$  übergehen. Bilden wir zu dieser Kategoriefaserung  $\mathcal{C}^\circ$  den zugehörigen Faserfunktoren, so haben wir per definitionem immer noch dieselben Objekte und inversen Bilder, aber abgesehen davon wirkt unser neuer Faserfunktoren recht verschieden: Objekte der Ausgangskategorie sind zwar immer noch Paare  $(B, C)$  mit  $B \in \mathcal{B}$  und  $C \in \mathcal{C}_B = \mathcal{C}_B^\circ$ , aber Morphismen  $(B', C') \rightarrow (B, C)$  sind nun alle Paare  $(f, \varphi)$  mit  $f : B' \rightarrow B$  ein Morphismus in  $\mathcal{B}$  und  $\varphi : f^* C \rightarrow C'$  ein Morphismus in  $\mathcal{C}_{B'}$  “in die Gegenrichtung”.

*Beispiel 6.4.10.* Arbeiten wir etwa mit dem Faserfunktoren  $\text{Ens}_{\text{Top}} \rightarrow \text{Top}$  aus 6.4.3, gehen zur Kategorienfaserung über mittels des inversen Bildes von Garben  $f^\circ$  aus 2.4.3, betrachten dazu die opponierte Kategorienfaserung und bilden dazu wieder den Faserfunktoren, so erhalten wir folgendes: Objekte der Ausgangskategorie sind wie zuvor Paare  $(\mathcal{F}, X)$  bestehend aus einem topologischen Raum  $X$  und einer Garbe von Mengen  $\mathcal{F}$  auf  $X$ , ein Morphismus

$$(\mathcal{F}, X) \rightarrow (\mathcal{G}, Y)$$

über einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist jetzt aber ein Morphismus  $\varphi \in \text{Ens}_X(f^\circ \mathcal{G}, \mathcal{F})$  alias  $\varphi \in \text{Ens}_Y(\mathcal{G}, f_\circ \mathcal{F})$  alias eine Familie von Abbildungen  $\mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V))$  für  $V \subseteq Y$ , die verträglich ist mit allen Restriktionen. Mir scheint dieser Faserfunktoren zwar weniger anschaulich, er hat aber den Vorteil, sich ohne Schwierigkeiten auf Prägarben mit Werten in beliebigen Kategorien verallgemeinern zu lassen, und hat weiter den Vorteil, gleichzeitig ein Kofaserfunktoren zu sein mit den Funktoren  $f_\circ$  als direkten Bildern.

## 6.5 Morphismen von Kategorienfaserungen, Versuch

**Definition 6.5.1.** Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}'$  Kategorienfaserungen über einer Kategorie  $\mathcal{B}$ . Ein **Morphismus von Kategorienfaserungen**  $\varphi$  ist die Vorgabe von Funktoren  $\varphi_B : \mathcal{C}_B \rightarrow \mathcal{C}'_B$  für alle  $B \in \mathcal{B}$  mit der Eigenschaft, daß für jeden Morphismus  $f : A \rightarrow B$  aus  $\mathcal{B}$  das Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_B & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{C}_A \\ \varphi_B \downarrow & & \downarrow \varphi_A \\ \mathcal{C}'_B & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{C}'_A \end{array}$$

kommutiert. Hier ist striktes Kommutieren gemeint, nicht nur “kommutieren bis auf eine Transformation”. Eine **Transformation von Morphismen von Kategorienfaserungen**  $\tau : \varphi \Rightarrow \varphi'$  ist die Vorgabe von Transformationen  $\tau_B : \varphi_B \Rightarrow \varphi'_B$  derart, daß für alle Morphismen  $f : A \rightarrow B$  in  $\mathcal{B}$  die Gleichheit  $\tau_A f^* = f^* \tau_B$  von Transformationen von  $\varphi_A f^* = f^* \varphi_B$  nach  $\varphi'_A f^* = f^* \varphi'_B$  erfüllt ist.

*Bemerkung 6.5.2.* Man zeigt, daß die Gesamtheit aller Kategorienfaserungen über einer festen Basiskategorie  $\mathcal{B}$  mit diesen Morphismen und Transformationen und den hoffentlich offensichtlichen Verknüpfungen eine 2-Kategorie bildet. Wir notieren sie  $\text{Catfas}_{\mathcal{B}}$ .

**Satz 6.5.3 (Variante des Yoneda-Lemmas).** *Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{B}$  und eine strikte Kategorienfaserung  $\mathcal{C}$  über  $\mathcal{B}$  erhalten wir einen Isomorphismus von Kategorien (oder vielleicht doch nur eine Äquivalenz?)*

$$\begin{array}{ccc} \text{Catfas}_{\mathcal{B}}(\tilde{X}, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{C}_X \\ \varphi & \mapsto & \varphi_X(\text{id}_X) \end{array}$$

*Bemerkung 6.5.4.* Hierbei steht  $\tilde{X}$  für die Kategorienfaserung durch die diskreten Kategorien  $\tilde{X}_B = \mathcal{B}(B, X)$ .

*Beweis.* Ich behaupte, daß wir einen inversen Funktor erhalten durch die Vorschrift

$$C \mapsto [C]$$

mit  $[C]_B : \tilde{X}_B \rightarrow \mathcal{C}_B$  gegeben durch  $(f : B \rightarrow X) \mapsto f^*C$  auf Objekten und eine vom Leser zu erratende Vorschrift auf Morphismen.  $\square$

## 6.6 Basiswechsel

**Lemma 6.6.1.** *Gegeben ein kommutatives Quadrat*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

in einer Kategorie  $\mathcal{B}$  und ein Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ , der sowohl eine Faserung als auch eine Kofaserung ist, und ein Objekt  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_X$  gibt es in  $\mathcal{C}_Z$  genau einen Morphismus, den **Basiswechselformorphismus**

$$q_*g^*\mathcal{F} \rightarrow f^*p_*\mathcal{F}$$

derart, daß das äußere Fünfeck in folgendem Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} g^*\mathcal{F} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ q_*g^*\mathcal{F} & \dashrightarrow & f^*p_*\mathcal{F} \\ & & \downarrow \\ & & p_*\mathcal{F} \end{array}$$

*Beweis.* Der Morphismus  $g^*\mathcal{F} \rightarrow p_*\mathcal{F}$  oberhalb  $p \circ q$  faktorisiert wegen der universellen Eigenschaft der unteren Horizontale auf genau eine Weise über einen Morphismus  $g^*\mathcal{F} \rightarrow f^*p_*\mathcal{F}$  oberhalb  $q$ , und dieser faktorisiert aus ähnlichen Gründen auf genau eine Weise über einen Morphismus  $q_*g^*\mathcal{F} \rightarrow f^*p_*\mathcal{F}$  oberhalb  $\text{id}_Z$ .  $\square$

*Übung 6.6.2.* Man zeige, daß der Basiswechselformorphismus sich auch beschreiben läßt mittels der Adjunktionen zwischen direktem und inversem Bild  $(f_*, f^*)$  und  $(g_*, g^*)$  als

$$q_*g^*\mathcal{F} \rightarrow f^*f_*q_*g^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f^*p_*g_*g^*\mathcal{F} \rightarrow f^*p_*\mathcal{F}$$

Alternativ mag man ihn auch mittels der Adjunktionen  $(p_*, p^*)$  und  $(q_*, q^*)$  konstruieren als

$$q_*g^*\mathcal{F} \rightarrow q_*g^*p^*p_*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} q_*q^*f^*p_*\mathcal{F} \rightarrow f^*p^*\mathcal{F}$$

*Bemerkung 6.6.3.* Um diese Erkenntnisse auf Garben anzuwenden, müssen wir den in ?? beschriebenen fasernden und kofasernden Funktor betrachten, dessen Faser über einem topologischen Raum die opponierte Kategorie von Garben über dem entsprechenden Raum ist. Der Basiswechselformorphismus in der Kategorie der Garben auf unserem Raum ist also ein Morphismus

$$f^*p_* \rightarrow q_*g^*$$

## 6.7 Gefaserte Produkte von Kategorien, woanders

6.7.1. Das umschreiben zur Definition eines gefaserten 2-Produkts in einer 2-Kategorie. Ist das 2-Produkt von Gruppoid-Stacks dasselbe wie das 2-Produkt in der größeren Kategorie aller Faserfunktoren, wie es gleich konstruiert werden wird? Vermutlich ja wohl eher nicht...

*Bemerkung 6.7.2.* Sollte wohl eine 2-Kategorie am besten auffassen als eine Kategorie “mit Morphismenräumen in der monoidalen Kategorie der Kategorien”, so wie eine  $k$ -lineare Kategorie eben eine Kategorie ist “mit Morphismenräumen in der monoidalen Kategorie der  $k$ -Vektorräume”. Die Forderung der Existenz einer Identität auf jedem Objekt verwandelt sich dann in die Forderung der Existenz eines ausgezeichneten Morphismus vom Einheitsobjekt der monoidalen Kategorie in etc. etc.

6.7.3. In der 2-Kategorie  $\text{Cat}_{\mathcal{B}}$  der Kategorien über einer gegebenen Kategorie  $\mathcal{B}$  besitzt jeder Winkel

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}' & \\ & \downarrow G' & \\ \mathcal{C}'' & \xrightarrow{G''} & \mathcal{C} \end{array}$$

einen 2-pullback, als da heißt, er läßt sich ergänzen zu einem 2-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{C}' \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{C}'' & \longrightarrow & \mathcal{C} \end{array}$$

mit einer Isotransformation in der Diagonale derart, daß es für jede weitere Ergänzung zu einem 2-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{C}' \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{C}'' & \longrightarrow & \mathcal{C} \end{array}$$

mit einer Isotransformation in der Diagonale genau ein Tripel existiert bestehend aus

1. einem Morphismus  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}$ ,
2. einer Isotransformation  $(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}')$  und
3. einer Isotransformation  $(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}'') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}'')$

derart, daß das entstehende 2-Diagramm kommutiert, daß also die beiden Transformationen  $(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C})$  übereinstimmen, die durch das nebenstehende Bild erklärt werden. Explizit kann ein möglicher solcher pullback konstruiert werden als die Kategorie  $\mathcal{C}' \times_{\mathcal{C}}^2 \mathcal{C}''$ , deren Objekte Tripel  $(C', C'', \alpha)$  sind mit  $C' \in \mathcal{C}'$ ,  $C'' \in \mathcal{C}''$  und  $\alpha : G''(C'') \xrightarrow{\sim} G'(C')$  einem Isomorphismus über einer Identität in  $\mathcal{B}$  und deren Morphismen  $(C', C'', \alpha) \rightarrow (C'_1, C''_1, \alpha_1)$  Paare  $(f', f'')$  von Morphismen  $f' : C' \rightarrow C'_1$  und  $f'' : C'' \rightarrow C''_1$  sind, die über demselben Morphismus in  $\mathcal{B}$  liegen und so, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G''(C'') & \xrightarrow{\alpha} & G'(C') \\ G''(f'') \downarrow & & \downarrow G'(f') \\ G''(C''_1) & \xrightarrow{\alpha_1} & G'(C'_1) \end{array}$$

kommutiert. Die Pfeile von  $\mathcal{C}' \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}''$  nach  $\mathcal{C}'$  und  $\mathcal{C}''$  sind dann hoffentlich selbsterklärend und der 2-Pfeil aus der Definition des Produkts wird mithilfe von  $\alpha$  definiert. Die behauptete universelle Eigenschaft ist hoffentlich offensichtlich.



SkriptenBilder/Bild0024.png

Zum gefaserten Produkt von Kategorien

## 6.8 Nachdenken über Stacks, woanders

*Stacks nach Mordijk?*

**Definition 6.8.1.** Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt ein **Gruppoidfunktor** genau dann, wenn er ein Faserfunktor im Sinne von 6.4.1 ist und zusätzlich alle Morphismen in  $\mathcal{C}$  kartesisch sind in Bezug auf  $F$ . Wir nennen dann auch  $\mathcal{C}$  oder genauer das Paar  $(\mathcal{C}, F)$  ein  **$\mathcal{B}$ -Gruppoid** oder ein **relatives Gruppoid über  $\mathcal{B}$** .

*Bemerkung 6.8.2.* Ein Gruppoid über der Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismus ist “dasselbe wie” ein Gruppoid im Sinne von 1.2.1.15, also eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. Jeder Faserfunktor liefert einen Gruppoidfunktor, indem wir von der Ausgangskategorie zu der Unterkategorie übergehen, die dieselben Objekte hat, aber nur die kartesischen Morphismen der ursprünglichen Kategorie als Morphismen.

*Übung 6.8.3.* Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Gruppoidfunktor und  $\mathcal{B}$  ein Gruppoid, so ist auch  $\mathcal{C}$  ein Gruppoid.

*Bemerkung 6.8.4.* Gegeben ein Gruppoidfunktor ist die Faser über jedem Objekt nach 6.3.4 ein Gruppoid. Dasselbe gilt für die “Faser über jedem Funktor”, sobald wir wissen, was das sein soll. Gegeben eine Kategorienfaserung  $\mathcal{C}$  über einer Kategorie  $\mathcal{B}$  im Sinne von 2.4.1 ist umgekehrt der zugehörige Faserfunktor ein Gruppoidfunktor genau dann, wenn alle Fasern unserer Kategorienfaserung Gruppoide sind. Wir sprechen dann auch von einer **Gruppoidfaserung**.

*Übung 6.8.5.* Man zeige: Genau dann ist ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Gruppoidfunktor, wenn er die folgenden beiden Eigenschaften hat: (1) Gegeben ein Morphismus  $g : B' \rightarrow B$  in  $\mathcal{B}$  und ein Objekt  $C \in \mathcal{C}$  mit  $F(C) = B$  gibt es einen Morphismus  $\tilde{g} : C' \rightarrow C$ , der unter  $F$  auf  $g$  geht, und (2) gegeben ein kommutatives Dreieck  $f \circ g = h$  in  $\mathcal{B}$  und Morphismen  $\tilde{f}, \tilde{h}$  in  $\mathcal{C}$  mit  $F(\tilde{f}) = f$  und  $F(\tilde{h}) = h$  gibt es genau einen Morphismus  $\tilde{g}$  in  $\mathcal{C}$  mit  $F(\tilde{g}) = g$  und  $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{h}$ . In dieser Form steht die Definition bei [DM69], denen ich hier folge.

*Bemerkung 6.8.6.* Die relativen Gruppoide über einer gegebenen Kategorie  $\mathcal{B}$  bilden selbst eine Kategorie, Morphismen von  $(\mathcal{C}, F)$  nach  $(\mathcal{C}', F')$  sind eben Funktoren  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  mit  $F' \circ G = F$ . Wir erhalten so sogar eine 2-Kategorie in natürlicher Weise, *erklären*.

*Bemerkung 6.8.7.* Ein **Stack** über einem Schema  $Z$  ist ein relatives Gruppoid über der Kategorie  $\text{Sch}_Z$  aller Schemata über  $Z$ , das gewisse Zusatzeigenschaften hat. Ein typisches Beispiel wäre das relative Gruppoid über  $\text{Sch}_Z$ ,



dessen Objekte Paare  $(E, X)$  sind mit  $X$  einem Schema über  $Z$  und  $E$  einer elliptischen Kurve über  $X$ . Als Morphismen lassen wir alle Paare von Morphismen zu, die kartesische Quadrate entstehen lassen, und der Funktor nach Sch<sub>Z</sub> vergißt schlicht das  $E$ .

*Beispiel 6.8.8.* (?) Jeder Funktor  $L$  von einer Kategorie  $\mathcal{B}$  in die Kategorie der Mengen definiert ein relatives Gruppoid  $(\mathcal{B}, L)$  über  $\mathcal{B}$  mit Objekten Paaren  $(B, f)$  mit  $B \in \mathcal{B}$  und  $f \in L(B)$  und Morphismenräumen  $(B, f) \rightarrow (B', f')$  bestehend aus allen  $g : B \rightarrow B'$  mit  $(Lg)(f) = f'$ . Wir erhalten so in Erweiterung von I.2.3.11 volltreue Einbettungen

$$\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}^\wedge \hookrightarrow \{\text{relative Gruppoide über } \mathcal{B}\}$$

**Definition 6.8.9.** Sei  $\mathcal{B}$  eine Kategorie mit einer Grothendieck-Topologie und Produkten und Faserprodukten. Ein **Gruppoid-Stack** oder kurz **Stack auf  $\mathcal{B}$**  ist ein relatives Gruppoid  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  mit folgenden Eigenschaften

**von Morphismen:** Für alle  $B \in \mathcal{B}$  und alle  $C, D \in \mathcal{C}_B$  ist der kontravariante Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_B &\rightarrow \text{Ens}^{\text{opp}} \\ (f : B' \rightarrow B) &\mapsto \mathcal{C}_{B'}(f^*C, f^*D) \end{aligned}$$

eine Garbe.

**von Objekten:** Gegeben eine Überdeckung  $\{\varphi_i U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  in  $\mathcal{B}$  und Objekte  $C_i \in \mathcal{C}_{U_i}$  und Isomorphismen  $v_{i,j} : C_j \mid U_i x_U U_j \xrightarrow{\sim} C_i \mid U_i x_U U_j$  für alle  $i, j \in I$  mit der Eigenschaft, daß gilt

$$\vartheta_{ij} \circ \vartheta_{jk} = \vartheta_{ik} : C_k \mid U_i X_U U_j x_U U_k \rightarrow C_i \mid U_i X_U U_j X_U U_k$$

für alle  $i, j, k$  gilt es ein Objekt  $C \in \mathcal{C}_U$  und Isomorphismen  $w_i : C \mid U_i \xrightarrow{\sim} C_i$  mit  $\vartheta_{ij} = (w_i \mid U_i X_U U_j) \circ (w_j^{-1} \mid U_i x_U U_j)$  für alle  $i, j \in I$ .

*Bemerkung 6.8.10.* Implizit ist hier die Forderung mit gemeint, daß die Morphismen  $v_{i,j}$  Morphismen über  $U_i X_U U_j$  sein sollen und die Morphismen  $w_i$  Morphismen über  $U_i$ . Implizit haben wir weiter unseren Gruppoidfunktor als über  $\mathcal{B}$  gefaserte Kategorie aufgefaßt, um Objekte und Morphismen “einschränken” oder “zurückziehen” zu dürfen. Dazu müssen wir gewisse Wahlen treffen, wie in ?? erklärt wird, aber unsere Bedingungen sind offensichtlich unabhängig von den getroffenen Wahlen.

**Definition 6.8.11.** Sei  $k$  ein Kring. Ein **Stack  $\mathcal{S}$**  über  $k$  ist ein Datum bestehend aus einer Kategorie  $\mathcal{S}$  und einem Funktor

$$F : \mathcal{S} \rightarrow \text{Sch}_k$$

in die Kategorie der Schemata über  $k$  mit gewissen Eigenschaften, die im folgenden ausführlich diskutiert werden sollen.

*Beispiel 6.8.12.* Für  $g \geq 0$ ,  $n \geq 3$  erklären wir den Moduli-Stack  $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  über  $\mathbb{Z}$  aller “stabilen Kurven vom Geschlecht  $g$  mit  $n$  ausgezeichneten Punkten” wie folgt: Objekte sind “relative” derartige Kurven  $C$  über einem Basisschema  $X$ , also Morphismen von Schemata  $C \rightarrow X$  mit gewissen Eigenschaften; Morphismen sind Paare von Morphismen von Schemata, die als horizontale Pfeile aufgefaßt kartesische Diagramme

$$\begin{array}{ccc} C' & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

von Schemata entstehen lassen.

*Beispiel 6.8.13.* Für jedes Schema  $Y$  über einem Kring  $k$  erklären wir den zugehörigen Stack  $\tilde{Y}$  wie folgt: Objekte von  $\tilde{Y}$  über  $X$  sind beliebige Morphismen  $(f : X \rightarrow Y)$ ; Morphismen von  $(f' : X' \rightarrow Y)$  nach  $(f : X \rightarrow Y)$  sind Morphismen  $g : X' \rightarrow X$  mit  $f' = f \circ g$ ; und der Funktor nach  $\text{Sch}_k$  ist schlicht das “Vergessen von  $Y$ ”.

**Definition 6.8.14.** Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{B}$  betrachten wir die Gesamtheit  $\text{Cat}_{\mathcal{B}}$  aller **Kategorien über  $\mathcal{B}$** , als da heißt aller Paare  $(\mathcal{C}, F)$  bestehend aus einer Kategorie  $\mathcal{C}$  und einem Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ .

1. Ein Morphismus  $\varphi : (\mathcal{C}, f) \rightarrow (\mathcal{C}', F')$  von Kategorien über  $\mathcal{B}$  ist eine Funktor  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  mit  $F' \circ \varphi = F$ ;
2. Gegeben derartige Morphismen  $\varphi, \Psi : (\mathcal{C}, F) \rightarrow (\mathcal{C}', F')$  ist ein 2-Morphismus  $\alpha : \varphi \Rightarrow \Psi$  eine Transformation von Funktoren  $\varphi, \Psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  mit der Eigenschaft, daß für alle  $X \in \mathcal{C}$  der Morphismus  $\alpha_X : \varphi(X) \rightarrow \Psi(X)$  unter  $F'$  die Identität auf  $F'(\varphi(X)) = F(X) = F'(\Psi(X))$  wird.

*Bemerkung 6.8.15.* Mit diesen Definitionen wird  $\text{Cat}_{\mathcal{B}}$  eine 2-Kategorie.

**Lemma 6.8.16** (Variante des Yoneda-Lemmas). *Gegeben  $\mathcal{S} \in \text{Fas}_{\mathcal{B}}$  eine gefasste Kategorie über  $\mathcal{B}$  und  $X \in \mathcal{B}$  ein Objekt und  $\tilde{X} \in \text{Cat}_{\mathcal{B}}$  die ihm zugeordnete Kategorie über  $\mathcal{B}$  erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \text{Cat}_{\mathcal{B}}(\tilde{X}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{S}_X \\ \alpha & \mapsto & \alpha(\text{id}_X) \\ \tau \downarrow & \mapsto & \tau_{\text{id}_X} \downarrow \\ \beta & \mapsto & \beta(\text{id}_X) \end{array}$$

*Beweis.* Die Faser über  $Y \in \mathcal{B}$  von  $\tilde{X}$  ist per definitionem die diskrete Kategorie  $\mathcal{B}(Y, X)$ . Folglich ist  $\text{id}_X$  ein Objekt der Faser von  $\tilde{X}$  über  $X$ . Unsere Funktoren  $\alpha, \beta$  schicken dies Objekt in jeweils ein Objekt der Faser von  $\mathcal{S}$  über  $X$ , und die Transformation  $\tau$  liefert einen Morphismus zwischen diesen Objekten, der nach der Definition der 2-Morphismen von  $\text{Cat}_{\mathcal{B}}$  ein Morphismus in  $\mathcal{S}_X$  sein muß, also in  $\mathcal{B}$  zur Identität auf  $X$  wird. Damit ist klar, daß unsere Äquivalenz von Kategorien in spe schon mal ein Funktor der behaupteten Art ist. Als nächstes konstruieren wir einen Funktor in die Gegenrichtung. Gegeben ein Objekt  $A \in \mathcal{S}_X$  müssen wir einen Funktor  $\tilde{A} : \tilde{X} \rightarrow \mathcal{S}$  bilden. Nun ist ein Objekt in  $\tilde{X}(Y)$  ja ein Morphismus  $Y \rightarrow X$  und dem wollen wir ein Objekt von  $\mathcal{S}_Y$  zuordnen. Das muß ja wohl der pullback sein, aber den gibt's nicht eindeutig. Aber egal!  $\square$

## 6.9 Kartesische Funktoren, Wohin?

**Definition 6.9.1.** Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor. Ein Funktor  $\tilde{G} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  heißt **kartesisch** genau dann, wenn er alle Morphismen in  $\mathcal{K}$  zu kartesischen Morphismen in  $\mathcal{C}$  macht.

**Definition 6.9.2.** Ist  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor und  $G : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{B}$  ein Funktor, so definiert man die **Faser von  $\mathcal{C}$  über  $G$**  als die Kategorie  $\mathcal{C}_G$ , deren Objekte kartesische Funktoren  $\tilde{G} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  sind mit  $F \circ \tilde{G} = G$  und deren Morphismen Transformationen  $\alpha : \tilde{G} \rightarrow \hat{G}$  sind mit  $F\alpha = \text{id} : G \rightarrow G$ .

*Beispiel 6.9.3.* Hat  $\mathcal{K}$  nur ein Objekt  $K$  und einen Morphismus, so ist  $\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{G(K)}$  die Faser über dem Bild dieses Morphismus im Sinne von 6.3.1.

*Beispiel 6.9.4.* Hat  $\mathcal{K}$  nur ein Objekt  $K$  und sind alle seine Morphismen invertierbar und werden von  $G : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  alle auf die Identität abgebildet, so ist die Faser  $\mathcal{C}_G$  über  $G$  die Kategorie der "Objekte von  $\mathcal{C}_{G(K)}$  mit einer Operation der Gruppe  $\mathcal{K}(K)$ ".

*Bemerkung 6.9.5.* Gegeben eine Kategorie  $\mathcal{B}$  mag man die Kategorie  $\text{Cat}_{\mathcal{B}}$  aller Kategorien über  $\mathcal{B}$  betrachten. Objekte sind Paare  $(\mathcal{C}, F)$  mit  $\mathcal{C}$  einer Kategorie und  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  einem Funktor. Morphismen von  $(\mathcal{C}', F')$  nach  $(\mathcal{C}, F)$  sind Funktoren  $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $F \circ G = F'$ . Schließlich definieren wir für einen weiteren Morphismus  $G_1 : (\mathcal{C}', F') \rightarrow (\mathcal{C}, F)$  eine **verträgliche Transformation** als eine Transformation  $\tau : G \rightarrow G_1$ , für die  $F\tau = \text{id}$  die Identität auf dem Funktor  $F'$  ist. Auf diese Weise wird  $\text{Cat}_{\mathcal{B}}$  sogar eine "2-Kategorie", aber ich erkläre diesen Begriff nicht.

## 7 Altes Zeug, wohl Schrott

### 7.1 Alter Beweis von Čech gleich Garben

*Alter Beweis von 1.11.1.* Bezeichne  $\mathcal{C}$  den Prägarbenkokern der Abbildung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{GF}$  von  $\mathcal{F}$  in die Garbe der unstetigen Schnitte von  $\mathcal{F}$  und bezeichne  $\mathcal{C}^+$  seine Garbifizierung. Wir haben eine kurze exakte Sequenz von Prägarben  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{GF} \twoheadrightarrow \mathcal{C}$  und eine kurze exakte Sequenz von Garben  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{GF} \twoheadrightarrow \mathcal{C}^+$ . Wir haben dann  $\check{H}^1(X; \mathcal{GF}) = 0$ , nach 1.3.20 und 1.3.19 verschwinden ja für ein Produkt von Wolkenkratzergerben sogar alle höheren Čech-Kohomologiegruppen bezüglich jeder offenen Überdeckung. Des weiteren liefert eine kurze exakte Sequenz von Prägarben uns eine lange exakte Sequenz in der Čech-Kohomologie, zunächst bezüglich jeder offenen Überdeckung und dann auch im Limes. Das liefert Exaktheit der oberen Horizontale im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \check{H}^0(X; \mathcal{F}) & \rightarrow & \check{H}^0(X; \mathcal{GF}) & \rightarrow & \check{H}^0(X; \mathcal{C}) & \rightarrow & \check{H}^1(X; \mathcal{F}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & H^0(X; \mathcal{F}) & \rightarrow & H^0(X; \mathcal{GF}) & \rightarrow & H^0(X; \mathcal{C}^+) & \rightarrow & H^1(X; \mathcal{F}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Die untere Zeile ist exakt als Teil einer langen exakten Garbenkohomologie-Sequenz, es gilt nämlich  $H^1(X; \mathcal{GF}) = 0$  nach 1.10.3, da  $\mathcal{GF}$  stets weik ist. Nach 1.4.6 sind in unserem Diagramm die beiden linken Vertikalen Isomorphismen. Sobald wir das auch für die dritte Vertikale gezeigt haben, sind wir fertig. Das benötigt jedoch einige Vorbereitungen. Unter einer **lokalen Prägarbe** von Mengen auf einem topologischen Raum  $X$  verstehen wir eine Prägarbe von Mengen  $\mathcal{C}$  derart, daß für jede Familie  $\mathcal{U}$  von offenen Teilmengen von  $X$  mit Vereinigung  $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  die Restriktionsabbildungen eine Injektion

$$\mathcal{C}(V) \hookrightarrow \prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{C}(U)$$

liefern, daß also “Schnitte durch ihre Einschränkungen auf die Mengen einer offenen Überdeckung bereits eindeutig festgelegt werden”. Setzen wir  $\mathcal{U} = \emptyset$ , so erkennen wir insbesondere, daß für eine abelsche lokale Prägarbe stets gilt  $\mathcal{C}(\emptyset) = 0$ . Das anschließende Lemma 7.1.1 zeigt uns nun, daß unser Prägarbenkokern  $\mathcal{C}$  von  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{GF}$  eine lokale Prägarbe ist, und das daran anschließende Lemma 7.1.2 etabliert dann für lokale Prägarben  $\mathcal{C}$  den gewünschten Isomorphismus  $\check{H}^0(X; \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} H^0(X; \mathcal{C}^+)$  als Komposition eines Isomorphismus in die globalen Schnitte  $\Gamma \mathcal{C}^+$  mit der kanonischen Identifikation aus 1.9.3 und beendet damit den Beweis des Satzes.  $\square$

**Lemma 7.1.1.** *Ist  $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{F}$  ein injektiver Homomorphismus von abelschen Garben, so ist sein Prägarbenkern  $\mathcal{C}$  eine lokale Prägarbe.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{U}$  ein System offener Teilmengen und  $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  seine Vereinigung. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}(V) & \hookrightarrow & \mathcal{F}(V) & \twoheadrightarrow & \mathcal{C}(V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod \mathcal{E}(U) & \hookrightarrow & \prod \mathcal{F}(U) & \twoheadrightarrow & \prod \mathcal{C}(U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod \mathcal{E}(U \cap U') & \hookrightarrow & \prod \mathcal{F}(U \cap U') & \twoheadrightarrow & \prod \mathcal{C}(U \cap U') \end{array}$$

als eine kurze exakte Sequenz von (senkrechten) Kettenkomplexen und benutzen die lange exakte Homologiesequenz.  $\square$

**Lemma 7.1.2.** *Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{C}$  eine lokale Prägarbe auf  $X$ , so liefert die kanonische Abbildung einen Isomorphismus zwischen der nullten Čech-Kohomologie der Prägarbe  $\mathcal{C}$  und den globalen Schnitten ihrer Garbifizierung  $\mathcal{C}^+$ , in Formeln*

$$\check{H}^0(X; \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \Gamma \mathcal{C}^+$$

*Beweis.* Zunächst bemerken wir für eine lokale Prägarbe  $\mathcal{C}$  und beliebige offene Teilmengen  $U \subset X$  die Inklusionen  $\mathcal{C}(U) \hookrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{C}_x$ . Wir folgern Inklusionen  $\check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}) \hookrightarrow \Gamma \mathcal{C}^+$  und durch Übergang zum direkten Limes die Injektivität der kanonischen Abbildung. Um die Surjektivität zu zeigen, müssen wir zu jedem  $s \in \Gamma \mathcal{C}^+$  ein Urbild finden. Nach 1.4.23 gibt es aber eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  und für jedes  $U \in \mathcal{U}$  ein  $s_U \in \mathcal{C}(U)$  mit  $\tilde{s}_U = s|_U$ , und da  $\mathcal{C}$  lokal ist haben wir  $s_U|_{U \cap V} = s_V|_{U \cap V} \forall U, V \in \mathcal{U}$ . Folglich liefern die  $(s_U)_{U \in \mathcal{U}}$  ein Element in  $\check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C})$ . Wir dürfen jedoch unsere Überdeckung  $\mathcal{U}$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit gesättigt annehmen und erhalten so in der Tat das gesuchte Urbild von  $s$  in  $\check{H}^0(X; \mathcal{C})$ .  $\square$

## 7.2 Kohomologie und azyklische Auflösungen (ALT)

**Definition 7.2.1.** Eine abelsche Garbe  $\mathcal{I}$  auf einem Raum  $X$  heißt **injektiv genau** dann, wenn für jeden Monomorphismus  $\mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{F}$  von abelschen Garben auf  $X$  die induzierte Abbildung  $\text{Ab}_{/X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \rightarrow \text{Ab}_{/X}(\mathcal{F}', \mathcal{I})$  surjektiv ist.

*Bemerkung 7.2.2.* Gleichbedeutend ist die Forderung, daß der Funktor der Homomorphismen in unsere Garbe  $\text{Ab}_{/X}(\cdot, \mathcal{I}) : \text{Ab}_{/X} \rightarrow \text{Ab}^\circ$  exakt ist im Sinne von 1.6.9.

*Übung 7.2.3.* Jedes Produkt von injektiven abelschen Garben ist wieder eine injektive abelsche Garbe.

**Satz 7.2.4 (Hauptlemma der homologischen Algebra, Variante).** *Seien  $\mathcal{I}, \mathcal{A}$  Komplexe abelscher Garben auf einem Raum  $X$  derart, daß alle  $\mathcal{I}^q$  injektiv sind und daß gilt  $\mathcal{I}^q = 0$  für  $q < 0$  sowie  $\mathcal{H}^q(\mathcal{A}) = 0$  für  $q > 0$ . So induziert das Bilden der nullten Homologie eine Bijektion zwischen Homotopieklassen von Morphismen von Komplexen abelscher Garben und Garbenhomomorphismen zwischen den nullten Kohomologiegarben*

$$\mathrm{dgHot}_{\mathrm{Ab}/X}(\mathcal{A}, \mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ab}/X(\mathcal{H}^0 \mathcal{A}, \mathcal{H}^0 \mathcal{I})$$

*Beweis.* Man kopiere mutatis mutandis den Beweis von II.3.6.10. □

**Definition 7.2.5.** Unter einer **Auflösung** einer abelschen Garbe  $\mathcal{F}$  verstehen wir einen exakten Komplex  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^2 \rightarrow \dots$  von abelschen Garben. Eine Auflösung heißt **azyklisch** genau dann, wenn alle  $\mathcal{A}^i$  azyklisch sind. Eine Auflösung heißt **injektiv** genau dann, wenn alle  $\mathcal{A}^i$  injektiv sind.

*Bemerkung 7.2.6.* Besonders wichtig ist für uns im Folgenden ein Spezialfall von 7.2.4: Ist  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf einem topologischen Raum,  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$  eine Auflösung und  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  eine injektive Auflösung, so gibt es eine Kettenabbildung  $\mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{I}^*$ , die die Identität auf  $\mathcal{F}$  fortsetzt, und je zwei derartige Kettenabbildungen sind homotop.

**Lemma 7.2.7.** *Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F} \in \mathrm{Ab}/X$  eine abelsche Garbe auf  $X$  und  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}^* \mathcal{F}$  die Godement-Auflösung von  $\mathcal{F}$ .*

1. *Ist  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  eine injektive Auflösung von  $\mathcal{F}$ , so induziert jede Erweiterung der Identität von  $\mathcal{F}$  zu einem Morphismus von Komplexen  $\mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^*$  dieselben Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^q(X; \mathcal{F}) = \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{I}^*$$

2. *Ist  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$  irgendeine Auflösung von  $\mathcal{F}$ , so erhalten wir wohlbestimmte Morphismen, die **kanonischen Morphismen***

$$\mathrm{can} : \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{A}^* \rightarrow \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})$$

*indem wir für eine beliebige injektive Auflösung  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}^*$  und beliebige Lifts  $\mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{I}^* \leftarrow \mathcal{G}^* \mathcal{F}$  der Identität von  $\mathcal{F}$  die durch Teil 1 ermöglichte Komposition  $\mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{I}^* \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F} = \mathrm{H}^q(X; \mathcal{F})$  bilden.*

**Satz 7.2.8 (Garbenkohomologie durch azyklische Auflösungen).** *Ist  $\mathcal{F}$  eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum  $X$  und  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$  eine azyklische Auflösung, so liefern die kanonischen Morphismen aus 7.2.7 Isomorphismen*

$$\text{can} : \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{A}^* \xrightarrow{\sim} H^q(X; \mathcal{F})$$

*Beweis von 7.2.7 und 7.2.8.* Wir beginnen mit 7.2.7.1. Daß die fraglichen Abbildungen  $\mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{I}^*$  nicht von der Wahl der Erweiterung der Identität abhängen ist klar, da bereits diese Erweiterung selbst nach 7.2.4 wohlbestimmt ist bis auf Homotopie. Um zu zeigen, daß sie Isomorphismen sind, wählen wir zunächst mithilfe von 2.3.10 eine welche injektive Auflösung  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}^*$  von  $\mathcal{F}$ . Dieser Umweg ist nur nötig, da wir noch nicht wissen, daß jede injektive Garbe welche ist. Dann betrachten wir auch eine Fortsetzung der Identität auf  $\mathcal{F}$  zu einem Morphismus von Kettenkomplexen  $\mathcal{I}^* \rightarrow \mathcal{J}^*$ , der ja nach 7.2.4 eine Homotopieäquivalenz sein muß und folglich Isomorphismen auf  $\mathcal{H}^q \Gamma$  induziert. Es reicht also zu zeigen, daß jede Fortsetzung  $\mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}^*$  von  $\text{id}_{\mathcal{F}}$  Isomorphismen auf  $\mathcal{H}^q \Gamma$  induziert für  $\mathcal{J}^*$  eine welche injektive Auflösung von  $\mathcal{F}$ . Dazu betrachten wir den Morphismus von Doppelkomplexen im ersten Quadranten

$$\Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow \Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{J}^*$$

Er induziert einen Isomorphismus auf den senkrechten Kernkomplexen, die ja beide mit  $\Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F}$  identifiziert werden können. Die Zeilen unserer Doppelkomplexe sind von der ersten Stelle abgesehen exakt nach 1.9.8, nach 2.1.3 induziert unser Morphismus von Doppelkomplexen also Isomorphismen auf der Kohomologie der Totalkomplexe. Nun sind jedoch auch alle Spalten unserer Doppelkomplexe exakt abgesehen vom untersten Eintrag, nach 2.1.3 induziert also auch die Abbildung zwischen den horizontalen Kernkomplexen  $\Gamma \mathcal{G}^* \mathcal{F} \rightarrow \Gamma \mathcal{I}^*$  Isomorphismen auf der Kohomologie. Der Beweis des anderen Teils des Lemmas und des Satzes verläuft sehr ähnlich und möge dem Leser überlassen bleiben.  $\square$

*Übung 7.2.9.* Sind  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$  und  $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{B}^*$  Auflösungen von  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  und ist  $\mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$  ein Morphismus von Komplexen von Garben etc etc so erhalten wir wohlbestimmte Morphismen, die **kanonischen Morphismen**

$$\text{can} : \mathcal{H}^q \Gamma \mathcal{A}^* \rightarrow H^q(X; \mathcal{F})$$

*Bemerkung 7.2.10.* Wir wissen seit 1.10.3, daß welche Garben azyklisch sind. Statt der Godement-Auflösung können wir also jede welche Auflösung nehmen, um die Garbenkohomologie zu berechnen. Unser nächstes Ziel ist Satz 2.7.6, nach dem “weiche” Garben azyklisch sind auf “parakompakten” Räumen. Der Satz von de Rham wird dann daraus folgen, daß für verschiedene weiche

Auflösungen der konstanten Garbe der Komplex der globalen Schnitte stets die Garbenkohomologie der konstanten Garbe liefern muss.



# Literaturverzeichnis

- [Bor84] Armand Borel (ed.), *Intersection cohomology*, Progress in Mathematics, vol. 50, Birkhäuser, 1984.
- [Bor94] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra 1-3*, Encyclopaedia of Mathematics, Cambridge University Press, 1994.
- [Buc55] D.A. Buchsbaum, *Exact categories and duality*, Transactions AMS **80** (1955), 1–34.
- [DM69] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1969), no. 36, 75–109.
- [Fre66] Peter Freyd, *Abelian categories*, Harper & Row, 1966.
- [Gab62] Peter Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.
- [God64] Roger Godement, *Théorie des faisceaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1252, Hermann Paris, 1964.
- [GZ67] Peter Gabriel and Michel Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer, 1967.
- [Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [HS71] Peter J. Hilton and Urs Stammbach, *A course in homological algebra*, Graduate Texts, vol. 4, Springer, 1971.
- [Ive87] Iversen, *Cohomology of sheaves*, Springer, 1987.
- [Jam95] I. M. James (ed.), *Handbook of algebraic topology*, North-Holland, Amsterdam, 1995.

- [Kel94] Bernhard Keller, *Deriving dg-categories*, Ann. Ec. Sup. **27** (1994), 63–102.
- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren, vol. 292, Springer, 1990.
- [LR03] William F. Lawvere and Robert Rosebrugh, *Sets for mathematics*, Cambridge University Press, 2003.
- [Mac98] Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, GTM, vol. 5, Springer, 1998.
- [Mas99] W. S. Massey, *A history of cohomology theory*, History of Topology (I. M. James, ed.), North-Holland, 1999, pp. 579–603.
- [Qui73] Daniel Quillen, *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories*, Lecture Notes in Math. 341, Springer, 1973, pp. 85–147.
- [She74] S. Shelah, *Infinite abelian groups*, Israel Journal of Mathematics **18** (1974), 243–256.
- [SZ94a] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, second ed., Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1994, Eine Einführung. [An introduction].
- [SZ94b] ———, *Algebraische Topologie*, second ed., Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1994, Eine Einführung. [An introduction].
- [Vic94] James W. Vick, *Homology theory*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 145, Springer-Verlag, New York, 1994, An introduction to algebraic topology.

# Index

- $G_X$ , 340, 381
- $X/A$  bei topologischen Räumen, 193
- [1] verschobener Komplex, 255
- $\Leftarrow$  Transformation, 46
- $\Omega(X, y, x)$  Menge von Wegen, 15
- $\Rightarrow$  Transformation, 46
- $\mathcal{A}^{[i]}(M, N)$  Erweiterungen, 441
- $\mathcal{C}^\times$  Isomorphismen in  $\mathcal{C}$ , 42
- $\mathcal{F}_x$  Halm einer Garbe, 382
- $\mathcal{F}_x$  Halm einer Prägarbe, 347
- $\circ$ 
  - Verknüpfung von Morphismen, 39
- $\cong$ 
  - homöomorph, 11
- $\sqcup$  Koprodukt, 51
- $\langle \rangle = \langle \rangle_{\oplus}$  additives Erzeugnis, 360
- $\langle \rangle = \langle \rangle_{\Delta}$  trianguliertes Erzeugnis, 463
- $\langle \rangle = \langle \rangle_{\Delta\ominus}$  Verdier-Erzeugnis, 463
- $\otimes$ 
  - Tensorprodukt
    - über Ring, 235
- $\pi^!$  Transfer der Homologie, 152
- $\pi_0(Y)$  Menge der Wegzusammenhangskomponenten, 17
- $\pi_1(X, x)$  Fundamentalgruppe, 17
- $\amalg$ 
  - Produkt in Kategorie, 50
- $\times$  Kreuzprodukt
  - der Homologie, 254
  - der Kohomologie, 268
- $f^*$  Rückzug
  - für singuläre Kohomologie, 265
- $f^{-1}$ 
  - Zurückholen von Garben, 380
- $f^\circ$  Zurückholen von Garben, 379
- $f_*$  für  $H_q(f)$ , 150
- $f_{\#} = \pi_1(f)$ , 18
- $i_{\mathcal{A}}$  Injektive von  $\mathcal{A}$ , 427
- $\mathcal{K}_q^{\leq}$  angeordnete  $q$ -Simplizes, 135
- $\xrightarrow{\simeq}$  Homotopieäquivalenz, 159
- $\xrightarrow{\cong}$  Isomorphismus in Der, 468
- $\xrightarrow{\cong}$  Quasiisomorphismus, 440
- $*$ 
  - Torsionsprodukt, 242
- Čech-Kohomologie
  - angeordnete, 371
- Čech-Koketten
  - angeordnete, 371
- $G^{\text{ab}}$  derivierte Gruppe, 84
- Ab Kategorie der abelschen Gruppen, 40
- Abbildungsgrad
  - allgemein, 229
  - bei Kreislinie, 32
  - lokaler, 229
- Abbildungskegel
  - in triangulierter Kategorie, 455
  - von Kettenabbildung, 282
  - von stetiger Abbildung, 213
- Abelisierung, 84
- abelsch
  - Garbe, 345
  - Kategorie, 357
  - Prägarbe, 339

- absteigende Filtrierung, 357
- abstrakter Faserfunktork, 121
- additiv
  - Funktork, 359
  - Kategorie, 357
  - Struktur, 357
- adjungiert
  - Funktork, 116
- Adjunktionsformel
  - für  $\cup$  und  $\cap$ , 278
- Äquivalenz
  - von Funktoren, 46
  - von Kategorien, 45
- äquivariant
  - Abbildung, 90
- affin
  - unabhängig, 67
- Alexander-Dualität, 418
- Alexander-Whitney-Abbildung, 259
- Alg Kategorie der Algebren, 40
- amalgamiertes Produkt, 86
- Aneinanderhängung
  - von Wegen, 15
- Anfangspunkt, von Pfeil in Köcher, 445
- angeordneter Čech-Komplex, 371
- Ankleben einer  $n$ -Zelle, 213
- Anklebesequenz, 213
- antiausgezeichnet, 435
- auf einen Hauptnenner bringen, 452
- Auflösung, 375, 427, 518
  - injektive, von Garbe, 377
- Augmentation, 209
  - bei singulären Ketten, 147
- Ausdehnen durch Null
  - für  $H_i^q$ , 406
- Ausdehnung durch Null
  - in der singulären Theorie, 307
- ausgezeichnet
  - Dreieck, 456
- ausgezeichnetes Dreieck, 435, 492
- Ausschneidung, 183, 189
  - Kohomologie, 284
- Automorphismus
  - in Kategorie, 42
- azyklisch
  - abelsche Garbe, 365
  - Auflösung einer Garbe, 375
  - topologischer Raum, 251
- azyklisch für die Überdeckung, 373
- azyklische Auflösung, 518
- azyklische Modelle, 251
- $B_q\mathcal{K}$  Simplizialränder, 139
- $B_qX$  singuläre Ränder, 145
- balanciertes Produkt, 119
- Bar-Komplex
  - nicht normalisierter, 240
- baryzentrische Unterteilung, 315
- Basis
  - einer Kategorienfaserung, 379
- Basis eines Funktork, 251
- Basispunkt, 16
- Basiswechsel, 397
- Basiswechselformorphismus, 508
- beschränkt gegen die Pfeile, 440
- Berechnung der Kohomologie nach Čech, 373
- beschränkt in Richtung der Pfeile, 282
- Betti-Zahl, 198
- Bild
  - in abelscher Kategorie, 354
- bilinear
  - bei Moduln, 236
- Bimodul, 237
- Bockstein-Homomorphismen, 232, 266
- Borel-Moore-Homologie, 301, 421
  - simpliziale , 306
- Borsuk-Ulam, 36
- Bouquet von Kreislinien, 83
- braid group, 122
- Brouwer, Fixpunktsatz

- für die Kreisscheibe, 23
- Brouwer, Fixpunktsatz
  - allgemeiner, 186
- Brüche, 450
- Bündel, 337, 338
- Butterbrot mit Schinken
  - Satz vom, 37
- $\check{C}_{\leq}^q$  angeordnete Čech-Koketten, 371
- c-mou, 409
- c-soft, 409
- cap-Produkt
  - auf der Homologie, 279
  - mit lokal endlicher Kette, 305
  - von Ketten, 278
- Car, 445
- carquois, 445
- Cauchy'scher Integralsatz
  - Umlaufzahlversion, 168
- Čech-1-Kozykel, 332
- Čech-Kohomologie
  - mit Koeffizienten in Gruppe, 334
  - von abelscher Prägarbe, 342
  - von Prägarbe von Gruppen, 343
- Čech-Kokette, 341
- coim
  - Kobild in Kategorie, 354
- cok
  - bei abelschen Gruppen, 286
  - Kokern in Kategorie, 354
- col Kolimes, 293
- colim Kolimes, 293
- cup-Produkt, 267, 272
- $\Delta$ -Komplex, 202
- darstellbarer Funktor, 48
- de-Rham-Kohomologie, 391
- de-Rham-Komplex, 391
- Deckbewegung, 95
- Decktransformation, 95
- Der, 468
- derivierete Gruppe, 84
- derivierete Kategorie, 468, 491
- derivierete Kategorie der dg-Moduln, 468
- dévissage, 463
- dg-Gruppe, 150
- dg-Modul, 275
  - über dg-Ring, 278
- dg-Ring, 273
- dgDer, 468
- dgFrei, 464
- dgHot, 276
- dgMod, 150, 275
- dgPer, 464
- Diagrammschema, 445
- differentiell
  - abelsche Gruppe, 151
  - graduierte abelsche Gruppe, 150
  - graduierter Modul, 275
  - graduierter Modul über dg-Ring, 278
  - graduierter Ring, 273
- differentieller graduierter Modul, 275
- differenzierbares  $\mathbb{K}$ -Bündel, 338
- Dimension
  - einer simplizialen Menge, 205
  - homologische, 443
- direktes Bild
  - bei Kofaserfunktoren, 504
  - von Garbe, 393
- diskret
  - Kategorie, 42
- distingué
  - triangle, 456
- distinguished
  - triangle, 456
- distinguished triangle, 435
- divisibel, 288
- Doppelkomplex, 369
- Doppelkomplex im ersten Quadranten, 369

- Dreieck, 435, 454
  - ausgezeichnetes, 456
- duale Zelle, 315
- dualen Komplex, 267, 502
- $E^\infty$  bei Spektralsequenz, 496
- $E^\infty$  bei graduierter Spektralsequenz, 498
- Ecken, 69
- Eckenreduktion, 80
- Eckenzahl, 76
- Egalisator, 296
- eigentlich diskontinuierlich, 92
- Eilenberg-Zilber, 248
- Eilenberg-Zilber-Abbildung, 249
- Eilenberg-Zilber-Transformation, 249
- einfach
  - zusammenhängend, 99
- Einpunktverbindung, 51
- Einschränkung
  - von Garbe, 351
- Einschränkungsabbildung, 340
- endazyklisch, 477
- endlich, 445
- Endomorphismen, 40
- Endpunkt, von Pfeil in Köcher, 445
- ens einelementige Menge, 43, 381
- Ens
  - Kategorie der Mengen, 40
- Ens\* Kategorie punktierter Mengen, 40
- Ens umgedrehte Abbildungen, 274
- épaisse
  - souscatégorie, 463
- Epi, 355
- Epimorphismus, 355
- erblich
  - abelsche Kategorie, 444
- erblicher Ring, 291
- erlaubt das Verkleben von Schnitten, 400
- erste Čech-Kohomologie, 343
- erste Chern'sche Klasse, 368
- Erweiterung
  - abelscher Gruppen, 286
  - höhere, 429
  - in abelscher Kategorie, 441
  - von abelschen Gruppen, 285
- erzeugt
  - Verdiersystem, 463
- étale
  - stetige Abbildung, 346
- étale
  - Raum, 346
  - stetige Abbildung, 90
- Euler'scher Polyedersatz, 199
- Eulercharakteristik
  - eines Kettenkomplexes, 199
  - eines topologischen Raums, 198
- Eulerklasse, 473
- exakt, 356
- exakte Sequenz
  - in präabelscher Kategorie, 356
  - von punktierten Mengen, 105
  - von Systemen, 298
- $\text{Exp}(t) := \exp(2\pi it)$ , 20
- $\text{Ext}^i$  Erweiterungen, 429
- Ext-Sequenz
  - im ersten Eintrag, 290
  - im zweiten Eintrag, 287
- extension, 286
- F-azyklisch, 434
- faisceau, 345
- Faser
  - eines Funktors, 502, 515
- Faserbündel, 338
- Faserfunktorkomplex, 503
  - abstrakter, 120
  - bei Überlagerung, 105
- Faserprodukt, 52, 57
- 2-Faserprodukt

- von Kategorien, 114
- feine Ketten, 189
- feiner
  - Überdeckungs, 334
- fibré principal, 335
- filtrierend
  - partiell geordnete Menge, 293
- final, 43
  - in partiell geordneter Menge, 297
- finale Linksapproximation, 489
- Fixpunktsatz
  - simplizialer, 200
- Fixpunktsatz von Brouwer
  - allgemeiner, 186
  - für die Kreisscheibe, 23
- Flächenwort, 75
- flabby, 365
- Fläche
  - nichtorientierbare, 14
  - orientierbare, 14
- flasque, 365
- frei
  - abelsche Gruppe, 183
  - Funktor, 251
  - Gruppe, 64
  - Monoid, 63
  - Produkt von Gruppen, 85
  - topologische Gruppenwirkung, 92
  - Untergruppe, 247
- freie triangulierte Kategorie, 463
- Fünferlemma, 181
- Fun Funktorkategorie, 46
- Fundamentalgruppe, 17
- Fundamentalgruppe der Kreislinie, 19
- Fundamentalzykel, 222
  - in der Borel-Moore-Homologie, 303, 305
- Funktionskeime, 351
- Funktor, 43
  - linksadjungierter, 116
  - rechtsadjungierter, 116
- $\Gamma$  globale Schnitte, 351
- $\Gamma_!$  Schnitt mit kompaktem Träger, 405
- $\Gamma_c$  Schnitt mit kompaktem Träger, 405
- $\Gamma_!$ -azyklisch, 407
- Galois, 96
- Garbe, 345
- Garbe der lokalen singulären  $q$ -Koketten, 398
- Garbe der Schnitte, 345
- Garbe der unstetigen Schnitte, 362
- Garbenkohomologie, 362
- garbentheoretischer Kohomologiering, 442
- Garbifizierung, 353
- gesättigt
  - offene Überdeckungs, 334
- Geschlecht, 14
- geschlossene Fläche, 12
- geschlossene kombinatorische Fläche, 73
- geschlossene Mannigfaltigkeit, 12
- glatt
  - $q$ -Kette, 401
  - $q$ -Simplex, 401
- globaler Schnitt
  - von Garbe, 351
- Godement-Auflösung, 362
- graduiert
  - abelsche Gruppe, 150
  - Ring, 273
- graduiert kommutativ, 276
- Graduierte Kommutativität, 261, 269
- graduierter Modul, 278
- grober Modulraum, 116
- großen Diagonale, 122
- groupe de tresses, 122
- Grp Kategorie der Gruppen, 40
- Gruppe
  - Erzeugende und Relationen, 82
- Gruppoid, 42
  - fundamentales, 18, 41

- über Kategorie, 512
- Gruppoid-Stack, 513
- Gruppoidfaserung, 512
- Gruppoidfunktor, 512
- Gysin-Sequenz, 412, 473
- $\check{H}_{\leq}^q$  angeordnete Čech-Kohomologie, 371
- $\mathcal{H}_q$  Homologie eines Komplexes, 151
- $H_{\text{garb}}^q$ , 363
- $H_{\text{sing}}^q$ , 265
- $H_q^{\text{sing}} X$  singuläre Homologie, 146
- $H_!^q$  Kohomologie mit kompaktem Träger, 300
- $H_c^q$  Kohomologie mit kompaktem Träger, 300
- $H_q \mathcal{K}$  simpliziale Homologie, 139
- $H_q X$  singuläre Homologie, 145
- halbeinfach
  - abelsche Kategorie, 443
- Halm, zu Prägarbe, 347
- Hauptfaserbündel, 335
  - glattes, 335
- Hauptlemma der homologischen Algebra, 250, 377
- Hausdorff, relativ, 408
- hdim homologische Dimension, 443
- Henkelelimination, 81
- Hinterseite eines Simplex, 259
- Hochhebung, 21, 93
- $\text{Hom}$  umgedrehte Hom-Räume, 275
- Hom-Komplex, 159
- homöomorph
  - für Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , 11
- Homöomorphismus
  - für Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , 11
- Homologie
  - eines Kettenkomplexes, 151
  - eines Punktes, 146
  - konvexer Mengen, 147
  - mit Koeffizienten, 232
  - singuläre, 146
  - von  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ , 233
- Homologiegruppe
  - der Sphären, 186
  - relative, 175
  - simpliziale, 139
  - singuläre, 145
- Homologiekategorie, 145
  - in Kettenkomplex, 152
- Homologiesequenz
  - abstrakte, 178
  - eines ausgezeichneten Dreiecks, 437
  - eines Raumpaars, 178
  - eines Raumtripels, 182
- homologische Dimension, 443
- Homomorphismus
  - von Garben, 345
- homotop, 16, 26, 158
  - frei homotop, 164
  - mit festen Endpunkten, 15, 27
- Homotopie
  - bei Raumpaaren, 177
  - von Abbildungen, 26
- Homotopie-Invarianz
  - der Homologie, 152
  - der Kohomologie, 283
- Homotopie-Klasse, 27
- Homotopieäquivalenz
  - algebraische, 159
  - topologische, 28
- homotopieinjektiv, 473
- Homotopiekategorie
  - algebraische, 158
  - topologische, 28, 41
  - topologische punktierte, 28, 49
- Homotopielift, 427
- homotopieprojektiv, 473
- Hopf-Invariante, 273
- Hot
  - topologische Homotopiekategorie, 41



- algebraische Homotopiekategorie, [159](#)
- topologische Homotopiekategorie, [28](#)
- Hot\*
  - Homotopiekategorie, topologische punktierte, [28](#), [49](#)
- Hurewicz-Isomorphismus, [160](#)
- Id Identitätsfunktork, [44](#)
- identische Transformation, [47](#)
- Identität auf  $X$ , [39](#)
- Identitätsfunktork, [44](#)
- Igel, Satz vom, [25](#)
- im
  - Bild in Kategorie, [354](#)
- $\text{Inj}_A$  injektive Auflösungen von  $A$ , [427](#)
- injektiv, [376](#), [517](#)
  - Modul, [287](#), [428](#)
- injektive abelsche Gruppe, [287](#)
- injektive Auflösung, [427](#), [475](#), [518](#)
  - von Garbe, [377](#)
- Integralsatzes von Cauchy
  - Umlaufzahlversion, [168](#)
- Invarianz von Gebieten, [212](#)
- invers
  - Weg, [15](#)
- inverses Bild
  - bei Faserfunktork, [504](#)
  - einer Garbe, [379](#)
- Iso
  - in Kategorie, [42](#)
- isomorph
  - in Kategorie, [42](#)
- Isomorphieklasse, [42](#)
- Isomorphismus
  - in Kategorie, [42](#)
  - von Funktoren, [46](#)
  - von Kategorien, [45](#)
- Isotransformation, [46](#), [446](#)
- Jordan'scher Kurvensatz, [212](#)
- Jordan-Brouwer
  - Satz von, [208](#)
- $k$ -Skelett, [195](#)
- kanonische Abbildung, [63](#), [64](#)
- Kantenabbildung, [145](#)
- Karoubi-Eigenschaft, [360](#)
- kartesisch, [52](#), [56](#), [515](#)
  - Morphismus, [502](#)
- Kategorie, [39](#)
  - diskrete, [42](#)
  - triangulierte, [455](#)
- Kategorien über  $\mathcal{B}$ , [514](#)
- Kategorienfaserung, [378](#)
  - strikte, [379](#)
- ker
  - Kern in Kategorie, [354](#)
- Kern
  - in Kategorie, [354](#)
- Ket, [150](#)
- Kette
  - simpliciale, [194](#)
  - ordnungsverträgliche, [195](#)
  - Simplizialkette, [135](#)
  - singuläre, [142](#)
- Kettenabbildung, [150](#)
- kettenhomotop, [158](#)
- Kettenkomplex, [150](#)
- Kippobjekt, [478](#)
- Klassifikationsprobleme, [42](#)
- Klein'sche Flasche, [12](#)
- kleine Kategorie, [40](#)
- Koassoziativität, [272](#)
- Kobild
  - in abelscher Kategorie, [354](#)
- Kodimension
  - einer Untermannigfaltigkeit, [123](#)
- Köcher, [445](#)
  - $\mathcal{U}$ -Köcher, [446](#)
- Kofaserfunktork, [503](#)
- kofinal, [43](#)

- in partiell geordneter Menge, 297
- kohomolog, 333
  - Čech-1-Kozykel, 342
- Kohomologie
  - eines Komplexes, 423
  - mit Koeffizienten in Garbe, 362
  - mit kompaktem Träger, 405
  - relative, 284
  - simpliziale, 285
  - singuläre, 265
    - mit kompaktem Träger, 300
- Kohomologiegruppen, 265
- Kohomologierung
  - garbentheoretischer, 442
  - singulärer, 268
- koinduziert
  - $G$ -Menge, 119
- kokartesisch
  - Diagramm, 53, 58
- Kokern
  - bei abelschen Gruppen, 286
  - in Kategorie, 354
- Kokette vom Grad  $q$ , 265
- Koketten
  - relative, 284
  - singuläre mit kompaktem Träger, 302
- Kolimes, 293
  - direkter, 293
  - filtrierender, 293
  - induktiver, 293
- kombinatorische Fläche, 73
- kombinatorische Fläche ohne Rand, 73
- Kommutator, 84
- kompaktweich, 409
- Komplex, 150
  - $\Delta$ -Komplex, 202
- Konjugationsklassen
  - von Untergruppen, 91
- konstant
  - abelsche Garbe, 346
  - Garbe, 346, 353
  - Kategorie, 423
  - Weg, 15
- kontravarianter Funktor, 44
- Koprodukt, 50
- Korand, 265
- Korandoperator, 265
- Kosystem, 295
- Kowinkel, 54, 59
- Kowinkeldiagramm, 54, 59
- Kozykel, 265
  - nichtkommutativer erster Čech, 342
- Kreisraum, 102
- Kreuzprodukt
  - der Homologie, 254
  - der Kohomologie, 268
- Kring
  - Kategorie der Kringe, 40
- Kronecker-Paarung, 266
- Künneth-Formel, 255
  - mit Körperkoeffizienten, 254
- Kürzen, 450
- Kugelschale, 11
- kurze exakte Sequenz, 356
  - von punktierten Mengen, 105
- $\lambda^p$  Vorderseite eines Simplex, 259
- lange exakte Sequenz
  - der Garbenkohomologie, 364
  - der Homologie, abstrakte, 178
  - der Homologie, kategorielle, 424
  - der Kohomologie, 284
  - derivierter Funktoren, 432, 440
- Leray-Spektralsequenz, 485
- Lift, 21, 93, 427
- Liftbarkeitskriterium, 110
- Liften von Homotopien, 131
- $\lim$  Limes in Kategorie, 295
- $\varinjlim$  direkter Limes in Kategorie, 293

- $\varprojlim$  inverser Limes in Kategorie, 296
- Limes, 295
  - direkter, 293
  - in Kategorie, 295
  - induktiver, 293
  - inverser, 296
  - projektiver, 296
- lineare Fortsetzung, 135
- linksadjungiert
  - partiell, 116
- linksadjungierter Funktor, 116
- Linksapproximation, 489
- Linksauflösung, 431
- linksderivierte Funktor, 490
- Linksderivierten, 431
- linksexakt, 356
- lokal endlich
  - Mengensystem in topologischem Raum, 387
  - Simplizialkomplex, 307
- lokal endlichen singulären  $q$ -Ketten, 301
- lokal konstant
  - Garbe, 353
- lokale Prägarbe, 516
- Lokalisierung von Kategorien, 446
- Lokalisierungsfunktor, 447
- Lusternik-Schnirelmann, 38
- $\mathcal{M}$  Matrixkategorie, 45
- Mannigfaltigkeit
  - topologische, 219
- Mayer-Vietoris-Sequenz
  - der Garbenkohomologie, 373
  - der Homologie, 191
  - der Kohomologie, 285
    - mit kompaktem Träger, 310
  - für  $H_i^*$ , 310
  - relative, 193
  - relative, der Kohomologie, 285
- Menge
  - semisimpliziale, 202
- Mengenfunktor, 48
- Mittag-Leffler
  - Bedingung von, 299
- Modulraum
  - grober, 116
- Mon Kategorie der Monoide, 40
- Mono, 354
- Monomorphismus, 354
- Morphismen
  - kanonische, 518, 519
- Morphismen über  $X$ , 51, 56
- Morphismus, 39, 337
  - $G$ -Morphismus, 90
  - über Morphismus, 502
  - von Auflösungen, 377
  - von Kategorienfaserungen, 507
  - von Raumpaaren, 175
- Morphismus von Dreiecken, 455
- Morphismus von einem Dreieck in ein anderes Dreieck, 435
- Morphismus von Prägarben, 339
- Morphismus von Systemen, 298
- mou, 389
- multiplikatives System, 453
- nat, 375, 407
- Natürlichkeit, 260, 269
- Neunerlemma, 182
- normal
  - homogener Raum, 91
  - Überlagerung, 96
- Normalisator, 91
- Normalteiler erzeugt von, 82
- nullhomolog, 160
- nullhomotop, 28
  - Kettenabbildung, 158
  - Komplex, 159
- nullhomotope, 276
- Nullkategorie, 443
- Nullkomplex, 150

- Nullmorphismus, 354
- Nullobjekt, 354
- Nullschnitt, 221
- Nullsystem, 463
- ⊗
  - Tensorprodukt
    - über Ring, 235
- Objekt, 39
- Objekte über, 51, 56
- Objekte unter, 51, 56
- objet basculant, 478
- Oktaederaxiom, 455
- opponiert
  - triangulierte Kategorie, 459
- opponierte Kategorie, 41
- opponierten dg-Ring, 275
- Ore-Bedingungen, 450
- Ore-Lokalisierung, 453
- orientierbar
  - Mannigfaltigkeit, topologische, 220
  - Fläche, 14
- orientiert
  - Mannigfaltigkeit, topologische, 220
- Orientierung
  - von topologischer Mannigfaltigkeit, 219
- Orientierungsdarstellung, 222
- Orientierungsgarbe, 220
  - mit Koeffizienten, 233
- $\pi_1(X, y, x)$  Homotopieklassen von Wegen, 16
- $\pi_0(X)$  Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ , 105
- $\pi_1(f) = f_{\#}$ , 18
- ∏
  - Produkt in Kategorie, 50
- parakompakt, 387
- perfekte triangulierte Kategorie, 464
- Pfeile, 445
- Poincaré-Lemma, 392
- Poincaré-Vermutung, 19
- Poincaré-Dualität, 279
  - allgemeine, 311
- Polyeder
  - eines Simplicialkomplexes, 69
- pr Projektion aus Produkt, 50
- prä-additiv
  - Kategorie, 357
- präabelsch, 355
- Prägarbe, 339
  - der stetigen  $G$ -wertigen Funktionen, 340
- Prägarbe der differenzierbaren  $G$ -wertigen Funktionen, 340
- Prägarbe der lokal konstanten  $G$ -wertigen Funktionen, 340
- Prägarbe der singulären  $q$ -Koketten, 398
- Prägarbe der stetigen komplexwertigen Funktionen, 340
- prefaisceau, 339
- presheaf, 339
- principal bundle, 335
- Prismen-Operator, 147
- Produkt
  - balanciertes, 119
  - in Kategorie, 49
  - von Kategorien, 42
- Produktmorphismus, 50
- Projektion, 337
  - in Kategorie, 49
  - von Hauptfaserbündel, 335
  - von Torsor, 335
- Projektionsformel
  - der Homologie, 279
- projektiv
  - Modul, 249
  - Objekt, 430
- projektive Auflösung, 431
- $\text{pt} = \text{pt}(\mathcal{C})$  finales Objekt von  $\mathcal{C}$ , 43

- pull-back, 52, 57
- pull-back-Diagramm, 52, 56
- punktierter Raum, 16
- push-out-Diagramm, 53, 58
  
- Quasiäquivalenz, 442
- Quasibasis, 442
- quasiinverser Funktor, 118
- Quasiisomorphismus
  - von dg-Ringen, 442
  - von Komplexen, 440
- Quasimorphismus, 442
- quiver, 445
- Quotienten triangulierter Kategorien, 465
- Quotientenfunktor
  - triangulierter, 466
  
- $\rho^a$  Hinterseite eines Simplex, 259
- Rand
  - in Kettenkomplex, 152
  - simplicialer, 139
  - singulärer, 145
- Randkante, 73
- Randoperator, 137
- Raumpaar, 174
- rechtsadjungiert
  - partiell, 116
- rechtsadjungierter Funktor, 116
- Rechtsapproximation
  - triangulierte, 479
- Rechtsauflösung, 427
- Rechtsbrüche, 450
- rechtsderivierte Funktor, 480
- rechtsderivierte Funktoren, 428
- rechtsexakt, 238, 356
- rechtmultiplikatives System, 450
- reduzierte Homologie mit Koeffizienten in  $G$ , 232
- reduzierte Homologiegruppen, 209
- regulär
  - Überlagerung, 96
  - relativ Hausdorff, 408
  - relative  $q$ -Ränder, 175
  - relative Homologiegruppen, 175
  - relative Ketten, 174
  - relative Kohomologie, 284
  - relative Koketten, 284
- Riemann
  - Riemann'sche Fläche von Funktionskeim, 351
- Ring Kategorie der Ringe, 40
- Ring der Selbsterweiterungen, 441
- Ringoid, 357
- Rng Kategorie der nicht unitären Ringe, 40
- Rückholfunktor
  - bei Kategorienfaserung, 379
- Rückzug, 52
  - für singuläre Kohomologie, 265
  - von Morphismus, 57
  
- $S^n$   $n$ -Sphäre, 11
- $\mathcal{S}$  Garbe von Schnitten, 345
- $S_*\mathcal{K}$  Simplicialkoketten mit kompaktem Träger, 310
- $S_q\mathcal{K}$  Simplicialkette, 135
- $S_qX$  singuläre  $q$ -Ketten, 142
- Schema, 49
- Schlangenlemma, 425
- Schleifenraum, 17
- Schnitt
  - der Orientierungsgarbe, 224
  - mit kompaktem Träger, 405
  - über einer Menge von Garbe, 351
  - von abelscher Prägarbe, 340
- Schnittzahl, 313
- Seifert-van Kampen, 60
- semisimpliziale Menge, 202
  - vollständige, 202
- senkrechter Kernkomplex, 369
- sheaf, 345

- Simplex
  - angeordneter, 135
  - singulärer, 142
  - voller, 67
  - von Simplizialkomplex, 69
- simplizial
  - Abbildung, 71
  - Homologiegruppe, 139
  - Kette, 194
    - ordnungsverträgliche, 195
  - Kohomologie, 285
  - Menge, 202
- Simplizialkette, 135
  - lokal endliche, 305
- Simplizialkokette, 285
  - mit kompaktem Träger, 310
- Simplizialkomplex, 69
  - abstrakter, 73
- Simplizialrand, 139
- Simplizialzykel, 139
- singulär
  - $q$ -Kette, 142
  - $q$ -Simplex, 142
  - Homologie, 146
  - Kohomologiering, 268
  - Kokette mit Koeffizienten, 264
  - Koketten mit kompaktem Träger, 302
- singulären Homologie
  - mit Koeffizienten, 146
- Skelett
  - $k$ -Skelett von Simplizialkomplex, 204
- Skelett von Simplizialkomplex, 195
- soft, 389
- spaltend
  - Injektion, 182
  - Surjektion, 182
- Spaltenkomplex, 369
- Spektralsequenz
  - graduierte, 498
  - ungraduierte, 495
- Sphäre, 11
- Stack, 512, 513
- Standardauflösung, 242
- Standardorientierung
  - des Standardsimplex, 403
- Standardsimplex, 142
- strikt verträglich mit den Filtrierungen, 357
- superkommutativ, 276
- support, siehe Träger, 404
- Suspension, 212
- svelte, 43
- System
  - direktes, 293
  - in Kategorie, 293
  - induktives, 293
  - inverses, 296
  - trianguliertes, 462
- Szyzygiensatz, 433
- $\tau_q \in S_q(\Delta_q)$  tautologischer Simplex, 156
- tautologischer Simplex, 156
- Teilung der Eins, 388
- Tensorkomplex, 241
- Tensorprodukt
  - über Ring, 235
  - von Komplexen, 241
- tilting object, 478
- top einelementiger Raum, 43
- Top Kategorie der topologischen Räume, 40
- Top\* Kategorie punktierter topologischer Räume, 40
- Top<sup>c</sup> Raumpaare, 177
- topologisch
  - frei, Gruppenwirkung, 92
  - Mannigfaltigkeit, 219
- topologisch frei
  - Gruppenwirkung

- topologische, 335
- $\text{Tor}^i$ , 432
- torsionsfrei
  - abelsche Gruppe, 239
  - Modul, 239
- Torsionsgruppe, 432
- Torsionsprodukt, 242
- Torsionssequenz, 243
- Torsor
  - auf topologischem Raum, 335
- Torus, 12
- tot Totalkomplex, 369
- totale Homologie, 279
- Totalkomplex, 369
- Totalraum, 335, 337
  - von Überlagerung, 88
- Träger
  - von Schnitt
    - der Orientierungsgarbe, 224
    - einer abelschen Garbe, 404
- Transferabbildungen, 152
- Transformation
  - verträgliche
    - von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren, 454
  - verträgliche, von Funktoren, 515
  - von Funktoren, 46
  - von Köchermorphismen, 445
- transponiert
  - Abbildung
    - bei abelschen Gruppen, 265
- treu
  - Funktor, 45
- triangle
  - distingué, 456
  - distinguished, 456
- triangle distingué, 435
- trianguliert
  - Kategorie, 455
  - System, 462
- triangulierte Kategorie
  - opponierte, 459
- triangulierter Funktor, 462
- Triangulierung, 73
- trivial
  - Überlagerung, 88
- Trivialisierung
  - von Überlagerung, 88, 330
- Übergangsfunktionen
  - zwischen Trivialisierungen, 333
- Überlagerung, 88
  - triviale, 88
  - universelle, 96
  - unverzweigte, 88
- Umlaufzahl
  - eines Weges
    - auf der Kreislinie, 20
    - in der Zahlenebene, 30
  - eines Zyklus, 166
- universell, 96
- universelle Eigenschaft, 293
  - freier Gruppen, 64
  - freier Monoide, 63
- Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, 236
- Universelles Koeffiziententheorem
  - der Homologie, 246
  - der Kohomologie, 291
- Unterkategorie, 40
- Unterteilungsoperator, 188
- Verdiersystem, 462
- Verfeinerung, 387
- Vergiss-Funktor, 44
- Verklebung, 74
- Verklebungsbedingung, 345
- Verklebungsfunktionen, 330
- Verknüpfung
  - von Morphismen, 39
  - von Wegen, 15
- Verschlingungszahl, 212
- verträglich, 454

- Transformation von  $\mathbb{Z}$ -Funktoren, [454](#)
- Transformation von Funktoren, [515](#)
- Vieleck, [74](#)
- voll
  - Simplex, [74](#)
  - Unterkategorie, [40](#)
- Vollkugel, [11](#)
- volltreu
  - Funktor, [45](#)
- Vorderseite eines Simplex, [259](#)
- Weg
  - in Köcher, [445](#)
  - inverser, [15](#)
  - konstanter, [15](#)
- Wegekategorie, [445](#)
- Wegeraum, [17](#)
- weich
  - Garbe, [389](#)
- welk
  - Garbe, [365](#)
- Whitehead
  - Vermutung von, [291](#)
- Wilder, Satz von, [200](#)
- Winkel
  - spezielles Diagramm, [52](#), [57](#)
- Winkeldiagramm, [52](#), [57](#)
- Wolkenkratzer, [341](#)
- Wurzel
  - aus dem  $\mathbb{R}^3$ , [263](#)
- ×
  - Produkt in Kategorie, [50](#)
  - Produkt von Kategorien, [42](#)
- $\times_H$  balanciertes Produkt, [119](#)
- $\times_X$  Faserprodukt, [52](#), [57](#)
- Yoneda-Lemma, [48](#)
- Yoneda-Produkt, [441](#)
- $Z_q X$  singuläre Zykel, [145](#)
- $Z_q \mathcal{K}$  Simplicialzykel, [139](#)
- $\mathbb{Z}$ -Funktorkategorie, [454](#)
- $\mathbb{Z}$ -Struktur, [454](#)
- Zahl der Blätter, [90](#)
- Zeilenkomplex, [369](#)
- Zerschneidung, [74](#)
- Zopfgruppe, [122](#)
- Zopfrelation, [123](#)
- Zurückholen
  - auf der Kohomologie, [383](#)
  - von Garben, [379](#)
  - von Schnitten in Garben, [381](#), [382](#)
- zusammenhängend
  - einfach, [99](#)
- zusammenziehbar
  - topologischer Raum, [28](#)
- Zykel
  - in Kettenkomplex, [152](#)
  - simplicialer, [139](#)
  - singulärer, [145](#)
- zyklische Kategorie, [208](#)