

Übungsblätter zur Algebra und Zahlentheorie bei Soergel im WS 2025/26

Allgemeine Hinweise:

- Bei der Bearbeitung der Übungen und später der Klausuraufgaben ist keine übertriebene Ausführlichkeit gefordert. Einfach zu schreiben, es sei klar, reicht nicht, aber eine schlüssige Kette von richtigen Argumenten in der nächsten Stufe der Ausführlichkeit reicht aus. Allerdings soll die Argumentationskette auch für Sie selbst schlüssig sein. Sie müssen sie im Tutorat erklären können und in der Lage sein, auf Nachfragen Schritte Ihrer Argumentation genauer auszuführen. In der Vorlesung bewiesene Aussagen müssen dabei aber keinesfalls nochmals bewiesen werden, da reicht ein Zitat.
- Es gibt jede Woche vier Aufgaben und für jede Aufgabe gibt es vier Punkte, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben durchaus sehr unterschiedlich sein wird. Ergänzende Übungen sind meist schwieriger, sind für die Klausur nicht relevant und geben bis zu vier Bonuspunkte.
- Die Übungen werden Dienstags ausgegeben und müssen die Woche danach am Dienstag vor der Vorlesung abgegeben werden. Sie seien ermutigt, die Aufgaben mit Ihren Kommilitonen zu besprechen und zu zweit abzugeben. Mehr als zwei Namen auf einem Zettel gilt aber nicht.
- Die Übungen werden auf den folgenden Seiten dieses Textes ins Netz gestellt, der jede Woche um das Übungsblatt der jeweiligen Woche ergänzt werden wird.

Anwesenheitsaufgaben zweite Vorlesungswoche Algebra und Zahlentheorie

Diese Übungen müssen nicht abgegeben werden, sondern sollen im Laufe der zweiten Vorlesungswoche in den Tutoraten bearbeitet werden. Zu diesem Zeitpunkt liegen ja noch keine korrigierten Hausaufgaben vor, die zu besprechen wären.

Übung 0.1. Man führe in einem Beispiel den euklidischen Algorithmus aus und finde eine Darstellung des ggT als Linearkombination der beiden Ausgangszahlen.

Übung 0.2. Man gebe ein unverkürzbares Erzeugendensystem der Gruppe $\mathbb{Z}^2$ an, das aus drei Elementen besteht.

Übung 0.3. Seien M ein Monoid und e sein neutrales Element. Man zeige: Unser Monoid ist genau dann eine Gruppe, wenn es für jedes $a \in M$ ein $\bar{a} \in M$ gibt mit $\bar{a} \top a = e$, und dies Element $\bar{a}$ ist dann notwendig das Inverse von a in M .

Übung 0.4. Man zeige: Ein endliches Monoid $(M, \top)$, in dem für jedes Element $a \in M$ die Multiplikationsabbildung eine Injektion $(a \top) : M \hookrightarrow M$ ist, muß bereits eine Gruppe sein.

Übungen Algebra und Zahlentheorie

Abgabe bis Dienstag, den 21.10 um 10:15

Übung 1.1. Ein Element a eines Monoids M ist invertierbar genau dann, wenn es $b, c \in M$ gibt mit $b \top a = e = a \top c$ für e das neutrale Element.

Übung 1.2. Wieviele Untergruppen hat die additive Gruppe eines dreidimensionalen Vektorraums über dem Körper mit drei Elementen?

Übung 1.3. Man bestimme alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

Übung 1.4. Sind $H, K \subset G$ zwei Untergruppen einer endlichen Gruppe mit $|H|$ teilerfremd zu $|K|$ und $|H| \cdot |K| = |G|$, so induziert die Verknüpfung eine Bijektion $H \times K \rightarrow G$.

Übungen Algebra und Zahlentheorie

Abgabe bis Dienstag, den 28.10 um 10:15

Übung 2.1. Gegeben x, y zwei Elemente endlicher Ordnung in einer abelschen Gruppe G teilt die Ordnung ihres Produkts das kleinste gemeinsame Vielfache ihrer Ordnungen. Sind die Ordnungen von x und y teilerfremd, so gilt sogar $\text{ord}(xy) = (\text{ord } x)(\text{ord } y)$.

Übung 2.2. Man gebe alle Zahlen an, die bei Division durch 8 Rest 4 lassen, bei Division durch 13 Rest 2, und bei Division durch 11 Rest 9. Hinweis: Der euklidische Algorithmus liefert schon mal Lösungen, wenn ein Rest 1 ist und die anderen Null.

Übung 2.3. Wieviele Gruppenhomomorphismen gibt es von $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ zur symmetrischen Gruppe S_4 ?

Übung 2.4. Man zeige: Gegeben ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow \bar{G}$ und ein Normalteiler $\bar{N} \subset \bar{G}$ mit Urbild $\varphi^{-1}(\bar{N}) = N \subset G$ induziert φ einen Gruppenisomorphismus

$$\varphi : G/N \xrightarrow{\sim} \bar{G}/\bar{N}$$