Übungblätter zur Analysis 1 bei Soergel im WS 2022/23

Allgemeine Hinweise:

- Bei der Bearbeitung der Üungen und später der Klausuraufgaben ist keine übertriebene Ausführlichkeit gefordert. Einfach zu schreiben, es sei klar, reicht nicht, aber eine schlüssige Kette von richtigen Argumenten in der nächsten Stufe der Ausführlichkeit reicht aus. Allerdings soll die Argumentationskette auch für Sie selbst schlüssig sein. Sie müssen sie im Tutorat erklären können und in der Lage sein, auf Nachfragen Schritte Ihrer Argumentation genauer auszuführen. In der Vorlesung bewiesene Aussagen müssen dabei aber keinesfalls nochmals bewiesen werden, da reicht ein Zitat.

- Es gibt jede Woche vier Aufgaben und für jede Aufgabe gibt es vier Punkte, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben durchaus sehr unterschiedlich sein wird. Ergänzende Übungen sind meist schwieriger, sind für die Klausur nicht relevant und geben bis zu vier Bonuspunkte.

- Die Übungen werden Dienstags ausgegeben und müssen die Woche danach am Dienstag vor der Vorlesung beim jeweiligen Tutor abgegeben werden, entweder in den Kästen im Keller des Mathematischen Instituts oder nach Absprache mit dem Tutor auch auf anderem Wege. Sie seien ermutigt, die Aufgaben mit Ihren Kommilitonen zu besprechen und zu zweit abzugeben. Mehr als zwei Namen auf einem Zettel gilt aber nicht.

- Die Übungen werden auf den folgenden Seiten dieses Textes ins Netz gestellt, der jede Woche um das Übungsblatt der jeweiligen Woche ergänzt werden wird.

- Für die Studenten aus der PH gelten gesonderte Regelungen.

Anwesenheitsaufgaben zweite Vorlesungswoche
Analysis 1

Diese Übungen müssen nicht abgegeben werden, sondern sollen im Laufe der zweiten Vorlesungswoche in den Tutoraten bearbeitet werden. Zu diesem Zeitpunkt liegen ja noch keine korrigierten Hausaufgaben vor, die zu besprechen wären.

Übung 0.1. Man erweitere das Pascal'sche Dreieck um die benötigten zusätzlichen Zeilen und stelle $(x+y)^7$ als Summe von Monomen dar.

Übung 0.2. Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $p \geq 2$, die nicht als Produkt zweier echt kleinerer natürlicher Zahlen geschrieben werden kann. Man zeige durch vollständige Induktion, daß jede natürliche Zahl ≥ 2 als Produkt von endlich vielen Primzahlen geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist sogar eindeutig bis auf Reihenfolge der Faktoren, aber das brauchen Sie hier nicht zu zeigen.

Übung 0.3. Man zeige

$$1 - x^{n+1} = (1-x) \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Übung 0.4. Für jedes α setzen wir $\binom{\alpha}{k} := \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)/k!$. Man prüfe für beliebiges α und $k \geq 1$ die Formel

$$\binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha+1}{k}$$

Übungen Analysis 1

Abgabe bis Dienstag, den 25.10 um 8:15

Übung 1.1. Man zeige $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

Übung 1.2. Man zeige $(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k$.

Übung 1.3. Man finde und beweise eine Formel für $\sum_{i=1}^{n} i^2$. Hinweis: Man suche zunächst eine Formel für $\sum_{i=1}^{n} i^3 - (i-1)^3$ und beachte $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$.

Übung 1.4. Man zeige für die durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ gegebenen **Fibonacci-Zahlen** die explizite Darstellung

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^i - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^i$$

Wie man auf diese Formel kommt, wird im Skript `https://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXEIN.pdf` erklärt. Hier sollen Sie nur die Formel selbst prüfen, etwa mit vollständiger Induktion.

Ergänzende Übung 1.5. Man zeige, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Formel der Gestalt $\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0$ gilt mit $a_\kappa \in \mathbb{Q}$.

Übungen Analysis 1

Abgabe bis Mittwoch, den 2.11 um 8:15

Übung 2.1. Beweisen Sie die de Morgan'sche Regel

$$X \backslash (Y \cup Z) = (X \backslash Y) \cap (X \backslash Z)$$

Übung 2.2. Sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ die Abbildung $f : x \mapsto (1 + x^2)$. Man beschreibe die Abbildungen $f \circ f$ und $f \circ f \circ f$ ebenfalls durch polynomiale Ausdrücke.

Übung 2.3. Man zeige für jedes invertierbare Element $a \in M$ eines Monoids $(M, \top)$ und alle $m, n \in \mathbb{Z}$ die Iterationsregeln $(n + m)^\top a = (n^\top a) \top (m^\top a)$.

Übung 2.4. Ist K ein Körper derart, daß es kein $x \in K$ gibt mit $x^2 = -1$, so kann man die Menge $K \times K = K^2$ zu einem Körper machen, indem man die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{array}{rcc} (a, b) + (c, d) & := & (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) & := & (ac - bd, ad + bc) \end{array}$$

Die Abbildung $K \to K^2$, $a \mapsto (a, 0)$ ist dann ein Körperhomomorphismus. Kürzen wir $(a, 0)$ mit a ab und setzen $(0, 1) = \mathrm{i}$, so gilt $\mathrm{i}^2 = -1$ und $(a, b) = a + b\,\mathrm{i}$ und die Abbildung $a + b\,\mathrm{i} \mapsto a - b\,\mathrm{i}$ ist ein Körperhomomorphismus $K^2 \xrightarrow{\sim} K^2$.

Übungen Analysis 1

Abgabe bis Dienstag, den 8.11 um 8:15

Übung 3.1. In jedem angeordneten Körper gilt:

1. Aus $|x - a| \leq \eta$ und $|y - b| \leq \eta$ folgt $|(x + y) - (a + b)| \leq 2\eta$;
2. Aus $|x - a| \leq \eta \leq 1$ und $|y - b| \leq \eta \leq 1$ folgt $|xy - ab| \leq \eta(|b| + 1 + |a|)$;
3. Aus $|y - b| \leq \eta \leq |b|/2$ und $b \neq 0$ folgt $y \neq 0$ und $|1/y - 1/b| \leq 2\eta/|b|^2$.

Übung 3.2. In jedem angeordneten Körper gilt für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die sogenannte **Bernoulli-Ungleichung** $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Hinweis: Vollständige Induktion.

Übung 3.3. Seien K ein angeordneter Körper und $I \subset K$ ein Intervall, in Formeln $(x < y < z$ und $x, z \in I) \Rightarrow y \in I$. Wir nennen eine Funktion $\phi : I \to K$ **konvex**, wenn „ihr Graph unter jeder seiner Sekanten liegt", wenn also in Formeln für alle $x < y < z$ aus I gilt

$$\frac{\phi(x) - \phi(y)}{x - y} \leq \frac{\phi(y) - \phi(z)}{y - z}$$

Man zeige in dieser Situation für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in I$ und beliebige nichtnegative $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ die **Jensen'sche Ungleichung**

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i \phi(x_i)$$

In Worten ist also „der Funktionswert beim gewichteten Mittel der x_i beschränkt durch das gewichtete Mittel der Funktionswerte". Hinweis: Die Voraussetzung läßt sich als der Fall $n = 2$ verstehen. Davon ausgehend führt Induktion ans Ziel.

Übung 3.4. Die Menge $\{x \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \mid x^2 \geq 2\}$ besitzt in $\mathbb{Q}$ keine größte untere Schranke.

Übungen Analysis 1

Abgabe bis Dienstag, den 15.11 um 8:15

Übung 4.1. Sei X eine teilgeordnete Menge. Man zeige: Besitzt eine Teilmenge $Y \subset X$ ein größtes Element $g \in Y$, so gilt $g = \sup Y$. Man zeige: Sind Teilmengen $Z \subset Y \subset X$ gegeben und besitzen Z und Y ein Supremum in X, so gilt $\sup Z \leq \sup Y$.

Übung 4.2. Seien X und Y nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Mit der Notation $X + Y \subset \mathbb{R}$ für die Menge $\{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ zeige man $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$.

Übung 4.3. Man zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ ist nur an der Stelle $p = 0$ stetig.

Übung 4.4. Man zeige: Gegeben $f, g, h : \bar{\mathbb{R}}^n \supset D \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in D$ und f, h stetig bei $p \in D$ mit $f(p) = h(p)$ ist auch g stetig bei p.

Die Fachschaft Mathematik organisiert zum Kennenlernen am ersten Wochenende im Dezember die

Erstsemester-Hütte

Mehr dazu unter `https://nextcloud03.webo.cloud/s/bysBXCJPAofMnH7`.
Auf daß Sie sich am Mathematischen Institut gut einleben!

Übungen Analysis 1

Abgabe bis Dienstag, den 22.11 um 8:10

Übung 5.1. Man zeige, daß sich die Multiplikation nicht zu einer stetigen Abbildung $\mathrm{mult} : \mathbb{R}^2 \cup \{(\infty, 0)\} \to \bar{\mathbb{R}}$ fortsetzen läßt.

Übung 5.2. Seien $I, J \subset \bar{\mathbb{R}}$ Intervalle mit nichtleerem Schnitt $I \cap J \neq \emptyset$ und sei $f : (I \cup J) \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Man zeige: Sind die Einschränkungen $f|_I$ und $f|_J$ stetig, so ist auch f selbst stetig.

Übung 5.3. Man zeige, daß die Funktion $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto x/y$ stetig ist.

Übung 5.4. Man zeige, daß auf einem offenen reellen Intervall I jede konvexe reelle Funktion stetig ist. Eine Funktion heißt **konvex**, wenn für alle $x, z \in I$ gilt

$$f(tx + (1 - t)z) \leq tf(x) + (1 - t)f(z) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Anschaulich bedeutet das, daß unsere Funktion „unter jeder ihrer Sekanten liegt“. Ein Ansatz: Stetigkeit durch Einquetschen, Übung 4.4.

Übungen Analysis 1

Abgabe bis Dienstag, den 29.11 (korrigiert) um 8:10

Übung 6.1. Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Umgekehrt folgt aus $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ bereits $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Übung 6.2 (**Polynomiale Funktionen als formale Ausdrücke**). Man zeige: Gilt für eine durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ gegebene Funktion $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ die Formel $\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = 0$, so folgt $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Insbesondere liefert ein Polynom mit reellen Koeffizienten nur dann die Nullfunktion, wenn alle seine Koeffizienten Null sind. Wir nennen es dann das **Nullpolynom**.

Übung 6.3 (**Intervallschachtelungsprinzip**). Gegeben eine absteigende Folge von nichtleeren kompakten Intervallen $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots$ in $\mathbb{R}$ ist auch ihr Schnitt $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} I_\nu$ nicht leer.

Übung 6.4. Konvergiert eine Teilfolge einer Cauchyfolge, so konvergiert bereits die ganze Cauchyfolge, und zwar gegen denselben Grenzwert.

Definition 1. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen heißt eine **Cauchy-Folge**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$ falls $n, m \geq N$. Analog erklärt man Cauchy-Folgen in beliebigen angeordneten Körpern.

Übungen Analysis 1

Abgabe bis Dienstag, den 6.12 um 8:10

Auf diesem Blatt gibt es zwei Bonus-Aufgaben zum besseren Punktesammeln. Zu erreichen sind in diesem Wintersemester insgesamt die Hälfte der Punkte, die man bei vier Übungen pro Blatt erreichen könnte.

Übung 7.1. Man zeige das **Leibniz'sche Konvergenzkriterium**: Ist a_k eine monoton fallende Nullfolge, also $\lim a_k = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$.

Übung 7.2. Die Euler'sche Zahl e ist nicht rational. Man zeige dies, indem man von ihrer Darstellung als Reihe ausgeht und durch geeignete Abschätzungen nachweist, daß $q!\mathrm{e}$ für $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ nie eine ganze Zahl sein kann.

Übung 7.3. Man zeige: Ist $\sum a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen, die nicht absolut konvergiert, so gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_{u(k)} = x$. Hinweis: In der Tat divergieren in diesem Fall die Reihen ihrer positiven und ihrer negativen Terme jeweils für sich genommen. Die Strategie ist nun, erst nur positive Reihenglieder zu nehmen, bis man oberhalb von x ist, dann nur negative, bis man wieder drunterrutscht, und immer so weiter.

Übung 7.4. Ich erinnere an die Fibonacci-Zahlen f_i aus Übung 1.4. Man zeige, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der Fibonacci-Folge gegen den goldenen Schnitt strebt, daß also in Formeln gilt

$$\lim_{i \to \infty} \frac{f_{i+1}}{f_i} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Übung 7.5. Man zeige: Ist $\sum a_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen und $u : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ eine Umordnung mit der Eigenschaft, daß $|u(k) - k|$ beschränkt ist, so konvergiert auch die umgeordnete Reihe $\sum a_{u(k)}$ und zwar gegen denselben Grenzwert.

Übung 7.6. Im Skript führen wir den Begriff einer summierbaren Familie reeller Zahlen ein und erklären deren Summe. Man führe aus, warum diese Summe eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert.

Übungen Analysis 1

Abgabe bis Dienstag, den 13.12 um 8:10

Auf diesem Blatt gibt es zwei Bonus-Aufgaben zum besseren Punktesammeln. Zu erreichen sind in diesem Wintersemester insgesamt die Hälfte der Punkte, die man bei vier Übungen pro Blatt erreichen könnte.

Übung 8.1. Gegeben eine komplexe Zahl $z \neq -1$ vom Betrag $|z| = 1$ zeige man, daß sie genau eine Quadratwurzel w mit positivem Realteil hat und daß diese gegeben wird durch $w = (1 + z)/|1 + z|$.

Übung 8.2. Man zeige die Identität $\sin^3 \vartheta = \frac{3}{4} \sin \vartheta - \frac{1}{4} \sin(3\vartheta)$ mit Hilfe der Euler'schen Gleichung.

Übung 8.3. Man zeige: Die Nullstellen des komplexen Sinus $\sin z := (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/2\mathrm{i}$ liegen alle auf der reellen Achse.

Übung 8.4. Man zeige, daß das Invertieren komplexer Zahlen $\mathrm{inv} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ stetig ist. Wir verwenden hier unsere Definition, nach der $\mathbb{C}$ schlicht $\mathbb{R}^2$ ist mit einer speziellen Multiplikation.

Übung 8.5. Man zeige, daß die Exponentialfunktion eine Bijektion $\exp : \mathbb{R} + (-\pi, \pi)\mathrm{i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$ induziert und gebe eine Formel für Restriktion der Umkehrabbildung auf die obere Halbebene $\mathbb{R} + \mathrm{i}\mathbb{R}_{>0}$ an. Hinweis: In dieser Formel wird der Arcustangens auftreten.

Übung 8.6 (**Nichtexistenz stetiger komplexer Wurzelfunktionen**). Gäbe es eine stetige Funktion $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $w(z)^2 = z$ für alle z, so folgte $w(z^2) = \pm z$ für alle z und damit wäre $\varepsilon : z \mapsto w(z^2)/z$ eine stetige Funktion $\varepsilon : \mathbb{C}^\times \to \{1, -1\}$ mit $\varepsilon(-z) = -\varepsilon(z)$. Man zeige, daß es so eine Funktion ε nicht geben kann. Hinweis: Zwischenwertsatz.

Übungen Analysis 1

Abgabe bis Weihnachten

Auf diesem Blatt gibt es eine Bonus-Aufgabe zum besseren Punktesammeln. Zu erreichen sind in diesem Wintersemester insgesamt die Hälfte der Punkte, die man bei vier Übungen pro Blatt erreichen könnte.

Übung 9.1. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Man zeige, daß genau dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, wenn es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein $N = N_M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$n > N \Rightarrow a_n < M$$

Übung 9.2. Jede endliche Vereinigung von Kompakta ist kompakt.

Übung 9.3. Das Bild eines Kompaktums $K \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ unter einer stetigen Abbildung $K \to \bar{\mathbb{R}}^n$ ist stets auch wieder kompakt.

Übung 9.4. Man zeige den **Mittelwertsatz der Integralrechnung**: Gegeben ein nichtleeres kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $\int f = (b - a)f(\xi)$. Man zeige stärker auch: Gegeben eine weitere stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $\int fg = f(\xi) \int g$. Hinweis: Zwischenwertsatz.

Bonus-Übung 9.5. Man zeige, daß jede monotone stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, daß es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(x)| \leq M \; \forall x \in \mathbb{R}$, gleichmäßig stetig ist.

Übungen Analysis 1

Abgabe bis 10.1.2023 um 8:10

Auf diesem Blatt gibt es eine Bonus-Aufgabe zum besseren Punktesammeln. Zu erreichen sind in diesem Wintersemester insgesamt die Hälfte der Punkte, die man bei vier Übungen pro Blatt erreichen könnte.

Übung 10.1. Man bestimme die Ableitung nach x von $f(x) = \log \sqrt{x^2 + v^2}$.

Übung 10.2. Man zeige: Eine differenzierbare Funktion auf einem mehrpunktigen Intervall, deren Ableitung beschränkt ist, ist gleichmäßig stetig.

Übung 10.3. Bei welchem Verhältnis zwischen Durchmesser und Höhe umfaßt eine zylindrische Konservendose mit fest vorgegebener Oberfläche das größtmögliche Volumen?

Übung 10.4. Man zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber ihre Ableitung ist nicht stetig beim Nullpunkt.

Bonus-Übung 10.5. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Man zeige, daß dann f in I höchstens eine Nullstelle haben kann, und daß f links von dieser Nullstelle positiv und rechts davon negativ sein muß. Hinweis: Zwischen zwei verschiedenen Nullstellen muß es nach Voraussetzung eine Nichtnullstelle geben und dann eine kleinste Nullstelle oberhalb und eine größte Nullstelle unterhalb dieser Nichtnullstelle. Von da aus finde man einen Widerspruch zu den Annahmen.

Übungen Analysis 1

Abgabe bis 17.1.2023 um 8:10

Auf diesem Blatt gibt es eine Bonus-Aufgabe zum besseren Punktesammeln. Zu erreichen sind in diesem Wintersemester insgesamt die Hälfte der Punkte, die man bei vier Übungen pro Blatt erreichen könnte.

Übung 11.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn gilt $f(-x) = f(x)$ für alle x, und **ungerade**, wenn gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle x. Man zeige für jede ungerade stetige Funktion und alle reellen r die Formel $\int_{-r}^{r} f = 0$.

Übung 11.2. Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$ zeige man, daß $\lim_{t\to\infty} \int_1^t x^\alpha \, \mathrm{d}x$ existiert in $\bar{\mathbb{R}}$ und daß dieser Grenzwert endlich ist genau dann, wenn gilt $\alpha < -1$. Des weiteren zeige man, daß $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x$ existiert in $\bar{\mathbb{R}}$ und daß dieser Grenzwert endlich ist genau dann, wenn gilt $\alpha > -1$. Anschaulich gesprochen ist also die Hyperbel $x \mapsto (1/x)$ gerade der Grenzfall, in dem sowohl die Fläche zwischen Kurve und x-Achse ab jedem x-Wert als auch symmetrisch die Fläche zwischen Kurve und y-Achse ab jedem y-Wert unendlich groß sind.

Übung 11.3. Der **Integral-Logarithmus** $\mathrm{Li} : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ wird erklärt durch die Vorschrift

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

Man zeige $\lim_{x\to\infty}(\log(x)\,\mathrm{Li}(x)/x) = 1$.

Übung 11.4. Man finde eine Stammfunktion für den Arcustangens. Hinweis: Man wende auf das Produkt $1 \cdot \arctan$ partielle Integration an.

Bonus-Übung 11.5. Man betrachte für reelles $\alpha \neq 0$ und natürliches $n \in \mathbb{N}$ das Integral

$$I_n = I_n(\alpha) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \cos(\alpha x) \, \mathrm{d}x$$

und zeige durch partielles Integrieren für $n \geq 2$ die Identität

$$\alpha^2 I_n(\alpha) = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2}$$

Sie wird verwendet beim Beweis der Irrationalität der Kreiszahl π.

Übungen Analysis 1

Abgabe bis 24.1.2023 um 8:10

Auf diesem Blatt gibt es eine Bonus-Aufgabe zum besseren Punktesammeln. Zu erreichen sind in diesem Wintersemester insgesamt die Hälfte der Punkte, die man bei vier Übungen pro Blatt erreichen könnte.

Übung 12.1. Man bestimme eine Stammfunktion von $\sqrt{t^2 - 1}$. Hinweis: Hyperbolische Funktionen.

Übung 12.2. Man bestimme eine Stammfunktion von $\sin^3$.

Übung 12.3. Ist $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge von von Null verschiedenen reellen Zahlen und existiert der Grenzwert $\lim_{\nu \to \infty} |a_\nu / a_{\nu+1}|$ in $[0, \infty]$, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$.

Übung 12.4. Man zeige, daß die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ nicht gleichmäßig konvergiert auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$.

Übung 12.5. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ und finde die Grenzfunktion.

Bonus-Übungen Analysis 1

Abgabe bis 31.1.2023 um 8:10

Diese Aufgaben oder Varianten davon können auch in der Klausur drankommen.

Übung 13.1. Wie lauten die ersten vier Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{2+x}$ um $x = 0$?

Übung 13.2 (**Hinreichende Kriterien für lokale Extrema**). Sei $f : \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und sei $p \in U$ gegeben mit $f^{(1)}(p) = \ldots = f^{(n)}(p) = 0$. Sei weiter $f^{(n)}$ differenzierbar an der Stelle p. Man zeige: Ist n ungerade und $f^{(n+1)}(p) > 0$ beziehungsweise $f^{(n+1)}(p) < 0$, so hat f ein isoliertes lokales Minimum beziehungsweise Maximum bei p. Ist n gerade und $f^{(n+1)}(p) \neq 0$, so hat f weder ein isoliertes lokales Minimum noch ein isoliertes lokales Maximum bei p. Hinweis: Taylorentwicklung.

Übung 13.3. Gegeben eine differenzierbare Funktion f auf einem offenen reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, deren Ableitung bei $x \in I$ differenzierbar ist, zeige man

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

Übung 13.4. Man bestimme die achte Ableitung bei $x = 0$ von $\mathrm{e}^x \sin x$.

Klausur Analysis 1 vom 28.3.2023

Aufgabe 1. Man zeige: In jedem angeordneten Körper gilt für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Aufgabe 2. Man zeige: Gegeben $f, g, h : \bar{\mathbb{R}}^n \supset D \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in D$ und f, h stetig bei $p \in D$ mit $f(p) = h(p)$ ist auch g stetig bei p.

Aufgabe 3. Man zeige: Gilt für eine durch ein Polynom vom Grad $\leq n$ gegebene Funktion $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ die Formel $\lim_{x \to 0} f(x)/x^n = 0$, so folgt $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Aufgabe 4. Man stelle $(\cos\theta)^5$ als Linearkombination von Funktionen des Typs $\cos n\theta$ und $\sin n\theta$ dar.

Aufgabe 5. Man zeige: Jede endliche Vereinigung von Kompakta ist kompakt.

Aufgabe 6. Bei welchem Verhältnis zwischen Durchmesser und Höhe umfaßt eine zylindrische Konservendose mit fest vorgegebener Oberfläche das größtmögliche Volumen?

Aufgabe 7. Man bestimme eine Stammfunktion für den Arcussinus.

Aufgabe 8. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$ und finde die Grenzfunktion.