Übungblätter zur Analysis 2 bei Soergel im SS 2023

Allgemeine Hinweise:

- Bei der Bearbeitung der Üungen ist keine übertriebene Ausführlichkeit gefordert. Einfach zu schreiben, es sei klar, reicht nicht, aber eine schlüssige Kette von richtigen Argumenten in der nächsten Stufe der Ausführlichkeit reicht aus. Allerdings soll die Argumentationskette auch für Sie selbst schlüssig sein. Sie müssen sie im Tutorat erklären können und in der Lage sein, auf Nachfragen Schritte Ihrer Argumentation genauer auszuführen. In der Vorlesung bewiesene Aussagen müssen dabei aber keinesfalls nochmals bewiesen werden, da reicht ein Zitat.

- Es gibt jede Woche vier Aufgaben und für jede Aufgabe gibt es vier Punkte, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben durchaus sehr unterschiedlich sein wird. Ergänzende Übungen sind meist schwieriger und geben bis zu vier Bonuspunkte.

- Die Übungen werden Montags ausgegeben und müssen die Woche danach am Mittwoch vor der Vorlesung beim jeweiligen Tutor abgegeben werden, entweder in den Kästen im Keller des Mathematischen Instituts oder nach Absprache mit dem Tutor auch auf anderem Wege. Sie seien ermutigt, die Aufgaben mit Ihren Kommilitonen zu besprechen und zu zweit abzugeben. Mehr als zwei Namen auf einem Zettel gilt aber nicht.

- Die Übungen werden auf den folgenden Seiten dieses Textes ins Netz gestellt, der jede Woche um das Übungsblatt der jeweiligen Woche ergänzt werden wird.

Anwesenheitsaufgaben zweite Vorlesungswoche Analysis 2

Diese Übungen müssen nicht abgegeben werden, sondern sollen im Laufe der zweiten Vorlesungswoche in den Tutoraten bearbeitet werden. Zu diesem Zeitpunkt liegen ja noch keine korrigierten Hausaufgaben vor, die zu besprechen wären.

Übung 0.1. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist die Metrik stetig als Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Ist $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge eines metrischen Raums, so ist die Abbildung $d_A : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $d_A(x) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ stetig.

Übung 0.2. Der Raum $\mathcal{B}(V, W)$ aller stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen V, W ist ein Untervektorraum im Raum $\mathrm{Hom}(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W und

$$\|f\| := \sup\{\|f(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$$

ist eine Norm auf $\mathcal{B}(V, W)$. Gegeben ein weiterer normierter Vektorraum U und stetige lineare Abbildungen $g : U \to V$ sowie $f : V \to W$ gilt $\|f \circ g\| \leq \|f\|\|g\|$.

Übung 0.3. Gegeben ein normierter Vektorraum V ist jeder Ball in V konvex, als da heißt, mit je zwei Punkten gehört auch das ganze sie verbindende Geradensegment zu unserem Ball.

Übung 0.4. In einem normierten reellen Vektorraum ist jede nichtleere offene Teilmenge bereits ein Erzeugendensystem.

Übung 0.5. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen ist stetig bei $p \in X$ genau dann, wenn es eine Umgebung $V \subset X$ von p gibt mit $f|_V : V \to Y$ stetig bei p.

Übung 0.6. Gegeben ein topologischer Raum X und $B \subset D \Subset X$ zeige man $B \Subset D \Leftrightarrow B \Subset X$.

Anwesenheitsaufgaben dritte Vorlesungswoche
Analysis 2

Diese Übungen müssen nicht abgegeben werden, sondern sollen im Laufe der dritten Vorlesungswoche in den Tutoraten bearbeitet werden. Zu diesem Zeitpunkt liegen noch keine korrigierten Hausaufgaben vor, die zu besprechen wären, mein Fehler. Anschließend an dieses Blatt gibt es aber die ersten Hausaufgaben.

Übung 0.7. Gegeben ein topologischer Raum X und $B \subset D \subset X$ haben wir $B \overset{\mathrm{A}}{\subset} D \Leftrightarrow \exists A \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$ mit $B = A \cap D$. Gegeben ein topologischer Raum X und $B \subset D \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$ haben wir $B \overset{\mathrm{A}}{\subset} D \Leftrightarrow B \overset{\mathrm{A}}{\subset} X$.

Übung 0.8. Man zeige, daß für jeden normierten Vektorraum V die Addition $V \times V \to V$ und die Multiplikation mit Skalaren $\mathbb{R} \times V \to V$ stetig sind.

Übung 0.9. Man berechne von $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + \sin(xyz^2)}\big/z$ die drei partiellen Ableitungen.

Übung 0.10. Sei $R(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j$ ein Polynom in zwei Variablen mit reellen Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Man zeige: Gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $A \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^2$ derart, daß gilt $R(p) = 0 \; \forall p \in A$, so ist R das Nullpolynom, in Formeln $c_{ij} = 0 \; \forall i, j$.

Übung 0.11. Seien V, W normierte Vektorräume. Ist W vollständig, so ist auch der Raum $\mathcal{B}(V, W)$ der stetigen linearen Abbildungen von V nach W mit der Operatornorm vollständig.

Übungen Analysis 2

Abgabe bis Mittwoch 3.5 vor der Vorlesung

Übung 1.1. Berechnen Sie die Richtungsableitung $(\mathrm{D}_{\vec{v}} f)(p)$ zum Richtungsvektor $\vec{v} := (1, 7)$ der Funktion $f(x, y) := x^3 + y^2$ beim Punkt $p := (1, 2)$.

Übung 1.2. Gegeben vollständige metrische Räume X, Y ist auch ihr Produkt $X \times Y$ vollständig.

Übung 1.3. Genau dann ist p Häufungspunkt des metrischen Raums X, wenn es eine Folge x_n in $X \backslash p$ gibt mit $\lim_{n \to \infty} x_n = p$.

Übung 1.4 (**Invertieren stetiger Endomorphismen**). Für V einen normierten Vektorraum setzen wir

$$\mathcal{B}(V) := \mathcal{B}(V, V)$$

Man zeige: Gegeben ein Banachraum V und $h \in \mathcal{B}(V)$ ein stetiger Endomorphismus von V einer Operatornorm $\|h\| < 1$ konvergiert die Folge der Partialsummen der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h^n$ und der Grenzwert ist invers zu $\mathrm{id}_V - h$. Insbesondere sind alle $f \in \mathcal{B}(V)$ mit $\|f - \mathrm{id}_V\| < 1$ stetig invertierbar.

Ergänzende Übung 1.5. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von metrischen Räumen heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $d(x, x_1) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_1)) < \varepsilon$. Man zeige, daß jede gleichmäßig stetige Abbildung $f : A \to Y$ von einer Teilmenge A eines metrischen Raums X in einen vollständigen metrischen Raum Y auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung $\bar{A} \to Y$ auf den Abschluß von A in X fortgesetzt werden kann.

Übungen Analysis 2

Abgabe bis Mittwoch 10.5 vor der Vorlesung

Übung 2.1. Berechnen Sie die Jacobimatrix der Kugelkoordinatenabbildung

$$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\vartheta,\varphi) & \mapsto & (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) \end{array}$$

Drücken sie die Länge des Geschwindigkeitsvektors in $\mathbb{R}^3$ eines sich auf der Einheitskugel bewegenden Käfers $\kappa : t \mapsto K(1, \vartheta(t), \varphi(t))$ durch $\vartheta, \varphi, \vartheta', \varphi'$ aus.

Übung 2.2. Seien X, Y endlichdimensionale normierte reelle Räume. Sei $A \subset X$ halboffen und $f : A \to Y$ differenzierbar. Man zeige: Liegt für zwei Punkte $p, q \in A$ das ganze verbindende Geradensegment $[p, q]$ in A und ist die Operatornorm des Differentials von f auf $[p, q]$ beschränkt durch eine Konstante K, in Formeln $\| \mathrm{d}_x f\| \leq K \ \forall x \in [p, q]$, so gilt $\|f(p) - f(q)\| \leq K\|p - q\|$. Hinweis: Schrankensatz aus Analysis 1.

Übung 2.3. Sei $\mathrm{inv} : \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ das Invertieren von Matrizen, $\mathrm{inv}(X) = X^{-1}$. Man zeige für das Differential des Invertierens bei der Einheitsmatrix I die Formel $\mathrm{d}_I \,\mathrm{inv} : H \mapsto -H$. Man zeige allgemeiner, daß das Differential dieser Abbildung am Punkt P gegeben wird durch

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}_P \,\mathrm{inv}: & \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) & \to & \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \\ & H & \mapsto & -P^{-1}HP^{-1} \end{array}$$

Hinweis: Man erinnere die Darstellung des Inversen durch eine Reihe aus Übung 1.4 und die Identität $(\cdot P^{-1}) \circ \mathrm{inv} \circ (P^{-1}\cdot) = \mathrm{inv}$.

Übung 2.4. Wir setzen als klar voraus, daß die Kugelkoordinatenabbildung eine Bijektion $K : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \stackrel{\sim}{\to} U \Subset \mathbb{R}^3$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist und die Umkehrabbildung $K^{-1} : U \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Man berechne die Jacobimatrix von K^{-1} an der Stelle $(-3, 0, 0)^\top$.

Ergänzende Übung 2.5. Man zeige, daß das Invertieren komplexer Zahlen Winkel erhält. Sind genauer $\gamma, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ differenzierbar mit $\gamma(0) = \psi(0)$ und $\gamma'(0) \neq 0$ und $\psi'(0) \neq 0$, so nennen wir den Betrag des Winkels zwischen $\gamma'(0)$ und $\psi'(0)$ den Schnittwinkel unserer Kurven und Sie sollen zeigen, daß $\mathrm{inv} \circ \gamma$ und $\mathrm{inv} \circ \psi$ denselben Schnittwinkel haben für $\mathrm{inv} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ das Invertieren $z \mapsto z^{-1}$.

Übungen Analysis 2

Abgabe bis Mittwoch 17.5 vor der Vorlesung

Übung 3.1 (**Lösungen der linearen Wellengleichung**). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion mit $\partial_x^2 f(x,t) = \partial_t^2 f(x,t)$. Man zeige, daß es zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x,t) = u(x-t) + v(x+t)$. Hinweis: Man untersuche zunächst zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\partial_x \partial_y g(x,y) = 0$ und zeige, daß es zweimal stetig differenzierbare Funktionen $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(x,y) = h(x) + k(y)$.

Übung 3.2. Man bestimme die Taylorentwicklung um den Ursprung bis zu den Termen dritter Ordnung einschließlich von $\sqrt{1 + x + y^2}/\cos(xy)$. Hinweis: Rechnen mit Approximationen.

Übung 3.3. Man bestimme das Minimum und das Maximum der Funktion $x^2 + 5y^2 + 2xy - 2x - 4y$ auf dem abgeschlossenen Einheitsquadrat und vergesse nicht, den Rand separat zu untersuchen.

Übung 3.4. Man zeige die Identität $\log((1-u)(1-v)) = \log(1-u) + \log(1-v)$ im Ring der formalen Potenzreihen in zwei kommutierenden Variablen u, v mit rationalen Koeffizienten, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u + v - uv)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n + v^n}{n}$$

Hinweis: Es gilt zu argumentieren, warum aus der Gleichheit nach Einsetzen die Gleichheit von formalen Ausdrücken folgt.

Übungen Analysis 2

Abgabe bis Mittwoch 24.5 vor der Vorlesung

Übung 4.1. Man zeige: Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Raum hat offenes Bild, wenn ihr Differential an jeder Stelle surjektiv ist. Ist unsere stetig differenzierbare Abbildung zusätzlich injektiv, so liefert sie einen Diffeomorphismus unserer offenen Teilmenge mit ihrem Bild.

Übung 4.2 (**Mannigfaltigkeiten als Graphen in Koordinaten**). Man zeige: Gegeben eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \Subset \mathbb{R}^n$ und eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ derart, daß $M \cap U$ unter der entsprechenden Permutation der Koordinaten dem Graph einer $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : \mathbb{R}^k \Supset W \to \mathbb{R}^{n-k}$ entspricht. Hinweis: Man gehe vom Satz über implizite Funktionen aus.

Übung 4.3. Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle\ ,\ \rangle$ eine Bilinearform auf V und $c \neq 0$ eine reelle Konstante, so ist $\{v \in V \mid \langle v, v\rangle = c\}$ eine Hyperfläche in V. Hinweis: Man verwende die Formel für das Differential bilinearer Abbildungen 2.6.5, die in der Vorlesung nicht bewiesen wurde.

Übung 4.4. Man bestimme in den beiden vorhergehenden Übungen die Tangentialräume von $\Gamma(f)$ beziehungsweise $\{v \in V \mid \langle v, v\rangle = c\}$.

Übungen Analysis 2

Abgabe bis Mittwoch 7.6 vor der Vorlesung

Übung 5.1. Man zeige, daß das Kreuz aus den beiden Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$ keine Mannigfaltigkeit ist.

Übung 5.2 (**Schnitt von Mannigfaltigkeiten**). Man zeige: Gegeben in einem endlichdimensionalen reellen Raum X zwei Mannigfaltigkeiten $M, N \subset X$ und ein Punkt $p \in M \cap N$ mit

$$\mathrm{T}_p M + \mathrm{T}_p N = \vec{X}$$

gibt es eine offene Umgebung U von p derart, daß $U \cap M \cap N$ eine Mannigfaltigkeit ist. Man bestimme auch die Dimension dieser Schnittmannigfaltigkeit.

Übung 5.3. Man bestimme die Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ auf dem halben Ellipsoid $\{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1, z \geq 0\}$.

Übung 5.4. Wir betrachten das Polynom $f(x, y, z) = x^7 y^2 z + xyz^5$ und finden $f(1, 1, 1) = 2$. Man zeige, daß es auf einem hinreichend kleinen Ball $B \subset \mathbb{R}^2$ um $(1, 1)$ genau eine stetige Funktion $\varphi : B \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(1, 1) = 1$ und $f(x, y, \varphi(x, y)) = 2$ und bestimme bei $(1, 1)$ deren partielle Ableitungen φ_x, φ_y.

Übungen Analysis 2

Abgabe bis Mittwoch 14.6 vor der Vorlesung

Übung 6.1 (**Endliche Vereinigungen von Kompakta**). Besitzt ein topologischer Raum eine endliche Überdeckung durch kompakte Teilmengen, so ist er bereits selbst kompakt.

Übung 6.2 (**Nichtleere Schnitte in Kompakta**). Ist in einem kompakten topologischen Raum X ein System abgeschlossener Teilmengen $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ mit leerem Schnitt $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K = \emptyset$ gegeben, so gibt es bereits ein endliches Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ mit leerem Schnitt $\bigcap_{K \in \mathcal{E}} K = \emptyset$.

Übung 6.3. Man zeige, daß für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger und $\varphi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$ eine affine Bijektion mit linearem Anteil $\vec{\varphi}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = |\det \vec{\varphi}| \int_{\mathbb{R}^2} f \circ \varphi$$

Übung 6.4. Wir erinnern die Kugelkoordinatenabbildung K aus Übung 2.1. Man drücke das Integral einer stetigen Funktion f auf der Kugel

$$M := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 25\}$$

vom Radius 5, deren Träger nicht den Längengrad $\{(x, y, z) \mid y = 0, x \geq 0\}$ trifft, aus als ein Integral in den Winkelkoordinaten φ und ϑ.

Übungen Analysis 2

Abgabe bis Mittwoch 21.6 vor der Vorlesung

Übung 7.1. Man zeige, daß die abgeschlossene Einheitskugel $B \subset \mathbb{R}^3$ das Volumen $4\pi/3$ hat, daß sie also genauer eine 3-Fastfaltigkeit ist mit $\int_B 1 = 4\pi/3$.

Übung 7.2 (**Oberfläche eines Rotationskörpers**). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges kompaktes Intervall und $f : I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Man zeige, daß die **Mantelfläche** $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I, x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$ eine kompakte 2-Fastfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist mit der Fläche

$$\int_M 1 = 2\pi \int_I f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2}\,\mathrm{d}z$$

Die anschauliche Bedeutung unserer Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers erkennt man, wenn man unsere Rotationsfläche durch eine Vereinigung von dünnen Bändern der Gestalt „oberer Ränder von Eiswaffeln“ approximiert.

Übung 7.3. Gegeben eine kompakte k-Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{O}(n)$ zeige man

$$\int_M 1 = \int_{A(M)} 1$$

Insbesondere und in Worten bleibt also beim Drehen von Flächen im Raum ihre Oberfläche unverändert.

Übung 7.4. Man gebe ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}$ an, das keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Flußwege besitzt.

Übungen Analysis 2

Abgabe bis Mittwoch 28.6 vor der Vorlesung

Übung 8.1. Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = t^5 x(t)$.

Übung 8.2. Gegeben ein mehrpunktiges kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist der Raum $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ aller stetig differenzierbaren reellwertigen Abbildungen auf I vollständig für die Norm $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\| + \|\varphi'\|$ der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen und ihrer ersten Ableitungen. Hinweis: Man erinnere das Vertauschen des Integrals mit gleichmäßiger Konvergenz.

Übung 8.3 (**Größere Felder haben schnellere Flußwege**). Gegeben $U \subset \mathbb{R}$ halboffen und $a, b : U \to \mathbb{R}$ stetig ohne Nullstelle mit $a \leq b$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $\gamma, \kappa : I \to U$ differenzierbar mit $\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t))$ und $\dot{\kappa}(t) = b(\kappa(t))$ für alle $t \in I$ folgt aus $\gamma(t_0) \leq \kappa(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ bereits dieselbe Aussage für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$. Hinweis: Unseren Erkenntnissen 6.2.11 würden so etwas nur unter der stärkeren Annahme $a < b$ liefern. Man erinnere die Diskussion 6.2.4 von Integralkurven eindimensionaler Felder ohne Nullstellen.

Übung 8.4. Man finde alle reellen Lösungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $f^{(4)} = f$, also Funktionen, die ihre eigene vierte Ableitung sind. Hinweis: Man erinnere Analysis 1.

Übungen Analysis 2

Abgabe bis Mittwoch 5.7 vor der Vorlesung

Übung 9.1. Man zeige für jedes Vektorfeld $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $A(p) \perp p \; \forall p \in \mathbb{R}^n$, daß seine Flußwege γ auf Sphären mit Zentrum im Ursprung verlaufen müssen, in Formeln $\|\gamma(t)\|$ konstant.

Übung 9.2. Sei $A : X \mathrel{\supset\!\!\!\circ} U \to \vec{X}$ ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines affinen Raums und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Man zeige: Gilt für die Richtungsableitungen $(\mathrm{D}_{A(p)} f)(p) \geq 0 \; \forall p \in U$, so ist $f(\gamma(t))$ monoton wachsend für alle Flußwege γ unseres Vektorfelds.

Übung 9.3. Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Differentialgleichung $y' + y \sin(x) = \cos(x) \sin(x)$.

Übung 9.4. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $A(p) \in \mathbb{R}^2 \times 0 \; \forall p \in \mathbb{R}^2 \times 0$ liegt jede Flußkurve, die die xy-Ebene $\mathbb{R}^2 \times 0$ trifft, bereits ganz in der xy-Ebene.

Übungen Analysis 2

Dieses Blatt wird als Bonusblatt gewertet, dessen Punkte Ihnen angerechnet werden, ohne bei der Berechnung des Durchschnitts mitgezählt zu werden.

Abgabe bis Mittwoch 12.7 vor der Vorlesung

Übung 10.1. Unter der Inversion am Einheitskreis $\mathbb{R}^2\backslash 0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2\backslash 0$, $(x, y) \mapsto (u, v) := (x^2 + y^2)^{-1}(x, y)$ zeige man die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\begin{array}{lcl} \partial_x & \rightsquigarrow & (v^2 - u^2)\partial_u - 2uv\partial_v \\ \partial_y & \rightsquigarrow & (u^2 - v^2)\partial_v - 2uv\partial_u \end{array}$$

Übung 10.2. Gegeben auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset E$ eines n-dimensionalen reellen Raums Vektorfelder $A_1, \ldots, A_n$ und Kovektorfelder $\omega_1, \ldots, \omega_n$ mit $\langle \omega_i, A_j \rangle = \delta_{ij}$ an jeder Stelle $p \in U$ gilt für jede differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ die Identität $\mathrm{d}f = (A_1 f)\omega_1 + \ldots + (A_n f)\omega_n$.

Übung 10.3. Wir betrachten die Kugelkoordinatenabbildung

$$\begin{array}{rccl} K: & \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \vartheta, \varphi) & \mapsto & (r \cos\varphi \sin\vartheta, r \sin\varphi \sin\vartheta, r \cos\vartheta) \end{array}$$

Man finde Vorwärtsverwandte für $\partial_r, \partial_\varphi$ und ∂_ϑ.

Übung 10.4. Man berechne die Transformation des Gradienten unter einer Streckung. Gegeben $\phi = (\lambda\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\lambda \neq 0$ finde man also Vektorfelder A, B auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$\phi : (A(f \circ \phi))\partial_x + (B(f \circ \phi))\partial_y \rightsquigarrow (\operatorname{grad} f)$$

Übung 10.5. Auf $\mathbb{R}^2\backslash 0$ ist der Winkel im Bogenmaß ϑ lokal eine „bis auf eine additive Konstante wohl definerte Funktion“. Das Differential $\mathrm{d}\vartheta$ ist somit ein wohldefiniertes Kovektorfeld, wenn es auch global nicht das Differential einer Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2\backslash 0$ zu sein braucht. Man berechne das Wegintegral $\int_\gamma \mathrm{d}\vartheta$ für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Man folgere, daß $\mathrm{d}\vartheta$ nicht das Differential einer Funktion $f : \mathbb{R}^2\backslash 0 \to \mathbb{R}$ sein kann.