Übungblätter zur Analysis 3 bei Soergel im WS 2023/24

Allgemeine Hinweise:

- Bei der Bearbeitung der Üungen ist keine übertriebene Ausführlichkeit gefordert. Einfach zu schreiben, es sei klar, reicht nicht, aber eine schlüssige Kette von richtigen Argumenten in der nächsten Stufe der Ausführlichkeit reicht aus. Allerdings soll die Argumentationskette auch für Sie selbst schlüssig sein. Sie müssen sie im Tutorat erklären können und in der Lage sein, auf Nachfragen Schritte Ihrer Argumentation genauer auszuführen. In der Vorlesung bewiesene Aussagen müssen dabei aber keinesfalls nochmals bewiesen werden, da reicht ein Zitat.

- Es gibt jede Woche vier Aufgaben und für jede Aufgabe gibt es vier Punkte, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben durchaus sehr unterschiedlich sein wird. Ergänzende Übungen sind meist schwieriger und geben bis zu vier Bonuspunkte.

- Die Übungen werden Dienstag ausgegeben und müssen die Woche danach am Dienstag vor der Vorlesung beim jeweiligen Tutor abgegeben werden, entweder in den Kästen im Keller des Mathematischen Instituts oder nach Absprache mit dem Tutor auch auf anderem Wege. Sie seien ermutigt, die Aufgaben mit Ihren Kommilitonen zu besprechen und zu zweit abzugeben. Mehr als zwei Namen auf einem Zettel gilt aber nicht.

- Die Übungen werden auf den folgenden Seiten dieses Textes ins Netz gestellt, der jede Woche um das Übungsblatt der jeweiligen Woche ergänzt werden wird.

Anwesenheitsaufgaben zweite Vorlesungswoche
Analysis 3

Diese Übungen müssen nicht abgegeben werden, sondern sollen im Laufe der zweiten Vorlesungswoche in den Tutoraten bearbeitet werden. Zu diesem Zeitpunkt liegen ja noch keine korrigierten Hausaufgaben vor, die zu besprechen wären.

Übung 0.1. Man zeige: Für jeden Vektorraum V endlicher Dimension $\dim V = n$ und p, q mit $p + q = n$ liefert das Dachprodukt eine nichtausgeartete Paarung $\mathrm{Alt}^p V \times \mathrm{Alt}^q V \to \mathrm{Alt}^n V$, als da heißt, einen Isomorphismus

$$\mathrm{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{Alt}^q V, \mathrm{Alt}^n V)$$

Übung 0.2. Man zeige: Gegeben ein n-dimensionaler orientierter reeller Skalarproduktraum V gibt es genau ein $\omega \in \mathrm{Alt}^n V$ mit $\omega(v_1, \dots, v_n) = 1$ für jede orientierte angeordnete Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$. Man nennt ω die **kanonische Volumenform** von V. Um den Nullraum korrekt einzubinden sollten wir besser sagen: …mit $\omega(v_1, \dots, v_n) = \varepsilon$ für jede angeordnete Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ der Orientierung ε.

Übung 0.3 (**Hodge-*-Operator**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller orientierter Vektorraum V der Dimension n mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinarform t und $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p + q = n$ gibt es genau eine lineare Abbildung $* = *_t : \mathrm{Alt}^p V \to \mathrm{Alt}^q V$ mit

$$\mathrm{e}_1^\top \wedge \dots \wedge \mathrm{e}_p^\top \mapsto \varepsilon \eta_1 \dots \eta_p \, \mathrm{e}_{p+1}^\top \wedge \dots \wedge \mathrm{e}_n^\top$$

für jede angeordnete Orthogonalbasis $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n$ von V der Orientierung ε mit $\eta_i := t(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_i) = \pm 1 \ \forall i$. Diese Übung wird gebraucht, um die Bezüge des Kalküls der Differentialformen zu den Maxwell'schen Gleichungen, Divergenz und Laplace-Operator zu erklären.

Übung 0.4. Bestimmen Sie die zurückgezogene 2-Form $P^*(xy \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$ unter der Polarkoordinatenabbildung $P(r, \vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 24.10 vor der Vorlesung

Übung 1.1. Bestimmen Sie die zurückgezogene 2-Form $K^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$ unter der Kugelkoordinatenabbildung $K(r, \varphi, \vartheta) = (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$.

Übung 1.2. Schreiben Sie einen Beweis für die Verträglichkeit des Zurückholens von Differentialformen mit dem Dachprodukt $\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta)$ aus.

Übung 1.3. Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma x\,\mathrm{d}y$ längs des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Finden sie einen Weg κ mit $P : \kappa \rightsquigarrow \gamma$ unter der Polarkoordinatenabbildung P und prüfen Sie an diesem Beispiel die Verwandtschaftsverträglichkeit des Wegintegrals.

Übung 1.4. Seien $r, \theta : U \to \mathbb{R}$ die Polarkoordinaten auf dem Komplement $U \Subset \mathbb{R}^2$ der nichtnegativen x-Achse. Man drücke $r^2\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$ in xy-Koordinaten aus.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 31.10 vor der Vorlesung

Übung 2.1. Berechnen Sie das Integral der 2-Form $xdy \wedge dz + ydx \wedge dz$ über den Zylinder $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$ mit einer Orientierung ihrer Wahl.

Übung 2.2. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfelds $F : (x, y, z) \mapsto (x, 0, 0)$ durch die Einheitssphäre, die Sie dazu mit einer Orientierung ihrer Wahl versehen mögen.

Übung 2.3 (**Verwandtschaftsverträglichkeit des Integrals**). Seien $M \subset X$ und $N \subset Y$ kompakte k-Mannigfaltigkeiten in endlichdimensionalen reellen Räumen. Sei $\phi : X \to Y$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, die einen Homöomorphismus $M \xrightarrow{\sim} N$ induziert sowie Isomorphismen $\mathrm{T}_p M \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\phi(p)} N$. Seien M und N darunter mit verträglichen Orientierungen versehen. So gilt für jede stetige k-Form ω auf Y die Identität

$$\int_{\vec{M}} \phi^* \omega = \int_{\vec{N}} \omega$$

Übung 2.4 (**Fluß durch einen ebenen Weg und Wegintegral**). Berechnen sie den Fluß des radialen Vektorfelds $v : (x, y) \mapsto (x, y)$ durch den im Gegenuhrzeigersinn orientierten Einheitskreis und ebenso das Wegintegral desselben Vektorfelds längs derselben orientierten 1-Mannigfaltigkeit. Schreiben Sie die Differentialformen auf, deren Integrale über den im Gegenuhrzeigersinn orientierten Einheitskreis diese beiden Integrationsfragen lösen.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 7.11 vor der Vorlesung

Übung 3.1 (**Für Stokes auf Eckfaltigkeiten**). Für $i_\nu : (\mathbb{R}_{\leq 0})^k \to (\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}$ das Einfügen einer Null an der ν-ten Stelle und η eine stetig differenzierbare k-Form mit kompaktem Träger auf $(\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}$ zeige man ohne Stokes

$$\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \int_{(\mathbb{R}_{\leq 0})^k} i_\nu^* \eta = \int_{(\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}} d\eta$$

Übung 3.2. Im Fall einer stetig differenzierbaren 1-Form ω auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen rellen affinen Raums X zeige man für $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$ die Formel

$$(d\omega)_x(\vec{v}, \vec{w}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \int_{F(x, t\vec{v}, t\vec{w})} \omega$$

mit $F(x, t\vec{v}, t\vec{w})$ der Rundweg, der in gerader Linie die Ecken $x, x + t\vec{v}, x + t\vec{v} + t\vec{w}, x + t\vec{w}, x$ der Reihe nach durchläuft.

Übung 3.3 (**Die Maxwell'schen Gleichungen**). Wir bezeichnen die Koordinaten des $\mathbb{R}^4$ mit x, y, z, t und betrachten auf dem $\mathbb{R}^4$ eine glatte 2-Form

$$\begin{aligned} F &= E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt \\ &\quad + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy \end{aligned}$$

Man zeige, daß das Verschwinden der äußeren Ableitung $dF = 0$ äquivalent ist zu den beiden Gleichungen

$$\operatorname{div} B = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Hier sind div und rot in Bezug auf die drei räumlichen Koordinaten x, y, z zu verstehen. Ergänzung: Wir betrachten nun zusätzlich die symmetrische Bilinearform l mit Fundamentalmatrix $\operatorname{diag}(1, 1, 1, -c^2)$ mit einer reellen Konstante $c \neq 0$. Man prüft unschwer, daß das Verschwinden der äußeren Ableitung nach Anwenden des Hodge-Operators $d(*_l F) = 0$ äquivalent ist zu den beiden Gleichungen

$$\operatorname{div} E = 0 \quad \text{und} \quad c^2 \operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t}$$

Übung 3.4. Finden Sie eine stetig differenzierbare geschlossene Zweiform ω auf $\mathbb{R}^3 \backslash 0$, also mit $d\omega = 0$, die nicht die äußere Ableitung $\omega = d\eta$ eines zweimal stetig differenzierbaren Kovektorfelds η ist. Hinweis: Man denke sich eine Wasserquelle im Ursprung.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 14.11 vor der Vorlesung

Übung 4.1. Gegeben ein Maßraum und darin eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ zeige man

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Hinweis: Man schreibe die fragliche Vereinigung als die disjunkte Vereinigung der $A_{n+1} \backslash A_n$.

Übung 4.2. Gegeben ein Maßraum und darin eine absteigende Folge meßbarer Mengen endlichen Maßes $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ zeige man

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Man zeige auch durch ein Gegenbeispiel, daß das nicht mehr gelten muß, wenn alle Mengen unserer Folge unendliches Maß haben.

Übung 4.3 (**Vorbereitung zum Beweis des Satzes von Fubini**). Sei X eine Menge und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Mengenalgebra. Man zeige: (1) Genau dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra, wenn $\mathcal{M}$ stabil ist unter abzählbaren *disjunkten* Vereinigungen. (2) Genau dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra, wenn $\mathcal{M}$ stabil ist unter abzählbaren *aufsteigenden* Vereinigungen.

Übung 4.4. Konstruieren Sie in $\mathbb{R}$ eine offene dichte Teilmenge von endlichem Lebesguemaß.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 21.11 vor der Vorlesung

Übung 5.1. Gegeben Mengen X und Y sowie Mengenringe $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ist auch das System aller endlichen Vereinigungen von paarweise disjunkten Mengen der Gestalt $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ ein Mengenring in $\mathcal{P}(X \times Y)$.

Übung 5.2. Die Menge aller reellen Zahlen, die sich darstellen lassen durch einen unendlichen Dezimalbruch, in dem die Ziffer 6 nicht vorkommt, bilden eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ vom Lebesguemaß Null.

Übung 5.3. Zeigen Sie, daß jedes Borelmaß μ auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit $\mu(\alpha A) = \mu(A)$ für alle Borelmengen A ein nichtnegatives Vielfaches von $\mathrm{d}\log$ ist.

Übung 5.4. Alle monotonen Abbildungen $\mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ sind meßbar.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 28.11 vor der Vorlesung

Übung 6.1. Sei $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum. Man zeige: Die Summe zweier Maße μ, ν auf $\mathcal{M}$ ist wieder ein Maß $\mu + \nu$ auf $\mathcal{M}$ und für jede meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ gilt $\int f(\mu + \nu) = \int f\mu + \int f\nu$.

Übung 6.2 (**Verträglichkeit des Integrals mit Verwandtschaft**). Sei $\phi : X \to Y$ eine meßbare Abbildung von Meßräumen. Seien μ und ν unter ϕ verwandte Maße auf X beziehungsweise Y, in Formeln $\phi : \mu \rightsquigarrow \nu$, und seien f und g unter ϕ verwandte meßbare Funktionen nach $[0, \infty]$, in Formeln $\phi : f \rightsquigarrow g$. Man zeige

$$\int_X f\mu = \int_Y g\nu$$

(Ist gleichbedeutend in unserer alternativen Terminologie μ ein Maß auf X und $g : Y \to [0, \infty]$ meßbar, so gilt $\int_X (\phi^* g)\mu = \int_Y g(\phi_* \mu)$.)

Übung 6.3 (**Produkte von Maßen mit Funktionen**). Man zeige: Ist (X, μ) ein Maßraum und $g : X \to [0, \infty]$ meßbar, so erhalten wir ein weiteres Maß $g\mu$ auf X durch die Vorschrift $(g\mu)(A) := \int_A g\mu$. Für jede weitere meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ gilt mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0 = \infty \cdot 0$ die Identität von Maßen $f(g\mu) = (fg)\mu$.

Übung 6.4. Man zeige: Ist (X, μ) ein σ-endlicher Maßraum und sind $f, g : X \to [0, \infty]$ meßbar, so gilt die Gleichheit von Maßen $f\mu = g\mu$ genau dann, wenn f und g außerhalb einer meßbaren Menge vom Maß Null übereinstimmen. Man gebe auch ein Gegenbeispiel im Fall nicht σ-endlicher Maßräume. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall $\mu(X) < \infty$ zurück und betrachte dann zunächst die Mengen $\{x \mid n > f(x) > g(x) + 1/n\}$.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 5.12 vor der Vorlesung

Übung 7.1 (**Vertauschen von Integration und Ableitung**). Sei (X, μ) ein Maßraum und $I \subset \mathbb{R}$ halboffen und $f : X \times I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung derart, daß $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar ist für alle $t \in I$ und $t \mapsto f(x,t)$ differenzierbar für alle $x \in X$. Existiert eine integrierbare Abbildung $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \geq |\partial_t f(x,t)|$ für alle x und t, so ist $x \mapsto \partial_t f(x,t)$ integrierbar für alle t und es gilt

$$\partial_t \int f(x,t)\ \mu\langle x\rangle = \int \partial_t f(x,t)\ \mu\langle x\rangle$$

Hinweis: Dominierte Konvergenz und Mittelwertsatz.

Übung 7.2. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $A \subset X$ eine meßbare Teilmenge, $\mu|_A$ das darauf eingeschränkte Maß und $f : X \to [0, \infty]$ meßbar. Man schreibe einen Beweis aus für die Gleichheit

$$\int_X [A] f \mu = \int_A f \mu|_A$$

Hier meint $[A]f$ das Produkt von f mit der charakteristischen Funktion von A unter der üblichen Konvention $0 \cdot \infty = 0$. Üblicherweise wird die rechte Seite abkürzend $\int_A f\mu$ notiert.

Übung 7.3. Zeige: Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1\}$ hat das Volumen $(n!)^{-1}$.

Übung 7.4. Gegeben meßbare Abbildungen $f : X \to A$ und $g : Y \to B$ von Meßräumen gilt für ENDLICHE (beliebige war falsch) Maße μ auf X und ν auf Y im Raum der Maße auf $A \times B$ die Gleichheit

$$(f_*\mu) \boxtimes (g_*\nu) = (f \times g)_*(\mu \boxtimes \nu)$$

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 12.12 vor der Vorlesung

Übung 8.1. Man zeige: Eine Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge in Bezug auf das Lebesguemaß genau dann, wenn sie sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge von kompakten Quadern Q_n überdecken läßt mit $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{vol} Q_n < \varepsilon$.

Übung 8.2. Sei $W \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Man zeige: Liefern zwei Borelmaße auf W dasselbe Integral für alle glatten Funktionen auf W mit kompaktem Träger, so stimmen sie überein. Hinweis: Man verwende 1.9.4 und die Regularität 1.8.7.

Übung 8.3. Man zeige: Gegeben eine meßbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda(cA) = |c|^n \lambda(A)$. Zum Beispiel hat eine Kugel vom doppelten Radius das achtfache Volumen.

Übung 8.4 (**Gitterpunktsatz von Minkowski**). Für jede offene konvexe Teilmenge K eines $\mathbb{R}^n$ mit $x \in K \Rightarrow (-x) \in K$ und Lebesguemaß $\lambda(K) > 1$ enthält $2K$ außer dem Ursprung noch weitere Punkte aus $\mathbb{Z}^n$. Hinweis: Wir schreiben K als disjunkte Vereinigung der $K \cap (x + [0,1)^n)$ für $x \in \mathbb{Z}^n$. Aus Volumengründen gibt es $x \neq y \in \mathbb{Z}^n$ mit $x + K \cap y + K \neq \emptyset$, also $k, h \in K$ mit $k - h = x - y$, also $(x - y) \in 2K$.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 19.12 vor der Vorlesung

Übung 9.1. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. So ist die **Mantelfläche**

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$$

eine zweidimensionale Randfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Man zeige man für das Bildmaß des Oberflächenmaßes unter der orthogonalen Projektion $p : M \to I$ unserer Mantelfläche auf die z-Achse die Formel $p_*\sigma = 2\pi f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2}\,\mathrm{d}z$. Ist speziell M die Einheitskugel, so zeige man $p_*\sigma = 2\pi\,\mathrm{d}z$ und berechne nochmals die Oberfläche der Einheitskugel.

Übung 9.2. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Gegeben eine integrierbare Abbildung $f : X \to V$ mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum gilt für jede Norm $\| \ \|$ auf V die Abschätzung

$$\left\| \int f \right\| \leq \int \|f\|$$

Hinweis: Man zeige das zunächst für meßbare Stufenfunktionen und argumentiere dann mit dem Satz über dominierte Konvergenz.

Übung 9.3. Man gebe eine quadratintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nicht integrierbar ist. Man gebe eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nicht quadratintegrierbar ist. Man zeige, daß jede quadratintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger integrierbar ist.

Übung 9.4. Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fast überall gleich und stetig bei $p \in \mathbb{R}^n$, so gilt $f(p) = g(p)$.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 9.1 vor der Vorlesung

Übung 10.1. Gegeben ein Maßraum liegen für $1 \leq p < \infty$ die integrierbaren Stufenfunktionen auf unserem Raum dicht im Raum der L^p-Funktionen. Hinweis: Man verwende das Lemma zur monotonen Approximation durch Stufenfunktionen.

Übung 10.2. Man zeige, daß ein unendlichdimensionaler Hilbertraum keine Orthonormalbasis im Sinne der linearen Algebra besitzen kann.

Übung 10.3. Ist (X, μ) ein Maßraum und $E \subset X$ eine meßbare Teilmenge endlichen Maßes, so liefert für alle $p \in [1, \infty]$ die Einschränkung von Funktionen eine stetige Abbildung $\mathrm{L}^p(X) \to \mathrm{L}^1(E)$. Hinweis: Hölder-Ungleichung.

Übung 10.4. Gegeben ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist der Raum $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}; \mu)$ endlichdimensional genau dann, wenn μ eine endliche Linearkombination von Diracmaßen ist. Hinweis: Wir können $\mu = \mathrm{d}f$ annehmen für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und linksseitig stetig.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 16.1 vor der Vorlesung

Übung 11.1 (**Charaktere von Produkten**). Gegeben G, H topologische Gruppen zeige man, daß die durch $\chi \mapsto (\chi \circ i, \chi \circ j)$ gegebene Abbildung ein Gruppenisomorphismus

$$\mathfrak{X}(G \times H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(H)$$

ist, mit $i : G \hookrightarrow G \times H$, $g \mapsto (g, 1)$ und $j : H \hookrightarrow G \times H$, $h \mapsto (1, h)$.

Übung 11.2. Man konstruiere eine Bijektion zwischen der Menge aller stetigen Gruppenhomomorphismen $(S^1)^m \to (S^1)^n$ und der Menge $\mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{Z})$ aller $(n \times m)$-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen.

Übung 11.3. Man zeige: Genau dann besitzt ein Hilbertraum eine abzählbare dichte Teilmenge, wenn er eine abzählbare Hilbertbasis besitzt.

Übung 11.4. Man zeige: Jede stetige lineare Abbildung von Hilberträumen hat genau eine adjungierte Abbildung und diese ist auch stetig. Man notiert die adjungierte Abbildung zu A in der mathematischen Literatur meist A^*, in der physikalischen Literatur dahingegen meist $A^\dagger$. Hinweis: Zuerst mag der Riesz'sche Darstellungssatz helfen, angewandt auf $v \mapsto \langle Av, w\rangle$ für festes w, dann die Erkenntnis $\|A\| = \sup\{\langle Av, v'\rangle \mid \|v\| = \|v'\| = 1\}$ im Fall, daß keiner unserer beiden Räume der Nullraum ist.

Übungen Analysis 3

Abgabe bis Dienstag 23.1 vor der Vorlesung

Übung 12.1. Man berechne die Fourierkoeffizienten der Sägezahnfunktion $t \mapsto |t|$ für $t \in [-\pi, \pi]$ und der Funktion $t \mapsto \exp(\exp(\mathrm{i}t))$.

Übung 12.2. Man zeige für die physikalisch standardisierte Fouriertransformierte: Für $g(x) := f(x)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha\cdot x}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^n$ haben wir $g^\wedge(y) = f^\wedge(y - \alpha)$; Für $g(x) := \overline{f(x)}$ haben wir $g^\wedge(y) = \overline{f^\wedge(-y)}$;

Übung 12.3. Man zeige, daß der Schwartzraum stabil ist unter Multiplikationen mit beliebigen Koordinatenfunktionen x_ν und unter allen partiellen Ableitungen ∂_μ.

Übung 12.4 (**Fouriertransformierte der Glockenkurve**). Man zeige, daß die Gauß'sche Glockenkurve unter der mathematisch standardisierten Fouriertransformation ihre eigene Fouriertransformierte ist, in Formeln gilt für die Funktion $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ also $g^\wedge(y) = \mathrm{e}^{-y^2/2}$. Hinweis: g erfüllt die Differentialgleichung $g'(x) = -xg(x)$. Auch ohne den Eindeutigkeitssatz über Lösungen von Differentialgleichungen zu bemühen, kann man durch Ableiten von $f(x)/(\mathrm{e}^{-x^2/2})$ zeigen, daß diese Differentialgleichung bis auf konstante Faktoren keine anderen Lösungen f hat. Jetzt zeige man, daß $\hat{g} := g^\wedge$ dieselbe Differentialgleichung löst. So folgt $g = c\hat{g}$. Die Konstante c schließlich ergibt sich aus unserer Formel für die Fläche unter der Glockenkurve.

Übungen Analysis 3

Letztes Blatt als Bonus-Blatt
Abgabe bis Dienstag 30.1 vor der Vorlesung

Übung 13.1. Man zeige für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(\alpha) < 0$, daß die Funktion g gegeben durch $g(x) = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\alpha}$ für $x > 0$ und $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ die Fouriertransformierte $g^\wedge(y) = -1/(y+\alpha)$ hat.

Übung 13.2. Schreiben wir eine integrierbare Funktion f als Summe $f = g+u$ ihres geraden und ihres ungeraden Anteils, so gilt $g^\wedge(y) = (2\pi)^{-1/2} \int f(x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x$ und $\mathrm{i}u^\wedge(y) = (2\pi)^{-1/2} \int f(x)\sin(xy)\,\mathrm{d}x$ für die mathematisch standardisierte Fouriertransformation.

Übung 13.3. Man zeige für die stochastische Fouriertransformierte eines Maßes $\mu \in \mathrm{M}(\mathbb{R})$, daß unter der Voraussetzung, daß x integrierbar ist nach μ, die Fouriertransformierte differenzierbar ist mit der Ableitung $(\mu^\wedge)'(y) = \mathrm{i}(x\mu)^\wedge$.

Übung 13.4. Ist die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion $f \in \mathcal{L}^1$ wieder integrierbar, so gilt $f^{\wedge\wedge}(x) = f(-x)$ für fast alle x. Insbesondere besitzt jede L^1-Funktion mit einer integrierbaren Fouriertransformierten einen stetigen Repräsentanten.