# Übungblätter zur Elementargeometrie bei Soergel im SS 2026

Allgemeine Hinweise:

- Bei der Bearbeitung der Üungen und später der Klausuraufgaben ist keine übertriebene Ausführlichkeit gefordert. Einfach zu schreiben, es sei klar, reicht nicht, aber eine schlüssige Kette von richtigen Argumenten in der nächsten Stufe der Ausführlichkeit reicht aus. Allerdings soll die Argumentationskette auch für Sie selbst schlüssig sein. Sie müssen sie im Tutorat erklären können und in der Lage sein, auf Nachfragen Schritte Ihrer Argumentation genauer auszuführen. In der Vorlesung bewiesene Aussagen müssen dabei aber keinesfalls nochmals bewiesen werden, da reicht ein Zitat.

- Es gibt jede Woche vier Aufgaben und für jede Aufgabe gibt es vier Punkte, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben durchaus sehr unterschiedlich sein wird. Ergänzende Übungen sind meist schwieriger, sind für die Klausur nicht relevant und geben bis zu vier Bonuspunkte.

- Die Übungen werden Freitags ausgegeben und müssen die Woche danach am Freitag vor der Vorlesung abgegeben werden. Sie seien ermutigt, die Aufgaben mit Ihren Kommilitonen zu besprechen und zu zweit abzugeben. Mehr als zwei Namen auf einem Zettel gilt aber nicht.

- Die Übungen werden auf den folgenden Seiten dieses Textes ins Netz gestellt, der jede Woche um das Übungsblatt der jeweiligen Woche ergänzt werden wird.

# Anwesenheitsaufgaben zweite Vorlesungswoche

*Übung* 0.1. Man zeige: Gegeben $(Z, s)$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt ist seine orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(Z, s) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid s(gv, gw) = s(v, w)\ \forall v, w \in Z\}$ eine Drehspiegelgruppe.

*Übung* 0.2. Man schreibe alle Matrizen auf, die Elemente der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(2) = \mathrm{O}(\mathbb{R}^2, s)$ sind für $s$ das Standardskalarprodukt.

*Übung* 0.3. Man zeige: Gegeben $(Z, D)$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehspiegelgruppe für jede Spiegelung $r \in D$ und jede Nichtspiegelung $d \in D$ die Identität $rdr = d^{-1}$. Man folgere, daß in jeder Drehspiegelgruppe die Elemente, die keine Spiegelungen sind, eine kommutative Untergruppe bilden.

*Übung* 0.4. Man zeige: Durch je zwei verschiedene Punkte eines zweidimensionalen Vektorraums $Z$ geht nur genau eine affine Gerade. Gegeben eine affine Gerade $g \subset Z$ und ein Punkt $p \in Z \backslash g$ gibt es genau eine affine Gerade $h$ durch $p$ mit $h \cap g = \emptyset$.

# Übungen Elementargeometrie

Abgabe bis Montag, den 4.5 (am 29.4 geändert).

*Übung* 1.1. Man zeige: Die Gruppe $D \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ alles $\mathbb{R}$-linearen Automorphismen von $\mathbb{C}$ der Gestalt $w \mapsto z \cdot w$ oder $w \mapsto z \cdot \bar{w}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist eine Drehspiegelgruppe. Man gebe dafür ein invariantes Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ an.

*Übung* 1.2. Man zeige: Gegeben $(Z, D)$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit ausgezeichneter Drehspiegelgruppe wird die Drehspiegelgruppe $D$ von ihren Spiegelungen erzeugt.

*Übung* 1.3. Man bestimme alle endlichen Untergruppen von $\mathrm{O}(2)$.

*Übung* 1.4. Seien $(Z, s, \varepsilon)$ und $(U, t, \eta)$ zweidimensionale reelle Vektorräume mit Skalarprodukt und Orientierung. Für einen orthogonalen Isomorphismus $\psi : Z \xrightarrow{\sim} U$ erklären wir

$$\operatorname{int} \psi : \mathrm{O}(Z, s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(U, t)$$

durch $k \mapsto \psi \circ k \circ \psi^{-1}$. Man zeige, daß für je zwei orthogonale orientierungserhaltende Abbildungen $\phi, \psi : Z \xrightarrow{\sim} U$ gilt $\operatorname{int} \psi = \operatorname{int} \phi$. ENTSCHULDIGUNG, DAS IST FALSCH! ES GILT NUR FÜR $\operatorname{int} \psi : \mathrm{SO}(Z, s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(U, t)$! WS

# Elementargeometrie Woche 11.5 bis 15.5

Hier einige Ideen, was man in den Übungsgruppen machen könnte, wenn nicht eh schon genug Fragen aufkommen.

*Übung* 0.1. Man überlege sich, daß alle bisher gegebenen Argumente genauso funktionieren, wenn man statt über den reellen Zahlen über einem Teilkörper $Q \subset \mathbb{R}$ arbeitet, der mit jedem positiven $q \in Q$ auch seine Quadratwurzel $\sqrt{q}$ enthält.

Ergänzung: Ich weiß nicht, ob es eine „Drehspiegelgruppe auf $\mathbb{Q}^2$“ im Sinne unserer Definition überhaupt gibt.

*Übung* 0.2. Man wiederhole Dinge zu alternierenden Multilinearformen. Warum hat $\mathrm{Alt}^2(Z)$ Dimension Eins für $Z$ zweidimensional? Warum gilt $\omega(gv, gw) = \det(g)\omega(v, w)$ für alle $g \in \mathrm{GL}(Z)$? Können sie beweisen, daß es für $Z = \mathbb{R}^2$ eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt so, daß gilt $\omega(v, w) = \pm c\lambda([0, 1]v + [0, 1]w)$ für $\lambda$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^2$ oder irgendein anderer Flächenbegriff aus der Erweiterung der Analysis?

*Übung* 0.3. Man bespreche die Punkte 1-3 vom folgenden Übungsblatt.

# Übungen Elementargeometrie

Abgabe bis Freitag, den 15.5 um 8:15.

*Übung* 2.1. Man zeige, daß die orthogonale Gruppe von $\mathbb{Q}^2$ mit seinem Standardskalarprodukt keine Drehspiegelgruppe ist.

*Übung* 2.2. Gegeben ein dreidimensionaler reeller Vektorraum $E$ erklären wir eine **Halbraumfahne** $(A, H)$ als ein Paar von Teilmengen $A \subset H \subset E$, das in der Gestalt $A = \mathbb{R}_{\geq 0}v$ und $H = \mathbb{R}v + \mathbb{R}_{\geq 0}w$ geschrieben werden kann mit $v, w \in E$ linear unabhängigen Vektoren. Wir erklären eine **Rotationsgruppe auf** $E$ als eine Untergruppe $R \subset \mathrm{GL}(E)$ derart, daß es zu je zwei Halbraumfahnen genau ein Element $r \in R$ gibt, das die eine in die andere überführt. Man zeige drei der Teile 4 – 8. Der vierte Teil gilt dann als Bonus. Die ersten Teile 1 – 3 dürfen vorausgesetzt werden.

1. Die Gruppe $\mathrm{SO}(3; \mathbb{R})$ ist eine Rotationsgruppe auf $\mathbb{R}^3$;

2. Gegeben $v, w$ linear unabhängig und $r \in R$ mit $r : ([v\rangle, \mathbb{R}v + [w\rangle) = ([v\rangle, \mathbb{R}v - [w\rangle)$ gilt $r^2 = \mathrm{id}$ und $E^r = \mathbb{R}v$ und $\dim E^{-r} = 2$. Dies Element hängt nur von $v$ ab und heiße ab jetzt $a_v$ wie „Achsenspiegelung“.

3. Jedes $t \in \mathrm{GL}(E)$ hat einen reellen Eigenwert. Ist $v$ ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt $a_v t = t a_v$ und damit stabilisiert $t$ die Ebene $Z = E^{-a_v}$.

4. Gegeben ein zweidimensionaler Teilraum $Z \subset E$ und $R_Z := \{r \in R \mid r(Z) = Z\}$ ist die Einschränkung $R_Z \to \mathrm{GL}(Z)$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus und dessen Bild ist eine Drehspiegelgruppe $D_Z$ auf $Z$;

5. Es gibt höchstens ein $R$-invariantes Skalarprodukt auf $E$, bis auf Multiplikation mit Skalaren;

6. Jeder reelle Eigenwert eines Elements von $R$ ist $\pm 1$;

7. Es gibt ein $R$-invariantes Skalarprodukt $s$ auf $E$;

8. Es gilt $R = \mathrm{SO}(E, s)$.

Werbung für eine Studierenden-Umfrage

# Befragung der Studierenden 2026

Liebe Studierende,

ihr seid herzlich eingeladen, an der **Befragung der Studierenden 2026** teilzunehmen!


**Wie?**

Ihr habt einen personalisierten Link bekommen: Checkt eure Mails oder schaut auf eurer Ilias-Startseite unter „Meine Online-Evaluationen“.

**Wann?**

Jetzt – im Mai und Juni 2026!

**Warum?**

Ihr helft dabei, die Studienqualität eurer Fachbereiche weiterzuentwickeln!

Zudem warten **tolle Preise** auf euch, unter anderem Gutscheine fürs Thermalbad, Pizza, Brettspiele uvm.

universität freiburg

Befragung der Studierenden 2026 I ufr.link/befragungen

# Übungen Elementargeometrie

Abgabe bis Freitag, den 22.5 um 8:15.

*Übung* 3.1. Man zeige: Gegeben ein drehspiegelverträglicher Isomorphismus von Vektorräumen mit Drehspiegelgruppe $\psi : (Z, D) \xrightarrow{\sim} (Y, C)$ gibt es genau eine lineare Abbildung der Längengeraden $\mathbb{L}_\psi : \mathbb{L}_Z \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_Y$ mit der Eigenschaft $\|\psi v\|_Y = \mathbb{L}_\psi(\|v\|_Z)\ \forall v \in Z$ und dann gilt auch

$$\langle \psi v, \psi w \rangle_Y = \mathbb{L}_\psi^{\otimes 2}\big(\langle v, w \rangle_Z\big)$$

Hier verwenden wir, daß es gegeben lineare Abbildungen eindimensionaler Vektorräume $f : L \to L'$ und $g : M \to M'$ genau eine lineare Abbildung $f \otimes g : L \otimes M \to L' \otimes M'$ gibt mit $l \otimes m \mapsto f(l) \otimes g(m)$. Das scheint mir evident, es mag vorausgesetzt werden.

*Übung* 3.2 (**Lage von Strahlen und Winkel**). Gegeben Strahlenpaare $(A, B)$ und $(A', B')$ in Vektorräumen mit Drehspiegelgruppe $Z, Z'$ gibt es genau dann einen drehspiegelverträglichen Isomorphismus $\psi : Z \xrightarrow{\sim} Z'$ mit $\psi(A) = A'$ und $\psi(B) = B'$, wenn gilt

$$\angle(A, B) = \angle(A', B')$$

*Übung* 3.3. Man berechne den Arcuscosinus des Winkels, den zwei Flächen eines Tetraeders längs einer Kante einschließen. Der Winkel von Flächen ist dabei wie in der Schule erklärt als der kleinstmögliche absolute Winkel zwischen darauf senkrechten Strahlen.

*Übung* 3.4. Man zeige: Gegeben vier von Null verschiedene Vektoren in einem dreidimensionalen Skalarproduktraum, von denen je zwei einen Winkel $> 90°$ einschließen, sind je drei linear unabhängig.

# Übungen Elementargeometrie

Abgabe bis Freitag, den 5.6. um 8:15 (Abgabedatum nach Vorlesung geändert).

*Übung* 4.1. Man zeige den **Cosinus-Satz** $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$ für jedes Dreieck einer Kongruenzebene mit positiven Seitenlängen $a, b, c$ und jeweils den entsprechenden Seiten gegenüberliegenden Winkeln $\alpha, \beta, \gamma$. Man zeige in denselben Notationen auch den **Sinus-Satz**

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Hinweis: Man wähle eine Seite als horizontale Seite aus und berechne die Höhe unseres Dreiecks auf verschiedene Weisen.

*Übung* 4.2. Man zeige: Je zwei angeordnete Dreiecke $(A, B, C)$ und $(A', B', C')$ einer Kongruenzebene mit zwei gleichen Seitenlängen $a = a'$ sowie $b = b'$ und gleichem eingeschlossenen Winkel $\gamma = \gamma'$ sind angeordnet kongruent. Gilt statt $\gamma = \gamma'$ eine der Gleichheiten $\alpha = \alpha'$ oder $\beta = \beta'$, so brauchen unsere angeordneten Dreiecke nicht kongruent zu sein.

*Übung* 4.3 (**Winkelsumme in konvexen Vielecken**). Man zeige: Seien in einer Kongruenzebene $E$ paarweise verschiedene Punkte $p_1, \ldots, p_n$ mit $n \geq 3$ und in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ verstandenen Indizes gegeben derart, daß die halboffenen Segmente $[p_{i-1}, p_i)$ paarweise disjunkt sind und $(p_{i+1} - p_i, p_{i-1} - p_i)$ für alle $i$ linear unabhängig sind und als angeordnete Basen alle zu derselben Orientierung von $\vec{E}$ gehören. So gilt in der Überlagerung $\tilde{\mathbb{W}}$ der Winkelgruppe

$$\sum_{i=1}^{n} \angle(p_{i+1} - p_i, p_{i-1} - p_i) = (n-2)180°$$

Man zeige durch ein Beispiel, daß die Orientierungsbedingung notwendig ist.

*Übung* 4.4. Man zeige die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks einer Kongruenzebene in der Gestalt

$$\sin(\alpha)bc = \pm F(B - A, C - A)$$

mit unserem orientierten Flächeninhalt auf der rechten Seite. Korrigiert, $\cos$ war falsch. Korrigiert, 2 war falsch.

# Übungen Elementargeometrie

Abgabe bis Freitag, den 12.6. um 8:15

*Übung* 5.1. Man betrachte die komplexe Zahlenebene als euklidische Ebene und betrachte die Drehung $d$ mit Fixpunkt $p \in \mathbb{C}$ im Uhrzeigersinn um den rechten Winkel, in Formeln gegeben durch $d : p + z \mapsto p + \mathrm{i}z$. Man schreibe für einen beliebigen Richtungsvektor $w \in \mathbb{C}$ die Verknüpfung $(w+) \circ d$ wieder als eine Drehung. Was ist der Fixpunkt dieser neuen Drehung?

*Übung* 5.2 (**Ähnlichkeiten**). Ein Isomorphismus von einer Kongruenzebene mit sich selbst heißt eine **Ähnlichkeitsabbildung** oder **Ähnlichkeit**. Es ist klar, daß $\mathbb{C}$ eine Kongruenzebene wird, wenn wir als Kongruenzen alle Abbildungen nehmen, die eine der beiden Gestalten $z \mapsto az + b$ oder $z \mapsto a\bar{z} + b$ haben mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $|a| = 1$. Man zeige, daß die Ähnlichkeiten der Kongruenzebene $\mathbb{C}$ genau alle Abbildungen sind, die eine der beiden Gestalten $z \mapsto az + b$ oder $z \mapsto a\bar{z} + b$ haben mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$. Man folgere, daß alle Ähnlichkeiten einer Kongruenzebene, die keine Kongruenzen sind, genau einen Fixpunkt haben müssen, und argumentiere heuristisch, daß sie entweder „Drehstreckungen“ oder „Spiegelstreckungen“ sein müssen.

*Übung* 5.3 (**Dreispiegelungssatz**). Man zeige, daß sich jedes Element der Kongruenzgruppe einer euklidischen Ebene als Verknüpfung von einer, zwei oder drei Spiegelungen darstellen läßt.

*Übung* 5.4. Man zeige, daß wir aus jeder Kongruenzebene $(E, K)$ eine fasteuklidische Geometrie mit Parallelenaxiom erhalten, indem wir als unsere Geraden $g \in G \subset \mathcal{P}(E)$ alle affinen Geraden nehmen und als Zwischenrelation $Z$ die Menge aller kollinearen Tripel $(x, y, z)$ mit $\mathbb{R}_{\geq 0}(x - y) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}(z - y) = \{0\}$ in $\vec{E}$.

# Übungen Elementargeometrie

Abgabe bis Freitag, den 19.6. um 8:15

*Übung* 6.1. Man betrachte in der komplexen Zahlenebene die Kreisspiegelung am Kreis mit Radius 2 und Zentrum in i. Was ist das Bild von 2? Was ist das Bild des Einheitskreises?

*Übung* 6.2. Man betrachte einen dreidimensionalen reellen affinen Raum $R$ mit Skalarprodukt auf seinem Richtungsraum $\vec{R}$ und seine Erweiterung durch einen weiteren Punkt $\infty$ zu

$$\hat{R} := R \sqcup \{\infty\}$$

Man erkläre verallgemeinerte Sphären $L \subset \hat{R}$ als Teilmengen, die entweder echte Sphären in $R$ sind, also von der Gestalt

$$L = \mathrm{K}(c; r) := \{x \in R \mid \|x - c\| = r\}$$

für $c \in R$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, oder eine affine Ebene $E \subset R$ disjunkt vereinigt mit der einpunktigen Menge $\{\infty\}$. Im ersten Fall sprechen wir von einer **echten Sphäre**. Im zweiten Fall sprechen wir von einer **erweiterten Ebene** und verwenden dafür die Notation $L = \hat{E} := E \sqcup \{\infty\}$. Man definiert für jede verallgemeinerte Sphäre $L$ die Inversion

$$s_L : \hat{R} \xrightarrow{\sim} \hat{R}$$

durch dieselbe Formel wie im Fall einer Kreisspiegelung. Man zeige nun: Das Bild unter $s_L$ einer verallgemeinerten Sphäre ist wieder eine verallgemeinerte Sphäre.

*Übung* 6.3. Wir betrachten den Einheitskreis $S^1$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und stellen darauf bei $p := (0, 1)$ eine Lampe. Wir betrachten die Gerade $H$ in $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung $y = -1$ und die Abbildung $S : S^1 \backslash p \to H$, die jedem Punkt seinen Schatten auf $H$ zuordnet. Zeigen Sie, daß diese Abbildung die Einschränkung einer Kreisspiegelung ist.

*Übung* 6.4. Zeigen Sie, daß die Abbildung $S : S^1 \backslash p \to H$ aus der vorherigen Übung eine Bijektion zwischen Punkten mit rationalen Koordinaten auf $S^1 \backslash p$ und auf $H$ induziert.