Übungblätter zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie bei Soergel im SS 2025

Allgemeine Hinweise:

- Bei der Bearbeitung der Üungen ist keine übertriebene Ausführlichkeit gefordert. Einfach zu schreiben, es sei klar, reicht nicht, aber eine schlüssige Kette von richtigen Argumenten in der nächsten Stufe der Ausführlichkeit reicht aus. Allerdings soll die Argumentationskette auch für Sie selbst schlüssig sein. Sie müssen sie im Tutorat erklären können und in der Lage sein, auf Nachfragen Schritte Ihrer Argumentation genauer auszuführen. In der Vorlesung bewiesene Aussagen müssen dabei aber keinesfalls nochmals bewiesen werden, da reicht ein Zitat.

- Es gibt jede Woche vier Aufgaben und für jede Aufgabe gibt es vier Punkte, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben durchaus sehr unterschiedlich sein wird.

- Die Übungen werden Dienstags ausgegeben und müssen die Woche danach am Dienstag vor der Vorlesung abgegeben werden. Sie seien ermutigt, die Aufgaben mit Ihren Kommilitonen zu besprechen und zu zweit abzugeben. Mehr als zwei Namen auf einem Zettel gilt aber nicht.

- Die Übungen werden auf den folgenden Seiten dieses Textes ins Netz gestellt, der jede Woche um das Übungsblatt der jeweiligen Woche ergänzt werden wird.

Anwesenheitsaufgaben zweite Vorlesungswoche

Diese Übungen müssen nicht abgegeben werden, sondern sollen im Laufe der zweiten Vorlesungswoche in den Tutoraten bearbeitet werden. Zu diesem Zeitpunkt liegen ja noch keine korrigierten Hausaufgaben vor, die zu besprechen wären.

Übung 0.1. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **dicht**, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist. Sei k ein kommutativer Integritätsbereich. Man zeige: Jede unendliche Teilmenge von k ist Zariski-dicht. Sind $A \subset k^m$ und $B \subset k^n$ Zariski-dicht, so gilt dasselbe für $A \times B \subset k^{m+n}$. (Korrektur: Ab hier muß k unendlich angenommen werden.) Jede offene nichtleere Teilmenge von k^n ist Zariski-dicht. Je zwei offene nichtleere Teilmengen von k^n haben nichtleeren Schnitt.

Übung 0.2. Man zeige: Verschwindet ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x, y]$ auf der Kreislinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, so wird es von $x^2 + y^2 - 1$ geteilt.

Übung 0.3. Gegeben eine endlichdimensionale Ringalgebra über einem Körper bilden die Einheiten stets eine Zariski-offene Teilmenge. Korrektur: Diese Übung war mißverständlich. Ich hätte schreiben sollen: Gegeben eine k-bilineare Multiplikation auf $A := k^n$, die A zu einem Ring macht, bilden die Einheiten eine Zariski-offene Teilmenge $A^\times \Subset A$.

Übung 0.4. Ist k ein Körper, ja ein beliebiger Kring, und $x \in k^n$ ein Punkt, so ist das Verschwindungsideal dieser einelementigen Menge das Ideal $\mathcal{I}(x) = \langle T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n \rangle \subset k[T_1, \ldots, T_n]$.

Übung 0.5. Sei k ein Körper. Man zeige, daß die von ganz k verschiedenen algebraischen Teilmengen von k genau die endlichen Teilmengen sind. Man zeige, daß die algebraischen Teilmengen von k^2 genau die endlichen Teilmengen, die Vereinigungen der Nullstellenmengen einzelner Polynome mit endlichen Teilmengen, sowie ganz k^2 sind. Hinweis: Zwei teilerfremde Polynome in zwei Veränderlichen haben höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen.

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 29.4 um 8:15

Ergänzende Übung 1.1. Man zeige, daß in einem endlich erzeugten Modul jedes Erzeugendensystem ein endliches Erzeugendensystem umfaßt.

Übung 1.2. Sei k ein Körper. Man zeige für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ die Abschätzung $|\mathcal{Z}(\mathfrak{a})| \leq \dim_k k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$. Insbesondere kann ein Ideal endlicher Kodimension nur höchstens endlich viele simultane Nullstellen besitzen. Hinweis: Interpolation in mehreren Variablen.

Übung 1.3. Man zeige: Jeder surjektive Endomorphismus eines noetherschen Moduls ist ein Isomorphismus.

Übung 1.4. Man zeige, daß $\mathbb{C}[x, y]/\langle y^2 - x^3 \rangle$ ein Integritätsbereich ist, und daß die über diesem Ring ganzen Elemente seines Quotientenkörpers selbst einen Ring bilden, der isomorph ist zum Polynomring in einer Veränderlichen.

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 6.5 in der Vorlesung

Übung 2.1. $(k = \bar{k})$. Man zeige: Gegeben nilpotentfreie k-Kringe A, B ist auch ihr Tensorprodukt $A \otimes_k B$ nilpotentfrei. Hinweis: Identifizieren mit regulären Funktionen. Man beachte das Beispiel $K(T) \otimes_{K(T^p)} K(T)$ für einen Körper K positiver Charakteristik $p > 0$, in dem das Tensorprodukt zweier Körpererweiterungen desselben Grundkörpers $K(T^p)$ nilpotente Elemente hat. Aber $k := K(T^p)$ ist auch nicht algebraisch abgeschlossen.

Übung 2.2 (**Disjunktes Verkleben polynomialer Funktionen**). $(k = \bar{k})$. Seien disjunkte und Zariski-abgeschlossene Teilmengen $X, Y \mathrel{\complement\!\!\!\mathbb{A}} k^n$ gegeben sowie polynomiale Funktionen $f : X \to k$ und $g : Y \to k$. Man zeige, daß die Abbildung

$$h : X \sqcup Y \to k$$

mit $h|_X = f$ und $h|_Y = g$ dann auch polynomial ist. Hinweis: Nach dem Nullstellensatz ist die Summe der Verschwindungsideale der ganze Polynomring. Nun verwende man den abstrakten chinesischen Restsatz.

Übung 2.3 (**Kein abgeschlossenes Verkleben polynomialer Funktionen**). Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und algebraische Teilmengen $X, Y \mathrel{\complement\!\!\!\mathbb{A}} k^n$ sowie polynomiale Funktionen $f : X \to k$ und $g : Y \to k$ mit $f|_{X \cap Y} = g|_{X \cap Y}$ muß die Abbildung

$$h : X \cup Y \to k$$

mit $h|_X = f$ und $h|_Y = g$ keineswegs polynomial sein. Als Beispiel untersuche man den k^2 mit X dem Achsenkreuz und Y einer weiteren Ursprungsgeraden. Mutige zeigen, daß das Verkleben im allgemeinen genau dann gelingt, wenn $\mathcal{I}(X) + \mathcal{I}(Y)$ ein Radikalideal ist.

Übung 2.4 (**Stetigkeit polynomialer Abbildungen**). Ich erinnere daran, daß eine Abbildung zwischen topologischen Räumen stetig heißt, wenn das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist. Man zeige: Gegeben ein Körper k sind polynomiale Abbildungen $X \to Y$ mit $X \mathrel{\complement\!\!\!\mathbb{A}} k^n$ und $Y \mathrel{\complement\!\!\!\mathbb{A}} k^m$ stetig für die von der Zariskitopologie auf unseren Teilmengen induzierte Topologie.

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 13.5 in der Vorlesung

Übung 3.1. Seien X und Y affine Varietäten. Man zeige, daß ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ dichtes Bild hat genau dann, wenn der zugehörige Komorphismus eine Injektion $\varphi^\sharp : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ induziert.

Übung 3.2. Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Gegeben eine Teilmenge $J \subset \mathcal{O}(Y)$ ist das Urbild ihrer Nullstellenmenge die Nullstellenmenge ihres Bildes, in Formeln

$$\varphi^{-1}(\mathcal{Z}(J)) = \mathcal{Z}(\varphi^\sharp(J))$$

Übung 3.3 (**Produkt mit** k^n). Gegeben eine affine Varietät X zeige man, daß wir einen Isomorphismus $\mathcal{O}(X)[T_1, \ldots, T_n] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X \times k^n)$ erhalten, wenn wir den Kringhomomorphismus betrachten, der auf $\mathcal{O}(X)$ durch das Zurückholen gegeben ist und unter dem der Variablen T_i die Projektion auf k^n gefolgt von der Projektion auf den i-ten Eintrag zugeordnet wird.

Übung 3.4. Ein **Block** eines Krings kann charakterisiert werden als ein unzerlegbarer direkter Summand unseres Krings, betrachtet als Modul über sich selber. Man konstruiere eine Bijektion zwischen der Menge der Zusammenhangskomponenten einer affinen Varietät X und der Menge der Blöcke ihres Rings von strukturierenden Funktionen $\mathcal{O}(X)$.

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 20.5 in der Vorlesung

Übung 4.1. Man zeige: Das Bild eines irreduziblen Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets irreduzibel.

Übung 4.2. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige, daß die irreduziblen algebraischen Teilmengen von k^2 genau die einpunktigen Teilmengen, die Nullstellenmengen einzelner irreduzibler Polynome sowie ganz k^2 sind. Hinweis: Man erinnere aus der Algebra, daß zwei teilerfremde Polynome in zwei Variablen nur endliche viele gemeinsame Nullstellen haben können.

Übung 4.3. Man zeige, daß für jede affine Varietät X mit einem faktoriellen Ring $\mathcal{O}(X)$ von regulären Funktionen das Bilden der Nullstellenmenge eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Quadratfreie Elemente von} \\ \mathcal{O}(X), \text{ bis auf Einheiten} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Abgeschlossene} \\ \text{Hyperflächen in } X \end{array} \right\} \\ [f] & \mapsto & \mathcal{Z}(f) \end{array}$$

zwischen quadratfreien Elementen von $\mathcal{O}(X)$, bis auf Einheiten, und Hyperflächen in X liefert.

Übung 4.4. Man zeige: Gegeben Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ und Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ eines Krings R mit $\mathfrak{a}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ für alle i, j gibt es stets $f \in R$ mit $f \in \mathfrak{a}_i \ \forall i$ aber $f \notin \mathfrak{p}_j \ \forall j$.

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 27.5 in der Vorlesung

Übung 5.1. Sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Man zeige, daß k die Krulldimension Eins hat und k^2 die Krulldimension Zwei. Hinweis: Die irreduziblen algebraischen Teilmengen wurden in diesen Fällen im letzten Blatt bestimmt.

Übung 5.2 (**Irreduzibilität der Gruppe** SL_n). $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n; k)$ stets irreduzibel ist. Hinweis: Ähnlich wie in [**?**] **??** erkennt man, daß es für jedes n ein N gibt derart, daß sich jede $(n \times n)$-Matrix der Determinante Eins darstellen läßt als Produkt von N Faktoren, die jeweils Diagonalmatrizen der Determinante Eins oder Elementarmatrizen der Determinante Eins sind. Man folgere, daß auch $1 - \det$ für $n \geq 1$ ein irreduzibles Polynom ist. Hinweis: Man argumentiere wie in **??**.

Übung 5.3. Ein Primideal eines Krings muß alle nilpotenten Elemente des besagten Krings enthalten.

Übung 5.4 (**Irreduzibilität von Produkten**). Seien k ein Körper und $X \subset k^n$ und $Y \subset k^m$ irreduzibel für die Zariskitopologie. Man zeige, daß dann auch $X \times Y \subset k^{n+m}$ irreduzibel ist für die Zariskitopologie. Man zeige, daß das Tensorprodukt von zwei Integritätskringen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ stets wieder ein Integritätskring ist.

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 3.6 in der Vorlesung

Übung 6.1. Seien R ein Kring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Gegeben ein R-Modul M mit Untermoduln $K, L \subset M$ zeige man die Identität

$$S^{-1}(K \cap L) = (S^{-1}K) \cap (S^{-1}L)$$

von Untermoduln von $S^{-1}M$. Hinweis: Exaktheit der Lokalisierung.

Übung 6.2. Gegeben ein Integritätsbereich A zeige man in $\mathrm{Quot}A$ die Identität

$$A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\, A} A_{\mathfrak{m}}$$

Hinweis: Gegeben $f \in (\mathrm{Quot}A) \backslash A$ kann das Ideal $I = \{g \in A \mid gf \in A\}$ nie ganz A sein.

Übung 6.3. Ist speziell f die Variable $f = t$ in einem Polynomring $R[t]$ über einem Kring R, so schreibt man kurz $R[t]_t = R[t][t^{-1}] = R[t, t^{-1}]$ und nennt diesen Ring den **Ring der Laurentpolynome über** R. Man zeige, daß sich jedes Element von $R[t, t^{-1}]$ eindeutig darstellen läßt als eine endliche Linearkombination $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i$ mit Koeffizienten $a_i \in R$, daß also die t^i eine Basis des R-Moduls $R[t, t^{-1}]$ bilden.

Übung 6.4 (**Lokalisierung vertauscht mit Restklassenbildung**). Gegeben ein Kring R und ein Ideal $I \subset R$ und eine Teilmenge $S \subset R$ ist die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$S^{-1}R/S^{-1}I \xrightarrow{\sim} \bar{S}^{-1}(R/I)$$

für $\bar{S} \subset R/I$ das Bild von S unter der Quotientenabbildung. Hinweis: Exaktheit der Lokalisierung und Verträglichkeit mit der Restriktion der Skalare.

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 17.6 in der Vorlesung

Übung 7.1. Seien X eine affine Varietät und $x \in X$ ein Punkt. Man zeige, daß die lokale Krulldimension von X bei x übereinstimmt mit der Krulldimension des lokalen Ringes, in Formeln $\operatorname{kdim}_x X = \operatorname{kdim} \mathcal{O}_{X,x}$.

Übung 7.2. Man zeige: Gegeben ein endlich erzeugter freier Modul M über einem lokalen Kring $(A, \mathfrak{m})$ bilden Elemente $v_1, \ldots, v_r \in M$ eine A-Basis von M genau dann, wenn ihre Bilder $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r \in M/\mathfrak{m}M$ eine Basis des Quotienten über $A/\mathfrak{m}$ bilden.

Übung 7.3. Man zeige, daß der ganze Abschluß von $\mathbb{C}[X, Y]/\langle X^3 - Y^2 \rangle$ in seinem Quotientenkörper isomorph ist zum Polynomring $\mathbb{C}[T]$.

Übung 7.4 (**Eigenschaften von Morphismen mit ganzen Komorphismen**). Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Ist der Komorphismus ganz, so ist φ abgeschlossen mit endlichen Fasern und für jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Z \trianglelefteq X$ gilt

$$\operatorname{kdim} Z = \operatorname{kdim} \varphi(Z)$$

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 24.6 in der Vorlesung

Übung 8.1 (**Überdeckung einer Varietät durch Untervarietäten**). Eine irreduzible affine Varietät über einem überabzählbaren algebraisch abgeschlossenen Körper k kann nicht durch abzählbar viele echte abgeschlossene Teilmengen überdeckt werden. Hinweis: Mit dem Normalisierungssatz ziehe man sich auf den Fall zurück, daß unsere Varietät der k^n ist. Dann findet man eine Hyperebene, die in keiner unserer Teilmengen enthalten ist, und argumentiert mit Induktion.

Übung 8.2. Gegeben ein algebraisch abgeschlossener Körper $k = \bar{k}$ und zwei nichtleere algebraische Teilmengen $X \subsetneq k^n$ und $Y \subsetneq k^m$ zeige man die Formel $\mathrm{kdim}(X \times Y) = \mathrm{kdim} X + \mathrm{kdim} Y$. Hinweis: Noether-Normalisierung **??**.

Übung 8.3. Seien $A \subset B \subset C$ kommutative Integritätsringe und sei C ein freier A-Modul von endlichem Rang r. Ist auch $\mathrm{Quot}\, C$ eine Körpererweiterung von $\mathrm{Quot}\, B$ vom Grad r, so gilt $A = B$.

Übung 8.4. Man zeige, daß die Quotientenvarietät $\mathbb{C}^2/\{\pm \mathrm{id}\}$ isomorph ist zum Kegel $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$. Idem, wenn man $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik ersetzt.

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 1.7 in der Vorlesung

Übung 9.1. Man zeige: Operiert eine endliche Gruppe auf einem ganz abgeschlossenen kommutativen Integritätsring, so ist auch der Invariantenring ganz abgeschlossen.

Übung 9.2. Gegeben ein noetherscher faktorieller Ring R induziert das Bilden des Hauptideals irreduzibler Elemente eine Bijektion

$$\operatorname{irk} R \xrightarrow{\sim} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1\}$$

zwischen der Menge der Irreduziblenklassen von R und der Menge aller Primideale der Höhe Eins.

Übung 9.3. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß für jede offene Teilmenge $U \subseteq k^n$ der Ring $\mathcal{O}_{k^n}(U)$ der regulären Funktionen auf U ringendlich ist über k. Hinweis: Man erinnere, daß der Polynomring faktoriell ist, und überlege sich, daß eine reguläre Funktion global durch ihre maximal gekürzte Darstellung gegeben sein muß.

Übung 9.4. Seien X eine affine Varietät mit einem faktoriellen Ring von regulären Funktionen, $Y \subsetneq X$ eine Hyperfläche und $Z \subsetneq X$ eine irreduzible Teilmenge. Man zeige: Ist Z nicht in Y enthalten, so ist $Y \cap Z$ eine Hyperfläche in Z.

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 8.7 in der Vorlesung

Übung 10.1. Die Verknüpfung von zwei finalen Morphismen ist stets final. Ist die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$ von zwei Morphismen final, so ist φ final. Insbesondere ist jeder Morphismus final, der ein Rechtsinverses alias einen **Schnitt** besitzt, für den es also einen Morphismus s gibt mit $fs = \mathrm{id}$. Gegeben $k = \bar{k}$ sind die Koordinatenfunktionen $k^m \twoheadrightarrow k$ final.

Übung 10.2 (**Finalität ist lokal in der Basis**). Ist ein Morphismus von k-geringten Räumen $f : Y \to X$ final, so ist auch für jede offene Teilmenge $U \Subset X$ die induzierte Abbildung $f^{-1}(U) \to U$ final für die induzierten Strukturen. Ist umgekehrt $f : Y \to X$ ein Morphismus von k-geringten Räumen und besitzt X eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ derart, daß $f : f^{-1}(U) \to U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ final ist, so ist unser Morphismus bereits selbst final.

Übung 10.3. Man zeige, daß die finale Struktur zu irgendwelchen Abbildungen von gesättigten Strukturen in eine vorgegebene Menge auch selbst gesättigt ist.

Übung 10.4. Gegeben eine Varietät oder Prävarietät X und $f \in \mathcal{O}_X(X)$ regulär setzen wir

$$X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

Man zeige, daß es für alle $h \in \mathcal{O}_X(X_f)$ ein $n \gg 0$ gibt derart, daß die Fortsetzung durch Null von $f^n h$ eine reguläre Funktion auf ganz X ist. Man folgere, daß die Restriktion $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_f)$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}_X(X)_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X_f)$ zwischen der Lokalisierung von $\mathcal{O}_X(X)$ an f und dem Ring der regulären Funktionen auf X_f induziert.

Übung 10.5 (**Affine offene Teilmengen affiner Varietäten**). Gegeben eine Varietät X, offene affine Teilmengen $U, V \Subset X$ und ein Punkt $x \in U \cap V$ zeige man: Es gibt stets $s \in \mathcal{O}(U)$ und $t \in \mathcal{O}(V)$ mit $x \in U_s$ und $U_s = V_t$. In dieser Situation ist natürlich auch $U_s = V_t$ affin. Hinweis: 10.4.

Übungen zur Kommutativen Algebra und Einführung in die Algebraische Geometrie

Abgabe bis Dienstag, den 15.7 in der Vorlesung

Übung 11.1 (**Automorphismen der projektiven Gerade**). $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß jeder Isomorphismus $\mathbb{P}^1 k \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 k$ von der Restriktion eines Vektorraumautomorphismus von k^2 auf $k^2 \backslash 0$ induziert wird und daß wir so einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{GL}(2;k)/k^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Var}^\times(\mathbb{P}^1 k)$$

des besagten Quotienten mit der Automorphismengruppe der projektiven Gerade erhalten. Hinweis: Man erinnere die Automorphismen der Gerade k.

Übung 11.2. Gegeben eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge $W \subsetneq \mathbb{P}^n k$ zeige man für die Dimension ihres Kegels die Formel $\mathrm{kdim}\,\mathrm{C}(W) = \mathrm{kdim}\, W + 1$. Hinweis: Lokale Trivialität der Projektion.

Übung 11.3. Das Komplement einer nichtleeren Hyperfläche im projektiven Raum ist stets eine affine Varietät. Ergänzung vom 22.7: Ich denke, das war hier zu schwer. Ich habe die Übung zu 10.4 verlegt, in diesem Abschnitt ist sie nicht mehr schwer.

Übung 11.4. Man bestimme die Schnittpunkte der Abschlüsse in der projektiven Vervollständigung $\mathbb{VC}^2$ der Ebene $\mathbb{C}^2$ der beiden konzentrischen Kreise $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 2$. Man bestimme jeweils die Schnittmultiplizität.

Definition 1. Gegeben eine bepunktete k-Varietät (X, x) mit $\dim_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) = \mathrm{kdim}_x X$ und abgeschlossene Teilmengen $C, D \subsetneq X$ erklären wir die **Vielfachheit von x als Schnittpunkt von C und D** oder kurz **Schnittmultiplizität** als

$$\mathrm{s}_x(C, D) := \dim_k \left(\mathcal{O}_{X,x}/(\mathcal{I}_x(C) + \mathcal{I}_x(D))\right) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$