Übungen zur Vorlesung Lineare Algebraische Gruppen im Wintersemester 2012/13

Übung 1.1. ($k = \bar{k}$). Es sei $k^\times$ die multiplikative Gruppe und k die additive Gruppe. Welche Homomorphismen gibt es von jeder der algebraischen Gruppen k, $k^\times$ zu jeder der algebraischen Gruppen k, $k^\times$?

Übung 1.2. Ich erinnere: Sind N und B Gruppen und $\tau : B \to \mathrm{Grp}^\times N$ ein Gruppenhomomorphismus alias eine Operation von B auf N durch Gruppenautomorphismen, notiert $(\tau(a))(n) = ({}^a n)$, so kann man $N \times B$ mit einer Gruppenstruktur versehen vermittels der Vorschrift $(m, a)(n, b) = (m\ ({}^a n), ab)$ Diese Gruppe heißt das oder genauer ein **semidirektes Produkt** von N mit B und wird auch notiert als $N \rtimes B = N \rtimes_\tau B$. Man zeige: Sind hier B und N algebraische Gruppen und ist $B \times N \to N$, $(a, n) \mapsto ({}^a n)$ ein Morphismus von Varietäten, so ist auch das semidirekte Produkt eine algebraische Gruppe, wenn wir es als Varietät mit der Produktstruktur betrachten.

Übung 1.3. ($k = \bar{k}$). Wir betrachten die algebraische Gruppe SL_2 mit dem Ring von regulären Funktionen $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2) = k[T_1, T_2, T_3, T_4]/\langle T_1T_4 - T_2T_3 - 1\rangle$. Es sei $A \subset \mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)$ die von allen T_iT_j mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ erzeugte Unterringalgebra von $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)$.

(a) Die Struktur einer Hopfalgebra auf $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)$ induziert eine Struktur einer Hopfalgebra auf A. Damit gibt es eine algebraische Gruppe PSL_2 mit der Eigenschaft $\mathcal{O}(\mathrm{PSL}_2) = A$.

(b) Der von der Inklusion $A \subset \mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)$ induzierte Homomorphismus $\phi : \mathrm{SL}_2 \to \mathrm{PSL}_2$ hat den Kern $\ker \phi = \{I, -I\}$.

(c) Im Fall $\mathrm{char}\, k = 2$ ist ϕ ein Isomorphismus von abstrakten Gruppen, aber nicht von algebraischen Gruppen.

Übung 1.4. ($k = \bar{k}$). Jeder endlichdimensionale affine Raum E über k wird eine affine k-Varietät, wenn wir $\mathcal{O}(E) \subset \mathrm{Ens}(E, k)$ erklären als die von allen affinen Abbildungen $E \to k$ erzeugte k-Unterringalgebra.

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebraische Gruppen im Wintersemester 2012/13

Übung 2.1. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und G eine affine algebraische Gruppe über k. Man zeige, daß für $g \in G$ die Rechtsverschiebung $\rho(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ lokal halbeinfach bzw. unipotent ist genau dann, wenn die Linksverschiebung $\lambda(g) : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Übung 2.2. Ist die Menge der halbeinfachen Elemente der $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ offen? Ist die Menge der halbeinfachen Elemente der $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ dicht?

Übung 2.3. Man zeige: Ist V endlichdimensional, so ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine rationale Darstellung genau dann, wenn ρ ein Morphismus von algebraischen Gruppen ist. Im allgemeinen ist $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine rationale Darstellung genau dann, wenn jeder Vektor $v \in V$ in einem endlichdimensionalen G-stabilen Teilraum W liegt, für den $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$ ein Morphismus von algebraischen Gruppen ist.

Übung 2.4. Man zeige: Jede Unterdarstellung einer rationalen Darstellung ist rational. Jede Quotientendarstellung einer rationalen Darstellung ist rational.

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebraische Gruppen im Wintersemester 2012/13

Definition 1. Sei Ω eine Menge. Ein Ω-graduierter Vektorraum ist ein Vektorraum V mitsamt einer Familie von Untervektorräumen $(V_\omega)_{\omega\in\Omega}$ so daß gilt $V = \bigoplus_{w\in\Omega} V_\omega$. Ein Morphismus von Ω-graduierten Vektorräumen V, W ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(V_\omega) \subset W_\omega \quad \forall \omega \in \Omega$.

Definition 2. Gegeben eine Darstellung V einer Gruppe G und ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to k^\times$ in die multiplikative Gruppe des Grundkörpers von V erklärt man den zugehörigen **Gewichtsraum** als

$$V_\chi := \{v \in V \mid gv = \chi(g)v \ \forall g \in G\}$$

Satz 1 (**Darstellungen von diagonalisierbaren Gruppen**). Gegeben eine diagonalisierbare affine algebraische Gruppe G mit Charaktergitter $\mathfrak{X}(G)$ liefert das Zerlegen in Gewichtsräume eine Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{rationale Darstellungen} \\ \text{der Gruppe } G \end{array} \right\} & \stackrel{\approx}{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{X}(G)\text{-graduierte} \\ k\text{-Vektorräume} \end{array} \right\} \\ (G \looparrowright V) & \mapsto & V = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} V_\chi \end{array}$$

Übung 3.1. Geben Sie einen Beweis.

Übung 3.2 (**Transitivität finaler Familien**). Seien $g_{ij} : Z_{ij} \to Y_i$ und $f_i : Y_i \to X$ Familien von k-geringten Räumen und Morphismen. Man zeige: Tragen die Y_i die finalen Strukturen für die g_{ij} und trägt X die finale Struktur für die f_i, so trägt X auch die finale Struktur für die $f_i g_{ij}$. Trägt andererseits X die finale Struktur bezüglich der $f_i g_{ij}$, so trägt X auch die finale Struktur bezüglich der f_i. Hinweis: Es gilt mit der universellen Eigenschaft zu argumentieren.

Übung 3.3. Man folgere aus der vorhergehenden Übung, daß die Verknüpfung von zwei finalen Morphismen stets final ist, und daß die Verknüpfung $f \circ g$ von zwei Morphismen nur dann final sein kann, wenn f final ist. Insbesondere ist jeder Morphismus final, der ein Rechtsinverses alias einen **Schnitt** besitzt, d.h. für den es einen Morphismus s gibt mit $f \circ s = \mathrm{id}$.

Bemerkung 1. Analog geht es mit initialen Strukturen.

Übung 3.4 (**Finalität ist lokal in der Basis**). Ist ein Morphismus von k-geringten Räumen $f : Y \to X$ final, so ist auch für jede offene Teilmenge $U \Subset X$ die induzierte Abbildung $f^{-1}(U) \to U$ final für die induzierten Strukturen. Ist umgekehrt $f : Y \to X$ ein Morphismus von k-geringten Räumen und besitzt X eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ derart, daß $f : f^{-1}(U) \to U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ final ist, so ist unser Morphismus bereits selbst final.

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebraische Gruppen im Wintersemester 2012/13

Übung 4.1. Man zeige, daß die Gruppe $\mathrm{SL}(n;k)$ stets irreduzibel ist. Man zeige, daß ihr Verschwindungsideal von $\det -1$ erzeugt wird.

Übung 4.2. Man zeige: Gegeben Prävarietäten X, Y mit Y nicht leer zeige man, daß die Projektion $X \times Y \to X$ offen und final ist.

Übung 4.3. Man zeige: Operiert eine algebraische Gruppe auf einer Varietät, so ist jede Bahn offen in ihrem Abschluß.

Übung 4.4. $(k = \bar{k})$. Seien $m, n \geq 1$. Man zeige, daß die von der Abbildung $k^n \times k^m \to k^{mn}$ gegeben durch $(x_i, y_j) \mapsto (x_i y_j)$ induzierte Abbildung

$$\mathbb{P}^{n-1}k \times \mathbb{P}^{m-1}k \to \mathbb{P}^{nm-1}k$$

eine abgeschlossene Immersion ist. Sie heißt die **Segre-Einbettung**. Man folgere, daß das Produkt von zwei projektiven Varietäten wieder eine projektive Varietät ist. Hinweis: Das Bild in k^{mn} ist die Nullstellenmenge der Gleichungen $z_{ij} z_{kl} = z_{il} z_{kj}$. Dann rechne man in Koordinaten.

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebraische Gruppen im Wintersemester 2012/13

Übung 5.1. Man zeige, daß ein Morphismus von Varietäten $X \to Y$ mit $\dim X > \dim Y$ mindestens eine unendliche Faser haben muß.

Übung 5.2. Man betrachte die Operation durch Konjugation von $\mathrm{GL}(n;k)$ auf $\mathrm{Mat}(n \times n;k)$ und zeige, daß die abgeschlossenen Bahnen genau die Bahnen der diagonalisierbaren Matrizen sind. Man bestimme die Dimensionen aller Bahnen in diesem Fall.

Übung 5.3. Man betrachte die Operation durch Konjugation von $\mathrm{GL}(n;k)$ auf $\mathrm{Mat}(n \times n;k)$. Man bestimme, wann eine Bahn im Abschluß einer anderen liegt.

Übung 5.4. Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus von Prävarietäten und ist $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von Y derart, daß die induzierten Morphismen $\varphi^{-1}(V) \to V$ für alle $V \in \mathcal{V}$ stabil offenfinal sind, so ist auch φ selbst stabil offenfinal. Insbesondere zeige man, daß die Projektion $V \backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}V$ für jeden endlichdimensionalen k-Vektorraum V stabil offenfinal ist.

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebraische Gruppen im Wintersemester 2012/13

Übung 6.1. Sei k ein Kring, A ein k-Kring und $S \subset A$ eine Teilmenge und M ein Modul über der Lokalisierung $S^{-1}A$. Man zeige, daß die Einschränkung eine Bijektion

$$\mathrm{Der}_k(S^{-1}A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_k(A, M)$$

liefert und führe insbesondere die im Skript fehlenden Beweisschritte aus.

Bemerkung 2. Ist k ein Körper, so gibt es insbesondere genau eine Möglichkeit, unsere formale Ableitung $\partial : k[T] \to k[T]$ aus der Algebra so zu einer formalen Ableitung $\partial : k(T) \to k(T)$ fortzusetzen, daß die Summenregel und die Produktregel weiter gelten. Diese formale Ableitung notieren wir wieder $f \mapsto f'$.

Übung 6.2. Man formuliere und zeige, in welcher Weise auch das Differential eines Morphismus $k^n \to k^m$ durch die Jacobi-Matrix beschrieben wird.

Übung 6.3. Man zeige, daß Differential einer bilinearen Abbildung $b : V \times W \to E$ bei $p = (x, y)$ unter den üblichen Idenifikationen die lineare Abbildung $\mathrm{d}_p b : (v, w) \mapsto b(x, w) + b(v, y)$ ist.

Übung 6.4. Man zeige, daß für $Y \subset\!\!\!\!\!\!\triangle\; X$ eine abgeschlossene Teilmenge einer affinen Varietät und $f_1, \ldots, f_r$ Erzeuger ihres Verschwindungsideals der Tangentialraum $\mathrm{T}_y Y \subset \mathrm{T}_y X$ beschrieben werden kann als der Schnitt der Kerne der Differentiale $\mathrm{d}_y f_i$.

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebraische Gruppen im Wintersemester 2012/13

Übung 7.1. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß in $\mathrm{GL}(n; k)$ nur die halbeinfachen Elemente eine abgeschlossene Konjugationsklasse haben. Man gebe eine Formel für die Dimensionen dieser Konjugationsklassen.

Übung 7.2. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß die Diagonalmatrizen in der $\mathrm{GL}(n; k)$ einen maximalen Torus bilden, und daß jeder maximale Torus zu diesem konjugiert ist. Man zeige dasselbe in der Gruppe $\mathrm{SL}(n; k)$.

Übung 7.3. $(k = \bar{k})$. Man zeige, daß in der Gruppe $\mathrm{GL}(n; k)$ jede aus halbeinfachen Elementen bestehende kommutative Teilmenge in einem maximalen Torus enthalten ist. Man zeige, daß das für den Fall einer von Zwei verschiedenen Charakteristik im Quotienten $\mathrm{GL}(2; k)/\{\pm \mathrm{id}\}$ nicht mehr richtig ist.

Übung 7.4. Man zeige: Der Zentralisator eines maximalen Torus in einer zusammenhängenden auflösbaren affinen algebraischen Gruppe ist stets nilpotent.

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebraische Gruppen im Wintersemester 2012/13

Übung 8.1. Sei G eine zusammenhängende auflösbare affine algebraische Gruppe und $T \overset{\mathrm{A}}{\subset} G$ ein Torus. Man zeige: Es gibt eine abgeschlossene Einbettung von G in die oberen Dreiecksmatrizen, unter der alle Elemente unseres Torus auf Diagonalmatrizen gehen. Ist hier T sogar ein maximaler Torus, so muß er der Schnitt von G mit der Gruppe der Diagonalmatrizen sein.

Übung 8.2. Eine nichtleere echte offene Teilmenge einer irreduziblen Varietät kann nie vollständig sein. Eine Varietät, die durch endlich viele vollständige Untervarietäten überdeckt werden kann, ist vollständig.

Übung 8.3. Sei G eine algebraische Gruppe. So gibt es unter den vollständigen zusammenhängenden abgeschlossenen Untergruppen von G eine Größte, und die liegt im Zentrum von G.

Übung 8.4. Seien $Q \overset{\mathrm{A}}{\subset} P \overset{\mathrm{A}}{\subset} G$ abgeschlossene Untergruppen einer affinen algebraischen Gruppe und sei Q parabolisch in P. Man zeige: Ist $Y \overset{\mathrm{A}}{\subset} G$ eine abgeschlossene Q-stabile Teilmenge, so ist auch PY abgeschlossen in G. Hinweis: Das gilt sogar, wenn man G durch eine beliebige P-Varietät ersetzt.

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebraische Gruppen im Wintersemester 2012/13

Übung 9.1. Gegeben eine affine algebraische Gruppe ist jeder maximale Torus einer Borel'schen bereits ein maximaler Torus der ganzen Gruppe.

Übung 9.2. Man zeige, daß ein halbeinfaches Element aus dem Zentrum einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe in jedem maximalen Torus liegt.

Übung 9.3. Man zeige: Der Normalisator des maximalen Torus T aller Diagonalmatrizen in der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n;k)$ besteht genau aus allen Matrizen, die die simultanen Eigenräume $k\,\mathrm{e}_\nu$ unserer Diagonalmatrizen permutieren, als da heißt aus allen Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen von Null verschiedenen Eintrag haben.

Übung 9.4. Gegeben eine rationale Darstellung V einer affinen algebraischen Gruppe und ein Torus $T \subset G$ stabilisiert $\mathrm{N}_G(T)$ die Menge $P(V) := \{\chi \in \mathfrak{X}(T) \mid V_\chi \neq 0\}$ der Gewichte von V. Hier meint $V_\chi := \{v \in V \mid tv = \chi(t)v \forall t \in T\}$ den simultanen Eigenraum zu χ, den sogenannten "Gewichtsraum".