

# Übungsblätter zu Liegruppen bei Soergel im SS 2026

Allgemeine Hinweise:

- Bei der Bearbeitung der Übungen und später der Klausuraufgaben ist keine übertriebene Ausführlichkeit gefordert. Einfach zu schreiben, es sei klar, reicht nicht, aber eine schlüssige Kette von richtigen Argumenten in der nächsten Stufe der Ausführlichkeit reicht aus. Allerdings soll die Argumentationskette auch für Sie selbst schlüssig sein. Sie müssen sie im Tutorat erklären können und in der Lage sein, auf Nachfragen Schritte Ihrer Argumentation genauer auszuführen. In der Vorlesung bewiesene Aussagen müssen dabei aber keinesfalls nochmals bewiesen werden, da reicht ein Zitat.
- Es gibt jede Woche vier Aufgaben und für jede Aufgabe gibt es vier Punkte, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben durchaus sehr unterschiedlich sein wird. Ergänzende Übungen sind meist schwieriger, sind für die Klausur nicht relevant und geben bis zu vier Bonuspunkte.
- Die Übungen werden Mittwochs ausgegeben und müssen die Woche danach am Mittwoch vor der Vorlesung abgegeben werden. Sie seien ermutigt, die Aufgaben mit Ihren Kommilitonen zu besprechen und zu zweit abzugeben. Mehr als zwei Namen auf einem Zettel gilt aber nicht.
- Die Übungen werden auf den folgenden Seiten dieses Textes ins Netz gestellt, der jede Woche um das Übungsblatt der jeweiligen Woche ergänzt werden wird.

## Anwesenheitsaufgaben zweite Vorlesungswoche

*Übung 0.1.* Bestimmen Sie das Differential des Invertierens von Matrizen an einer Matrix  $P \in GL(V)$ , also die linearen Abbildungen  $T_P \text{inv} : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$ .

*Übung 0.2.* Bestimmen Sie die stetigen Gruppenhomomorphismen  $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (V, +)$  für  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Bestimmen Sie die stetigen Gruppenhomomorphismen  $(S^1)^n \rightarrow (S^1)^m$ . Bestimmen Sie die stetigen Gruppenhomomorphismen  $GL(V) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ .

*Übung 0.3.* Ich erinnere an das Kreuzprodukt auf einem dreidimensionalen orientierten reellen Skalarproduktraum. Gegeben ein dreidimensionaler Skalarproduktraum  $V$  liefert mit dieser Begriffsbildung die Wahl einer Orientierung einen Vektorraumisomorphismus

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\sim} T_e O(V) \\ \vec{v} &\mapsto (\vec{v} \times) \end{aligned}$$

Der Automorphismus  $\exp(\vec{v} \times)$  bedeutet geometrisch eine Drehung um die Achse  $\mathbb{R}\vec{v}$  mit Winkel  $\|\vec{v}\|$  im Bogenmaß. Ist genauer  $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  eine orientierte Orthonormalbasis von  $V$ , so zeige man für die Matrix  $\exp(t\vec{v}_1 \times)$  in dieser Basis die Formel

$${}_{\mathcal{B}} [\exp(t\vec{v}_1 \times)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

*Übung 0.4 (Einstangententialraum an  $U(n)$ ).* Der Einstangententialraum der Gruppe  $U(n) = \{A \in GL(n; \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^T = I\}$  der unitären Matrizen ist der Raum der schiefhermiteschen Matrizen

$$T_I U(n) = \{X \in \text{Mat}(n; \mathbb{C}) \mid X + \bar{X}^T = 0\}$$

*Übung 0.5 (Beispiel für eine bijektive Exponentialabbildung).* Man zeige, daß die Exponentialabbildung im Fall der Gruppe aller reellen invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen ein Diffeomorphismus ist. Hinweis: Jordan-Zerlegung.

# Übungen Liegruppen

Abgabe bis Mittwoch, den 29.4 um 8:25

*Übung 1.1.* Man bestimme Einstangentialraum und Dimension der symplektischen Gruppen aller  $g \in \text{Mat}(2n; \mathbb{R})$  mit  $gJg^\top = J$  für  $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$  mit  $I$  der  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

*Übung 1.2.* Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum  $V$  und ein Vektor  $v \in V$  hat die Matrixliegruppe  $G := \{g \in \text{Aut } V \mid gv = v\}$  den Einstangentialraum  $T_e G = \{x \in \text{End } V \mid xv = 0\}$ . Des weiteren hat die Matrixliegruppe  $G := \{g \in \text{Aut } V \mid gv \in \mathbb{R}v\}$  den Einstangentialraum  $T_e G = \{x \in \text{End } V \mid xv \in \mathbb{R}v\}$ .

*Übung 1.3.* Man zeige, daß das Zentrum der orthogonalen Gruppe  $O(n)$  aus der Einheitsmatrix und ihrem Negativen besteht, in Formeln  $Z(O(n)) = \{\pm I\}$ . Hinweis: Kommutieren mit  $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  bedeutet, die Gerade  $\mathbb{R}e_1$  zu stabilisieren. Man zeige, daß für das Zentrum der speziellen orthogonalen Gruppe  $SO(n)$  gilt  $Z(SO(n)) = \{I\}$  für  $n$  ungerade,  $Z(SO(n)) = \{\pm I\}$  für  $n \geq 4$  gerade und  $Z(SO(2)) = SO(2)$ .

*Übung 1.4 (Beispiel für eine nicht surjektive Exponentialabbildung).* Ist  $x = x_s + x_n$  die additive Jordanzerlegung einer Matrix  $x \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$  oder  $x \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ , so ist  $\exp x = (\exp x_s)(\exp x_n)$  die multiplikative Jordanzerlegung von  $\exp x$ . Man folgere, daß der  $(2 \times 2)$ -Jordanblock zum Eigenwert  $-1$  nicht zum Bild von  $\exp : \text{Mat}(2; \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(2; \mathbb{R})$  gehören kann, obwohl er durchaus zur Zusammenhangskomponente der Einheitsmatrix gehört.

# Übungen Liegruppen

Abgabe bis Mittwoch, den 6.5 um 8:25

*Übung 2.1.* Man zeige, daß jeder nicht konstante stetige Gruppenhomomorphismus  $SO(3) \rightarrow SO(3)$  von der Gestalt  $(\text{int } g)$  ist für genau ein  $g \in SO(3)$ . Hinweis: Man erinnere sich, daß die Liealgebra von  $SO(3)$  identifiziert werden kann mit dem  $\mathbb{R}^3$  mit Kreuzprodukt, und diskutiere, welche linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit dem Kreuzprodukt verträglich sind.

*Übung 2.2.* Man zeige, daß für  $n \in \mathbb{Z}$  das Differential beim neutralen Element des Potenzierens auf der Kreislinie  $S^1 \rightarrow S^1$ ,  $z \mapsto z^n$  die Multiplikation mit  $n$  auf dem Tangentialraum ist.

*Übung 2.3 (Liealgebra eines Kerns).* Gegeben ein glatter Homomorphismus von Matrixliegruppen  $\varphi : G \rightarrow H$  zeige man mit ?? die Formel  $\text{Lie}(\ker \varphi) = \ker(T_e \varphi)$  und allgemeiner für  $K \subset H$  eine abgeschlossene Untergruppe

$$\text{Lie}(\varphi^{-1}(K)) = \{x \in \text{Lie } G \mid (T_e \varphi)(x) \in \text{Lie } K\}$$

Daraus folgt im Übrigen mit [?] ?? auch sofort die in ?? bereits elementar gezeigte Beziehung  $\text{Lie}(\text{SL}(n; \mathbb{R})) = \mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$ . Mit ?? wird dasselbe auch allgemeiner für abstrakte Liegruppen folgen.

*Übung 2.4.* Ist  $A$  eine endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Algebra und  $G := \text{Alg}_{\mathbb{R}}^{\times}(A) \subset \text{GL}(A)$  ihre Automorphismengruppe, so besteht  $\text{Lie } G \subset \text{End}(A)$  genau aus allen **Derivationen von  $A$** , als da heißt, aus allen  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen  $d : A \rightarrow A$  mit der Eigenschaft  $d(ab) = (da)b + a(db)$  für alle  $a, b \in A$ . Wir bezeichnen diesen Raum mit  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$  und haben also in Formeln

$$\text{Lie}(\text{Alg}_{\mathbb{R}}^{\times}(A)) = \text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$$

Man zeige auch, daß für eine endlichdimensionale  $\mathbb{C}$ -Algebra analog gilt

$$\text{Lie}(\text{Alg}_{\mathbb{C}}^{\times}(A)) = \text{Der}_{\mathbb{C}}(A)$$

# Übungen Liegruppen

Abgabe bis Mittwoch, den 13.5 um 8:25

*Übung 3.1.* Gegeben zwei Darstellungen  $(V, \rho)$  und  $(W, \sigma)$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  wird der Raum  $\text{Hom}_k(V, W)$  aller  $k$ -linearen Homomorphismen zu einer Darstellung mittels der Vorschrift, daß für  $f : V \rightarrow W$  linear und  $g \in G$  der Morphismus  $gf$  gegeben sein soll durch  $gf = \sigma(g) \circ f \circ \rho(g)^{-1}$  alias

$$(gf)(v) = g(f(g^{-1}v)) \quad \forall v \in V$$

Wir nennen diese Operation auf dem Raum aller Homomorphismen die **Operation durch Konjugation**. Man zeige: Gegeben zwei stetige endlichdimensionale Darstellungen  $V, W$  einer Liegruppe  $G$  ist auch die Operation durch Konjugation von  $G$  auf  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$  stetig, und die abgeleitete Operation der Liealgebra wird für  $x \in \text{Lie } G$  und  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$  dadurch gegeben, daß für alle  $v \in V$  gilt

$$(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv)$$

*Übung 3.2.* Gegeben eine Darstellung  $(V, \rho)$  einer Gruppe  $G$  über einem Körper  $k$  werden ihre äußeren Potenzen  $\wedge^i V$  zu Darstellungen in der offensichtlichen Weise. Gegeben eine stetige endlichdimensionale Darstellungen  $V$  einer Liegruppe  $G$  sind auch ihre äußeren Potenzen stetig. Man beschreibe die abgeleitete Operation der Liealgebra.

*Übung 3.3.* Wir haben in [?] ?? gesehen, daß jeder Automorphismus des Körpers  $\mathbb{R}$  die Identität ist, und in [?] ??, daß jeder stetige Automorphismus des Körpers  $\mathbb{C}$  die Identität oder die komplexe Konjugation ist. Man zeige nun, daß jeder stetige Automorphismus des Schiefkörpers  $\mathbb{H}$  durch die Konjugation mit einem invertierbaren Körperelement gegeben wird, und konstruiere eine Identifikation besagter Automorphismengruppe mit der  $SO(3)$ .

*Übung 3.4.* Die Operation der Quaternionen der Länge Eins auf dem Quaternionenraum durch Rechts- und Linksmultiplikation liefert eine Surjektion

$$S^3 \times S^3 \twoheadrightarrow SO(\mathbb{H}) \cong SO(4)$$

gegeben in Formeln durch  $(q, w) \mapsto (x \mapsto (qx\bar{w}))$  mit zweielementigem Kern  $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ . Das Skalarprodukt auf  $\mathbb{H}$  ist dabei  $\langle x, y \rangle := \text{Re}(\bar{x}y)$ .

## Werbung für eine Studierenden-Umfrage

# Befragung der Studierenden 2026

Liebe Studierende,

ihr seid herzlich eingeladen, an der **Befragung der Studierenden 2026** teilzunehmen!

### Wie?

Ihr habt einen personalisierten Link bekommen: Checkt eure Mails oder schaut auf eurer Ilias-Startseite unter „Meine Online-Evaluationen“.

### Wann?

Jetzt – im Mai und Juni 2026!

### Warum?

Ihr helft dabei, die Studienqualität eurer Fachbereiche weiterzuentwickeln!

Zudem warten **tolle Preise** auf euch, unter anderem Gutscheine fürs Thermalbad, Pizza, Brettspiele uvm.



[universität freiburg](#)

Befragung der Studierenden 2026 | [ufr.link/befragungen](https://ufr.link/befragungen)

# Übungen Liegruppen

Abgabe bis Mittwoch, den 20.5 um 8:25

*Übung 4.1.* Man zeige, daß die Spingruppe keine reelle stetige irreduzible Darstellung der Dimension Zwei besitzt. Ein Ansatz: Man zeige zunächst, daß jede kompakte zusammenhängende Untergruppe von  $GL(\mathbb{R}; n)$  in  $SL(\mathbb{R}; n)$  enthalten sein muß, und argumentiere dann mit der Dimension.

*Übung 4.2.* Man betrachte die Darstellung von  $GL(n; \mathbb{R})$  auf dem reellen Vektorraum  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]^{(d)}$  der homogenen Polynome vom Grad  $d$  durch

$$(gP)(x) = P(g^{-1}x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, g \in GL(n; \mathbb{R})$$

und zeige, daß sie einfach ist.

*Übung 4.3.* Man zeige: Es gibt eine linksinvariante Differentialform  $\omega$  auf  $SL(2; \mathbb{R})$ , deren Restriktion auf die offene Teilmenge  $U$  aller Matrizen  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  mit Determinante Eins und  $x \neq 0$  gegeben wird durch die Formel  $\omega|_U = \frac{1}{x} dx \wedge dy \wedge dz$ .

*Übung 4.4.* Man zeige:  $U(n) \subset GL(n; \mathbb{C})$  ist eine maximale kompakte Untergruppe und gegeben eine beliebige kompakte Untergruppe  $K \subset GL(n; \mathbb{C})$  gibt es stets  $g \in GL(n; \mathbb{C})$  mit  $gKg^{-1} \subset U(n)$ . Man zeige auch die analoge Aussage im Fall  $O(n) \subset GL(n; \mathbb{R})$ .

# Übungen Liegruppen

Abgabe bis Mittwoch, den 3.6 um 8:25

*Übung 5.1.* Man zeige, daß in einer endlichdimensionalen Darstellung einer kompakten Liegruppe jedes Element der Liealgebra als diagonalisierbare Matrix mit rein imaginären Eigenwerten operiert.

*Übung 5.2.* Man zeige, daß  $SL(2; \mathbb{R})$  auf jeder endlichdimensionalen unitären Darstellung trivial operiert.

*Übung 5.3.* Man folgere aus den Transitivitätseigenschaften: Die Verknüpfung von zwei finalen Morphismen ist stets final. Ist die Verknüpfung  $\varphi \circ \psi$  von zwei Morphismen final, so ist  $\varphi$  final. Insbesondere ist jeder Morphismus final, der ein Rechtsinverses alias einen **Schnitt** besitzt, für den es also einen Morphismus  $s$  gibt mit  $fs = \text{id}$ .

*Übung 5.4 (Finalität ist lokal in der Basis).* Ist ein Morphismus von  $k$ -geringten Räumen  $\varphi : X \rightarrow Y$  final, so ist auch für jede offene Teilmenge  $V \subseteq Y$  die induzierte Abbildung  $\varphi^{-1}(V) \rightarrow V$  final für die induzierten Strukturen. Ist umgekehrt  $\varphi : X \rightarrow Y$  ein Morphismus von  $k$ -geringten Räumen und besitzt  $Y$  eine offene Überdeckung  $\mathcal{V}$  derart, daß  $\varphi : \varphi^{-1}(V) \rightarrow V$  für alle  $V \in \mathcal{V}$  final ist, so ist unser Morphismus bereits selbst final.

# Übungen Liegruppen

Abgabe bis Mittwoch, den 10.6 um 8:25

*Übung 6.1.* Sei  $(T, t)$  ein normierter Tangentialraumfunktork und  $f : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion und  $a \in I$ . Man zeige  $(T_a f)(t_a) = f'(a) t_{f(a)}$ .

*Übung 6.2.* Sei  $(T, t)$  ein normierter Tangentialraumfunktork. Gegeben ein endlich-dimensionaler reeller affiner Raum  $E$  und eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset E$  mit Einbettung  $j : M \hookrightarrow E$  und ein Punkt  $p \in M$  zeige man: Es gibt es genau einen Isomorphismus  $T_p^c M \xrightarrow{\sim} T_p M$  zwischen dem eingebetteten Tangentialraum und dem abstrakten Tangentialraum, für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \vec{E} & \xrightarrow{t_E} & T_p E \\ \uparrow & & \uparrow T_p j \\ T_p^c M & \xrightarrow{\sim} & T_p M \end{array}$$

kommutiert mit der Inklusionsabbildung in der linken Vertikale.

*Übung 6.3 (Kriterium für Atlanten).* Gegeben eine Menge  $X$  ist eine vorgegebene Familie  $(W_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  mit  $W_\lambda \subset \mathbb{R}^n$  und  $\varphi_\lambda : W_\lambda \hookrightarrow X$  jeweils einer Injektion ein Atlas für die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit auf  $X$  genau dann, wenn (1) die Finaltopologie auf  $X$  in Bezug auf die  $\varphi_\lambda$  Hausdorff ist, wenn (2) für alle  $\lambda, \mu \in \Lambda$  die Mengen  $W_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda^{-1}(\varphi_\mu(W_\mu))$  offen sind in  $W_\lambda$  und wenn (3) die **Kartenwechsel**

$$\varphi_{\mu\lambda} : W_{\lambda\mu} \rightarrow W_{\mu\lambda}$$

Morphismen von durch ihre  $C^\infty$ -Funktionen geringten Räumen sind. Wegen  $\varphi_{\lambda\mu} \circ \varphi_{\mu\lambda} = \text{id}$  sind sie dann sogar Isomorphismen.

*Übung 6.4.* Man zeige: Die Quotientengruppe  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  wird mit der finalen Struktur zur kanonischen Projektion von  $\mathbb{R}^n$  eine Liegruppe, die isomorph ist zu  $(S^1)^n$ .

# Übungen Liegruppen

Abgabe bis Mittwoch, den 17.6 um 8:25

*Übung 7.1 (Tangentialbündel eines Produkts).* Gegeben glatte Mannigfaltigkeiten  $X, Y$  liefern die Differentiale der Projektionen des Produkts  $X \times Y$  auf die Faktoren einen Diffeomorphismus  $T(X \times Y) \xrightarrow{\sim} TX \times TY$ .

*Übung 7.2 (Tangentialbündel von Untermannigfaltigkeiten).* Man zeige: Gegeben eine Einbettung von Mannigfaltigkeiten  $\varphi : X \hookrightarrow Y$  ist auch  $T\varphi : TX \rightarrow TY$  eine Einbettung.

*Übung 7.3.* Für welche Funktionen  $f(x, y)$  und  $g(x, y)$  ist  $f\partial_x + g\partial_y$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf  $\mathbb{C}^\times$ , wo  $x$  den Realteil und  $y$  den Imaginärteil einer komplexen Zahl bedeuten mögen?

*Übung 7.4.* Für welche Funktionen  $f(a, b)$  und  $g(a, b)$  ist  $f\partial_a + g\partial_b$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit zwei Zeilen und Spalten und Determinante Eins, wo  $a$  und  $b$  die beiden Einträge der ersten Zeile bedeuten mögen?