ALGEBRA UND ZAHLENTHEORIE

Wolfgang Soergel

7. Februar 2025

Inhaltsverzeichnis

Die Abschnitte bis zur Galois-Theorie einschließlich sollten in etwa den Standardstoff einer Algebra-Vorlesung für das dritte Semester abdecken. Ich habe mich bei der Entwicklung der Theorie besonders darum bemüht, die Verwendung des Zorn'schen Lemmas zu vermeiden. Mein Ziel war es, dem falschen Eindruck entgegenzuwirken, unsere Sätze über die Auflösbarkeit von polynomialen Gleichungen oder die Bestimmung quadratischer Reste oder die Konstruierbarkeit regelmäßiger Vielecke basierten auf Subtilitäten der Mengenlehre. Insbesondere wird der algebraische Abschluß in den Beweisen nicht verwendet und der Begriff eines maximalen Ideals spielt nur eine Nebenrolle. Ich bedanke mich bei vielen Freiburger Studierenden für Hinweise, die mir geholfen haben, die Darstellung zu klären und zu glätten und Fehler zu beheben.

1 Mehr zu Gruppen

1.1 Die Frage nach der Klassifikation

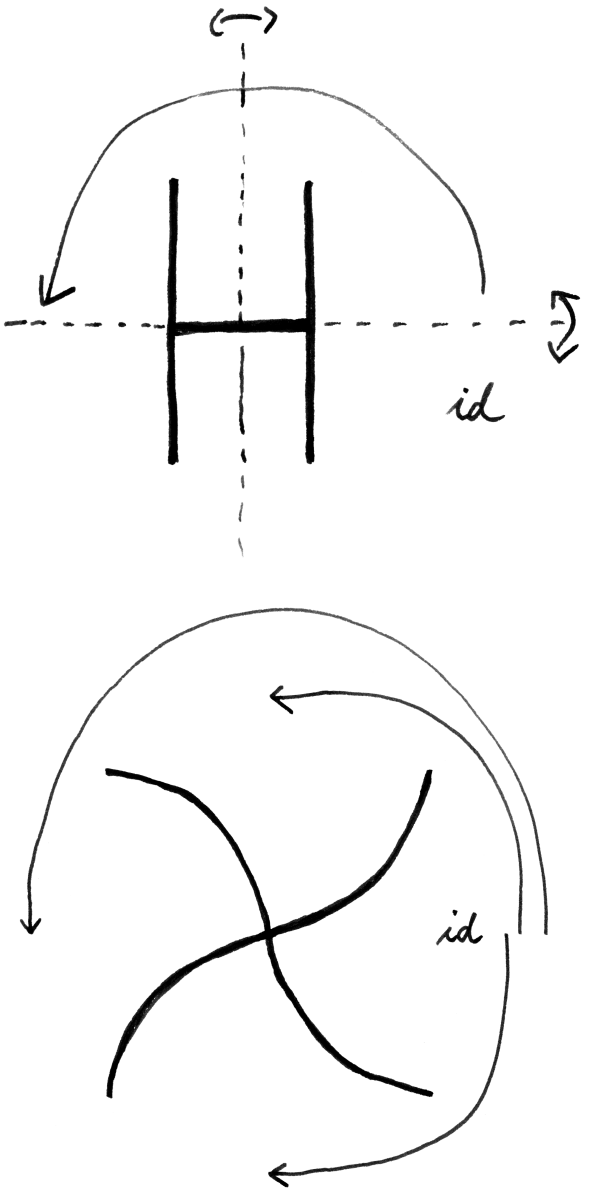
1.1.1. Ich erinnere an die Definition [GR] 2.2.2.2. Eine **Gruppe** ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto ab$ derart, daß für alle $a,b,c \in G$ gilt $(ab)c = a(bc)$, daß es ein Element $1 \in G$ gibt mit $1a = a1 = a\ \forall a \in G$, und daß es für alle $a,b \in G$ ein Element $c \in G$ gibt mit $ac = b$. Gegeben eine weitere Gruppe H ist ein **Gruppenhomomorphismus** $\varphi : G \to H$ eine Abbildung von G nach H mit $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a,b \in G$. Die Menge aller Gruppenhomomorphismen von G nach H notiere ich $\mathrm{Grp}(G,H)$.

1.1.2. Wir wollen im folgenden der Frage nachgehen, welche endlichen Gruppen „es überhaupt gibt“. Wir nennen zwei Gruppen **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus als da heißt einen bijektiven Homomorphismus gibt. Die Frage, welche endlichen Gruppen es überhaupt gibt, können wir dann konkret fassen als die folgende Aufgabe: Man gebe eine Liste von endlichen Gruppen an derart, daß jede beliebige endliche Gruppe isomorph ist zu genau einer Gruppe dieser Liste. In mathematischer Terminologie ist das die Frage nach der **Klassifikation der endlichen Gruppen**.

Beispiel 1.1.3. Für Gruppen mit höchstens 4 Elementen können wir diese Aufgabe noch ohne alle Theorie auf direktem Wege lösen. Eine endliche Menge mit Verknüpfung beschreiben wir dazu durch ihre Verknüpfungstabelle, die im Fall einer Gruppe auch **Gruppentafel** heißt. Zum Beispiel bilden die dritten Einheitswurzeln 1, $\zeta = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,/3)$ und $\eta = \exp(4\pi\,\mathrm{i}\,/3)$ in $\mathbb{C}$ unter der Multiplikation eine Gruppe mit der Gruppentafel

	1	ζ	η
1	1	ζ	η
ζ	ζ	η	1
η	η	1	ζ

Bei einer Gruppentafel muß nach der Kürzungsregel [GR] 2.2.2.17 in jeder Spalte und in jeder Zeile jedes Element genau einmal vorkommen. Man sieht so recht leicht, daß es bis auf Isomorphismus nur eine Gruppe G gibt mit $|G|$ Elementen für $|G| = 1,2,3$. Man sieht so auch, daß es für $|G| = 4$ bis auf Isomorphismus genau zwei Möglichkeiten gibt, die sich dadurch unterscheiden, ob jedes Element sein eigenes Inverses ist oder nicht: Je nachdem haben wir, bis auf Isomorphismus, die sogenannte **Klein'sche Vierergruppe** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vor uns.



Die vier Symmetrien des Buchstabens H und des Sonnenrads, das wohl nicht zuletzt auch wegen seiner Symmetriegruppe so unvermittelt an furchtbare Zeiten der deutschen Geschichte erinnert.

1.1.4. Warum interessieren wir uns überhaupt für Gruppen? Stellen wir uns doch einmal eine ebene Figur vor, zum Beispiel eine stilisierte Blüte, einen Buchstaben, oder allgemein eine beliebige Teilmenge der Ebene $A \subset \mathbb{R}^2$. Unter einer „Symmetriebewegung“ oder kurz **Symmetrie** unserer Figur verstehen wir eine abstandserhaltende Selbstabbildung g der Ebene, die unsere Figur in sich selber überführt, in Formeln $gA = A$. Alle Symmetrien unserer Figur bilden unter der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe, die **Symmetriegruppe** der Figur. Bei den meisten Figuren besteht die Symmetriegruppe nur aus einem Element, der Identität, aber ein Herz hat schon zwei Symmetrien, die Identität und eine Spiegelung. Der Buchstabe H hat sogar 4 Symmetrien, ebensoviele wie das Sonnenrad, aber die Symmetriegruppen dieser beiden Figuren sind nicht isomorph. In diesem Sinne kann man das Konzept einer Gruppe interpretieren als eine Formalisierung der Idee eines „abstrakten Symmetrietyps“.

1.2 Kompositionsreihen

1.2.1. Ich erinnere an Restklassen [LA2] 6.1, Normalteiler [LA2] 6.2, Gruppenwirkungen [LA2] 7.1.1, Bahnformel [LA2] 7.2 und Konjugationsklassen [LA2] 7.3.

Definition 1.2.2. Eine Gruppe heißt **einfach**, wenn sie nicht nur aus dem neutralen Element besteht, aber außer dem neutralen Element und der ganzen Gruppe keine weiteren Normalteiler hat.

Beispiele 1.2.3. Beispiele einfacher Gruppen sind die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung und die sogenannten **alternierenden Gruppen**

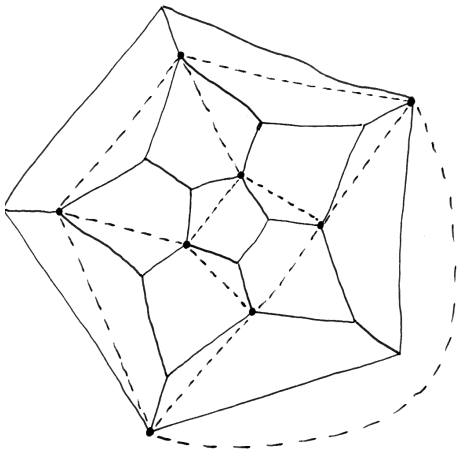
$$A_r := \ker(\operatorname{sgn} : \mathcal{S}_r \to \{\pm 1\})$$

aller geraden Permutationen von r Objekten unter der Annahme $r \geq 5$, wie wir als Satz 1.6.2 zeigen werden. Nicht zeigen werden wir, daß die alternierende Gruppe A_5 die kleinste nichtabelsche einfache Gruppe ist. Diese Gruppe ist übrigends genau unsere Ikosaedergruppe aus [LA2] 7.4.2 aller Drehsymmetrien eines Ikosaeders, was wir im anschließenden Satz 1.2.5 zeigen.

Ergänzung 1.2.4. Alle endlichen einfachen Gruppen sind seit etwa 1980 bekannt, ihre Klassifikation ist jedoch schwierig und man kann nur hoffen, daß zukünftige Forschungen noch substantielle Vereinfachungen der Argumente erlauben. Eine wesentliche Zutat ist ein berühmter Satz von **Feit-Thompson**, nach dem jede endliche einfache nicht abelsche Gruppe eine gerade Ordnung haben muß.

Satz 1.2.5. *Die Ikosaedergruppe ist einfach und isomorph zur alternierenden Gruppe A_5.*

Beweis. Ein Ikosaeder hat 12 Ecken, 20 Flächen und 30 Kanten. Jedes Paar von gegenüberliegenden Ecken liefert vier Elemente der Ordnung 5 in I, macht 24 Elemente der Ordnung 5. Jedes Paar von gegenüberliegenden Flächen liefert zwei Elemente der Ordnung 3 in I, macht 20 Elemente der Ordnung 3. Jedes Paar von gegenüberliegenden Kanten liefert ein Element der Ordnung 2 in I, macht 15 Elemente der Ordnung 2. Zusammen mit dem neutralen Element haben wir damit alle Gruppenelemente aufgelistet, denn es gilt



Einer der fünf eingeschriebenen Würfel eines Dodekaeders, mit gestrichelt eingezeichneten Kanten.

$$60 = 1 + 15 + 20 + 24$$

Da je zwei Kanten des Ikosaeders durch eine Drehsymmetrie des Ikosaeders ineinander überführt werden können, bilden die 15 Elemente der Ordnung 2 eine Konjugationsklasse: Sind in der Tat K und L Kanten und d_k, d_L die nichttrivialen Drehsymmetrien, die sie jeweils in sich selbst überführen, und ist g eine Drehsymmetrie mit $g(K) = L$, so gilt $d_K = g^{-1} d_L g$. Ähnlich sieht man, daß alle 20 Elemente der Ordnung 3 eine Konjugationsklasse bilden. Für die Elemente der Ordnung 5 kann das nicht gelten, denn 24 ist kein Teiler von 60. Mit ähnlichen Überlegungen erkennt man jedoch, daß die 24 Elemente der Ordnung 5 zerfallen in zwei Konjugationsklassen von je 12 Elementen, bestehend aus Drehungen einmal um Winkel $\pm\frac{2\pi}{5}$ und ein andermal um Winkel $\pm\frac{4\pi}{5}$. Die Kardinalitäten der Konjugationsklassen sind also genau die Summanden auf der rechten Seite der Gleichung

$$60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12$$

Ist nun $N \subset I$ ein Normalteiler, so muß die Ordnung von N ein Teiler sein von 60 und eine Summe von Kardinalitäten von Konjugationsklassen, darunter die Konjugationsklasse des neutralen Elements. Die einzigen solchen Zahlen sind aber 1 und 60, folglich ist die Ikosaedergruppe I einfach.

Man überlegt sich nun anhand der nebenstehenden Zeichnung, daß es genau fünf Möglichkeiten gibt, aus den 20 Ecken eines Dodekaeders, die ja gerade die Flächenmitten eines Ikosaeders bilden, 8 Ecken so auszusuchen, daß sie die Ecken eines Würfels bilden: Auf der Menge dieser 5 einbeschriebenen Würfel operiert unsere Gruppe dann natürlich auch. Wir erhalten so einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : I \to \mathcal{S}_5$$

Der Kern von $\operatorname{sgn} \circ \varphi : I \to \{+1, -1\}$ ist ein von 1 verschiedener Normalteiler von I, es folgt $\ker(\operatorname{sgn} \circ \varphi) = I$ und φ induziert einen Gruppenhomomorphismus nach $A_5 = \ker(\operatorname{sgn}) \subset \mathcal{S}_5$. Der Kern von $\varphi : I \to \mathcal{S}_5$ ist ein von I verschiedener Normalteiler von I, es folgt $\ker \varphi = 1$, und durch Abzählen folgt dann, daß φ einen Isomorphismus $\varphi : I \xrightarrow{\sim} A_5$ induziert. □

Definition 1.2.6. Eine **Kompositionsreihe** einer Gruppe G ist eine Folge von Untergruppen

$$G = G_r \supset G_{r-1} \supset \ldots \supset G_0 = 1$$

derart, daß jede Gruppe unserer Folge ein Normalteiler in der nächstgrößeren Gruppe ist und daß die sukzessiven Quotienten einfach sind, daß also in Formeln G_i/G_{i-1} einfach ist für $1 \leq \mathrm{i} \leq r$. Die Gruppen G_i/G_{i-1} heißen die **Subquotienten** der Kompositionsreihe.

Satz 1.2.7 (**Jordan-Hölder**). *Je zwei Kompositionsreihen einer endlichen Gruppe haben dieselbe Länge und bis auf Reihenfolge isomorphe Subquotienten, die man die* **Kompositionsfaktoren** *unserer Gruppe nennt. Ist genauer G eine endliche Gruppe und sind $G = M_r \supset \ldots \supset M_0 = 1$ und $G = N_s \supset \ldots \supset N_0 = 1$ Kompositionsreihen von G, so haben wir $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_r$ mit $N_i/N_{i-1} \cong M_{\sigma(i)}/M_{\sigma(i)-1}$ für alle i.*

Beispiel 1.2.8. Jede abelsche Gruppe mit n Elementen hat als Kompositionsfaktoren die zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ für $n = p_1 \ldots p_r$ die Primfaktorzerlegung von n. Jeder endlichdimensionale Vektorraum V über $\mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p hat insbesondere als Kompositionsfaktoren $\dim V$ Kopien von $\mathbb{F}_p$. Die Kompositionsfaktoren der symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_r$ werden wird in 1.6.2 und 1.6.3 diskutieren: Ab $r = 5$ ist der Kern des Signums ein einfacher Normalteiler und unsere Gruppe hat folglich nur zwei Kompositionsfaktoren, diesen Normalteiler und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Wir zeigen das durch Induktion über die Gruppenordnung. Seien

$$\begin{array}{ccccccc} G & \supset & M & \supset & \ldots & \supset & 1 \\ G & \supset & N & \supset & \ldots & \supset & 1 \end{array}$$

zwei Kompositionsreihen. Gilt $M = N$, so folgt der Satz per Induktion. Sonst ist das Bild von M in G/N ein von 1 verschiedener Normalteiler, denn das Bild jedes

Normalteilers unter einem surjektiven Gruppenhomomorphismus ist wieder ein Normalteiler. Da G/N einfach ist, liefert die offensichtliche Abbildung notwendig eine Surjektion $M \twoheadrightarrow G/N$ und einen Isomorphismus $M/(M \cap N) \xrightarrow{\sim} G/N$. Ebenso erhalten wir auch $N/(M \cap N) \xrightarrow{\sim} G/M$. Deuten wir mit $(M \cap N) \supset \ldots \supset 1$ eine Kompositionsreihe des Schnitts an, so hat die Gruppe G also Kompositionsreihen

$$\begin{array}{ccccccccc}
G & \supset & M & \supset & & & \ldots & \supset & 1 \\
G & \supset & M & \supset & (M \cap N) & \supset & \ldots & \supset & 1 \\
G & \supset & N & \supset & (M \cap N) & \supset & \ldots & \supset & 1 \\
G & \supset & N & \supset & & & \ldots & \supset & 1
\end{array}$$

Je zwei in dieser Liste benachbarte Kompositionsreihen haben aber nun nach Induktionsvoraussetzung und den oben erwähnten Isomorphismen bis auf Reihenfolge dieselben Subquotienten. □

Übungen

Ergänzende Übung 1.2.9. Man zeige die Aussage des Satzes von Jordan-Hölder 1.2.7, ohne die Endlichkeit der Gruppe vorauszusetzen. Man zeige auch, daß in einer Gruppe mit Kompositionsreihe eine absteigende Folge von Untergruppen, die jeweils echte Normalteiler in der nächstgrößeren Untergruppe sind, höchstens so lang sein kann wie besagte Kompositionsreihe.

Ergänzende Übung 1.2.10 (**Semidirektes Produkt**). Seien $\varphi : G \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $N := \ker \varphi$ und $\sigma : B \hookrightarrow G$ eine Spaltung von φ, also ein Gruppenhomomorphismus mit $\sigma \circ \varphi = \mathrm{id}_B$. Man zeige, daß dann die Abbildung $(n, b) \mapsto n\sigma(b)$ eine Bijektion $N \times B \xrightarrow{\sim} G$ liefert und daß die Verknüpfung von G unter dieser Bijektion derjenigen Verknüpfung auf $N \times B$ entspricht, die gegeben wird durch

$$(m, a)(n, b) = (m \,\mathrm{int}_{\sigma(a)}(n), ab) \quad \forall m, n \in N \text{ und } a, b \in B.$$

Sind umgekehrt N, B Gruppen und $\tau : B \to \mathrm{Grp}^{\times} N, a \mapsto \tau_a$ ein Gruppenhomomorphismus von B in die Automorphismengruppe von N, so wird $N \times B$ mit der Verknüpfung

$$(m, a)(n, b) := (m\tau_a(n), ab) \quad \forall m, n \in N \text{ und } a, b \in B$$

zu einer Gruppe. Diese Gruppe heißt das **semidirekte Produkt von** N **mit** B **über** τ und wird notiert als

$$N \rtimes B = N \rtimes_\tau B$$

Ergänzung 1.2.11. Ist speziell eine Gruppe N ein Produkt von n Kopien einer festen Gruppe $N = A^n = A \times \ldots \times A$ und operiert eine weitere Gruppe B darauf durch Vertauschung der Faktoren, also in hoffentlich offensichtlicher Weise vermittels eines Gruppenhomomorphismus $B \to \mathcal{S}_n$, so bezeichnet man das zugehörige semidirekte Produkt als **Kranzprodukt** und notiert es $N \rtimes B =: A \wr B$.

Ergänzende Übung 1.2.12. Man zeige, daß die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_4$ isomorph ist zum semidirekten Produkt der $\mathcal{S}_3$ mit der Klein'schen Vierergruppe $\mathbb{F}_2^2$ in Bezug auf einen und jeden Isomorphismus $\mathcal{S}_3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_2)$.

1.3 p-Gruppen

Definition 1.3.1. Das **Zentrum** einer Gruppe G ist die Menge

$$\mathrm{Z}(G) := \{x \in G \mid xg = gx \quad \forall g \in G\}$$

derjenigen Gruppenelemente, die mit allen anderen Gruppenelementen kommutieren.

1.3.2. Offensichtlich ist das Zentrum ein Normalteiler, was im Übrigen auch die alternative Beschreibung $\mathrm{Z}(G) = \ker(\mathrm{int} : G \to \mathrm{Grp}^\times(G))$ als Kern eines Gruppenhomomorphismus in den Notationen aus [LA2] 7.3 sofort zeigt.

Definition 1.3.3. Die Standgruppe von $g \in G$ unter der Operation von G auf sich selbst durch Konjugation heißt der **Zentralisator** $\mathrm{Z}_G(g)$ von g, in Formeln

$$\mathrm{Z}_G(g) = \{x \in G \mid xgx^{-1} = g\}$$

1.3.4. Ist G eine endliche Gruppe, $G = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ ihre Zerlegung in Konjugationsklassen und $g_i \in C_i$ jeweils ein Element, so liefert die Bahnformel [LA2] 7.2.2 die sogenannte **Klassengleichung**

$$\begin{aligned} |G| &= |C_1| + \ldots + |C_r| \\ &= |G|/|\mathrm{Z}_G(g_1)| + \ldots + |G|/|\mathrm{Z}_G(g_r)| \end{aligned}$$

Die einelementigen Konjugationsklassen sind dabei genau die Konjugationsklassen der Elemente des Zentrums.

Definition 1.3.5. Sei p eine Primzahl. Eine **p-Gruppe** ist eine endliche Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist. Die triviale Gruppe hat p^0 Elemente und ist damit nach unserer Konvention [LA2] 6.5.3 eine p-Gruppe für jede Primzahl p.

Proposition 1.3.6. *Jede nichttriviale p-Gruppe hat nichttriviales Zentrum.*

Beweis. Wir zerlegen unsere Gruppe in Konjugationsklassen $G = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$. Nach der Bahnformel sind alle Kardinalitäten von Konjugationsklassen $|C_i|$ Teiler von $|G|$, also p-Potenzen. Die einelementigen Konjugationsklassen gehören dabei genau zu den Elementen des Zentrums von G und wir folgern

$$|G| \equiv |\mathrm{Z}(G)| \pmod{p}$$

Da nun das Zentrum stets mindestens ein Element hat, nämlich das neutrale Element, muß es im Fall einer nichttrivialen p-Gruppe sogar mindestens p Elemente haben. □

Korollar 1.3.7. *Ist die Ordnung einer Gruppe das Quadrat einer Primzahl p, so ist die besagte Gruppe abelsch, in Formeln:*

$$|G| = p^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{Z}(G) = G$$

Beweis. Nach der vorhergehenden Proposition 1.3.6 hat das Zentrum unserer Gruppe mindestens p Elemente. Gäbe es nun außerhalb des Zentrums noch ein Element unserer Gruppe, so müßte dieses Element zusammen mit dem Zentrum eine kommutative Untergruppe mit mehr als p Elementen erzeugen. Diese aber wäre dann nach dem Satz von Lagrange [LA2] 6.1.5 bereits die ganze Gruppe. □

1.3.8. Gegeben eine Gruppe G können wir ihr Zentrum $\mathrm{Z}(G)$ betrachten und die Quotientengruppe $G/\mathrm{Z}(G)$ bilden. Eine Gruppe heißt **nilpotent**, wenn wiederholtes Anwenden dieser Konstruktion in endlich vielen Schritten zur trivialen einelementigen Gruppe führt.

Satz 1.3.9 (Struktur von p-Gruppen). *Jede p-Gruppe ist nilpotent. Ist G eine p-Gruppe, so gibt es in G sogar eine Kette $G = G_r \supset G_{r-1} \supset \ldots \supset G_0 = 1$ von Untergruppen mit $|G_i/G_{i-1}| = p$ und $G_i/G_{i-1} \subset \mathrm{Z}(G/G_{i-1})$ für alle i.*

Beweis. Jede nichttriviale p-Gruppe hat nichttriviales Zentrum und damit folgt die erste Aussage leicht mit Induktion über die Gruppenordnung. In diesem nichttrivialen Zentrum muß es offensichtlich auch ein nichtneutrales Element $x \neq 1$ geben. Das muß als Ordnung eine p-Potenz $\mathrm{ord}(x) = p^r$ haben mit $r \geq 1$. Dann ist seine p^{r-1}-te Potenz $a := x^{p^{r-1}}$ ein Element der Ordnung p und erzeugt eine zyklische und zentrale Untergruppe der Ordnung p. Damit folgt die zweite Aussage genauso. □

Übungen

Ergänzende Übung 1.3.10. Gegeben Elemente a, b einer Gruppe G setzt man $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ und nennt dies Element den **Kommutator von a und b**. Gegeben Teilmengen A, B einer Gruppe bezeichnen wir mit $(A, B) := \langle (A, B) \rangle$

die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe. Jetzt definiert man induktiv die **absteigende Zentralreihe** einer Gruppe G durch $G^0 := G$ und $G^i := (G^{i-1}, G)$ für $i \geq 1$. Man zeige, daß eine Gruppe genau dann nilpotent ist, wenn ihre absteigende Zentralreihe nach endlich vielen Schritten bei der trivialen Gruppe landet, wenn also in Formeln gilt $G^i = 1$ für $i \gg 0$.

Ergänzende Übung 1.3.11. Jede Untergruppe einer nilpotenten Gruppe ist nilpotent. Für jedes n ist die Gruppe der oberen $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale und Einträgen in irgendeinem Ring nilpotent.

Ergänzende Übung 1.3.12. Man bestimme das Zentrum der Gruppe $\mathrm{GL}(n; k)$ für $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper. Man bestimme das Zentrum der Symmetriegruppe eines Quadrats.

1.4 Sylowsätze

Definition 1.4.1. Seien G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Eine Untergruppe $P \subset G$ heißt eine **p-Sylowuntergruppe** oder kurz **p-Sylow von** G, wenn ihre Kardinalität $|P|$ die höchste p-Potenz ist, die die Gruppenordnung $|G|$ teilt.

Beispiel 1.4.2. Eine 2-Sylow in der Gruppe der 24 Drehsymmetrien eines Würfels ist per definitionem eine Untergruppe mit 8 Elementen. Zum Beispiel wäre jede Untergruppe, die die Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen stabilisiert, eine solche 2-Sylow, die nebenbei bemerkt isomorph ist zur Bierdeckelgruppe. Die einzige 5-Sylow in derselben Gruppe wäre in unserer Terminologie die einelementige Untergruppe. Viele Autoren verstehen aber auch abweichend unter Sylowuntergruppen nur diejenigen Untergruppen, die wir in unserer Terminologie als „nichttriviale Sylowuntergruppen“ ansprechen würden.

Beispiel 1.4.3. Die fünf einbeschriebenen Würfel eines Dodekaeders entsprechen eineindeutig den 2-Sylows unserer Ikosaedergruppe: Diese sind genau die vierelementigen Diedergruppen, die von den drei durch die Flächenmitten eines festen einbeschriebenen Würfels stechenden Geraden jede in sich überführen. Daß es keine anderen 2-Sylows in der Ikosaedergruppe gibt, wird später aus der Aussage folgen, daß je zwei p-Sylows zueinander konjugiert sind.

1.4.4. Die Operation durch Konjugation einer Gruppe G auf sich selber induziert eine Operation unserer Gruppe auf ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$, die wir auch als **Konjugation** ansprechen. Im folgenden verwenden wir oft die davon auf der Teilmenge $\mathcal{U}(G) \subset \mathcal{P}(G)$ aller Untergruppen induzierte Operation. Insbesondere heißen also zwei Untergruppen $H, K \subset G$ **zueinander konjugiert**, wenn es $g \in G$ gibt mit $H = gKg^{-1}$.

Satz 1.4.5 (Sätze von Sylow). *Seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und p^r die größte p-Potenz, die die Gruppenordnung $|G|$ teilt. So gilt:*

1. *Unsere Gruppe G besitzt Untergruppen der Ordnung p^r alias p-Sylows;*

2. *Je zwei p-Sylows von G sind zueinander konjugiert;*

3. *Jede Untergruppe von G, deren Ordnung eine p-Potenz ist, liegt in einer p-Sylow von G;*

4. *Die Zahl der p-Sylows von G ist ein Teiler von $|G|/p^r$ und kongruent zu 1 modulo p.*

Beispiel 1.4.6 (**Sylows endlicher abelscher Gruppen**). Ist G eine endliche abelsche Gruppe, so gibt es insbesondere genau eine p-Sylow für alle p. Wir kennen diese Untergruppe schon aus Proposition [LA2] 6.4.4: Es ist die Untergruppe $G(p)$ aller Elemente von G, deren Ordnung eine p-Potenz ist.

Beispiel 1.4.7 (**Zwei-Sylows der Würfelgruppe**). Im Fall der Gruppe der 24 Drehsymmetrien eines Würfels liefern die drei Paare gegenüberliegender Flächen drei paarweise verschiedene 2-Sylows, bestehend aus allen Drehsymmetrien, die das jeweilige Paar in sich überführen. Das müssen dann auch bereits alle 2-Sylows alias alle 8-elementigen Untergruppen dieser Gruppe sein, wie man unschwer aus Teil 2 oder auch aus Teil 4 des vorhergehenden Satzes folgern kann.

Beweis. 1. Wir argumentieren durch Induktion über $|G|$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß p die Ordnung unserer Gruppe teilt. Ist $G = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_s$ die Zerlegung in Konjugationsklassen und $g_i \in C_i$ für $1 \leq i \leq t$ jeweils ein Element aus jeder Konjugationsklasse mit mehr als einem Element, so liefert die Bahnformel nach 1.3.4 die Klassengleichung

$$|G| = |G|/|\mathrm{Z}_G(g_1)| + \ldots + |G|/|\mathrm{Z}_G(g_t)| + |\mathrm{Z}(G)|$$

Teilt p die Ordnung $|\mathrm{Z}(G)|$ des Zentrums von G, so gibt es nach dem Satz von Cauchy für abelsche Gruppen [LA2] 6.4.5 in $\mathrm{Z}(G)$ ein Element g der Ordnung p. Nach der Induktionsannahme finden wir nun eine p-Sylow von $G/\langle g\rangle$, und deren Urbild in G ist notwendig eine p-Sylow von G. Gilt sonst $p \nmid |\mathrm{Z}(G)|$, so finden wir auch ein i mit $p \nmid |G|/|\mathrm{Z}_G(g_i)|$ und dann folgt die Behauptung direkt aus der Induktionsannahme angewendet auf die Gruppe $\mathrm{Z}_G(g_i)$, die ja nicht ganz G sein kann, keines unserer g_i zum Zentrum von G gehört.

5. Vor dem weiteren Fortgang des Beweises ergänzen wir nun unseren Satz um einen technischeren Teil 5, der dann als nächstes bewiesen wird. Bezeichne $\mathcal{S}$ die Menge aller p-Sylows von G. Die Gruppe G operiert auf $\mathcal{S}$ durch Konjugation. Wir vereinbaren als Notation für den weiteren Verlauf des Beweises die folgenden Konventionen: Bezeichnen wir eine Sylow durch einen kleinen Buchstaben,

so fassen wir sie primär als ein Element $x \in \mathcal{S}$ auf und notieren die mit $g \in G$ konjugierte Sylow gx. Bezeichnen wir eine Sylow jedoch durch einen großen Buchstaben, so fassen wir sie primär als eine Teilmenge $P \subset G$ auf und notieren die mit $g \in G$ konjugierte Sylow gPg^{-1}. Ich ergänze nun mit diesen Notationen den Satz um die folgende technische Aussage:

5. *Ist $H \subset G$ eine p-Gruppe und $y = Q \in \mathcal{S}$ ein Fixpunkt von H in der Menge aller p-Sylows von G, so gilt $H \subset Q$.*

In der Tat besagt die Fixpunkteigenschaft $hQh^{-1} = Q \ \forall h \in H$. Mithin ist $HQ = QH$ eine Untergruppe von G. Ihre Ordnung ist $|QH| = |QH/H| \cdot |H|$. Nun ist QH/H unter der Operation von Q durch Linksmultiplikation eine einzige Q-Bahn und damit ist $|QH/H|$ eine p-Potenz. Da auch $|H|$ eine p-Potenz ist, muß QH eine p-Gruppe sein. Es folgt $QH = Q$, also $H \subset Q$. Nun beweisen wir die restlichen Teile des Satzes.

2&3. Sei eine p-Sylow $P = x$ gegeben. Für ihre Standgruppe G_x gilt $G_x \supset P$, also ist nach der Bahnformel [LA2] 7.2.2 die Kardinalität $|Gx|$ der Bahn $Gx \subset \mathcal{S}$ von x teilerfremd zu p, in Formeln $p \nmid |Gx|$. Sei weiter $H \subset G$ eine Untergruppe von p-Potenzordnung. Sicher zerfällt Gx in Bahnen unter H und die Ordnung jeder solchen Bahn muß eine p-Potenz sein. Folglich gibt es in Gx einen Fixpunkt y von H. Nach dem eben bewiesenen Teil 5 ist dieser Fixpunkt $y = Q$ eine p-Sylow Q mit $Q \supset H$. Wegen $y \in Gx$ gibt es dann $g \in G$ mit $gPg^{-1} = Q$.

4. Nach Teil 5 gibt es nur einen Fixpunkt unserer Sylow P auf der Menge aller p-Sylows $\mathcal{S}$, nämlich den Punkt $x = P$ selber. Alle anderen P-Bahnen in $\mathcal{S}$ haben als Kardinalität eine echte p-Potenz und das zeigt $|\mathcal{S}| \equiv 1 \pmod{p}$. Die Standgruppe G_x von $x \in \mathcal{S}$ umfaßt schließlich unsere Sylow $P = x$. Da nun je zwei p-Sylows konjugiert sind, haben wir $|\mathcal{S}| = |G/G_x|$ und das ist wegen $G_x \supset P$ ein Teiler von $|G/P|$. □

Ergänzung 1.4.8. Ein alternativer Beweis des ersten Teils geht so: Man betrachtet das System $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(G)$ aller Teilmengen unserer Gruppe mit p^r Elementen. Die Gruppe G operiert auf $\mathcal{M}$ durch Konjugation. Hat der Stabilisator von einem $M \in \mathcal{M}$ genau p^r Elemente, so ist er eine p-Sylow. Sonst haben alle Stabilisatoren weniger Elemente und damit alle Bahnen eine durch p teilbare Kardinalität: Widerspruch dazu, daß nach expliziter Rechnung die Kardinalität von $\mathcal{M}$ teilerfremd ist zu p, vergleiche [EIN] 1.1.1.27.

Satz 1.4.9 (von Cauchy über Gruppenelelemente von Primzahlordnung). *Jeder Primfaktor der Ordung einer endlichen Gruppe tritt auch als Ordnung eines Elements besagter Gruppe auf.*

1.4.10. Man beachte, daß wir diese Aussage im Fall abelscher Gruppen bereits in [LA2] 6.4.5 bewiesen hatten, und daß wir sie in diesem Fall ihrerseits beim Beweis der Sylowsätze verwendet haben. Einen alternativen Beweis konnten Sie als Übung [LA2] 7.1.35 ausarbeiten. Allgemeinere Teiler der Ordung einer endlichen Gruppe müssen keineswegs als Ordnung eines Elements besagter Gruppe auftreten. So gibt es etwa in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_5$ keine Untergruppe mit 15 Elementen, was Sie als Übung gleich zeigen können. Ebenso sieht man leicht ein, daß die alternierende Gruppe A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 hat. Teilt jedoch eine Primzahlpotenz die Ordnung einer Gruppe, so gibt es eine Untergruppe mit besagter Primzahlpotenz als Ordnung: Das folgt ähnlich wie im anschließenden Beweis leicht aus den Sylowsätzen zusammen mit unseren Erkenntnissen zur Struktur von p-Gruppen 1.3.9.

Beweis. Sei p unser Primfaktor. Man findet zunächst nach 1.4.5 in unserer Gruppe eine p-Sylow. Darin findet man ein Element, das nicht das neutrale Element ist. Dieses erzeugt eine zyklische Untergruppe, die isomorph ist zu $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ für $r \geq 1$. Darin ist dann die Nebenklasse von p^{r-1} das gesuchte Element der Ordnung p. □

Proposition 1.4.11. *Jede Gruppe mit genau sechs Elementen ist entweder zyklisch oder isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$.*

Beweis. Sei G unsere Gruppe der Ordnung $|G| = 6$. Wir finden nach dem Satz von Cauchy 1.4.9 Elemente $a, b \in G$ der Ordnungen 2 und 3. Nach Übung [LA1] 4.3.8 zum Satz von Lagrange gilt $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = 1$, also liefert die Multiplikation eine Bijektion

$$\langle a\rangle \times \langle b\rangle \xrightarrow{\sim} G$$

Sicher kann unter diesen Umständen ba weder eine Potenz von a noch eine Potenz von b sein. Gilt $ba = ab$, so ist unsere Gruppe kommutativ und folglich isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Gilt $ba = ab^2$, so legt diese Gleichung schon die ganze Gruppenstruktur fest und wir haben die $\mathcal{S}_3$ vor uns. □

Korollar 1.4.12. *Jede Gruppe der Ordnung 15 ist zyklisch.*

Beweis. Die Zahl der 3-Sylows teilt 5 und ist kongruent zu 1 modulo 3. Es gibt also genau eine 3-Sylow und damit genau zwei Elemente der Ordnung 3. Ähnlich gibt es genau eine 5-Sylow und damit genau 4 Elemente der Ordnung 5. Zusammen mit dem neutralen Element sind das nur 7 Elemente. Die übrigen 8 Elemente haben notwendig die Ordnung 15. □

Ergänzung 1.4.13 (**Gruppen mit höchstens** 15 **Elementen**). Mit den folgenden Übungen können Sie die Klassifikation der Gruppen mit höchstens 15 Elementen zu Ende bringen. Gruppen mit $2, 3, 5, 7, 11$ oder 13 Elementen sind zyklisch nach

[LA2] 6.3.5. Gruppen mit 4 oder 9 Elementen sind abelsch nach 1.3.7 und werden damit durch [LA2] 6.5.5 klassifiziert. Gruppen mit 6 Elementen hatten wir in 1.4.11 diskutiert. Für Gruppen mit 10 oder 14 Elementen funktioniert dieselbe Argumentation, wie Sie als Übung 1.4.15 ausarbeiten dürfen. Gruppen mit 8 Elementen klassifizieren wir in 1.4.14, Gruppen mit 12 Elementen klassifizieren Sie in 1.4.19 und jede Gruppe mit 15 Elementen ist zyklisch nach 1.4.12. Bei Gruppen mit 16 Elementen fängt es aber an, unübersichtlich zu werden, es gibt von ihnen bereits 14 Isomorphieklassen.

Ergänzung 1.4.14 (**Gruppen mit 8 Elementen**). Es gibt 5 Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung acht, als da wären die drei abelschen Gruppen $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, die Diedergruppe der Ordnung acht sowie die **Quaternionengruppe** der acht Quaternionen $\{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ nach [LA1] 5.6.4. Um das einzusehen, kann man argumentieren wie folgt: Jede nichtabelsche Gruppe der Ordnung acht besitzt nach [LA1] 1.2.18 Elemente der Ordnung vier, also nach [LA2] 6.2.22 einen zyklischen Normalteiler der Ordnung vier. Gibt es eine Involution außerhalb dieses Normalteilers, so sehen wir schnell, daß unsere Gruppe ein semidirektes Produkt $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sein muß für die einzige nichttriviale Operation, so daß wir eine Diedergruppe vor uns haben. Sonst haben alle Elemente außerhalb unseres Normalteilers die Ordnung vier und in unserer Gruppe bleibt nur noch Platz für ein einziges Element der Ordnung zwei. Unsere Gruppe ist also die Vereinigung von drei zyklischen Gruppen der Ordnung vier, und der Schnitt dieser Gruppen ist auch der Schnitt von je zweien unter ihnen und ist zyklisch von der Ordnung zwei und zentral. Bezeichne 1 das neutrale Element und -1 das andere Element dieses Schnitts. Wählen wir i und j Erzeuger von zwei verschiedenen zyklischen Untergruppen der Ordnung vier, so müssen $\mathrm{i}\,\mathrm{j}$ und auch $\mathrm{k} := (-1)\,\mathrm{i}\,\mathrm{j}$ die dritte zyklische Untergruppe der Ordnung vier erzeugen, denn diese Elemente sind weder eine Potenz von i noch eine Potenz von j. Von hier aus ist leicht zu sehen, daß wir gerade die Quaternionengruppe vor uns haben.

Übungen

Ergänzende Übung 1.4.15. Für jede Primzahl p gibt es bis auf Isomorphismus genau zwei Gruppen der Ordnung $2p$, eine zyklische Gruppe und eine Diedergruppe. Hinweis: Man erinnere die Argumentation im Fall $p = 3$ und interessiere sich für die Anzahl der 2-Sylows.

Ergänzende Übung 1.4.16. Sind $p > q$ Primzahlen und ist q kein Teiler von $p - 1$, so ist jede Gruppe der Ordnung pq zyklisch. Hinweis: 1.4.12.

Ergänzende Übung 1.4.17 (**Struktur endlicher nilpotenter Gruppen**). Man zeige: In einer endlichen nilpotenten Gruppe ist jede Sylow ein Normalteiler. Insbesondere gibt es zu jeder Primzahl p nur eine Sylow, die aus allen Elementen

von p-Potenzordnung besteht. Hinweis: Vollständige Induktion über die Gruppenordnung. Man zeige weiter, daß in einer endlichen nilpotenten Gruppe Elemente aus verschiedenen Sylowuntergruppen kommutieren und daß unsere Gruppe isomorph ist zum Produkt ihrer nichttrivialen Sylowuntergruppen.

Ergänzende Übung 1.4.18 (**Funktorialität semidirekter Produkte**). Seien A, M, B, N Gruppen und $\kappa : A \to \mathrm{Grp}^\times M$ sowie $\tau : B \to \mathrm{Grp}^\times N$ Gruppenhomomorphismen. Wie bei der Definition semidirekter Produkte in 1.2.10 schreiben wir $(\kappa(a))(m) =: ({}^a m)$ und $(\tau(b))(n) =: ({}^b n)$. Seien weiter $\psi : A \to B$ und $\varphi : M \to N$ Gruppenhomomorphismen mit ${}^{\psi(a)}\varphi(m) = \varphi({}^a m)$ für alle $a \in A$ und alle $m \in M$ alias $\tau(\psi(a)) \circ \varphi = \varphi \circ \kappa(a)$ für alle $a \in A$. So ist $\varphi \times \psi$ ein Homomorphismus der semidirekten Produkte

$$(\varphi \times \psi) : M \rtimes A \to N \rtimes B$$

Speziell haben wir$N \rtimes_\tau B \cong N \rtimes_\kappa B$ im Fall $\kappa = (\mathrm{int}\,\varphi) \circ \tau$ für einen Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Grp}^\times N$ der Gruppe N.

Ergänzende Übung 1.4.19 (**Gruppen mit** 12 **Elementen**). In dieser Übung sollen Sie zeigen, daß es bis auf Isomorphismus genau 5 Gruppen der Ordnung 12 gibt: Die beiden abelschen Gruppen $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, die Diedergruppe D_6, die alternierende Gruppe A_4 und ein semidirektes Produkt $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, für das mir keine konkrete Interpretation eingefallen ist. Ich rate, der Reihe nach folgendes zu zeigen:

1. In einer Gruppe mit 12 Elementen gibt es entweder nur eine 2-Sylow oder nur eine 3-Sylow. Hinweis: Mehr Platz ist nicht vorhanden.

2. Schreiben wir im folgenden $\rtimes$ nur für semidirekte Produkte, die nicht gewöhnliche Produkte sind, so gehört jede Gruppe mit 12 Elementen zu einer der sechs Typen

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \ltimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \end{array}$$

3. Vom letzten dieser Typen existiert keine Gruppe, von jedem anderen Typ existiert bis auf Isomorphismus genau eine, und diese fünf Gruppen sind paarweise nicht isomorph. Hinweis: Man beachte 1.4.18 und beachte auch, daß für den Fall, in dem es von beiden Typen von Sylow nur eine gibt, die Gruppe kommutativ sein muß: Sind H, K die beiden Sylows, so gilt dann ja $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$ für alle $h \in H, k \in K$.

Ergänzende Übung 1.4.20. Man zeige, daß die 2-Sylow in der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$ der Drehsymmetrien eines Würfels isomorph ist zur Diedergruppe der Ordnung 8.

Ergänzende Übung 1.4.21. Gegeben in einer endlichen Gruppe G zwei Sylow-Untergruppen P, Q gilt stets $\{p \in P \mid pQp^{-1} = Q\} = P \cap Q$. Hinweis: Die Lösung ist im Beweis der Sylowsätze versteckt.

Übung 1.4.22. Seien $G \supset N$ eine endliche Gruppe mit einem Normalteiler und sei p prim. Man zeige: Genau dann ist eine Untergruppe $P \subset G$ eine p-Sylow von G, wenn $P \cap N$ eine p-Sylow von N ist und das Bild von P in G/N eine p-Sylow von G/N.

Übung 1.4.23. Eine Gruppe mit 30 Elementen kann nie einfach sein. Hinweis: Entweder besitzt sie nur eine 3-Sylow oder nur eine 5-Sylow.

1.5 Symmetrische Gruppen

Definition 1.5.1. Eine **Partition λ einer natürlichen Zahl** $n \in \mathbb{N}$ ist eine monoton fallende Folge von natürlichen Zahlen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ derart, daß fast alle Folgenglieder verschwinden und die von Null verschiedenen Folgenglieder sich zu n aufsummieren. Die Menge aller Partitionen von n notieren wir $\mathcal{P}_n$.

Beispiel 1.5.2. Die Zahl 5 hat genau sieben Partitionen. Salopp können wir sie beschreiben als die Zerlegungen

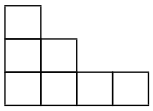
$$\begin{aligned}
5 &= 5\\
5 &= 4+1\\
5 &= 3+2\\
5 &= 3+1+1\\
5 &= 2+2+1\\
5 &= 2+1+1+1\\
5 &= 1+1+1+1+1
\end{aligned}$$

Hier haben wir nur die von Null verschiedenen Folgenglieder aufgeschrieben und sie durch $+$ getrennt. Formal meinen wir zum Beispiel im vierten Fall die Folge $3, 1, 1, 0, 0, \ldots$. Zur Abkürzung verwendet man auch oft die sogenannte **exponentielle Schreibweise**, in der unsere Partitionen von 5 der Reihe nach als 5, 41, 32, 31^2, 2^21, 21^3 und 1^5 geschrieben würden. Sie ist allerdings nur für Partitionen von Zahlen ≤ 9 geschickt.

Ergänzung 1.5.3. Eine in vielen Zusammenhängen geschickte Art, sich Partitionen zu veranschaulichen, sind die sogenannten Youngdiagramme. Unter einem **Youngdiagramm** verstehen wir eine endliche Teilmenge $Y \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$((i,j) \in Y \text{ und } i' \leq i \text{ und } j' \leq j) \quad \Rightarrow \quad (i',j') \in Y$$

Die Elemente von Y nennen wir die **Kästchen** unseres Youngdiagramms und stellen uns ein Element (i, j) vor als das Kästchen auf einem Rechenpapier, bei dem die Koordinaten der linken unteren Ecke gerade (i, j) sind. Zum Beispiel stellt das Bild

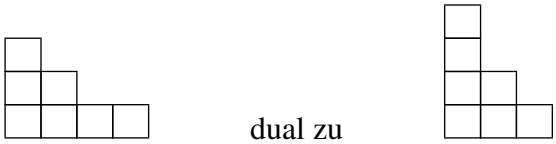


die Menge $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0),(3,0)\}$ dar. In der Praxis denke ich bei Youngdiagrammen stets an Bilder dieser Art.

Ergänzung 1.5.4. Jedes Youngdiagramm Y mit n Kästchen im Sinne von 1.5.3 liefert zwei Partitionen der Zahl n, die Partition durch die Zeilenlängen $z(Y)$ und die Partition durch die Spaltenlängen $s(Y)$. Bezeichnet $\mathcal{Y}_n$ die Menge aller Youngdiagramme mit n Kästchen und $\mathcal{P}_n$ die Menge aller Partitionen der Zahl n, so erhalten wir auf diese Weise zwei Bijektionen

$$\mathcal{P}_n \overset{z}{\xleftarrow{\sim}} \mathcal{Y}_n \overset{s}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{P}_n$$

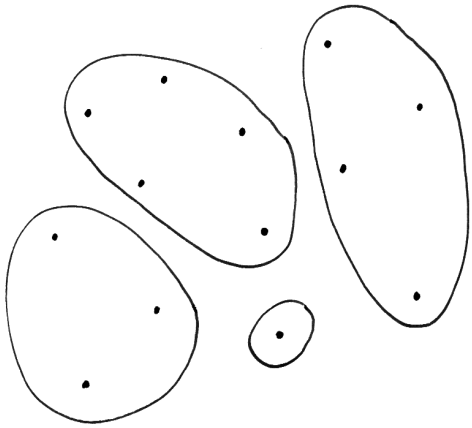
die zusammen eine selbstinverse Bijektion $\mathcal{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_n$ liefern. Diese Bijektion notieren wir $\lambda \mapsto \lambda'$ und nennen λ' die **duale Partition zu** λ. Zum Beispiel ist die duale Partition zu $3,2$ die Partition $2,2,1$ und die duale Partition zu $3,2,1,1$ ist $4,2,1$, im Bild also ist



1.5.5. Unter einer **Partition einer Menge** X verstehen wir wie in [LA2] 7.1.15 ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von paarweise disjunkten nichtleeren Teilmengen, deren Vereinigung ganz X ist. Die Menge aller Partitionen einer gegebenen Menge X notieren wir $\mathcal{P}_X$. Hat X genau n Elemente, so erhalten wir, indem wir die Kardinalitäten der Teilmengen unserer Mengensysteme der Größe nach aufführen und danach Nullen anhängen, eine offensichtliche Surjektion

$$\mathcal{P}_X \twoheadrightarrow \mathcal{P}_n$$

1.5.6. Jede Permutation $\sigma \in \mathrm{Ens}^\times(X)$ einer Menge X liefert eine Partition von X, nämlich die Partition in die Bahnen der von σ erzeugten Untergruppe $\langle\sigma\rangle = \{\sigma^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$. Im Fall $|X| = n < \infty$ erhalten wir durch Verknüpfung dieser Abbildung $\mathrm{Ens}^\times(X) \to \mathcal{P}_X$ mit der in 1.5.5 diskutierten Abbildung $\mathcal{P}_X \twoheadrightarrow \mathcal{P}_n$ die sogenannte **Zykellängenabbildung** $\mathrm{Ens}^\times(X) \to \mathcal{P}_n$. Im Fall $X = \{1,\ldots,n\}$ ist das eine Abbildung $\mathcal{S}_n \to \mathcal{P}_n$.



Eine Partition einer Menge mit dreizehn Elementen durch vier Teilmengen. Die im Sinne von 1.5.5 zugehörige Partition der Zahl 13 wäre $13 = 5 + 4 + 3 + 1$.

Eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_7$, unter der die Bilder der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ der Reihe nach gerade $2, 5, 3, 4, 1, 7, 6$ sind. Die zugehörige Partition der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ist durch die gestrichelten Linien angedeutet und wäre in Formeln die Zerlegung $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 5\} \cup \{6, 7\} \cup \{3\} \cup \{4\}$. Die zugehörige Partition der Zahl 7 ist $7 = 3 + 2 + 1 + 1$.

1.5.7. Ich erinnere an die Operation durch Konjugation einer Gruppe auf sich selber aus [LA2] 7.3.1 und an ihre Bahnen, die Konjugationsklassen.

Satz 1.5.8 (**Konjugationsklassen in den symmetrischen Gruppen**). *Ist X eine endliche Menge mit $|X| = n$ Elementen, so sind die Fasern der Zykellängenabbildung*

$$\mathrm{Ens}^\times(X) \to \mathcal{P}_n$$

genau die Konjugationsklassen in der Permutationsgruppe $\mathrm{Ens}^\times(X)$.

Ergänzung 1.5.9. Eine analoge Aussage gilt mit demselben Beweis auch für eine beliebige Menge X.

Beweis. Seien Permutationen $\sigma, \tau \in \mathrm{Ens}^\times(X)$ gegeben. Ist $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ die Partition von X in die Bahnen von $\langle\sigma\rangle$, so ist

$$X = \tau(X_1) \cup \ldots \cup \tau(X_r)$$

die Partition in die Bahnen von $\langle\tau\sigma\tau^{-1}\rangle$, folglich ist die Zykellängenabbildung konstant auf Konjugationsklassen. Die Zykellängenabbildung ist auch offensichtlich surjektiv. Um schließlich zu zeigen, daß je zwei Permutationen mit denselben Zykellängen konjugiert sind, seien etwa $\sigma, \kappa \in \mathrm{Ens}^\times(X)$ unsere beiden Permutationen und

$$\begin{aligned} X &= X_1 \cup \ldots \cup X_r \\ X &= Y_1 \cup \ldots \cup Y_r \end{aligned}$$

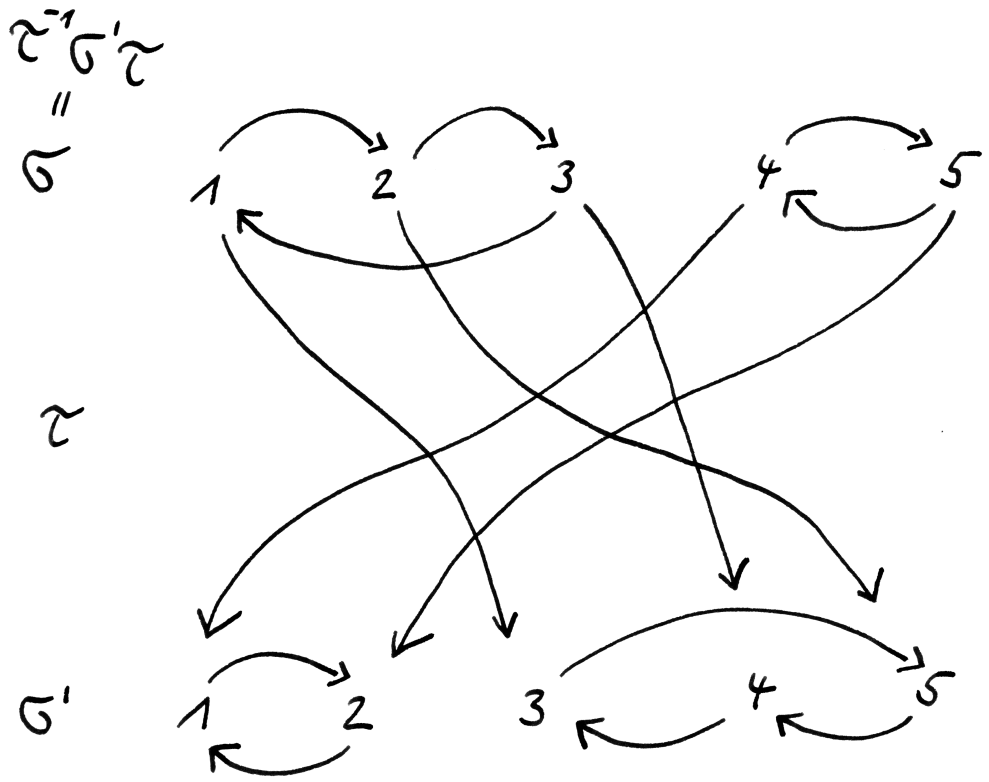
die Zerlegungen in Bahnen unter $\langle\sigma\rangle$ und $\langle\kappa\rangle$ mit $|X_i| = |Y_i| = r_i$. Gegeben $z \in X_i$ und $u \in Y_i$ haben wir dann

$$\begin{aligned} X_i &= \{z, \sigma(z), \sigma^2(z), \ldots, \sigma^{r_i}(z) = z\} \\ Y_i &= \{u, \kappa(u), \kappa^2(u), \ldots, \kappa^{r_i}(u) = u\} \end{aligned}$$

Definieren wir also $\tau : X_i \xrightarrow{\sim} Y_i$ durch $\tau(\sigma^\nu(z)) = \kappa^\nu(u)$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\sigma} & X_i \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ Y_i & \xrightarrow{\kappa} & Y_i \end{array}$$

Setzen wir dann alle diese $\tau : X_i \xrightarrow{\sim} Y_i$ zusammen zu $\tau : X \xrightarrow{\sim} X$, so gilt ebenso $\kappa\tau = \tau\sigma$ alias $\kappa = \tau\sigma\tau^{-1}$. □



Zwei Permutationen $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_5$, die dieselbe Partition $5 = 3 + 2$ liefern, und eine Permutation τ, die sie ineinander konjugiert.

Definition 1.5.10. Hat $\langle\sigma\rangle$ außer einer p-elementigen Bahn nur einelementige Bahnen, so nennt man σ einen **p-Zykel**. Die Zweizykel heißen auch **Transpositionen**.

1.5.11 (**Zykelschreibweise für Permutationen**). Eine Möglichkeit, Permutationen zu notieren, besteht darin, unter jedes Element sein Bild zu schreiben, also etwa

$$\tau \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Eine andere Möglichkeit ist die Notation als Produkt paarweise disjunkter Zykel. Ein p-Zykel σ wird notiert in der Form $\sigma = (z, \sigma(z), \sigma^2(z), \ldots, \sigma^{p-1}(z))$ wobei $\sigma^p(z) = z$ zu verstehen ist. In **Zykelschreibweise** hätten wir für unsere Permutation τ von eben etwa

$$\tau = (1,6)(2,4,3)(5)$$

und das ist so zu verstehen, daß jedes Element auf das dahinterstehende abgebildet wird, außer wenn es direkt vor einer Klammer steht: Dann wird es auf das erste Element innerhalb seiner Klammer abgebildet. Oft werden Fixpunkte nicht mit notiert, so daß wir also auch schreiben könnten

$$\tau = (1,6)(2,4,3)$$

Das ist übrigends auch das Produkt der Transposition $\kappa = (1,6)$ mit den Dreizykel $\rho = (2,4,3)$ und wir haben $\tau = \kappa\rho = \rho\kappa$, was die Sinnhaftigkeit unserer Notation zeigt. Zwei Zykel heißen **disjunkt** genau dann, wenn jedes Element von einem der beiden festgehalten wird. Ganz allgemein kommutieren disjunkte Zykel, so gilt etwa $(1,6)(2,3,4) = (2,3,4)(1,6)$ in $\mathcal{S}_6$.

Übungen

Ergänzende Übung 1.5.12 (**Partitionen und nilpotente Matrizen**). Gegeben ein n-dimensionaler Vektorraum V bildet für jeden nilpotenten Endomorphismus $N \in \operatorname{End} V$ die Folge der Dimensionen $\dim(\operatorname{im} N^r / \operatorname{im} N^{r+1})$ eine Partition von n, und die Fasern der so konstruierten Abbildung

$$\{N \in \operatorname{End} V \mid N \text{ nilpotent}\} \to \mathcal{P}_n$$

sind genau die Bahnen der Operation von $\mathrm{GL}(V)$ durch Konjugation auf der Menge der nilpotenten Endomorphismen von V.

Übung 1.5.13. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_5$ besitzt genau sieben Konjugationsklassen.

Ergänzende Übung 1.5.14. Das Signum eines p-Zykels ist stets $(-1)^{p+1}$.

Übung 1.5.15. Man zeige unabhängig von unseren geometrischen Betrachtungen zur Ikosaedergruppe 1.2.5, daß es in der alternierenden Gruppe A_5 genau 5 Konjugationsklassen gibt, die die Kardinalitäten 20, 15, 12, 12 und 1 haben. Man folgere, daß die alternierende Gruppe A_5 einfach ist.

Ergänzende Übung 1.5.16 (**Zentralisatoren in symmetrischen Gruppen**). Seien X eine endliche Menge und $\sigma \in \mathcal{S} := \mathrm{Ens}^\times X$ eine Permutation von X. Ihr Zentralisator $\mathrm{Z}_\mathcal{S}(\sigma)$ nach 1.3.3 operiert auf dem Bahnenraum von $\langle\sigma\rangle$ und jede Permutation des Bahnenraums $X/\langle\sigma\rangle$, die die Kardinalitäten von Bahnen erhält, kann durch ein Element unseres Zentralisators realisiert werden. Hat unser σ jeweils $n(i)$ Zykel der Länge i und keinen Zykel einer Länge $> r$, so hat das Bild von $\mathrm{Z}_\mathcal{S}(\sigma) \to \mathrm{Ens}^\times(X/\langle\sigma\rangle)$ also genau $n(1)!n(2)!\ldots n(r)!$ Elemente. Der Kern hinwiederum besteht aus denjenigen Elementen des Zentralisators, die jede Bahn von $\langle\sigma\rangle$ auf sich selber abbilden, und davon gibt es offensichtlich $1^{n(1)}\ldots r^{n(r)}$ Stück. Zusammen erhalten wir mit [LA1] 4.3.11 so

$$|\mathrm{Z}_\mathcal{S}(\sigma)| = \prod_{i=1}^{r} n(i)!i^{n(i)}$$

1.6 Alternierende Gruppen*

1.6.1. Die Abbildung sgn, die jeder Permutation $\tau \in \mathcal{S}_r$ ihr Signum zuordnet, ist ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{sgn} : \mathcal{S}_r \to \{1, -1\}$. Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus, d.h. die Gruppe aller geraden Permutationen von r Objekten, heißt die r-te **alternierende Gruppe** und wird notiert als

$$A_r = \ker(\mathrm{sgn} : \mathcal{S}_r \to \{1, -1\})$$

Satz 1.6.2. *Die alternierenden Gruppen A_r sind einfach für $r \geq 5$.*

1.6.3. In der alternierenden Gruppe A_4 bilden die drei Doppeltranspositionen zusammen mit dem neutralen Element einen Normalteiler, der isomorph ist zur Klein'schen Vierergruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Insbesondere ist A_4 nicht einfach. Die Gruppen A_1 und A_2 sind trivial, $A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist jedoch auch noch einfach. Daß A_5 einfach ist, kann man wie beim Beweis der Einfachkeit der Ikosaedergruppe unmittelbar einsehen, indem man die Kardinalitäten der Konjugationsklassen berechnet. Dem Beweis des Satzes im allgemeinen schicken wir zwei Lemmata voraus.

1.6.4. Hat das Erzeugnis $\langle\sigma\rangle$ einer Permutation σ genau zwei zweielementige und sonst nur einelementige Bahnen, so heißt σ eine **Doppeltransposition**. Hat $\langle\sigma\rangle$ genau zwei dreielementige und sonst nur einelementige Bahnen, so nennen wir σ einen **Doppeldreizykel**.

Lemma 1.6.5. *Die symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_r$ werden von den Transpositionen erzeugt, die alternierenden Gruppen A_r von den Dreizykeln.*

Beweis. Die erste Aussage war Übung [LA1] 6.1.8. Die Zweite folgt daraus, daß man jede Doppeltransposition als Produkt von zwei Dreizykeln schreiben kann, $(ab)(cd) = (abc)(bcd)$, und daß das Produkt von zwei nicht kommutierenden Transpositionen ein Dreizykel ist, $(ab)(ac) = (acb)$. Jedes Produkt einer geraden Zahl von Transpositionen läßt sich demnach auch als ein Produkt von Dreizykeln darstellen. □

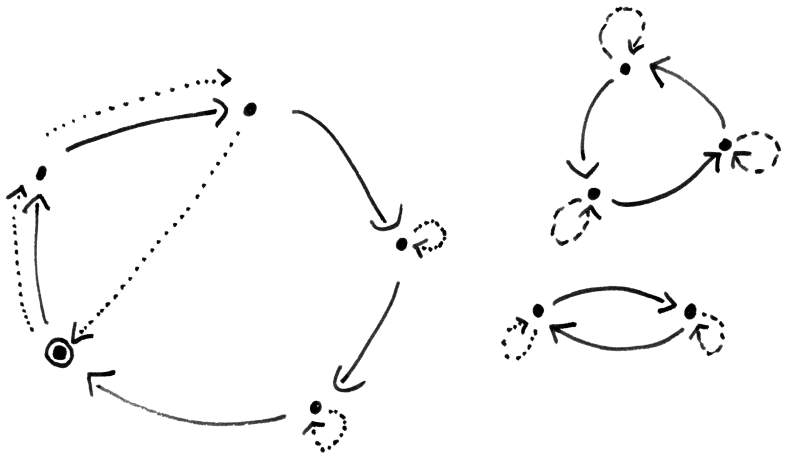
Lemma 1.6.6. *Für $r \geq 5$ wird die alternierende Gruppe A_r nicht nur erzeugt von den Dreizykeln, sondern auch von den Doppeltranspositionen. Des weiteren sind für $r \geq 5$ je zwei Doppeltranspositionen und je zwei Dreizykel auch schon in A_r konjugiert.*

Beweis. Jeder Dreizykel kann als Verknüpfung von zwei Transpositionen seiner drei Elemente dargestellt werden. Haben wir noch zwei weitere Elemente zur Verfügung, so können wir diese beiden Transpositionen durch das Verknüpfen mit der Vertauschung dieser beiden Elemente zu Doppeltranspositionen machen. Das zeigt die erste Aussage. Zwei Doppeltranspositionen $(ab)(cd)$ und $(a'b')(c'd')$ sind konjugiert unter jeder Permutation τ mit $a \mapsto a', \ldots, d \mapsto d'$ und auch unter $\tau \circ (ab)$. Entweder τ oder $\tau \circ (ab)$ ist aber stets gerade. Zwei Dreizykel (abc) und $(a'b'c')$ sind konjugiert unter jeder Permutation τ mit $a \mapsto a', \ldots, c \mapsto c'$ und insbesondere auch unter $\tau \circ (de)$ für (de) disjunkt von (abc). Entweder τ oder $\tau \circ (de)$ ist aber stets gerade. Das zeigt die zweite Aussage. □

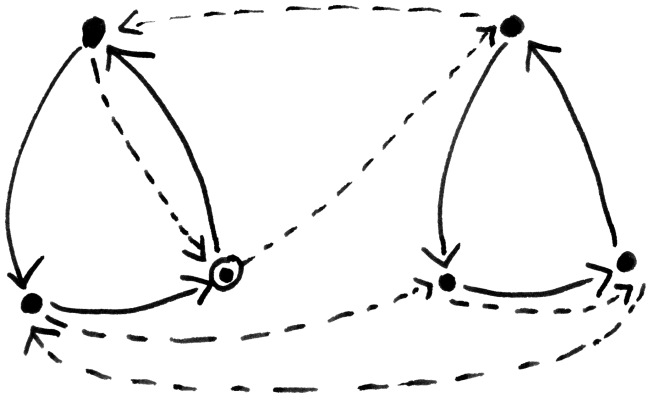
Beweis von 1.6.2. Sei ab jetzt r beliebig und $N \subset A_r$ ein nichttrivialer Normalteiler. Nach dem vorhergehenden Lemma 1.6.6 reicht es zu zeigen, daß es in N entweder eine Doppeltransposition oder einen Dreizykel gibt. Dazu zeigen wir, wie man zu jedem nichttrivialen Element $g \in N$, das weder eine Doppeltransposition noch ein Dreizykel ist, ein anderes nichttriviales Element $\tilde{g} \in N$ mit noch mehr Fixpunkten konstruieren kann. Indem wir zu Potenzen von g übergehen, können wir g von Primzahlordnung annehmen.

Ist $\operatorname{ord} g \geq 5$, so wählen wir einen Zykel von g und betrachten einen Dreizykel h, der von einem festen Ausgangspunkt auf dem Zykel von g zwei Schritte mitläuft um dann wieder zum Ausgangspunkt zurückzukehren. Dann ist unser Ausgangspunkt ein Fixpunkt von $\tilde{g} = h^{-1}g^{-1}hg$ und wir haben ein nichttriviales $\tilde{g} \in N$ gefunden, das mehr Fixpunkte hat als g.

Ist $\operatorname{ord} g = 3$ und ist g kein Dreizykel, so muß g ein Produkt sein von mindestens zwei disjunkten Dreizykeln. Dann stimmen die Konjugationsklassen von g in A_r und in $\mathcal{S}_r$ überein, da es nämlich eine ungerade Permutation gibt, die mit g kommutiert, zum Beispiel eine geeignete „Dreifachtransposition zwischen zwei



Die durchgezogenen Pfeile stellen eine Permutation g der Ordnung ≥ 5 auf der Menge der fetten Punkte dar, die gestrichelten Pfeile den im Beweis beschriebenen Dreizykel h, der umrandete Punkt unseren „Ausgangspunkt“.



Die durchgezogenen Pfeile stellen einen Doppeldreizykel g auf der Menge der fetten Punkte dar, die gestrichelten Pfeile den im Beweis beschriebenen dazu konjugierten Doppeldreizykel h, der umrandete Punkt einen Fixpunkt von hg.

Dreizykeln von g“. Es ist nun ein Leichtes, in $\mathcal{S}_6$ zwei Doppeldreizykel zu finden derart, daß ihr Produkt nicht trivial ist und dennoch einen Fixpunkt hat. Wenn wir also einen Doppeldreizykel von g auf der zugehörigen 6-elementigen Menge konjugieren zu einem geeigneten anderen Doppeldreizykel, so erhalten wir ein $h \in N$ derart, daß hg nicht trivial ist und mehr Fixpunkte hat als g.

Ist schließlich $\operatorname{ord} g = 2$ und g keine Doppeltransposition, so muß g ein Produkt sein von mindestens zwei disjunkten Doppeltranspositionen. Wieder stimmen dann die Konjugationsklassen von g in A_r und in $\mathcal{S}_r$ überein, da es eine ungerade Permutation gibt, die mit g kommutiert, zum Beispiel eine „Transposition aus einer Doppeltransposition von g“. Wir finden also $h \in N$ derart, daß h auf einer vierelementigen Teilmenge eine andere Doppeltransposition ist als g und außerhalb dieser vierelementigen Teilmenge mit g übereinstimmt. Dann ist hg die dritte Doppeltransposition auf unserer vierelementigen Teilmenge und die Identität außerhalb, ist also einerseits nicht trivial und hat andererseits mehr Fixpunkte als g. □

Übungen

Übung 1.6.7. Man zeige, daß die Gruppe aller jeweils nur endlich viele Elemente bewegenden geraden Permutationen einer unendlichen Menge eine einfache aber nicht endlich erzeugte Gruppe ist.

Ergänzende Übung 1.6.8. Man zeige für $r \geq 5$, daß A_r der einzige nichttriviale echte Normalteiler von $\mathcal{S}_r$ ist. Man bestimme alle Kompositionsreihen aller symmetrischen Gruppen.

1.6.9. Nach der vorhergehenden Übung ist für $r \geq 5$ jeder Gruppenhomomorphismus von der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_r$ in eine weitere Gruppe entweder injektiv oder konstant oder hat denselben Kern wie das Signum. Salopp gesprochen kann es also kein „verbessertes Signum“ geben.

Ergänzende Übung 1.6.10. In dieser Übung sollen Sie zeigen, daß die Gruppe $\mathrm{SL}(2;\mathbb{F}_5)$ genau fünf 2-Sylows besitzt und daß die Operation dieser Gruppe auf der Menge ihrer 2-Sylows einen Isomorphismus

$$\mathrm{SL}(2;\mathbb{F}_5)/\{\pm \mathrm{id}\} \;\tilde{\to}\; A_5$$

mit der sogenannten „alternierenden Gruppe“ aller geraden Permutationen einer fünfelementigen Menge induziert. Den Quotienten auf der linken Seite notiert man auch $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{F}_5)$, er liegt als Untergruppe vom Index 2 in der Gruppe $\mathrm{PGL}(2;\mathbb{F}_5)$ aller von invertierbaren Matrizen induzierten Automorphismen der projektiven Gerade alias dem Quotienten von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{F}_5)$ nach der Gruppe der vier darin enthaltenen Diagonalmatrizen. Ich rate, der Reihe nach folgendes zu zeigen:

1. Jedes Element der Ordnung 4 in $\mathrm{SL}(2;\mathbb{F}_5)$ ist diagonalisierbar und der Normalisator seines Erzeugnisses ist eine 2-Sylow. Jede 2-Sylow enthält 6 Elemente der Ordnung 4.

2. Es gibt in $\mathrm{SL}(2;\mathbb{F}_5)$ genau dreißig Elemente der Ordnung 4 und fünf 2-Sylows, und der Schnitt von je zwei verschiedenen 2-Sylows besteht nur aus $\pm\mathrm{id}$.

3. Jede 2-Sylow von $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{F}_5)$ ist eine Klein'sche Vierergruppe und operiert nach 1.4.21 frei auf der Menge der vier anderen 2-Sylows. Vom Bild unseres Homomorphismus $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{F}_5) \to \mathcal{S}_5$ wissen wir damit, daß es alle Doppeltranspositionen enthält und aus höchstens 60 Elementen besteht. Nach 1.6.6 muß dieses Bild folglich die A_5 sein.

Ergänzung 1.6.11. Genau dann ist jede gerade Permutation von n Objekten ein Produkt von zwei l-Zykeln, falls gilt $3n/4 \leq l$. Edward Bertram: Even permutations as a product of two conjugate cycles. J. Combinatorial Theory Ser. A, 12: S. 368-380, 1972.

2 Mehr zu Ringen

2.1 Faktorringe

2.1.1. Wir erinnern die grundlegenden Definitionen zu Ringen aus [LA1] 5.1. Unter einem **Ring** versteht man eine Menge mit zwei Verknüpfungen $(R, +, \cdot)$ derart, daß $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist und $(R, \cdot)$ ein Monoid und daß für alle $a, b, c \in R$ die Distributivgesetze $a(b+c) = ab+ac$ sowie $(a+b)c = ac+bc$ gelten.

2.1.2. Das neutrale Element des multiplikativen Monoids eines Rings notiert man meist $1_R = 1$. Ein typisches Beispiel ist der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation als Verknüpfung. Ebenfall typisch ist der Ring $\mathrm{Mat}(n; R)$ der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus einem beliebigen Ring R mit der Addition und Multiplikation von Matrizen als Verknüpfung.

2.1.3. Eine Abbildung $\varphi : R \to S$ von einem Ring in einen anderen heißt ein **Ringhomomorphismus**, wenn sie sowohl ein Gruppenhomomorphismus ist für die zugrundeliegenden additiven Gruppen als auch ein Monoidhomomorphismus für die zugrundeliegenden multiplikativen Monoide.

2.1.4. Wir fordern von einem Monoidhomomorphismus stets, daß er das neutrale Element auf das neutrale Element abbildet. Insbesondere fordern wir von einem Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ stets $\varphi(1_R) = 1_S$. Die Menge aller Ringhomomorphismen von einem Ring R in einen Ring S notieren wir $\mathrm{Ring}(R, S)$.

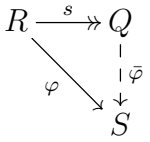
2.1.5. Die Stärke der Ringtheorie liegt unter anderem darin, daß es sehr viele Vefahren gibt, die zu einem gegebenen Ring einen weiteren Ring konstruieren, und daß man auf diese neuen Ringe dann wieder alle bereits bekannten Sätze anwenden kann. Beispiele sind das Bilden von Polynomringen, Potenzreihenringen [LA1] 5.3.45 und Matrizenringen. Wir besprechen im folgenden zusätzlich das Bilden von Faktorringen.

Satz 2.1.6 (Universelle Eigenschaft surjektiver Ringhomomorphismen). *Seien $s : R \twoheadrightarrow Q$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und $\varphi : R \to S$ ein beliebiger Ringhomomorphismus. Genau dann existiert ein Ringhomomorphismus $\bar{\varphi} : Q \to S$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ s$, wenn gilt $\ker(\varphi) \supset \ker(s)$.*

2.1.7. Dieser Homomorphismus $\bar{\varphi}$ ist dann natürlich eindeutig bestimmt. In diesem Sinne kann man diesen Satz auch dahingehend zusammenfassen, daß das Vorschalten eines surjektiven Homomorphismus $s : R \twoheadrightarrow Q$ für jeden weiteren Ring S eine Bijektion

$$(\circ s) : \mathrm{Ring}(Q, S) \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \mathrm{Ring}(R, S) \mid \ker(\varphi) \supset \ker(s)\}$$

liefert. Der Übersichtlichkeit halber stelle ich die in diesem Satz auftauchenden Ringe und Morphismen auch noch wieder anders in einem Diagramm dar:



Man formuliert diesen Satz auch mit den Worten, φ **faktorisiere in eindeutiger Weise über** s.

Beweis. Offensichtlich ist φ konstant auf den Fasern von s. Damit, oder auch indem wir die universelle Eigenschaft von surjektiven Gruppenhomomorphismen [LA2] 6.2.1 zitieren, finden wir schon mal eine Abbildung $\bar{\varphi}$ wie behauptet. Man prüft leicht, daß sie ein Ringhomomorphismus ist. □

2.1.8 (**Surjektive Ringhomomorphismen mit gleichem Kern**). Gegeben ein Ring R und zwei surjektive Ringhomomorphismen $s : R \twoheadrightarrow Q$ und $t : R \twoheadrightarrow P$ mit demselben Kern $\ker(s) = \ker(t)$ sind die Ringhomomorphismen $\bar{t} : Q \to P$ mit $\bar{t} \circ s = t$ und $\bar{s} : P \to Q$ mit $\bar{s} \circ t = s$ nach 2.1.6 offensichtlich zueinander inverse Isomorphismen $Q \tilde{\to} P \tilde{\to} Q$. Salopp gesprochen wird also bei einem surjektiven Ringhomomorphismus „das Ziel bereits durch den Ausgangsraum und den Kern festgelegt bis auf eindeutigen Isomorphismus“.

Definition 2.1.9. Sei R ein Ring. Ein **Ideal von** R ist eine Teilmenge $I \subset R$ mit der Eigenschaft, daß I eine Untergruppe ist von $(R, +)$ und daß zusätzlich gilt $RI \subset I$ und $IR \subset I$.

2.1.10. Anders gesagt ist also eine Teilmenge $I \subset R$ eines Rings ein Ideal genau dann, wenn gilt

1. $0 \in I$
2. $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$
3. $a \in I \Rightarrow (-a) \in I$
4. $r \in R, a \in I \Rightarrow ra, ar \in I$

Die Bedingung $(-a) \in I$ ist dabei sogar überflüssig, weil ja eh gilt $(-a) = (-1)a$ für alle $a \in R$. Weiter kann die Bedingung $0 \in I$ durch die Bedingung $I \neq \emptyset$ ersetzt werden, da ja gilt $0 = 0a$ für alle $a \in R$.

Beispiele 2.1.11. Ein Ideal von $\mathbb{Z}$ ist dasselbe wie eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, die Ideale von $\mathbb{Z}$ sind also nach [LA1] 4.3.4 genau die Teilmengen der Gestalt $\mathbb{Z}m$ für $m \in \mathbb{N}$. Für ein beliebiges Element a in einem kommutativen Ring R ist die Menge Ra aller Vielfachen von a ein Ideal. Der ganze Ring R und $\{0\}$ sind stets Ideale.

2.1.12. Ist $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so ist $\ker \varphi := \varphi^{-1}(0)$ ein Ideal von R. Man versteht bei Ringhomomorphismen den Kern stets in Bezug auf die additive Struktur. Allgemeiner ist das Urbild von einem Ideal unter einem Ringhomomorphismus stets wieder ein Ideal, und desgleichen das Bild eines Ideals unter einem *surjektiven* Ringhomomorphismus.

Proposition 2.1.13. *Seien R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. So gibt es einen von R ausgehenden surjektiven Ringhomomorphismus mit I als Kern.*

2.1.14. Nach 2.1.8 ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit Kern I eindeutig bis auf das Nachschalten eines eindeutigen Isomorphismus. Wir notieren ihn

$$\mathrm{can} = \mathrm{can_q} : R \twoheadrightarrow R/I$$

Vorsichtig veranlagte Leser mögen unter R/I alternativ das im folgenden Beweis konstruierte explizite Beispiel für solch einen Ringhomomorphismus verstehen. Das Bild in R/I von $a \in R$ bezeichnet man auch oft mit $\mathrm{can}(a) = \bar{a}$. Man nennt R/I einen **Faktorring** oder auch einen **Restklassen**. Üblich ist auch die Bezeichnung als „Quotientenring“, die ich aber vermeiden will, weil sie zur Verwechslung mit Quotientenkörpern einlädt, die etwas Grundverschiedenes sind.

Beispiel 2.1.15. Den Spezialfall der Restklassenringe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kennen wir bereits aus [LA1] 5.2.4.

Beweis. Wir gehen aus von der Surjektion $q : R \twoheadrightarrow R/I$ auf die Quotientengruppe in Bezug auf die additive Struktur. Dann gibt es genau eine biadditive Abbildung $\bar{m} : R/I \times R/I \to R/I$ derart, daß mit der Multiplikation m in der oberen Horizontale das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R \times R & \xrightarrow{\ m\ } & R \\ {\scriptstyle q\times q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ R/I \times R/I & \xrightarrow{\ \bar{m}\ } & R/I \end{array}$$

kommutiert, denn $q \circ m$ ist konstant auf den Fasern von $q \times q$. In der Tat haben wir $(r+i)(s+j) = rs + is + rj + ij \in rs + I$ für alle $i, j \in I$ und $r, s \in R$. In größerer Allgemeinheit haben Sie das möglicherweise bereits als Übung [LA2] 6.2.28 geprüft. Es ist dann leicht zu sehen, daß $\bar{m}$ als Multiplikation die Nebenklassengruppe R/I zu einem Ring macht. □

2.1.16. Ganz allgemein ist ein Schnitt von Idealen eines Rings R stets wieder ein Ideal. Gegeben eine Teilmenge $T \subset R$ bezeichen wir mit $\langle T\rangle \subset R$ das kleinste Ideal von R, das T umfaßt, und nennen es das **von T erzeugte Ideal**. Wir können $\langle T\rangle$ entweder beschreiben als den Schnitt aller Ideale, die T umfassen, oder als die Menge aller endlichen Ausdrücke

$$\langle T\rangle = \{a_1t_1b_1 + \ldots + a_nt_nb_n \mid n \geq 0,\ a_i, b_i \in R,\ t_i \in T\}$$

Hierbei ist der leere Ausdruck mit $n = 0$ wie üblich als die Null von R zu verstehen. Ist $T = \{t_1, \ldots, t_r\}$ eine endliche Menge, so schreiben wir auch $\langle T\rangle = \langle t_1, \ldots, t_r\rangle$. Insbesondere gilt für einen kommutativen Ring R zum Beispiel $\langle a\rangle = Ra$ für alle $a \in R$. Wollen wir betonen, daß das Symbol zwischen den Spitzklammern für eine Menge von Erzeugern und nicht für einen einzigen Erzeuger steht, so schreiben wir $\langle T\rangle = \langle{}_!T\rangle$. Ideale, die von einem einzigen Element erzeugt werden können, heißen **Hauptideale**. Insbesondere ist nach [LA1] 4.3.4 jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ ein Hauptideal.

2.1.17. Einen kommutativen Ring nennen wir kurz einen **Kring**.

Ergänzung 2.1.18. Sei R ein Ring und $T \subset R$ eine Teilmenge. Wenn wir betonen wollen, daß $\langle T\rangle$ das von T erzeugte Ideal und nicht etwa die von T erzeugte Untergruppe meint, schreiben wir auch ${}_R\langle T\rangle_R$ oder $\langle RTR\rangle$ und im Fall eines kommutativen Rings $\langle T\rangle_R$ oder $\langle TR\rangle$. Im Fall eines nichtkommutativen Rings dahingegen meint $\langle T\rangle_R = \langle TR\rangle$ das von T erzeugte Rechtsideal, wie es in [KAG] 2.3.4 eingeführt wird.

Ergänzung 2.1.19 (**Herkunft der Bezeichnung „Ideal“**). Die Bezeichnung als „Ideal“ ist abgeleitet von Kummer's Begriff einer „idealen Zahl“. Diese „idealen Zahlen“ führte Kummer ein, um Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Nichtexistenz eindeutiger Primfaktorzerlegungen in sogenannten „Ganzheitsringen von Zahlkörpern“ zu umgehen. Das einfachste Beispiel $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ für dieses Phänomen besprechen wir in 2.4.8. Erklären wir auf der Menge aller von Null verschiedenen Ideale eines solchen Ganzheitsrings $\mathfrak{o}$ eine Verknüpfung, in dem wir IJ als das von allen Produkten ab mit $a \in I$ und $b \in J$ erzeugte Ideal alias die von allen solchen Produkten erzeugte Untergruppe verstehen, die wir eigentlich $\langle IJ\rangle$ notieren müßten, so gilt in dieser Menge aller Ideale nämlich das Analogon der eindeutigen Primfaktorzerlegung, vergleiche etwa [KAG] 8.2.11. Ordnen wir nun jeder Zahl $a \in \mathfrak{o}$ das von a erzeugte Hauptideal $\langle a\rangle$ zu, so erhalten wir eine Einbettung

$$\mathfrak{o}/\mathfrak{o}^\times \hookrightarrow \{I \subset \mathfrak{o} \mid I \text{ ist Ideal}\}$$

des Monoids aller „bis auf Einheiten wohlbestimmten Elemente von $\mathfrak{o}$“, in dem das Analogon der eindeutigen Primfaktorzerlegung nicht immer gilt, in das Monoid aller von Null verschiedenen Ideale, in dem es im Fall des Ganzheitsrings eines

Zahlkörpers eben doch immer gilt. Kummer konnte das in einigen Fällen bereits selbst zeigen und bezeichnete deshalb die Elemente dieses größeren Monoids, das er selbst auf recht verschlungenen Wegen konstruierte, als „ideale Zahlen“.

2.1.20 (**Ideale und Teilerbeziehung**). Gegeben ein Kring R und Elemente $a, b \in R$ ist a ein Teiler von b genau dann, wenn gilt $\langle a\rangle \ni b$ oder gleichbedeutend $\langle a\rangle \supset \langle b\rangle$, in Formelsprache

$$a|b \;\Leftrightarrow\; b \in \langle a\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle b\rangle \subset \langle a\rangle$$

Gegeben ein Kring R und ein Element $u \in R$ ist u eine Einheit genau dann, wenn gilt $\langle u\rangle = R$. Gegeben ein kommutativer Integritätsbereich folgt aus $\langle a\rangle = \langle b\rangle$, daß es eine Einheit $u \in R^\times$ gibt mit $au = b$.

Beispiel 2.1.21 (**Faktorringe von Polynomringen**). Gegeben ein Körper k und ein von Null verschiedenes Polynom $P \in k[X]\backslash 0$ haben wir

$$\dim_k k[X]/\langle P\rangle = \operatorname{grad} P$$

Genauer bilden für $\operatorname{grad} P = d$ die Nebenklassen der Monome $1, X, \ldots, X^{d-1}$ eine k-Basis des Faktorrings $k[X]/\langle P\rangle$. Noch etwas allgemeiner liefert Polynomdivision mit Rest [LA1] 5.3.15 für jeden Kring k und jedes normierte Polynom $P \in k[X]$, daß die Polynome von einem Grad $\leq (\operatorname{grad} P) - 1$ ein Repräsentantensystem für die Menge $k[X]/\langle P\rangle$ der Nebenklassen nach dem von P erzeugten Hauptideal bilden. Bezeichnet also $k[X]^{\leq n} \subset k[X]$ die Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$, so liefert für jedes normierte Polynom P die kanonische Projektion einen Gruppenisomorphismus

$$k[X]^{\leq (\operatorname{grad} P)-1} \xrightarrow{\sim} k[X]/\langle P\rangle$$

Beispiel 2.1.22 (**Die komplexen Zahlen als Faktorring**). Wir erinnern die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit ihrem ausgezeichneten Element $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Das Einsetzen von i für X im Sinne von [LA1] 5.3.5 liefert mithilfe der universellen Eigenschaft des Faktorrings 2.1.13 Isomorphismen von Ringen

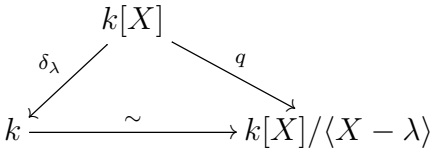
$$\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

und $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 1\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Hier ist $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ im Vorgriff auf 2.2.1 zu verstehen als der Ring aller komplexen Zahlen mit ganzzahligem Real- und Imaginärteil. Ich mache die Nebenrechnung $(X - (2 + \mathrm{i}))(X - \overline{(2 + \mathrm{i})}) = X^2 - 4X + 3$. Das Einsetzen von $2 + \mathrm{i}$ für X liefert also auch einen Isomorphismus

$$\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 4X + 2\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

Allgemeiner könnten wir hier den Faktorring nach jedem Polynom vom Grad Zwei ohne reelle Nullstelle nehmen.

2.1.23. Gegeben ein Kring k und ein Element $\lambda \in k$ kommutiert das Diagramm



mit der Auswertungsabbildung δ_λ nach links unten und der von der Einbettung $k \hookrightarrow k[X]$ induzierten unteren Horizontalen.

2.1.24 (**Polynomringe über Faktorringen**). Gegeben sei ein Ring R mit einem Ideal I. Bezeichnet $I[X] \subset R[X]$ das von unserem Ideal I im Polynomring erzeugte Ideal, so induziert der offensichtliche Ringhomomorphismus $R[X] \twoheadrightarrow (R/I)[X]$ aus [LA1] 5.3.11 offensichtlich einen Isomorphismus

$$R[X]/I[X] \xrightarrow{\sim} (R/I)[X]$$

Übungen

Ergänzende Übung 2.1.25. Man zeige: Gegeben ein surjektiver Ringhomomorphismus $\varphi : R \twoheadrightarrow S$ liefert das Bilden des Urbilds eine Bijektion zwischen der Menge der Ideale von S und der Menge derjenigen Ideale von R, die $\ker \varphi$ umfassen.

Übung 2.1.26. Gegeben ein normiertes Polynom P mit Koeffizienten in einem Körper k ist P bis auf ein Vorzeichen genau das charakteristische Polynom der Multiplikation mit X als Endomorphismus des k-Vektorraums $k[X]/\langle P\rangle$.

2.2 Teilringe

Definition 2.2.1. Eine Teilmenge eines Rings heißt ein **Teilring**, wenn sie so mit der Struktur eines Rings versehen werden kann, daß die Einbettung ein Ringhomomorphismus wird.

2.2.2. Gleichbedeutend und expliziter ist ein Teilring eines Rings eine Teilmenge, die das Einselement und sein Negatives enthält und abgeschlossen ist unter Addition und Multiplikation.

Ergänzung 2.2.3. Die in [LA1] 5.1.5 bereits angesprochene Begriffsverwirrung setzt sich hier fort: Autoren, deren Ringe kein Einselement zu enthalten brauchen, fordern von ihren Teilringen zwar dem Wortlaut nach dasselbe wie wir im ersten Satz der Definition 2.2.1. Es bedeutet dann aber in unserer Terminologie nur noch, daß unsere Teilmenge unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist und mit diesen Verknüpfungen zu einem Rng wird. Wir nennen eine derartige

Teilmenge eine $\mathbb{Z}$**-Unteralgebra**. Jedes Ideal eines Rings ist eine $\mathbb{Z}$-Unteralgebra, aber das einzige Ideal, das ein Teilring ist, ist der ganze Ring selber. Es ist im übrigen auch durchaus möglich, daß eine $\mathbb{Z}$-Unteralgebra eine Rings selbst wieder ein Ring ist, ohne aber in unserem Sinne ein Teilring zu sein: Der Nullring etwa ist eine $\mathbb{Z}$-Unteralgebra aber kein Teilring von $\mathbb{Q}$, und der Ring $\mathbb{Z} \times 0$ ist eine $\mathbb{Z}$-Unteralgebra aber kein Teilring von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2.2.4. Jeder Schnitt von Teilringen ist selbst ein Teilring. Den kleinsten Teilring eines Ringes R, der eine gegebene Teilmenge $T \subset R$ umfaßt, heißt der **von** T **erzeugte Teilring**. Gegeben $S \supset R$ ein Kring mit einem Teilring und Elemente $a_1, \ldots, a_n \in S$ bezeichnet man mit

$$R[a_1, \ldots, a_n] \subset S$$

den Teilring von S, der von R und den a_i erzeugt wird, in anderen Worten den kleinsten Teilring von S, der R umfaßt und alle a_i enthält.

2.2.5. Die Notation aus 2.2.1 führt leicht zu Verwechslungen mit Polynomringen. Viele Autoren verwenden die Konvention, nach der die „freien“ oder „unabhängigen“ Variablen in Polynomringen mit großen Buchstaben vom Ende des Alphabets geschrieben werden, die „abhängigen“ Erzeuger eines Teilrings in einem bereits gegebenen Ring dahingegen mit kleinen Buchstaben. Nebenbei bemerkt kann man $R[a_1, \ldots, a_n]$ auch beschreiben als das Bild des Einsetzungshomomorphismus $R[X_1, \ldots, X_n] \to S$ mit $X_i \mapsto a_i$. Ist dieser Einsetzungshomomorphismus injektiv, also ein Isomorphismus auf sein Bild, so heißen die Elemente a_i **algebraisch unabhängig über** R. Wollen wir besonders betonen, daß wir mit freien Veränderlichen arbeiten, so setzen wir ein kleines „Freiheitsstrichlein“ vorne in die Klammer und schreiben $R[' X_1, \ldots, X_n]$. Diese Notation gibt es jedoch meines Wissens bisher nur in diesem Skriptum.

2.2.6 (**Isomorphiesatz für Ringe**). Gegeben ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ ist nach 2.1.12 der Kern $\ker \varphi$ ein Ideal von R und das Bild $\operatorname{im} \varphi$ offensichtlich ein Teilring von S. Nach 2.1.13 und dem Isomorphiesatz [LA2] 6.2.12 faktorisiert φ dann über einen Ringisomorphismus

$$R \twoheadrightarrow R/(\ker \varphi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} \varphi \hookrightarrow S$$

Übungen

Ergänzende Übung 2.2.7. Seien $K \subset L$ Körper, $I \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Bezeichne $\langle IL[X_1, \ldots, X_n] \rangle$ das von I im Polynomring über L erzeugte Ideal. So gilt

$$I = K[X_1, \ldots, X_n] \cap \langle IL[X_1, \ldots, X_n] \rangle$$

Hinweis: Jedes Element von $\langle IL[X_1, \ldots, X_n] \rangle$ hat die Gestalt $c_1 f_1 + \ldots + c_r f_r$ mit $f_\nu \in I$ und $c_\nu \in L$ linear unabhängig über K.

Übung 2.2.8. Man zeige, daß der Teilring $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$ ein Körper ist.

Übung 2.2.9. Man zeige, daß $\mathbb{Z}$ der einzige Teilring von $\mathbb{Q}$ ist, der endlich erzeugt ist als abelsche Gruppe.

2.3 Abstrakter chinesischer Restsatz

2.3.1. Gegeben Ringe $R_1, \ldots, R_s$ bilden wir den **Produktring** $R_1 \times \ldots \times R_s$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. Gegeben ein weiterer Ring R und Ringhomomorphismen $f_i : R \to R_i$ erhalten wir einen Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} (f_1, \ldots, f_s): & R & \to & R_1 \times \ldots \times R_s \\ & r & \mapsto & (f_1(r), \ldots, f_s(r)) \end{array}$$

Genauer sind die Projektionen Ringhomomorphismen $\mathrm{pr}_i : R_1 \times \ldots \times R_s \to R_i$ und das Nachschalten der Projektionen liefert für jeden weiteren Ring R eine Bijektion

$$\mathrm{Ring}(R, R_1 \times \ldots \times R_s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ring}(R, R_1) \times \ldots \times \mathrm{Ring}(R, R_s)$$

In der Terminologie [LA2] 9.7.8 liefert unsere Konstruktion also ein Produkt in der Kategorie der Ringe.

Definition 2.3.2. Gegeben Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in einem Ring R ist auch ihre **Summe**

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := \{a + b \mid a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\}$$

ein Ideal. Gegeben Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in einem Ring R erklären wir ihr **Produkt** und bezeichnen mit

$$\langle \mathfrak{a}\mathfrak{b} \rangle$$

dasjenige Ideal oder gleichbedeutend diejenige additive Untergruppe von R, das beziehungsweise die von allen Produkten ab mit $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ erzeugt wird. Analog notieren wir auch Produkte von mehr als zwei Idealen.

2.3.3. Für das Produkt zweier Ideale ist die Notation $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gebräuchlicher, die wir eigentlich bereits für die von der Multiplikation eines Rings auf seiner Potenzmenge induzierte Verknüpfung vergeben haben. Dennoch werden wir später meist diese abkürzende Notation für das Produkt von Idealen verwenden und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, was genau gemeint ist.

Satz 2.3.4 (Abstrakter chinesischer Restsatz). *Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ endlich viele Ideale eines Rings R. Gilt $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = R$ für $i \neq j$, so ist die offensichtliche Abbildung eine Surjektion*

$$\kappa : R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{a}_s$$

mit Kern $(\ker \kappa) = \bigcap_i \mathfrak{a}_i$ *dem Schnitt unserer Ideale. Für einen kommutativen Ring* R *fällt dieser Schnitt auch mit dem Produktideal* $\langle \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle$ *zusammen und wir erhalten einen Ringisomorphismus*

$$R/\langle \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle \quad \tilde{\to} \quad R/\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times R/\mathfrak{a}_s$$

Beispiel 2.3.5. Der Name dieses Satzes rührt von seiner Bedeutung im Ring der ganzen Zahlen her, die wir bereits in [LA2] 6.3.11 folgende besprochen hatten.

Beispiel 2.3.6. Wir finden etwa

$$\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 1 \rangle \tilde{\to} \mathbb{R}[X]/\langle X + 1 \rangle \times \mathbb{R}[X]/\langle X - 1 \rangle \tilde{\to} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

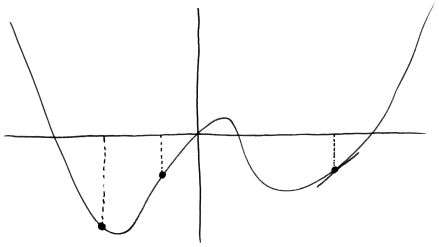
und ähnlich für den Faktorring $\mathbb{R}[X]/\langle P \rangle$ nach dem Hauptideal eines beliebigen quadratischen Polynoms P mit zwei reellen Nullstellen im Gegensatz zum Fall 2.1.22 eines reellen quadratischen Polynoms ohne reelle Nullstelle.

Beweis. Für die Surjektivität reicht es nachzuweisen, daß alle nur in einem Eintrag von Null verschiedenen Tupel im Bild liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit reicht es also zu zeigen, daß für alle $r \in R$ das Tupel $(\bar{r}, 0, \ldots, 0)$ im Bild liegt. Es reicht sogar, wenn wir das für $r = 1$ zeigen, denn aus $\kappa(x) = (\bar{1}, 0, \ldots, 0)$ folgt $\kappa(rx) = \kappa(r)\kappa(x) = (\bar{r}, 0, \ldots, 0)$. Nach Annahme gilt für $i \neq 1$ jedoch $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_1 = R$, wir finden für $i \neq 1$ also eine Darstellung $a_i + b_i = 1$ mit $a_i \in \mathfrak{a}_i$ und $b_i \in \mathfrak{a}_1$. Für das Ringelement $a_i = 1 - b_i$ hat $\kappa(a_i)$ die Gestalt

$$\kappa(a_i) = (1, *, \ldots, *, 0, *, \ldots *)$$

mit einer Null an der i-ten Stelle. Für das Bild des Produkts der a_i folgt dann $\kappa(a_2 a_3 \ldots a_s) = (1, 0, \ldots, 0)$ und die Surjektivität ist gezeigt. Der Kern dieser Surjektion ist offensichtlich genau der Schnitt der $\mathfrak{a}_i$. Wir müssen nur noch zeigen, daß er für kommutatives R mit dem Produktideal zusammenfällt. Im Fall $s = 2$ impliziert $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$ schon mal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \langle \mathfrak{a}\mathfrak{b} \rangle$, denn schreiben wir $1 = a + b$ mit $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$, so gilt $x = xa + xb$ auch für alle $x \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Im allgemeinen beachten wir, daß das Aufmultiplizieren unserer Identitäten $a_i + b_i = 1$ von eben mit $a_i \in \mathfrak{a}_1$ und $b_i \in \mathfrak{a}_i$ für $2 \leq i \leq n$ sogar zeigt $\mathfrak{a}_1 + \langle \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle = R$. Mit vollständiger Induktion erhalten wir dann $\mathfrak{a}_1 \cap (\mathfrak{a}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s) = \mathfrak{a}_1 \cap \langle \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle = \langle \mathfrak{a}_1 \langle \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle \rangle = \langle \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_s \rangle$. □

2.3.7. Wir schreiben auch $\langle I^n \rangle$ für das n-fache Produkt eines Ideals mit sich selbst. Betrachten wir zum Beispiel $R = k[X, Y]$ für einen Körper k und darin das Ideal $I = \langle X, Y \rangle$, so gilt $\langle I^2 \rangle = \langle X^2, XY, Y^2 \rangle$, $\langle I^3 \rangle = \langle X^3, X^2Y, XY^2, Y^3 \rangle$ und so weiter.



Eine Interpolation in einer Variablen mit vorgegebenen Werten an zwei Punkten und vorgegebenem Wert und Wert der Ableitung an einem weiteren Punkt.

Korollar 2.3.8 (Polynominterpolation). *Seien k ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir finden stets ein Polynom $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$, das an endlich vielen vorgegebenen Stellen des k^n vorgegebene Werte annimmt und sogar eine beliebig vorgegebene Taylorentwicklung bis zu einem festen endlichen Grad hat.*

Beweis. Für einen Punkt $p \in k^n$ bezeichne $I(p)$ das Ideal aller Polynome, die bei p verschwinden. Mit der vagen Formulierung „die Taylorentwicklung bei p eines Polynoms $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ bis zum Grad $m-1$ vorzugeben“ meinen wir, seine Nebenklasse in $k[X_1, \ldots, X_n]/\langle I(p)^m \rangle$ vorzugeben. Damit wir den abstrakten chinesischen Restsatz anwenden können, müssen wir nur noch zeigen $\langle I(p)^m \rangle + \langle I(q)^m \rangle = \langle 1 \rangle$ falls $p \neq q$. Offensichtlich gilt $I(p) + I(q) = \langle 1 \rangle$, denn p und q unterscheiden sich in mindestens einer Koordinate, sagen wir $p_i \neq q_i$, und dann ist $(X_i - p_i) + (q_i - X_i)$ eine Einheit im Polynomring. Schreiben wir nun $1 = a + b$ mit $a \in I(p)$ und $b \in I(q)$ und nehmen von dieser Gleichung die $2m$-te Potenz, so folgt $1 \in \langle I(p)^m \rangle + \langle I(q)^m \rangle$ wie gewünscht. □

2.4 Euklidische Ringe und Primfaktorzerlegung

2.4.1. Die folgende schematische Übersicht soll die Struktur dieses Abschnitts und die Beziehungen der darin neu eingeführten Begriffe untereinander verdeutlichen:

Interessante Kringe, etwa $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, oder der Ring $k[X]$ für einen Körper k;
$\cap$
Euklidische Ringe, in denen es eine „Division mit Rest“ gibt;
$\cap$
Hauptidealringe oder Körper: Jedes Ideal wird darin von einem Element erzeugt;
$\cap$
Faktorielle Ringe, alias Kringe mit „eindeutiger Primfaktorzerlegung“.

Wir arbeiten nun unser Schema von unten nach oben ab und beginnen mit faktoriellen Ringen.

Definition 2.4.2. Ein Element a eines Krings R heißt **irreduzibel** oder genauer **irreduzibel in** R, wenn es weder eine Einheit ist noch sich als ein Produkt von zwei Nichteinheiten darstellen läßt. In Formeln fordern wir also $a \notin R^\times$ und $a = bc \Rightarrow (b \in R^\times \text{ oder } c \in R^\times)$.

Beispiele 2.4.3. Die Null ist nie irreduzibel, denn im Nullring ist sie eine Einheit und in anderen Kringen das Produkt der zwei Nichteinheiten $0 = 0 \cdot 0$. Eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}$ genau dann, wenn ihr Betrag $|n|$ eine Primzahl ist. In einem Körper gibt es überhaupt keine irreduziblen Elemente. Insbesondere ist jede Primzahl p zwar irreduzibel in $\mathbb{Z}$, aber nicht irreduzibel in $\mathbb{Q}$.

2.4.4. Ich erinnere daran, daß man unter einem **Integritätsbereich** oder **Integritätsring** einen von Null verschiedenen Ring versteht, bei dem das Produkt je zweier von Null verschiedener Elemente auch wieder von Null verschieden ist.

Definition 2.4.5. Ein Ring R heißt **faktoriell**, wenn er ein kommutativer Integritätsbereich ist und wenn zusätzlich gilt:

1. Jedes $a \in R\backslash(R^\times \sqcup \{0\})$ läßt sich darstellen als ein Produkt von irreduziblen Elementen, in Formeln $a = p_1 \dots p_n$ mit p_i irreduzibel und $n \geq 1$;

2. Diese Darstellung ist eindeutig bis auf Einheiten und die Reihenfolge der Faktoren. Ist genauer $a = q_1 \dots q_m$ eine zweite Darstellung wie eben, so gilt $n = m$ und es gibt eine Permutation $\tau \in \mathcal{S}_n$ von n sowie Einheiten $u_i \in R^\times$ mit $q_i = u_i p_{\tau(i)}$ für $1 \leq i \leq n$.

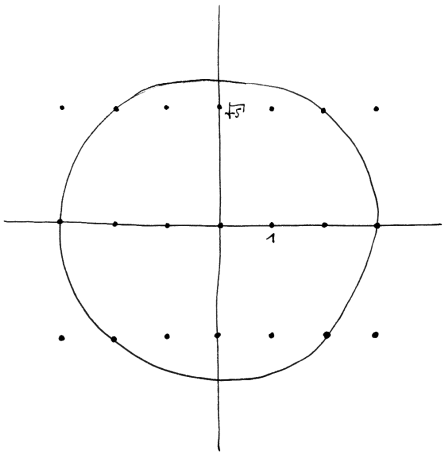
Vorschau 2.4.6. Unsere einzigen Beispiele für faktorielle Ringe sind bisher $\mathbb{Z}$ und alle Körper. Im folgenden werden wir viele weitere Beispiele für faktorielle Ringe kennenlernen und insbesondere zeigen, daß Polynomringe über Körpern, ja Polynomringe über faktoriellen Ringen stets faktoriell sind.

Ergänzung 2.4.7. Gegeben ein Integritätsbereich bilden die von Null verschiedenen Elemente ein Monoid und unser Integritätsbereich ist faktoriell genau dann, wenn dieses Monoid isomorph ist zum Produkt einer abelschen Gruppe, eben der Einheitengruppe unseres Integritätsbereichs, mit einem freien Abmonoid. Ein freies Abmonoid ist hierbei zu verstehen als ein „freies Objekt“ im Sinne von [**?**] **??** oder explizit als ein Monoid, das isomorph ist zum Monoid aller fast überall verschwindenden Abbildungen von einer Menge in das additive Monoid $\mathbb{N}$.

Beispiele 2.4.8 (**Ein Integritätsbereich, der nicht faktoriell ist**). Als Beispiel für einen nicht faktoriellen kommutativen Integritätsbereich betrachten wir den Teilring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ der komplexen Zahlen, der gegeben wird durch

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\,\mathrm{i}\,\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

Ich behaupte, daß $6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5}) \cdot (1-\sqrt{-5})$ zwei Zerlegungen in irreduzible Faktoren sind, die sich nicht nur um Einheiten und Reihenfolge unterscheiden. Das folgt leicht unter Verwendung der Multiplikativität der Norm $|zw| = |z||w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$ aus der anschließenden Tabelle, in der alle Elemente $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ der Quadratlänge $|z|^2 \leq 9$ aufgelistet sind.



Einige Elemente des Rings $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ als Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene, dazu ein Kreis mit dem Radius 3 um den Ursprung.

$\lvert z\rvert^2$	mögliche $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$
0	0
1	± 1
4	± 2
5	$\pm\sqrt{-5}$
6	$(\pm 1) + (\pm\sqrt{-5})$
9	± 3, $(\pm 2) + (\pm\sqrt{-5})$

Definition 2.4.9. Ein Ring R heißt ein **Hauptidealring**, wenn R ein kommutativer Integritätsbereich ist aber kein Körper und wenn zusätzlich jedes Ideal von R ein Hauptideal ist, also von einem einzigen Element erzeugt wird.

Beispiel 2.4.10. Nach [LA1] 4.3.4 ist der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ein Hauptidealring. Der Polynomring in zwei Variablen $\mathbb{C}[X, Y]$ ist kein Hauptidealring, denn das Ideal aller beim Ursprung von $\mathbb{C}^2$ verschwindenden Polynome ist kein Hauptideal: Jedes Polynom in zwei Variablen, das am Ursprung verschwindet, verschwindet auch sonst noch irgendwo, und dasselbe gilt für alle Polynome des von ihm erzeugten Hauptideals.

Satz 2.4.11. *Jeder Hauptidealring ist faktoriell.*

Ergänzung 2.4.12. In diesem Beweis verwenden wir implizit das Auswahlaxiom, um die Existenz einer Faktorisierung in Irreduzible zu zeigen. Will man es an dieser Stelle vermeiden, mag man sich auf den Fall euklidischer Ringe beschränken, für den wir in 2.4.18 einen Beweis ohne Auswahlaxiom geben.

Beweis. Wir zeigen als erstes, daß in einem Hauptidealring jedes Element $a \in R\backslash(R^\times \sqcup \{0\})$ ein Produkt von endlich vielen irreduziblen Elementen ist. Produkte mit nur einem Faktor sind ausdrücklich zugelassen. Produkte mit gar keinem Faktor sollten wir der terminologischen Konsistenz halber auch zulassen, aber sie sind im folgenden irrelevant. Wir argumentieren durch Widerspruch. Gäbe es ein Element $a \in R\backslash(R^\times \sqcup \{0\})$, das kein Produkt von Irreduziblen ist, so wäre insbesondere a selbst nicht irreduzibel alias Produkt von einem Irreduziblen, wäre also von der Gestalt $a = a_1 b_1$ mit $a_1, b_1 \notin R^\times$. Hier können nicht sowohl a_1 als auch b_1 Produkte von Irreduziblen sein. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, a_1 sei kein Produkt von Irreduziblen, und können schreiben $a_1 = a_2 b_2$ mit $a_2, b_2 \notin R^\times$ so, daß a_2 kein Produkt von Irreduziblen ist. Wir bemerken nun, daß in einem Integritätsbereich R für $a, b \in R\backslash 0$ die Gleichheit $\langle a\rangle = \langle b\rangle$ von Hauptidealen äquivalent ist zu $a = ub$ mit einer Einheit $u \in R^\times$. Indem wir wie oben immer weitermachen, finden wir also in R eine unendliche echt aufsteigende Folge von Hauptidealen

$$\langle a\rangle \subsetneq \langle a_1\rangle \subsetneq \langle a_2\rangle \subsetneq \dots$$

Die Vereinigung über alle diese Hauptideale ist auch ein Ideal, also ein Hauptideal $\langle h\rangle$. Diese Vereinigung ist aber aber auch das Erzeugnis $\langle h\rangle = \langle a_1, a_2, \dots\rangle$ der a_i. Es folgt eine Relation der Gestalt $h = r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$ und damit $\langle h\rangle = \langle a_n\rangle$ im Widerspruch zu $\langle a_n\rangle \neq \langle a_{n+1}\rangle$. Dieser Widerspruch zeigt, daß jedes Element, das weder Null ist noch eine Einheit, ein Produkt von Irreduziblen sein muß. Jetzt zeigen wir die Eindeutigkeit der Darstellung als Produkt von Irreduziblen bis auf Reihenfolge und Einheiten. Es reicht dazu, ähnlich wie wir das im Fall der ganzen Zahlen bereits gesehen hatten, wenn wir für jedes irreduzible Element p zeigen

$$p|ab \;\Rightarrow\; p|a \text{ oder } p|b$$

Wir wiederholen dafür unseren Beweis des Lemmas von Euklid [LA1] 4.4.16. Gleichbedeutend dürfen wir zeigen, daß aus $p \nmid a$ und $p|ab$ folgt $p|b$. Weil wir in einem Hauptidealring sind, gibt es aber c mit $\langle a, p\rangle = \langle c\rangle$ und wegen $c|p$ und p irreduzibel haben wir entweder $c \in R^\times p$ oder $c \in R^\times$. Der erste Fall $c \in R^\times p$ wird durch $p \nmid a$ ausgeschlossen, also haben wir $c \in R^\times$ alias $\langle a, p\rangle = R$ alias $1 = ax + py$ für geeignete $x, y \in R$. Multiplikation mit b liefert dann $b = abx + bpy$ und zusammen mit $p|ab$ folgt $p|b$ wie gewünscht. □

Definition 2.4.13. Ein **euklidischer Ring** ist ein kommutativer Integritätsbereich mit einer Abbildung $\sigma : R\backslash 0 \to \mathbb{N}$ derart, daß man für alle $a, b \in R$ mit $a \neq 0$ Elemente $q, r \in R$ finden kann mit $b = aq + r$ und $r = 0$ oder $\sigma(r) < \sigma(a)$.

2.4.14. Salopp gesprochen ist also ein euklidischer Ring ein Integritätsbereich, in dem man „teilen kann mit Rest“, wobei der Rest in einer präzisen, durch σ spezifizierten Weise „kleiner“ sein soll als der Teiler. Alle unsere Argumente funktionieren auch noch, wenn σ allgemeiner Werte in einer beliebigen „wohlgeordneten“ Menge annimmt, als da heißt einer angeordneten Menge, in der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Beispiele 2.4.15.

1. $R = \mathbb{Z}$ mit $\sigma(n) = |n|$;
2. $R = k[X]$ für einen Körper k und $\sigma(P) = \operatorname{grad} P$, siehe [LA1] 5.3.15;
3. $R = \mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{x + y\,\mathrm{i} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, $\sigma(x + y\,\mathrm{i}) = x^2 + y^2$. Dieser Ring der sogenannten **Gauß'schen Zahlen** ist als Teilring von $\mathbb{C}$ zu verstehen. Wir werden dies Beispiel in 2.6 noch ausführlich besprechen.

Satz 2.4.16. *Jeder euklidische Ring ist ein Körper oder ein Hauptidealring und damit insbesondere faktoriell.*

Ergänzung 2.4.17. Dieser Satz verallgemeinert unseren Satz [LA1] 4.3.4, mit dem wir alle Untergruppen der Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen beschrieben hatten. Der Beweis ist auch im wesentlichen derselbe.

Beweis. Sei $I \subset R$ ein Ideal. Ist $I = 0$, so ist $I = \langle 0 \rangle$ ein Hauptideal. Sonst finden wir $a \in I\backslash 0$ mit $\sigma(a)$ kleinstmöglich. Wir behaupten $I = \langle a \rangle$. Gäbe es nämlich $b \in I\backslash\langle a \rangle$, so könnten wir schreiben $b = aq + r$ mit $r \neq 0$ und $\sigma(r) < \sigma(a)$. Dann gilt aber auch $r = b - aq \in I$, und das steht im Widerspruch zur Wahl von a. □

Ergänzung 2.4.18 (**Faktorialität ohne Zorn**). Für die Beweise der zentralen Resultate dieser Vorlesung müssen wir nur wissen, daß euklidische Ringe faktoriell sind. In diesem Fall können wir die Existenz einer Faktorisierung in Irreduzible auch ohne Auswahlaxiom einsehen. Dazu brauchen wir nur die Erkenntnis aus dem vorhergehenden Beweis, nach der jedes von Null verschiedene Ideal von jedem seiner von Null verschiedenen Elemente mit kleinstmöglichem σ-Wert erzeugt wird. Gäbe es nun von Null verschiedene Elemente ohne Faktorisierung in Irreduzible, so auch ein derartiges Element a mit kleinstmöglichem σ-Wert. Es hätte dann eine Faktorisierung in ein Produkt von zwei Nichteinheiten $a = bc$, und die Hauptideale $\langle b \rangle$ und $\langle c \rangle$ wären echt größer als $\langle a \rangle$. Das Minimum von σ auf $\langle b \rangle\backslash 0$ müßte also echt kleiner sein als das Minimum von σ auf $\langle a \rangle\backslash 0$, denn wir haben $b = aq + r$ mit $r \neq 0$ und $\sigma(r) < \sigma(a)$. Wird das Minimum von σ auf $\langle b \rangle\backslash 0$ bei β angenommen, so folgt weiter $\beta | b$ und damit $\beta \in R^\times b$. Genauso

finden wir $\gamma \in R^\times c$ mit $\sigma(\gamma) < \sigma(a)$. Dann aber müßten β und γ und damit auch b und c Faktorisierungen in Irreduzible besitzen und damit auch a selbst. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

Korollar 2.4.19. *Der Polynomring in einer Veränderlichen mit Koeffizienten in einem Körper ist stets ein Hauptidealring und ist insbesondere stets faktoriell.*

Beweis. Wie in 2.4.15 ausgeführt wird, ist unser Polynomring ein euklidischer Ring. Das Korollar folgt damit aus 2.4.16. □

2.4.20. Die irreduziblen Elemente des Polynomrings $k[X]$ mit Koeffizienten in einem Körper k nennt man **irreduzible Polynome**. Wenn wir mit mehreren Körpern gleichzeitig arbeiten, werden wir auch von **k-irreduziblen Polynomen** reden, da dieser Begriff ganz entscheidend von k abhängt: Zum Beispiel ist das Polynom $X^2 + 1$ zwar $\mathbb{R}$-irreduzibel, aber keineswegs $\mathbb{C}$-irreduzibel.

Beispiel 2.4.21. Die irreduziblen Polynome in $\mathbb{C}[X]$ sind nach [LA1] 5.3.28 genau die Polynome vom Grad Eins. Die irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$ sind nach [LA1] 5.3.30 genau die Polynome vom Grad Eins sowie die Polynome vom Grad Zwei ohne reelle Nullstelle. Die irreduziblen Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ lassen sich nicht so leicht aufzählen.

2.4.22. In anderen Worten liefert für jeden Körper K das Aufmultiplizieren eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Endliche Multimengen normierter} \\ \text{irreduzibler Polynome von } K[X] \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Polynome in } K[X] \\ \text{mit Leitkoeffizient Eins} \end{array} \right\}$$

Satz 2.4.23 (Faktorringe von Hauptidealringen). *Gegeben ein von Null verschiedenes Element a eines Hauptidealrings R sind gleichbedeutend:*

1. *Der Faktorring $R/\langle a\rangle$ ist ein Körper;*
2. *Der Faktorring $R/\langle a\rangle$ ist ein Integritätsbereich;*
3. *Unser Element a ist irreduzibel.*

Beweis. (1)⇒(2) ist klar. Wir zeigen nun (2)⇒(3) alias (nicht 3)⇒(nicht 2). Ist $a \in R$ nicht irreduzibel, so haben wir $a \in R^\times$ oder $a = bc$ mit $b, c \notin R^\times$. Im ersten Fall ist der Faktorring der Nullring und mithin kein Integritätsbereich. Im zweiten Fall folgt, da R ein Integritätsbereich ist, schon mal $b, c \notin \langle a\rangle$. Für die Nebenklassen in $R/\langle a\rangle$ gilt also $\bar{b} \neq 0$ und $\bar{c} \neq 0$ aber $\bar{b}\bar{c} = 0$. Deshalb kann für a nicht irreduzibel der Faktorring $R/\langle a\rangle$ kein Integritätsbereich sein, und das gilt sogar für einen beliebigen kommutativen Integritätsbereich R. Schließlich zeigen wir noch (3)⇒(1). Gegeben $a, b \in R$ gibt es $c \in R$ mit $\langle a, b\rangle = \langle c\rangle$. Insbesondere

ist c ein Teiler von a, und ist a irreduzibel, so folgt $\langle c\rangle = \langle a\rangle$ oder $\langle c\rangle = R$. Gilt zusätzlich $b \notin \langle a\rangle$, so folgt $\langle a, b\rangle = R$ und folglich gibt es $x, y \in R$ mit $1 = ax + by$. Dann aber ist $\bar{y}$ ein multiplikatives Inverses zu $\bar{b}$ in $R/\langle a\rangle$. □

Beispiel 2.4.24. Gegeben $p \in \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn p oder $-p$ eine Primzahl ist.

Beispiel 2.4.25. $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1\rangle$ ist ein Körper, genauer induziert das Einsetzen von i für X einen Isomorphismus dieses Körpers mit $\mathbb{C}$.

Beispiel 2.4.26. $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 2\rangle$ ist ein Körper, genauer induziert das Einsetzen von $\mathrm{i}\sqrt{2}$ für X einen Isomorphismus dieses Körpers mit $\mathbb{C}$.

Beispiel 2.4.27. $\mathbb{R}[X]/\langle X + 1\rangle$ ist ein Körper, genauer induziert das Einsetzen von -1 für X einen Isomorphismus dieses Körpers mit $\mathbb{R}$.

Beispiel 2.4.28. $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 1\rangle$ ist *kein* Körper. Vielmehr liefert der chinesische Restsatz in Verbindung mit dem vorhergehenden Beispiel einen Ringisomorphismus $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 1\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist kein Köper, es gilt darin ja etwa $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$.

Übungen

Übung 2.4.29. Man zeige, daß $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring ist.

Übung 2.4.30. Sei k ein Körper. Man zeige: (1) Alle Polynome vom Grad 1 sind irreduzibel in $k[X]$. (2) Ist $P \in k[X]$ irreduzibel und $\operatorname{grad} P > 1$, so hat P keine Nullstelle in k. (3) Ist $P \in k[X] \setminus k$ vom Grad $\operatorname{grad} P \leq 3$ und hat P keine Nullstelle in k, so ist P irreduzibel in $k[X]$. (4) Ist k algebraisch abgeschlossen, so sind die irreduziblen Polynome in $k[X]$ genau die Polynome vom Grad 1. Man gebe auch (5) ein Polynom positiven Grades in $\mathbb{R}[X]$ an, das keine Nullstelle hat, aber dennoch nicht irreduzibel ist.

Ergänzende Übung 2.4.31. In einem Polynomring in mindestens einer Variablen über einem Körper gibt es stets unendlich viele normierte irreduzible Polynome. Hinweis: Man multipliziere sonst alle zusammen und ziehe 1 ab.

Ergänzende Übung 2.4.32. Man zeige: Gegeben ein Körper k ist der Ring $k[\![X]\!]$ der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus k aus [LA1] 5.3.45 ein Hauptidealring und die Ideale dieses Rings sind das Nullideal sowie die Ideale $X^n k[\![X]\!]$ für $n \in \mathbb{N}$. Man bespreche die Primfaktorzerlegung in diesem Hauptidealring.

Übung 2.4.33. Seien R ein faktorieller Ring und $q \in \operatorname{Quot}(R)$ ein Element seines Quotientenkörpers und $n \geq 1$ mit $q^n \in R$. Man zeige $q \in R$.

Übung 2.4.34 (**Eindeutigkeitsaussagen für teilerfremde Polynome**). Seien k ein Körper und $f, g \in k[T]$ teilerfremde Polynome. Man zeige, daß es dann für

jedes Polynom h Polynome a, b gibt mit $h = af + bg$. Man zeige, daß man unter der zusätzlichen Annahme $g \neq 0$ hier (a, b) sogar so wählen kann, daß gilt $\operatorname{grad} a < \operatorname{grad} g$, und daß im Fall $\operatorname{grad}(h) \leq \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g) - 1$ unser Paar (a, b) dadurch dann eindeutig bestimmt ist. Hinweis: Dimensionsabschätzung. Die analoge Aussage gilt nicht für $k = \mathbb{Z}$, selbst wenn wir f und g normiert annehmen.

Übung 2.4.35. Im Faktorring eines faktoriellen Rings R nach dem Hauptideal zu einem Element $a \neq 0$ ist das Bild von $b \in R$ genau dann kürzbar, wenn a und b teilerfremd sind.

Übung 2.4.36. Seien k ein Körper und R eine Ringalgebra über k. Ein Element $\alpha \in R$ heißt **algebraisch über** k, wenn es ein von Null verschiedenes Polynom $P \in k[X]\backslash 0$ gibt mit $P(\alpha) = 0$. Man zeige, daß es in diesem Fall genau ein normiertes Polynom $Q \in k[X]$ kleinstmöglichen Grades gibt mit $Q(\alpha) = 0$. Es heißt dann das **Minimalpolynom von** α.

2.5 Primelemente und maximale Ideale*

Definition 2.5.1. Sei R ein Kring. Ein Element $p \in R$ heißt ein **euklidisches Element** oder üblicher **Primelement**, falls es weder Null noch eine Einheit ist und falls zusätzlich aus $p|ab$ folgt $p|a$ oder $p|b$. Wir sagen auch abkürzend, so ein Element sei **euklidisch** alias **prim**.

2.5.2 (**Diskussion der Terminologie**). Mir scheint die Bezeichnung als Primelement eine unglückliche Wahl, aber sie ist nun einmal historisch gewachsen. Einerseits sind nun zwar die positiven Primelemente des Rings der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ genau unsere Primzahlen, aber das ist bereits ein nichttrivialer Satz, den wir in [LA1] 4.4.16 als „Lemma von Euklid“ bewiesen hatten. Von ihrer ursprünglichen Definition her versteht man unter Primzahlen ja viel eher die positiven irreduziblen Elemente des Rings der ganzen Zahlen. Andererseits wäre es auch eine vernünftige Terminologie, in einem beliebigen kommutativen Ring diejenigen Elemente als Primelemente zu bezeichnen, die im Sinne von [KAG] 4.2.4 „ein Primideal erzeugen“, aber dann müßten wir in unserer Definition auch die Null als Primelement zulassen. So gesehen sitzt man mit der obigen und allgemein gebräuchlichen Definition eines Primelements leider zwischen allen Stühlen.

2.5.3 (**Primelemente und irreduzible Elemente**). Euklidische Elemente p alias Primelemente in Integritätsbereichen sind stets irreduzibel, denn aus $p = ab$ folgt $p|a$ oder $p|b$, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = p\alpha$ und dann $p = ab = p\alpha b$ und so $1 = \alpha b$ und b ist eine Einheit. Irreduzible Elemente müssen auch in Integritätsbereichen im allgemeinen keineswegs euklidisch alias prim sein, wie das Beispiel 2.4.8 des Rings $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mit den Zerlegungen $6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5}) \cdot (1-\sqrt{-5})$. Wir hatten uns ja überlegt, daß hier alle Faktoren irreduzibel sind,

sich aber nicht gegenseitig teilen. Also teilt $(1+\sqrt{-5})$ das Produkt $2\cdot 3$, teilt aber keinen der Faktoren. In einem faktoriellen Ring sind die euklidischen Elemente alias Primelemente aber offensichtlich genau die irreduziblen Elemente.

Definition 2.5.4. Ein Ideal in einem Ring heißt ein **echtes Ideal**, wenn es nicht der ganze Ring ist. Ein Ideal in einem Ring heißt ein **maximales echtes Ideal**, wenn es ein maximales Element der durch Inklusion teilgeordneten Menge aller *echten* Ideale unseres Ringes ist. Es ist eine allgemeine Konvention, unsere maximalen echten Ideale abkürzend als **maximale Ideale** zu bezeichnen, obwohl sie natürlich nicht die maximalen Elemente der Menge aller Ideale unseres Ringes sind: Diese Menge hat nämlich nur genau ein maximales Element, den Ring selbst. Ich werde dieser allgemeinen Konvention folgen.

Beispiele 2.5.5. Die maximalen Ideale eines Hauptidealrings sind genau die von den irreduziblen Elementen erzeugten Hauptideale. Jeder Körper besitzt nur genau ein maximales Ideal, nämlich das Nullideal. Ist umgekehrt in einem Kring R das Nullideal ein maximales Ideal, so muß unser Kring offensichtlich ein Körper sein, denn wir haben $R \neq 0$ und für $a \in R\backslash 0$ gilt $Ra = \langle a\rangle = R \ni 1$. Der Nullring besitzt überhaupt kein maximales Ideal. In [KAG] 1.6.4 zeigen wir, daß er der einzige Ring ohne maximales Ideal ist.

Proposition 2.5.6 (Faktorringe nach maximalen Idealen). *Ein Ideal in einem Kring ist maximal genau dann, wenn der Faktorring nach besagtem Ideal ein Körper ist.*

Erster Beweis. Sei R unser Kring und $\mathfrak{m} \subset R$ unser Ideal. Ist $R/\mathfrak{m}$ ein Körper, so gilt $\mathfrak{m} \neq R$ und es gibt für jedes $a \notin \mathfrak{m}$ ein $b \in R$ mit $ab \in 1+\mathfrak{m}$. Folglich gilt $\langle a, \mathfrak{m}\rangle = R$ für jedes $a \notin \mathfrak{m}$ und damit ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R. Ist umgekehrt $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R, so ist $R/\mathfrak{m}$ nicht der Nullring und für jedes $a \notin \mathfrak{m}$ gilt $\langle a, \mathfrak{m}\rangle = R$ und folglich gibt es $b \in R$ und $m \in \mathfrak{m}$ mit $ab+m = 1$. Dann aber folgt $\bar{a}\bar{b} = 1$ in $R/\mathfrak{m}$ und dieser Faktorring ist ein Körper. □

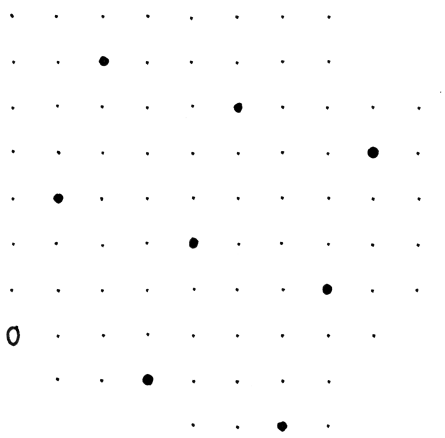
Zweiter Beweis. Nach 2.5.5 ist ein Kring genau dann ein Körper, wenn er genau zwei Ideale besitzt, das Nullideal und den ganzen Kring. Nach 2.1.25 entsprechen die Ideale von $R/\mathfrak{m}$ eindeutig den Idealen von R, die $\mathfrak{m}$ umfassen. Die Proposition folgt. □

2.5.7. Für unseren Satz 2.4.23, nach dem ein Faktorring von einem Hauptidealring nach einem Hauptideal $\langle a\rangle$ genau dann ein Körper ist, wenn a ein irreduzibles Element ist, können wir damit einen neuen Beweis geben: Beide Eigenschaften von a sind nach 2.5.5 beziehungsweise 2.5.6 gleichbedeutend zur Forderung, daß $\langle a\rangle$ ein maximales Ideal ist. Bei genauerer Betrachtung ist dieser neue Beweis aber doch nur der alte in neuen Worten.

Übungen

Übung 2.5.8. Ein kommutativer Integritätsbereich ist faktoriell genau dann, wenn (1) jedes von Null verschiedene Element als Produkt von einer Einheit mit einigen Irreduziblen dargestellt werden kann und (2) jedes irreduzible Element prim ist.

2.6 Irreduzible im Ring der Gauß'schen Zahlen



Die Elemente des von $1 + 3\,\mathrm{i}$ im Ring der Gauß'schen Zahlen erzeugten Hauptideals habe ich in diesem Bild als fette Punkte dargestellt, die anderen Elemente des Rings der Gauß'schen Zahlen durch kleine Punkte.

Lemma 2.6.1. *Der Ring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ der Gauß'schen Zahlen ist euklidisch und mithin faktoriell.*

Beweis. Die Elemente des von einem festen von Null verschiedenen Element $0 \neq a = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ im Ring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ der Gauß'schen Zahlen erzeugten Hauptideals bilden die Ecken eines quadratischen Rasters auf der komplexen Zahlenebene, mit $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Seitenlänge der Quadrate. Jedes $b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ liegt in einem dieser Quadrate und hat von einer der Ecken einen Abstand $\leq \sqrt{2}|a|/2 < |a|$. Folglich ist unser Ring euklidisch mit $\sigma(a) = |a|^2$. □

2.6.2. Von nun an wird in diesem Abschnitt der Begriff „Quadrat" nicht mehr in seiner geometrischen Bedeutung verwendet, sondern in seiner algebraischen Bedeutung als Abkürzung für „Quadratzahl". Die ersten Quadrate in $\mathbb{Z}$ sind also $0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

2.6.3. Ein irreduzibles Element des Rings $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ der Gauß'schen Zahlen nennen wir eine **Gaußprimzahl** oder als Adjektiv **gaußprim**.

Lemma 2.6.4 (Gaußprimzahlen). *1. Jedes Gaußprimzahl $\pi \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ teilt genau eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$;*

2. *Jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist entweder gaußprim oder zerfällt in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ in ein Produkt aus zwei Gaußprimzahlen, die dann notwendig zueinander komplex konjugiert sind und nur im Fall $p = 2 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$ durch Multiplikation mit einer Einheit auseinander hervorgehen.*

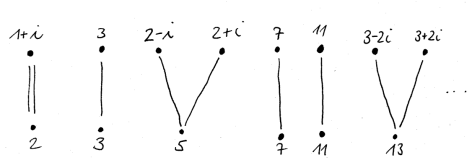
2.6.5. Gleich im Anschluß in 2.6.6 zeigen wir, daß eine Primzahl genau dann gaußprim ist, wenn sie beim Teilen durch Vier den Rest Drei läßt.

Beweis. Aus $\pi|\pi\bar{\pi}$ folgt $\pi|p$ für mindestens einen Primteiler p von $\pi\bar{\pi}$, also teilt π mindestens eine Primzahl. Aus $\pi|p$ und $\pi|q$ für Primzahlen p und q folgt umgekehrt $\pi\bar{\pi}|p^2$ und $\pi\bar{\pi}|q^2$ und so $p = q$, weil $\pi\bar{\pi} \in \mathbb{Z}$ keine Einheit ist. Das zeigt Teil 1. Gegeben eine Primzahl p würde jede Zerlegung $p = \alpha\beta\gamma$ in Nichteinheiten von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ eine Zerlegung in Nichteinheiten $p^2 = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta})(\gamma\bar{\gamma})$ in $\mathbb{Z}$ liefern, was unmöglich ist. Folglich ist p entweder gaußprim oder zerfällt in ein Produkt von zwei Gaußprimzahlen als $p = \alpha\beta$. Dann folgt sofort $p^2 = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta})$ und damit $p = \alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta}$ alias $\beta = \bar{\alpha}$. Gibt es nun eine Einheit ε mit $\bar{\alpha} = \varepsilon\alpha$, so haben wir notwendig $\varepsilon = \pm\mathrm{i}$, da sonst p keine Primzahl gewesen wäre. Bis auf eine eventuelle Vertauschung der Faktoren dürfen wir also $\bar{\alpha} = -\mathrm{i}\alpha$ annehmen, und das impliziert offensichtlich $\alpha \in \mathbb{Z}(1+\mathrm{i})$ und, wenn α auch noch irreduzibel sein soll, $\alpha = \pm(1+\mathrm{i})$. □

Proposition 2.6.6. *Für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ sind gleichbedeutend:*

1. *p ist nicht gaußprim;*
2. *p ist Summe von zwei Quadraten, in Formeln $p = x^2 + y^2$;*
3. *p läßt beim Teilen durch Vier den Rest Eins oder Zwei, in Formeln ausgedrückt $p \equiv 1 \pmod 4$ oder $p = 2$;*
4. *Das Polynom (X^2+1) ist nicht irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$;*
5. *(-1) ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_p$.*

Beispiele 2.6.7. $2 = 1^2 + 1^2$, $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, ...



Zerfallen der Primzahlen in Gaußprimzahlen. Nur bei der Zwei tritt ein zweifacher Faktor auf, $2 = -\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2$.

Beweis. Ist $\pi = x + \mathrm{i}y$ ein Gaußprimfaktor echt kleinerer Länge von p, so ist $\pi\bar{\pi} = x^2 + y^2$ ein Primfaktor echt kleinerer Länge von p^2, also $x^2 + y^2 = p$. Das zeigt 1⇒2. Aus $p = x^2 + y^2$ folgt umgekehrt $p = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)$, also haben wir auch 2⇒1. Die Implikation 2⇒3 folgt daraus, daß jedes Quadrat kongruent ist zu Null oder Eins modulo Vier, da nämlich gilt $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Eine Summe von zwei Quadraten kann also modulo 4 nie zu 3 kongruent sein. 1⇔4 folgert man durch die Betrachtung des Diagramms von Ringen

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{Z}[X] & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbb{F}_p[X] & & & & \mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \mathbb{Z}[X]/\langle X^2+1\rangle \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \mathbb{F}_p[X]/\langle X^2+1\rangle = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]/\langle p\rangle & & \end{array}$$

Alle vier Morphismen sind hierbei Surjektionen mit einem Hauptideal als Kern. Nach 2.4.23 sind also sowohl 1 als auch 4 gleichbedeutend dazu, daß der Ring $\mathbb{F}_p[X]/\langle X^2 + 1\rangle$ kein Körper ist, und damit sind sie auch untereinander äquivalent. 4⇔5 ist evident. Schließlich zeigen wir noch 3⇒5. Sicher ist nämlich -1 ein Quadrat in $\mathbb{F}_2$. Unter der Voraussetzung $p \equiv 1 \pmod 4$ gilt dasselbe in $\mathbb{F}_p$. Wir wissen nämlich aus [LA2] 6.4.8, daß $\mathbb{F}_p^\times$ als endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Körpers zyklisch ist, und in einer zyklischen Gruppe von durch Vier teilbarer Ordnung gibt es offensichtlich Elemente der Ordnung Vier. So ein Element der Ordnung Vier löst dann die Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbb{F}_p^\times$. □

2.6.8. Man beachte, daß jede Gauß'sche Zahl ungleich Null durch Multiplikation mit einer Einheit auf genau eine Gauß'sche Zahl $x + \mathrm{i}y$ mit $x \geq y > -x$, also auf genau eine Gauß'sche Zahl im „um 45° im Uhrzeigersinn verdrehten offenen ersten Quadranten mitsamt seiner oberen Kante ohne den Ursprung" abgebildet werden kann. Die im wesentlichen eindeutige Zerlegung einer Primzahl $p \in \mathbb{N}$ in ein Produkt von Gaußprimzahlen hat nach unserem Satz folgende Gestalt:

$$\begin{array}{lll} p \equiv 3 \pmod 4 & p = p; \\ p \not\equiv 3 \pmod 4 & p = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) \text{ für } x^2 + y^2 = p. \end{array}$$

Beschränken wir uns auf die irreduziblen Elemente $x + \mathrm{i}y$ mit $x \geq y > -x$, so ist das die eindeutige Faktorisierung von p in eine Einheit und irreduzible Elemente dieser Art in allen Fällen mit Ausnahme des Falls $p = 2$, in dem diese eindeutige Faktorisierung die Gestalt $2 = -\mathrm{i}(1 + \mathrm{i})^2$ hat.

Ergänzung 2.6.9. Es gibt auch einen sehr elementaren Beweis „durch Zauberei" nach Zagier für die Tatsache, daß jede Primzahl p, die bei Teilen durch Vier den

Rest Eins läßt, eine Summe von zwei Quadraten ist: Man betrachtet die endliche Menge $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \mid x^2 + 4yz = p\}$ und definiert darauf eine Involution durch die Vorschrift

$$(x,y,z) \mapsto \begin{cases} (x+2z, z, y-x-z) & \text{falls } x < y-z; \\ (2y-x, y, x-y+z) & \text{falls } y-z < x < 2y; \\ (x-2y, x-y+z, y) & \text{falls } x > 2y. \end{cases}$$

Diese Involution hat genau einen Fixpunkt, also ist die Zahl der Elemente von S ungerade und die Involution $(x,y,z) \mapsto (x,z,y)$ von S muß auch einen Fixpunkt haben. Für den aber gilt $x^2 + (2y)^2 = p$. Bei diesem Beweis sind noch einige implizit enthaltene Behauptungen zu prüfen, das geht alles mit Schulstoff. Man muß aber die Zauberformel auswendig hersagen können!

Korollar 2.6.10 (Summen von zwei Quadraten). *Eine positive natürliche Zahl ist Summe von zwei Quadratzahlen genau dann, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung alle diejenigen Primfaktoren, die modulo Vier kongruent sind zu Drei, in geraden Potenzen auftreten.*

Beweis. Genau dann ist $n \in \mathbb{Z}$ Summe von zwei Quadratzahlen, wenn es $a \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ gibt mit $n = a\bar{a}$. Ist $n \neq 0$ und $a = \varepsilon\pi_1\pi_2 \ldots \pi_r$ eine Darstellung als Produkt einer Einheit ε mit Gaußprimzahlen, von denen wir $\pi_1, \ldots, \pi_s$ weder reell noch rein imaginär annehmen und $\pi_{s+1}, \ldots, \pi_r$ aus $\mathbb{N}$, so muß

$$n = (\varepsilon\bar{\varepsilon})(\pi_1\bar{\pi}_1) \ldots (\pi_s\bar{\pi}_s)\pi_{s+1}\pi_{s+1} \ldots \pi_r\pi_r$$

die Primfaktorzerlegung in $\mathbb{N}$ sein. Damit folgt das Korollar aus unserer Beschreibung 2.6.8 der Gaußprimzahlen. □

2.6.11. Um aus einer Zerlegung einer natürlichen Zahl $n \geq 1$ in Gaußprimfaktoren alle möglichen Darstellungen als Summe zweier Quadrate zu erhalten, muß man alle Zerlegungen $n = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)$ finden, also alle Zerlegungen $n = a\bar{a}$, wobei der Übergang von a zu εa mit einer Einheit $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times$ und der Übergang von a zu $\bar{a}$ bis auf Reihenfolge dieselbe Zerlegung liefert. Dafür ist es besonders übersichtlich, mit dem in 2.6.8 beschriebenen Repräsentantensystem modulo Einheiten aller Gaußprimzahlen zu arbeiten, das stabil wird unter der komplexen Konjugation, sobald wir die Ausnahmestelle $1+\mathrm{i}$ entfernen.

2.6.12. Gegeben ein faktorieller Ring R bezeichne $\mathrm{irk}(R)$ die Menge **Irreduziblenklassen**, als da heißt der Bahnen unter der Einheitengruppe $R^\times$ in der Menge der irreduziblen Elemente von R. Gegeben ein irreduzibles $r \in R$ bezeichne $[r] \in \mathrm{irk}(R)$ seine Klasse.

Proposition* 2.6.13 (Irreduziblenklassen in Invariantenringen). *Seien R ein faktorieller Ring und Γ eine endliche Gruppe von Automorphismen von R und es sei auch der Ring R^Γ der Γ-Invarianten faktoriell. So gilt:*

1. *Wir erhalten eine Bijektion*

$$\operatorname{irk}(R^\Gamma) \xrightarrow{\sim} \operatorname{irk}(R)/\Gamma$$

durch die Abbildung, die jedem R^Γ-irreduziblen Element p die Menge der Klassen seiner R-irreduziblen Faktoren π zuordnet;

2. *Die Vielfachheit von π als Faktor von p teilt die Ordnung $|\Gamma_{[\pi]}|$ der Isotropiegruppe der Irreduziblenklasse $[\pi]$.*

Vorschau 2.6.14. Für die Vielfachheit von π als Faktor von p werden wir in 2.7.1 die Notation $v_\pi(p)$ einführen.

2.6.15. Diese Proposition systematisiert unsere obigen Betrachtungen zu irreduziblen Gauß'schen Zahlen. Betrachten wir genauer $R = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit der Operation der zweielementigen Gruppe Γ, deren nichttriviales Element als die komplexe Konjugation operiert, so erhalten wir $R^\Gamma = \mathbb{Z}$ und sehen ein weiteres Mal, daß jede irreduzible Gauß'schen Zahl π nur genau eine Primzahl p teilt und daß die Abbildung, die ihr diese Primzahl zuordnet, surjektiv ist mit bis auf Einheiten höchstens zweielementigen Fasern. Teil 2 zeigt dann weiter, daß die Vielfachheit von π als Faktor von p höchstens Zwei ist und nur dann genau Zwei sein kann, wenn gilt $\bar\pi \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times \pi$. Davon ausgehend analysiert man wie oben erklärt, daß $2 = -\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2$ bis auf Einheiten die einzige Möglichkeit für einen doppelt auftauchenden irreduziblen Faktor ist.

Beweis. Für $\pi \in R$ gehört das Produkt $b(\pi) := \prod_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\pi)$ zu R^Γ. Mithin ist jedes R-irreduzible Element ein Teiler mindestens eines R^Γ-irreduziblen Elements und unsere Abbildung ist surjektiv. Teilt andererseits ein R-irreduzibles Element π zwei R^Γ-Irreduzible p und q, so teilt $b(\pi)$ sowohl $b(p) = p^{|\Gamma|}$ als auch $b(q) = q^{|\Gamma|}$, und da $b(\pi)$ keine Einheit sein kann, können sich p und q höchstens um eine Einheit unterscheiden und unsere Abbildung ist auch injektiv. Wir finden sogar genauer $b(\pi) = \varepsilon p^n$ für $\varepsilon \in R^\Gamma$ eine Einheit. Wenn r die Vielfachheit von π als Faktor von p ist und $\Gamma_{[\pi]}$ die Standgruppe der Irreduziblenklasse $[\pi]$, so haben wir weiter

$$p = \eta \prod_{\bar\gamma\in\Gamma/\Gamma_{[\pi]}} \gamma(\pi)^r$$

mit einer Einheit $\eta \in R^\times$, die von der Wahl der Repräsentanten γ unserer Nebenklassen $\bar\gamma$ abhängt, und für $d = |\Gamma_{[\pi]}|$ gilt folglich $p^d \in b(\pi)^r R^\times = (p^n)^r R^\times$ und folglich $d = rn$. □

Übungen

Übung 2.6.16. Man bestimme sämtliche Zerlegungen von 1000000 in eine Summe von zwei Quadratzahlen.

2.7 Primfaktorzerlegung in Polynomringen

2.7.1. Gegeben ein faktorieller Ring R und ein irreduzibles Element $p \in R$ erklären wir

$$v_p : \mathrm{Quot}R \to \mathbb{Z} \sqcup \{\infty\}$$

als die eindeutig bestimmte Abbildung mit $v_p\left(p^n a/b\right) = n$ für $a, b \in R\backslash 0$ teilerfremd zu p und mit $v_p(0) = \infty$. Diese Abbildung v_p heißt die p**-Bewertung** oder englisch p**-valuation**. Offensichtlich gilt $v_p(fg) = v_p(f)+v_p(g)$ für alle Elemente $f, g \in \mathrm{Quot}\, R$.

Beispiele 2.7.2. Wir haben $v_2(16/6) = 3$, $v_3(16/6) = -1$, $v_5(16/6) = 0$. Ist k ein Körper und $R = k[t]$ der Polynomring, so ist per definitionem $\mathrm{Quot}R = k(t)$ der Funktionenkörper und für $f \in k(t)$ und $\lambda \in k$ ist $v_{(t-\lambda)}(f)$ die Nullstellenordnung beziehungsweise das Negative der Polstellenordnung der gebrochen rationalen Funktion f an der Stelle λ.

2.7.3 (**Minimalbewertung von Polynomen**). Gegeben ein faktorieller Ring R und ein irreduzibles Element p sowie ein Polynom $A = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in (\mathrm{Quot}R)[X]$ erklären wir die p**-Minimalbewertung von** A durch

$$w_p(A) := \min(v_p(a_i))$$

Insbesondere ist das Nullpolynom das einzige Polynom A mit $w_p(A) = \infty$.

Beispiel 2.7.4. Im Fall $R = \mathbb{Z}$ haben wir etwa $w_2(10X^2 + 6X + 8) = 1$.

Proposition 2.7.5 (Lemma von Gauß). *Gegeben ein faktorieller Ring R und ein irreduzibles Element $p \in R$ und Polynome $A, B \in (\mathrm{Quot}R)[X]$ gilt*

$$w_p(AB) = w_p(A) + w_p(B)$$

Beweis. Ist eines unserer Polynome konstant, so gilt die Gleichung offensichtlich. Mit dieser Erkenntnis können wir uns auf den Fall zurückziehen, daß A und B Koeffizienten in R haben und daß gilt $w_p(A) = w_p(B) = 0$. Es bleibt, aus diesen Annahmen $w_p(AB) = 0$ zu folgern. Für ein Polynom $A \in R[X]$ ist $w_p(A) = 0$ gleichbedeutend dazu, daß sein Bild $\bar{A} \in (R/\langle p\rangle)[X]$ nicht das Nullpolynom ist. Wir haben also

$$\begin{array}{rcl} w_p(A) = 0 = w_p(B) & \Rightarrow & \bar{A} \neq 0 \neq \bar{B} \\ & \Rightarrow & \bar{A}\bar{B} \neq 0 \\ & \Rightarrow & \overline{AB} \neq 0 \\ & \Rightarrow & w_p(AB) = 0 \end{array}$$

mit der zweiten Implikation, da der Faktorring $R/\langle p\rangle$ nach 2.4.23 und dann auch der Polynomring $(R/\langle p\rangle)[X]$ darüber Integritätsbereiche sind. □

Definition 2.7.6. Sei R ein faktorieller Ring. Ein Polynom $\sum_{i=0}^{r} a_i X^i$ aus dem Polynomring $R[X]$ heißt **primitiv**, wenn es kein irreduzibles Element von R gibt, das alle seine Koeffizienten teilt. Ein Polynom mit Koeffizienten im Quotientenkörper $P \in (\mathrm{Quot}R)[X]$ nennen wir **primitiv** oder genauer **R-primitiv**, wenn es bereits in $R[X]$ liegt und dort primitiv ist.

Beispiele 2.7.7. Die Polynome $X^2+2X+10$ und $3X^2+20X+150$ sind primitiv in $\mathbb{Z}[X]$. Das Polynom $10X^2+6X+8$ ist nicht primitiv in $\mathbb{Z}[X]$.

2.7.8 (**Diskussion der Terminologie**). Ich bin nicht glücklich darüber, daß mit dieser Definition auch alle Einheiten von R primitive Polynome in $R[X]$ sind. An primitive Polynome aber noch zusätzliche Bedingungen zu stellen, schien mir ein größeres Übel.

2.7.9. Offensichtlich ist ein Polynom $A \in (\mathrm{Quot}R)[X]$ primitiv genau dann, wenn gilt $w_p(A) = 0$ für alle irreduziblen Elemente p von R. Offensichtlich gibt es für jedes von Null verschiedene Polynom $A \in (\mathrm{Quot}R)[X]\backslash 0$ ein Element $c \in \mathrm{Quot}R$ mit cA primitiv.

2.7.10 (**Lemma von Gauß, ursprüngliche Form**). In seiner ursprünglichen Form sagt das Lemma von Gauß, daß das Produkt zweier primitiver Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten auch selbst wieder primitiv ist. Das folgt sofort aus 2.7.5 und ist auch im wesentlichen die Aussage, auf die wir uns dort beim Beweis zurückgezogen haben.

Satz 2.7.11 (Polynomringe über faktoriellen Ringen). *Ist R ein faktorieller Ring, so ist auch der Polynomring $R[X]$ ein faktorieller Ring und die irreduziblen Elemente von $R[X]$ sind genau:*

1. *Alle irreduziblen Elemente von R;*
2. *Alle primitiven Polynome aus $R[X]$, die irreduzibel sind in $(\mathrm{Quot}R)[X]$.*

Beweis. Man sieht leicht, daß die unter 1 und 2 aufgeführten Elemente irreduzibel sind. Wir nennen sie für den Moment kurz die 1&2-Irreduziblen von $R[X]$. Wir vereinbaren für das weitere die Notation $K := \mathrm{Quot}R$. Gegeben $A \in R[X]$ zerlegen wir $A = P_1 \ldots P_n$ als Produkt von irreduziblen Polynomen in $K[X]$ und schreiben $P_i = c_i \tilde{P}_i$ mit $c_i \in K^\times$ und $\tilde{P}_i$ primitiv. So erhalten wir eine Zerlegung $A = c\tilde{P}_1 \ldots \tilde{P}_n$ mit $\tilde{P}_i$ primitiv und irreduzibel in $K[X]$ sowie $c \in K^\times$. Nach dem Lemma von Gauß 2.7.5 folgt $v_p(c) = w_p(A) \geq 0$ für alle Irreduziblen p von R und damit $c \in R$. Wir können also c faktorisieren in $c = up_1 \ldots p_r$ mit $u \in R^\times$ und $p_i \in R$ irreduzibel und folgern so die Existenz einer Zerlegung von A in ein Produkt einer Einheit mit 1&2-Irreduziblen. Das zeigt insbesondere, daß wir unter 1 und 2 in der Tat alle irreduziblen Elemente von R aufgelistet haben. Sind

$$A = up_1 \ldots p_r P_1 \ldots P_m = vq_1 \ldots q_s Q_1 \ldots Q_n$$

zwei Zerlegungen von A in ein Produkt einer Einheit mit irreduziblen Elementen, sagen wir $u, v \in R^\times$, $p_i, q_j \in R$ irreduzibel und $P_k, Q_l \in R[X]$ irreduzibel in $K[X]$ und R-primitiv, so liefert die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $K[X]$ zunächst $n = m$ und $P_i = a_i Q_{\sigma(i)}$ für geeignetes $\sigma \in \mathcal{S}_n$ und $a_i \in K^\times$. Aus der Primitivität folgt dann $a_i \in R^\times$ und aus der Faktorialität von R schließlich die Gleichheit $r = s$ sowie die Existenz einer Permutation $\tau \in \mathcal{S}_r$ mit $q_i \in p_{\tau(i)} R^\times$. □

Ergänzung 2.7.12. Die Zerlegung eines Polynoms aus $\mathbb{Z}[X]$ in irreduzible Faktoren kann im Prinzip durch Ausprobieren in endlicher Zeit bestimmt werden. Ein Polynoms vom Grad n muß ja, wenn es nicht irreduzibel ist, einen Faktor haben von höchstens dem halben Grad, sagen wir höchstens Grad m. Nehmen wir dann $m + 1$ ganzzahlige Stellen, so müssen die Werte unseres Faktors die Werte des ursprünglichen Polynoms teilen. Wir müssen also nur für alle Wahlen von Teilern der Werte des ursprünglichen Polynoms an besagten Stellen das Interpolationspolynom bilden und prüfen, ob es unser ursprüngliches Polynom teilt.

Korollar 2.7.13. *Sei R ein faktorieller Ring. Ist ein von Null verschiedenes Polynom $P \in R[X]\backslash 0$ nicht irreduzibel als Element des Polynomrings über dem Quotientenkörper $P \in (\mathrm{Quot} R)[X]$, so gibt es bereits in $R[X]$ Polynome A, B positiven Grades mit $AB = P$.*

Beweis. Ist P primitiv, so folgt das unmittelbar aus unserem Satz. Andernfalls schreiben wir $P = c\tilde{P}$ mit $c \in R$ und $\tilde{P}$ primitiv und argumentieren genauso. □

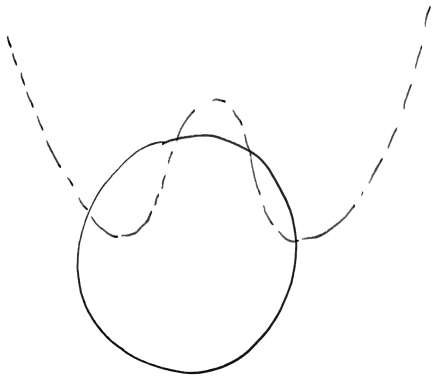
Beispiel 2.7.14. Ich will auch noch an einem Beispiel erklären, wie man dies Korollar direkt aus dem Gauß'schen Lemma folgern kann. Nehmen wir an, wir hätten für $7X^2 - 7$ in $\mathbb{Q}[X]$ die Faktorisierung

$$7X^2 - 7 = (3X/7 + 3/7)(49X/3 - 49/3)$$

gefunden. Dann gilt $w_7(3X/7 + 3/7) + v_7(49X/3 - 49/3) = 1 \geq 0$ nach dem Gauß'schen Lemma und wir können folglich so Primfaktoren 7 zwischen den Faktoren unserer Faktorisierung austauschen, daß beide Faktoren dadurch eine positive 7-Bewertung kriegen. Diese Möglichkeiten wären hier $7X^2 - 7 = (3X + 3)(7X/3 - 7/3)$ und $7X^2 - 7 = (21X + 21)(X/3 - 1/3)$. Ebenso können wir für den Primfaktor 3 vorgehen und erhalten so die beiden Zerlegungen $7X^2 - 7 = (X + 1)(7X - 7)$ und $7X^2 - 7 = (7X + 7)(X - 1)$ in $\mathbb{Z}[X]$.

Korollar 2.7.15. *Für jeden Körper k ist der Polynomring $k[X_1, \ldots, X_n]$ faktoriell. Sogar $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ ist ein faktorieller Ring.*

Korollar 2.7.16. *Ist k ein Körper und sind $f, g \in k[X, Y]$ teilerfremde Polynome, so haben f und g höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen in k^2.*



Die Nullstellenmengen zweier Polynome $f, g \in \mathbb{R}[X, Y]$ ohne gemeinsamen nichtkonstanten Teiler als durchgezogener Kreis und gestrichelter Umriß eines auf dem Rücken liegenden Kamels.

Vorschau 2.7.17. In 2.10.2 werden wir genauer die „Schranke von Bézout“ für die maximal mögliche Zahl gemeinsamer Nullstellen herleiten.

Beweis. Unsere Polynome haben nach der Beschreibung 2.7.11 der irreduziblen Elemente in Polynomringen über faktoriellen Ringen außer Einheiten erst recht keine gemeinsamen Teiler im Ring $k(X)[Y]$. Da dieser Ring nach 2.4.19 ein Hauptidealring ist und da jeder Erzeuger des von unseren beiden Polynomen darin erzeugten Ideals ein gemeinsamer Teiler ist, gibt es notwendig $p, q \in k(X)[Y]$ mit $1 = pf + qg$. Nach Multiplikation mit so einer Art Hauptnenner h von p und q erhalten wir eine Identität der Gestalt

$$h = \tilde{p}f + \tilde{q}g$$

mit $0 \neq h \in k[X]$ und $\tilde{p}, \tilde{q} \in k[X, Y]$. Die endlich vielen Nullstellen von h sind dann die einzigen x-Koordinaten, die für gemeinsame Nullstellen von f und g in Frage kommen. Ebenso kommen auch nur endlich viele y-Koordinaten für gemeinsame Nullstellen in Frage. Das Korollar folgt. □

Übungen

Übung 2.7.18. Ist R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K und sind $P, Q \in K[X]$ normierte Polynome mit $PQ \in R[X]$, so folgt bereits $P, Q \in R[X]$.

Übung 2.7.19. Sei k ein Körper. Gibt es für ein Polynom P aus dem Polynomring $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Element $Q \in k(X_1, \ldots, X_n)$ aus dem Quotientenkörper mit $Q^2 = P$, so ist Q bereits selbst ein Polynom, in Formeln $Q \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Hinweis: 2.4.33.

Übung 2.7.20. Seien k ein Körper und $0 < n(1) < n(2) < \ldots < n(r) < n$ natürliche Zahlen, $r \geq 0$. Man zeige, daß das Polynom

$$T^n + a_r T^{n(r)} + \ldots + a_1 T^{n(1)} + a_0$$

irreduzibel ist in $K[T]$, für $K = \operatorname{Quot} k[{}'a_0, \ldots, a_r]$ der Funktionenkörper. Hinweis: Jede Zerlegung käme nach 2.7.18 und 2.7.11 notwendig von einer Zerlegung im Polynomring $k[{}'a_0, \ldots, a_r, T]$ her und müßte unter dem Einsetzen $a_1 = \ldots = a_r = 0$ zu einer Zerlegung von $T^n + a_0$ in $k[{}'a_0, T]$ führen.

Übung 2.7.21. Sei K ein Körper und $K(X)$ sein Funktionenkörper. Man zeige, daß jedes K-irreduzible Polynom in $K[T]$ auch $K(X)$-irreduzibel ist. Hinweis: 2.7.18.

Übung 2.7.22 (**Satz über rationale Nullstellen**). Man zeige: Gegeben ein Polynom

$$a_n T^n + \ldots + a_1 T + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten und eine rationale Wurzel p/q mit p, q teilerfremden ganzen Zahlen ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n.

2.8 Kreisteilungspolynome

2.8.1. Wir interessieren uns in dieser Vorlesung besonders für uns die Zerlegung der Polynome $X^n - 1$ in irreduzible Faktoren in $\mathbb{Z}[X]$. Die komplexen Nullstellen von $X^n - 1$ heißen die **komplexen n-ten Einheitswurzeln**. Sie bilden in der komplexen Zahlenebene die Ecken eines in den Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. In $\mathbb{C}[X]$ gilt natürlich

$$X^n - 1 = \prod_{\zeta^n = 1} (X - \zeta)$$

Nun bilden wir in $\mathbb{C}[X]$ die Polynome

$$\Phi_d(X) = \prod_{\operatorname{ord}\zeta = d} (X - \zeta)$$

Dann gilt offensichtlich

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$$

Sicher sind alle unsere Polynome Φ_d normiert. Daraus folgt durch Teilen mit Rest [LA1] 5.3.15 und Induktion $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ für alle $n \geq 1$. Dies Polynom Φ_n heißt das **n-te Kreisteilungspolynom** oder bei griechisch Gebildeten das **n-te zyklotomische Polynom**. Natürlich gilt $\operatorname{grad}(\Phi_n) = \varphi(n)$, der Grad des n-ten Kreisteilungspolynoms ist also genau der Wert der Euler'schen φ-Funktion an der Stelle n, und das macht auch die Notation plausibel. Wir werden in 4.4.2 zeigen, daß alle Kreisteilungspolynome irreduzibel sind in $\mathbb{Q}[X]$, so daß wir das n-te Kreisteilungspolynom auch und vielleicht eher noch besser charakterisieren

können als das eindeutig bestimmte normierte in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzible Polynom, das die n-te Einheitswurzel $\exp(2\pi\mathrm{i}/n)$ als Nullstelle hat. Natürlich haben wir für $p > 1$ stets die Zerlegung $X^p-1 = (X-1)(X^{p-1}+X^{p-2}+\ldots+X+1)$, also ist für p prim der zweite Faktor das p-te Kreisteilungspolynom Φ_p. In diesem Fall können wir die Irreduzibilität mithilfe des gleich folgenden „Eisensteinkriteriums“ bereits hier zeigen.

Satz 2.8.2 (Eisensteinkriterium). *Sei $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und p eine Primzahl. Gilt $p \nmid a_n$, $p|a_{n-1}$, $\ldots$, $p|a_0$ und $p^2 \nmid a_0$, so ist P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.*

2.8.3. Eine analoge Aussage gilt mit demselben Beweis auch für Polynome mit Koeffizienten in einem beliebigen faktoriellen Ring.

Beweis. Ist P nicht irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, so besitzt es nach 2.7.13 bereits eine Faktorisierung $P = QR$ in $\mathbb{Z}[X]$ mit Q, R von positiven Graden $r, s > 0$ und $r + s = n$. Wir reduzieren nun die Koeffizienten modulo p und folgern in $\mathbb{F}_p[X]$ eine Faktorisierung

$$\bar{P} = \bar{Q}\,\bar{R}$$

Nach Annahme haben wir aber $\bar{P} = \bar{a}_nX^n$ mit $\bar{a}_n \neq 0$. Es folgt $\bar{Q} = bX^r$ und $\bar{R} = cX^s$ für geeignete $b, c \in \mathbb{F}_p^\times$ und denselben positiven $r, s > 0$, denn das sind die einzig möglichen Faktorisierungen von $\bar{a}_nX^n$ als Produkt von Nichteinheiten im faktoriellen Ring $\mathbb{F}_p[X]$. Daraus folgt hinwiederum, daß die konstanten Terme von Q und R durch p teilbar sind, und dann muß der konstante Term von $QR = P$ teilbar sein durch p^2 im Widerspruch zur Annahme. □

Korollar 2.8.4. *Für jede Primzahl p ist das p-te Kreisteilungspolynom $\Phi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.*

Beweis. Wir haben $X^p - 1 = (X - 1)\Phi_p(X)$. Reduzieren wir diese Gleichung modulo p und beachten die Gleichung $X^p - 1 = (X - 1)^p$ in $\mathbb{F}_p[X]$, so folgt $\bar{\Phi}_p(X) = (X - 1)^{p-1}$ in $\mathbb{F}_p[X]$ und nach der Substitution $X = Y + 1$ haben wir $\bar{\Phi}_p(Y+1) = Y^{p-1}$ in $\mathbb{F}_p[Y]$, als da heißt, alle Koeffizienten von $\Phi_p(Y+1)$ bis auf den Leitkoeffizienten sind durch p teilbar. Jetzt prüfen wir einfach explizit, daß der konstante Term von $\Phi_p(Y + 1)$ genau p ist, und haben gewonnen nach dem Eisensteinkriterium 2.8.2. □

Ergänzung 2.8.5. Nach ersten Rechnungen mag man vermuten, daß als Koeffizienten von Kreisteilungspolynomen nur 1, 0 und -1 in Frage kommen. Das erste Gegenbeispiel für diese Vermutung liefert das 105-te Kreisteilungspolynom, in dem X^7 mit dem Koeffizienten 2 auftritt. Man kann allgemeiner sogar zeigen [Suz87, SDAT00], daß jede ganze Zahl als Koeffizient mindestens eines Kreisteilungspolynoms auftritt.

Übungen

Übung 2.8.6 (**Kreisteilungspolynome zu Primzahlpotenzen**). Man zeige die Formel $\Phi_9(X) = X^6 + X^3 + 1$ für das neunte Kreisteilungspolynom. Man zeige allgemeiner $\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}})$ für p prim und $r \geq 1$. Man gebe auch explizite Formeln für alle kleineren Kreisteilungspolynome $\Phi_1, \ldots, \Phi_8$.

Übung 2.8.7. Man zeige, daß das neunte Kreisteilungspolynom $\Phi_9(X) = X^6 + X^3 + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Hinweis: Man substituiere $X = Y + 1$ und wende das Eisensteinkriterium an. Mit einem bereits weiter oben verwendeten Trick kann die Rechnung stark vereinfacht werden. Dasselbe Argument zeigt, daß alle Kreisteilungspolynome $\Phi_{p^r}(X)$ für eine Primzahl p in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind.

Übung 2.8.8. Man zeige, daß $X^7 - 9$ ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ ist. Hinweis: Man betrachte die Einbettung $\mathbb{Z}[X] \hookrightarrow \mathbb{Z}[Y]$ mit $X \mapsto Y^2$.

Ergänzende Übung 2.8.9. Man zerlege $(X^n - Y^n)$ in $\mathbb{C}[X, Y]$ in ein Produkt irreduzibler Faktoren.

Ergänzende Übung 2.8.10 (**Quantisierte Binomialkoeffizienten**). Ist $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen, so ist die Zahl der k-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{F}^n$ genau

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \ldots (q^k - q^{k-1})}$$

Setzen wir $[n]_q := q^{n-1} + q^{n-1} + \ldots + 1 = (q^n - 1)/(q - 1)$, so können wir unser Ergebnis auch darstellen als

$$\frac{[n]_q[n-1]_q \ldots [n-k+1]_q}{[k]_q[k-1]_q \ldots [1]_q}$$

Für diese **quantisierten Binomialkoeffizienten** ist auch eine Notation wie für die gewöhnlichen Binomialkoeffizienten mit eckigen statt runden Klammern üblich. Man zeige, daß unsere quantisierten Binomialkoeffizienten, wenn wir sie als Element des Quotientenkörpers $\mathbb{Q}('q)$ lesen, für alle k, n mit $0 \leq k \leq n$ bereits im Polynomring $\mathbb{Z}['q] \subset \mathbb{Q}('q)$ liegen. Hinweis: Man finde eine induktive Beschreibung der Art, wie sie dem Pascal'schen Dreieck zugrunde liegt.

2.9 Symmetrische Polynome

Definition 2.9.1. Sei k ein Ring. Für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ setzen wir die Identität auf k fort zu einem Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & k[X_1, \ldots, X_n] & \to & k[X_1, \ldots, X_n] \\ & X_i & \mapsto & X_{\sigma(i)} \end{array}$$

Ein Polynom $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ heißt **symmetrisch**, wenn gilt $f = \sigma f \ \forall \sigma \in \mathcal{S}_n$. Die Menge aller symmetrischen Polynome ist ein Teilring des Polynomrings

$$k[X_1, \ldots X_n]^{\mathcal{S}_n} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$$

2.9.2. Operiert ganz allgemein eine Gruppe G auf einem Ring R durch Ringhomomorphismen, so bilden die G-Invarianten stets einen Teilring $R^G \subset G$, den **Invariantenring**.

2.9.3. Operiert eine Gruppe G auf einem Ring R durch Ringhomomorphismen, so operiert unsere Gruppe auch auf dem Polynomring über R in einer oder sogar in mehreren Veränderlichen. Die Invarianten des Polynomrings fallen dann mit dem Polynomring über dem Invariantenring zusammen, in Formeln $R[T]^G = R^G[T]$.

Beispiele 2.9.4. Das Produkt $X_1 \ldots X_n$ und die Summe $X_1 + \ldots + X_n$ sind symmetrische Polynome. Allgemeiner definieren wir die **elementarsymmetrischen Polynome** in n Veränderlichen $s_i(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n}$ durch die Identität

$$(T + X_1)(T + X_2) \ldots (T + X_n) = T^n + s_1 T^{n-1} + s_2 T^{n-2} + \ldots + s_n$$

im Ring $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n][T]^{\mathcal{S}_n} = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n}[T]$, so daß wir also haben

$$s_i = \sum_{|I|=i} \left(\prod_{j \in I} X_j \right)$$

Die Summe läuft hierbei über alle i-elementigen Teilmengen $I \subset \{1, \ldots, n\}$. Speziell ergibt sich $s_1 = X_1 + \ldots + X_n$ und $s_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + \ldots + X_1X_n + X_2X_3 + \ldots + X_2X_n + \ldots + X_{n-1}X_n$ und $s_n = X_1 \ldots X_n$.

2.9.5. Gegeben ein Kring k sind für beliebige $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in k$ die Koeffizienten des Polynoms $\prod_{i=1}^n (T - \zeta_i) \in k[T]$ per definitionem die elementarsymmetrischen Polynome in den $(-\zeta_i)$. Grob gesprochen sind also „die Koeffizienten eines normierten Polynoms bis auf Vorzeichen die elementarsymmetrischen Polynome in seinen Nullstellen“.

Beispiel 2.9.6. $(T-\xi)(T-\zeta) = T^2 - (\xi+\zeta)T + \xi\zeta = T^2 - s_1(\xi,\zeta)T + s_2(\xi,\zeta)$.

Satz 2.9.7 (über symmetrische Polynome). *Alle symmetrischen Polynome sind polynomiale Ausdrücke in den elementarsymmetrischen Polynomen und die elementarsymmetrischen Polynome s_i sind algebraisch unabhängig. Für einen beliebigen Ring k haben wir also in Formeln*

$$k[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n} = k[' s_1, \ldots, s_n]$$

mit einem „Freiheitsstrichlein“ an der eröffnenden Klammer im Sinne unserer Notation 2.2.5.

Beispiel 2.9.8. Wir haben $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$.

Beispiel 2.9.9. Die Darstellung von $(X_1 - X_2)^2$ durch elementarsymmetrische Polynome ist

$$\begin{aligned}(X_1 - X_2)^2 &= (X_1 + X_2)^2 - 4X_1X_2 \\ &= s_1^2 - 4s_2\end{aligned}$$

Ein quadratisches Polynom $T^2 - pT + q = (T - \zeta)(T - \xi)$ mit Koeffizienten p, q und Nullstellen ζ, ξ in einem Integritätsbereich k hat also genau dann eine doppelte Nullstelle $\zeta = \xi$, wenn gilt

$$0 = p^2 - 4q$$

In diesem Spezialfall läuft unsere Argumentation darauf hinaus, für unsere p, q die Identität $(\zeta - \xi)^2 = (\zeta + \xi)^2 - 4\zeta\xi = p^2 - 4q$ zu zeigen, was nicht schwer nachzurechnen ist.

Beweis. Die symmetrischen Polynome bilden einen Ring. Da die elementarsymmetrischen Polynome symmetrisch sind $s_1, \ldots, s_n \in k[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n}$, gilt schon mal $k[X_1, \ldots, X_n]^{\mathcal{S}_n} \supset k[s_1, \ldots, s_n]$. Für das weitere verwenden wir die Multiindexnotation wie in [AN2] 3.2.3 und vereinbaren für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ die Abkürzung

$$X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$

Um nun die umgekehrte Inklusion $\subset$ zu zeigen, betrachten wir auf $\mathbb{N}^n$ die **lexikographische Ordnung**, also etwa $(5, 1, 3) \geq (4, 7, 1) \geq (4, 7, 0) \geq (4, 6, 114)$ im Fall $n = 3$. In Formeln ist sie induktiv definiert durch

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geq (\beta_1, \ldots, \beta_n) \quad \Leftrightarrow \quad & \alpha_1 > \beta_1 \\ & \text{oder} \\ & \alpha_1 = \beta_1 \text{ und } (\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geq (\beta_2, \ldots, \beta_n).\end{aligned}$$

Bezüglich dieser Ordnung besitzt jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ ein kleinstes Element. Für ein von Null verschiedenes Polynom $0 \neq f = \sum c_\alpha X^\alpha$ nennen wir das größte $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $c_\alpha \neq 0$ seinen „Leitindex“. Zum Beispiel hat das i-te elementarsymmetrische Polynom s_i den Leitindex $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ mit i Einsen vorneweg und dann nur noch Nullen. Gälte unsere Inklusion $\subset$ nicht, so könnten wir unter allen symmetrischen Polynomen außerhalb von $k[s_1, \ldots, s_n]$ ein f mit kleinstmöglichem Leitindex α wählen. Wegen $f = \sum c_\alpha X^\alpha$ symmetrisch gilt $c_\alpha = c_\beta$, falls sich die Multiindizes α und β nur in der Reihenfolge unterscheiden. Der Leitindex von f hat folglich die Gestalt

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ mit } \alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$$

Dann hat das Produkt

$$g := s_1^{\alpha_1-\alpha_2} s_2^{\alpha_2-\alpha_3} \dots s_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} s_n^{\alpha_n}$$

denselben Leitindex wie f und den Koeffizienten Eins vor dem entsprechenden Monom. Die Differenz $f - c_\alpha g$ ist folglich entweder Null oder hat zumindest einen echt kleineren Leitindex, gehört also zu $k[s_1, \dots, s_n]$. Dann gehört aber auch f selbst zu $k[s_1, \dots, s_n]$ im Widerspruch zu unseren Annahmen. Um schließlich die lineare Unabhängigkeit der Monome $s_1^{\gamma_1} \dots s_n^{\gamma_n}$ in den elementarsymmetrischen Funktionen zu zeigen beachten wir, daß diese Monome paarweise verschiedene Leitindizes haben. Ist nun eine Linearkombination mit Koeffizienten in k unserer Monome null, so notwendig auch der Koeffizient des Monoms mit dem größten Leitindex, und dann induktiv alle Koeffizienten aller Monome. □

Definition 2.9.10. Gegeben ein Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ verwenden wir wie in [AN2] 3.2.3 die Notation

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Ein Polynom in mehreren Veränderlichen mit Koeffizienten in einem beliebigen Ring heißt **homogen vom Grad** d, wenn es eine Linearkombination von Monomen X^α ist mit $|\alpha| = d$, in Formeln

$$f = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha X^\alpha$$

Nennt man ein Polynom einfach nur **homogen**, so ist gemeint, daß es einen Grad d gibt derart, daß unser Polynom homogen ist vom Grad d. Das Nullpolynom ist homogen von jedem Grad, aber jedes von Null verschiedene homogene Polynom ist homogen von nur genau einem Grad. Das Produkt zweier homogener Polynome ist homogen vom Grad der Summe der Grade der Faktoren. Gegeben ein nicht notwendig homogenes Polynom $g = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha$ heißt $\sum_{|\alpha|=d} c_\alpha X^\alpha$ seine **homogene Komponente vom Grad** d. Jedes Polynom ist mithin die Summe seiner homogenen Komponenten und fast alle seiner homogenen Komponenten sind Null.

2.9.11 (**Diskussion der Terminologie**). Das Nullpolynom hat in unserer Terminologie einerseits den Grad $-\infty$ und ist andererseits homogen von jedem Grad $d \in \mathbb{N}$. Diese terminologische Schwierigkeit gilt es auszuhalten.

Beispiel 2.9.12. Das Polynom $X^3Y^3Z + X^2Z^5 - 98X^4YZ^2$ ist homogen vom Grad 7. Das elementarsymmetrische Polynom s_d ist homogen vom Grad d.

Beispiel 2.9.13. Wir bestimmen nun die Darstellung des symmetrischen Polynoms $\Delta := (X-Y)^2(Y-Z)^2(Z-X)^2$ als Polynom in elementarsymmetrischen Polynomen, wo ich statt X_1, X_2, X_3 die Notation X, Y, Z verwendet habe. Unser Polynom ist homogen vom Grad 6 und das i-te elementarsymmetrische Polynom s_i ist homogen vom Grad i. Wir machen also den Ansatz

$$\Delta = As_1^6 + Bs_1^4 s_2 + Cs_1^3 s_3 + Ds_1^2 s_2^2 + Es_1 s_2 s_3 + Fs_2^3 + Gs_3^2$$

Hier haben wir die Summanden nach ihren Leitindizes geordnet. Da in Δ keine Monome X^6 oder X^5Y vorkommen, gilt $A = B = 0$. Setzen wir $Z = 0$, so folgt

$$(XY)^2(X^2 - 2XY + Y^2) = D(X+Y)^2(XY)^2 + F(XY)^3$$

und damit $D = 1$ und $F = -4$. Wir kommen so zu einer Darstellung der Form

$$\Delta = Cs_1^3 s_3 + s_1^2 s_2^2 + Es_1 s_2 s_3 - 4s_2^3 + Gs_3^2$$

Zählen wir die Monome X^4YZ auf beiden Seiten, so folgt $C = -4$. Setzen wir jetzt für (X, Y, Z) speziell die Werte $(1, 1, -1)$ und $(2, -1, -1)$ ein, so erhalten für (s_1, s_2, s_3) die Werte $(1, -1, -1)$ und $(0, -3, 2)$ und finden

$$4 + 1 + E + G + 4 = 0 = 4G + 4 \cdot 27$$

Daraus folgt sofort $G = -27$, $E = 18$ und dann als Endresultat

$$\Delta = s_1^2 s_2^2 - 4s_1^3 s_3 + 18 s_1 s_2 s_3 - 4s_2^3 - 27 s_3^2$$

Ein kubisches Polynom $T^3 + aT^2 + bT + c = (T+\alpha)(T+\beta)(T+\gamma)$ mit Koeffizienten a, b, c und Nullstellen $-\alpha, -\beta, -\gamma$ in einem Integritätsbereich k hat also mehrfache Nullstellen genau dann, wenn gilt

$$0 = a^2b^2 - 4a^3c + 18abc - 4b^3 - 27c^2$$

Das Negative $\mathrm{Disk}_3 := -\Delta$ dieses Ausdrucks in den Koeffizienten werden wir gleich in 2.9.14 für normierte Polynome beliebigen Grades als deren „Diskriminante“ einführen.

Satz 2.9.14. *Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau ein Polynom in n Variablen, genannt die n-te* **Diskriminante** $\mathrm{Disk}_n \in \mathbb{Z}[{}'A_1, \ldots, A_n]$*, mit der Eigenschaft, daß beim Einsetzen derjenigen Polynome $a_i \in \mathbb{Z}[{}'\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ in die Variablen, die durch die Identität $T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n = (T+\zeta_1)\ldots(T+\zeta_n)$ gegeben werden, im Polynomring $\mathbb{Z}[{}'\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ gilt*

$$\mathrm{Disk}_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i \neq j} (\zeta_i - \zeta_j)$$

2.9.15 (**Ursprung der Terminologie**). Die Bezeichnung „Diskriminante“ wird verständlich, wenn man mehrfache Nullstellen ansieht als „eigentlich verschiedene“ Nullstellen, die nur unglücklicherweise zusammenfallen und deshalb nicht mehr voneinander unterschieden alias „diskriminiert“ werden können.

Beweis. Unser Produkt ist offensichtlich symmetrisch und läßt sich nach 2.9.7 folglich eindeutig schreiben als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen. □

2.9.16. Für jeden kommutativen Integritätsbereich k und jedes normierte Polynom $T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n$ im Polynomring $k[T]$, das in $k[T]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, sind für die eben definierte Diskriminante Disk_n offensichtlich gleichbedeutend:

1. $\mathrm{Disk}_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$;
2. Das Polynom $T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n$ hat mehrfache Nullstellen.

Man nennt das Element $\mathrm{Disk}_n(a_1, \ldots, a_n) \in k$ auch die **Diskriminante des normierten Polynoms** $T^n+a_1T^{n-1}+\ldots+a_n$. Eine explizite Formel für die Diskriminante geben wir in 3.9.30. Manche Quellen erklären die Diskriminate abweichend als $\prod_{i<j}(\zeta_i - \zeta_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2}\,\mathrm{Disk}_n$.

Beispiel 2.9.17. Gilt speziell im Polynomring $k[T]$ über irgendeinem Kring k die Identität $T^2 - pT + q = (T - \zeta)(T - \xi)$ für $p, q, \alpha, \beta, \gamma \in k$, so erhalten wir in k die Identität $-(\zeta - \xi)^2 = -p^2 + 4q$. Das bedeutet

$$\mathrm{Disk}_2(p, q) = -p^2 + 4q$$

Beispiel 2.9.18. Gilt speziell im Polynomring $k[T]$ über irgendeinem Kring k die Identität $T^3 + pT + q = (T - \alpha)(T - \beta)(T - \gamma)$ für $p, q, \alpha, \beta, \gamma \in k$, so erhalten wir in k die Identität $-(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2 = 4p^3 + 27q^2$. Das bedeutet

$$\mathrm{Disk}_3(0, p, q) = 4p^3 + 27q^2$$

Übungen

Übung 2.9.19. Was ist die Summe der $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3$ dritten Potenzen der vier komplexen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ des Polynoms $X^4 + 3X^3 - 5X^2 + X + 1$?

Ergänzende Übung 2.9.20. Man zeige für symmetrische Polynome im Fall $n \geq k$ die Identität

$$s_{2k}(X_1, \ldots, X_n, -X_1, \ldots, -X_n) = (-1)^k s_k(X_1^2, \ldots, X_n^2)$$

Ergänzende Übung 2.9.21. Man zeige, daß die Polynome $P \in \mathbb{Z}[X,Y]$, die bei Vertauschung von X und Y in ihr Negatives übergehen, gerade die Produkte von $(X-Y)$ mit symmetrischen Polynomen sind.

Ergänzende Übung 2.9.22. Sei k ein Körper einer von Zwei verschiedenen Charakteristik. Ein Polynom $f \in k[X_1,\ldots,X_n]$ heißt **antisymmetrisch** genau dann, wenn gilt $\sigma f = \operatorname{sgn}(\sigma) f \ \forall \sigma \in \mathcal{S}_n$. Man zeige, daß die antisymmetrischen Polynome genau die Produkte von $\prod_{i<j}(X_i - X_j)$ mit symmetrischen Polynomen sind. Hinweis: [LA1] 5.4.5. Man zeige dasselbe auch allgemeiner im Fall eines faktoriellen Rings k einer von Zwei verschiedenen Charakteristik.

Ergänzende Übung 2.9.23. Ist der Koeffizientenring k ein unendlicher Integritätsbereich, so ist ein Polynom $f \in k[X_1,\ldots,X_n]$ homogen vom Grad d genau dann, wenn gilt

$$f(\lambda X_1,\ldots,\lambda X_n) = \lambda^d f(X_1,\ldots,X_n) \qquad \forall \lambda \in k$$

Übung 2.9.24. Man stelle $X^4+Y^4+Z^4+W^4$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen dar.

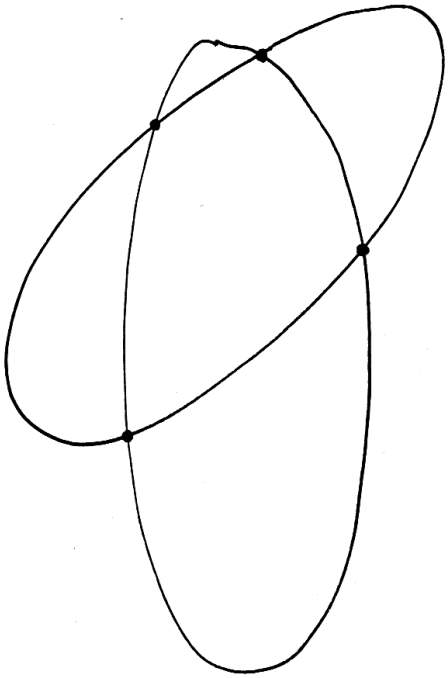
Ergänzende Übung 2.9.25. Ist R ein Kring mit einer Primzahl p als Charakteristik, so bilden die Elemente $a \in R$ mit $a^p = a$ einen Teilring.

Übung 2.9.26. Man zeige: Die Darstellung eines symmetrischen Polynoms vom Grad d durch elementarsymmetrische Polynome ist dieselbe für jede Zahl von Variablen $\geq d$. Zum Beispiel impliziert unsere Formel $X_1^3+X_2^3+X_3^3 = s_1^3 - 3s_1s_2+3s_3$, daß auch in 14 Variablen gilt $X_1^3+X_2^3+\ldots+X_{14}^3 = s_1^3-3s_1s_2+3s_3$.

Ergänzende Übung 2.9.27. Der Ring der symmetrischen Funktionen in n Veränderlichen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ wird auch als Ring erzeugt von $\mathbb{Q}$ und den Potenzsummen $X_1^k+\ldots+X_n^k$ für $1 \leq k \leq n$. Hinweis: Wir schreiben $X_1^n+\ldots+X_n^n = P(s_1,\ldots,s_n)$ und müssen zeigen, daß rechts der Summand s_n mit von Null verschiedenem Koeffizienten auftritt. Dann kommen wir mit 2.9.26 und Induktion zum Ziel. Spezialisieren wir aber die X_ν zu den Negativen der n-ten Einheitswurzeln $\exp(2\pi\mathrm{i}\nu/n)$ alias den Negativen der Nullstellen von X^n-1, so werden alle $s_{n-1} = \ldots = s_1$ zu Null. Eine $(n \times n)$-Matrix A über einem Körper der Charakteristik Null ist nilpotent genau dann, wenn für die Spuren ihrer Potenzen gilt

$$0 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = \ldots = \operatorname{tr}(A^n)$$

Übung 2.9.28. Seien k ein Körper und $f,g \in k[X,Y]$ teilerfremde Polynome, die homogen sind von den Graden m und n. Man zeige, daß sich jedes homogene Polynom h vom Grad $m+n-1$ eindeutig schreiben läßt als $h = af+bg$ mit a homogen vom Grad $n-1$ und b homogen vom Grad $m-1$. Hinweis: 2.4.34.



Zwei verschiedene Ellipsen schneiden sich in höchstens vier Punkten. In der Tat sind sie jeweils Nullstellenmengen von Polynomfunktionen vom Totalgrad Zwei, so daß wir das unmittelbar aus der Schranke von Bézout folgern können.

2.10 Schranke von Bézout*

Definition 2.10.1. Sei k ein Körper. Ein Polynom in zwei Veränderlichen $f \in k[X,Y]$ können wir in eindeutiger Weise schreiben in der Gestalt $f = \sum c_{pq} X^p Y^q$ mit $c_{pq} \in k$. Wir definieren den **Grad** oder genauer **Totalgrad** von f durch die Vorschrift

$$\operatorname{grad} f := \sup\{p+q \mid c_{pq} \neq 0\}$$

Speziell geben wir im Lichte von [AN1] 12.3.2.3 dem Nullpolynom wie in einer Veränderlichen den Grad $-\infty$. Analog definieren wir auch den Grad eines Polynoms in beliebig vielen Veränderlichen.

Satz 2.10.2 (Schranke von Bézout). *Sei k ein Körper und seien im Polynomring $k[X,Y]$ in zwei Veränderlichen über k zwei von Null verschiedene teilerfremde Polynome f, g gegeben. So haben f und g in der Ebene k^2 höchstens $(\operatorname{grad} f)(\operatorname{grad} g)$ gemeinsame Nullstellen.*

Vorschau 2.10.3. Ist $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen und zählt man die gemeinsamen Nullstellen von f und g mit geeignet definierten Vielfachheiten und nimmt auch noch die „Nullstellen im Unendlichen“ mit dazu, so haben f und g in diesem verfeinerten Sinne sogar genau $(\operatorname{grad} f)(\operatorname{grad} g)$ gemeinsame Nullstellen. Mehr dazu können Sie in der algebraischen Geometrie [KAG] 6.10.6 lernen.

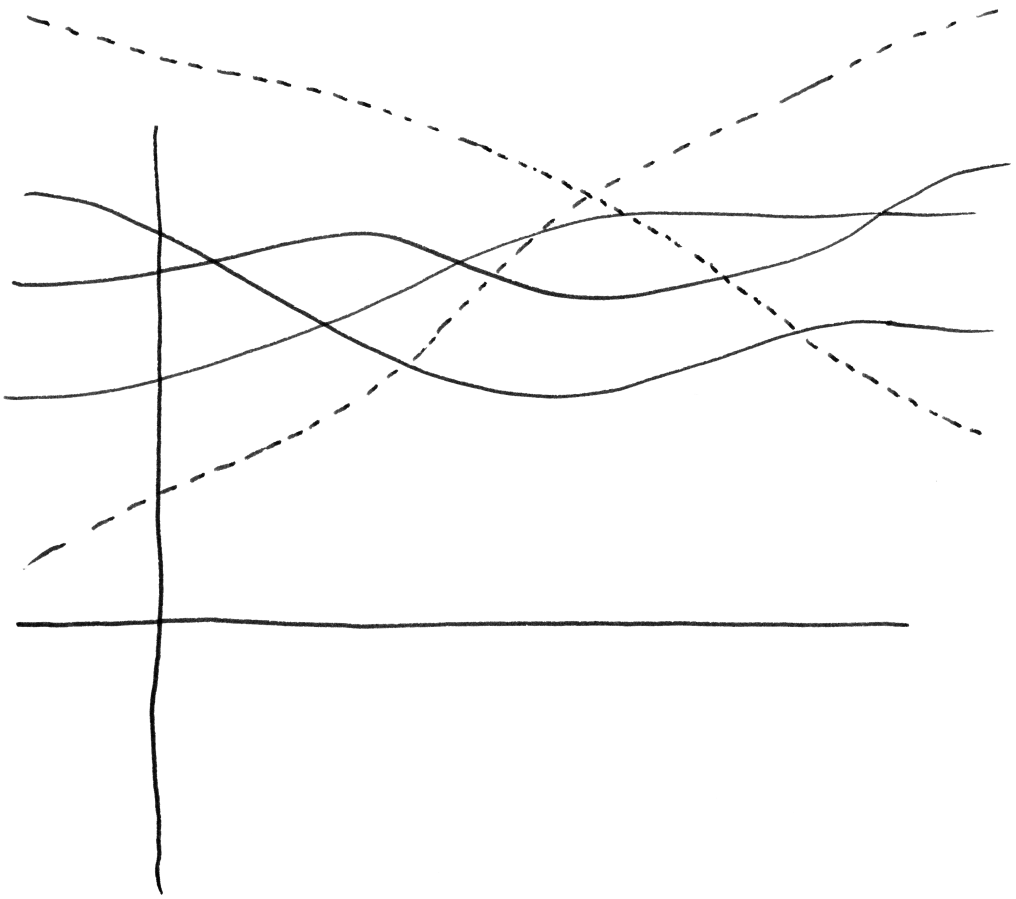
Beispiel 2.10.4. Ist eines unserer Polynome von der Gestalt $a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0 - Y$ und seine Nullstellenmenge mithin der Graph des Polynoms $a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ in einer Veränderlichen, so kann man diese Schranke schnell einsehen: Man setzt einfach in das andere Polynom $Y = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ ein und erhält ein Polynom in X, das eben nur höchstens so viele Nullstellen haben kann, wie sein Grad ist.

Beweis. Sicher reicht es, wenn wir unsere Schranke zeigen für geeignet transformierte Polynome $f \circ \varphi$, $g \circ \varphi$ mit $\varphi \in \mathrm{GL}(2;k)$ als da heißt $\varphi : k^2 \xrightarrow{\sim} k^2$ linear. Wir interessieren uns hier insbesondere für die Scherungen $\varphi_\lambda : k^2 \to k^2$, $(x,y) \mapsto (x + \lambda y, y)$ mit $\lambda \in k$. Gegeben $f \in k[X,Y]$ ein Polynom vom Totalgrad $\operatorname{grad} f = n$ enthält $f \circ \varphi_\lambda$ für alle $\lambda \in k$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen einen Term cY^n mit $c \neq 0$. Das ist formal leicht einzusehen und entspricht der anschaulichen Erkenntnis, daß „das Nullstellengebilde von f nur höchstens endlich viele Asymptoten besitzt“. Wir wissen nach 2.7.16 schon, daß unsere beiden Polynome höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen haben können. Ist k unendlich, und jeder Körper k läßt sich notfalls in den unendlichen Körper $k(t)$ einbetten, so finden wir nun $\lambda \in k$ derart, daß unsere transformierten Polynome $f \circ \varphi_\lambda$ beziehungsweise $g \circ \varphi_\lambda$ beide Monome der Gestalt cY^n beziehungsweise dY^m mit $c \neq 0 \neq d$ enthalten, für $n = \operatorname{grad} f$, $m = \operatorname{grad} g$, und daß zusätzlich die gemeinsamen Nullstellen unserer transformierten Polynome paarweise verschiedene x-Koordinaten haben. Anschaulich gesprochen bedeutet das, daß wir die y-Achse so kippen, daß keine unserer Nullstellenmengen „einen in Richtung unserer gekippten y-Achse ins Unendliche gehenden Teil hat“ und daß jede Parallele zu unserer gekippten y-Achse höchstens eine gemeinsame Nullstelle unserer beiden Polynome trifft. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also annehmen, daß unsere Polynome f und g die Gestalt

$$\begin{aligned} f &= Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X) \\ g &= Y^m + b_1(X)Y^{m-1} + \ldots + b_m(X) \end{aligned}$$

haben mit $a_i, b_j \in k[X]$, $\operatorname{grad} a_i \leq i$, $\operatorname{grad} b_j \leq j$, und daß darüber hinaus die gemeinsamen Nullstellen von f und g paarweise verschiedene x-Koordinaten haben. Die x-Koordinaten gemeinsamer Nullstellen sind aber genau die Nullstellen der im folgenden definierten „Resultante“ $\operatorname{Res}(f,g) \in k[X]$, und in 2.10.9 zeigen wir, daß diese Resultante als Polynom in X höchstens den Grad nm hat. Das beendet dann den Beweis. □

Satz 2.10.5 (über die Resultante). *Gegeben $m, n \geq 0$ gibt es genau ein Polynom $\operatorname{Res} = \operatorname{Res}_{n,m} \in \mathbb{Z}[{}'a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m]$ mit ganzzahligen Koeffizienten in $n + m$ Veränderlichen derart, daß unter der Substitution der a_i und b_j durch*



Das Nullstellengebilde von $f = Y^3 + a_2(X)Y^2 + \ldots + a_0(X)$ als durchgezognene und von $g = Y^2 + b_1(X)Y + \ldots + b_0(X)$ als gestrichelte Linien. Über jedem Punkt der x-Achse liegen genau drei beziehungsweise zwei Lösungen von f beziehungsweise g.

diejenigen Elemente von $\mathbb{Z}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \xi_1, \ldots, \xi_m]$*, die erklärt sind durch die Gleichungen*

$$\begin{array}{rcl} T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n & = & (T+\zeta_1)\ldots(T+\zeta_n), \\ T^m + b_1 T^{m-1} + \ldots + b_m & = & (T+\xi_1)\ldots(T+\xi_m), \end{array}$$

im Polynomring in den ζ_i *und* ξ_j *gilt*

$$\mathrm{Res}(a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_m) = \prod_{i=1,j=1}^{n,m} (\zeta_i - \xi_j)$$

Definition 2.10.6. Gegeben normierte Polynome $f(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n$ und $g(T) = T^m + b_1 T^{m-1} + \ldots + b_m$ mit Koeffizienten in einem Kring k benutzen wir die Abkürzung

$$\mathrm{Res}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = \mathrm{Res}(f, g)$$

und nennen dies Element von k die **Resultante von** f **und** g. Bei der Determinantenbeschreibung der Resultante erklären wir allgemeiner für jede zwei nicht notwendig normierte Polynome f, g der Grade $\leq n$ beziehungsweise $\leq m$ ihre Resultante $\mathrm{Res}_{n,m}(f, g)$.

2.10.7 (**Bedeutung der Resultante**). Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so verschwindet die Resultante von zwei normierten Polynomen mit Koeffizienten in k per definitionem genau dann, wenn die beiden Polynome eine gemeinsame Nullstelle haben. Im allgemeinen verschwindet die Resultante jedenfalls, wann immer die beiden Polynome eine gemeinsame Nullstelle haben.

Beispiel 2.10.8. Im Fall $m = n = 2$ folgt aus $T^2 + a_1 T + a_2 = (T - \zeta_1)(T - \zeta_2)$ und $T^2 + b_1 T + b_2 = (T - \xi_1)(T - \xi_2)$ unmittelbar

$$\begin{array}{ll} a_2 = \zeta_1\zeta_2, & a_1 = \zeta_1 + \zeta_2, \\ b_2 = \xi_1\xi_2, & b_1 = \xi_1 + \xi_2, \end{array}$$

Eine kurze Rechnung liefert dann

$$(\zeta_1 - \xi_1)(\zeta_2 - \xi_2)(\zeta_1 - \xi_2)(\zeta_2 - \xi_1) = (a_2 - b_2)^2 - (a_2 + b_2)a_1 b_1 + a_2 b_1^2 + b_2 a_1^2$$

Der Ausdruck rechts in den Koeffizienten ist also die Resultante der Polynome $f(T) = T^2 + a_1 T + a_2$ und $g(T) = T^2 + b_1 T + b_2$. Zum Beispiel sehen wir, daß im Fall $a_1 = b_1$ unsere Polynome f und g in einem algebraisch abgeschlossenen Körper genau dann eine gemeinsame Nullstelle haben, wenn gilt $a_2 = b_2$. Das hätten wir natürlich auch so schon gewußt, aber es ist doch ganz beruhigend, unseren Argumenten mal in einem überschaubaren Spezialfall bei der Arbeit zugesehen zu haben.

Beweis. Das Polynom $\prod_{i=1,j=1}^{n,m}(\zeta_i - \xi_j) \in \mathbb{Z}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n][\xi_1, \ldots, \xi_m]$ ist symmetrisch in den ξ_j und liegt nach 2.9.7 folglich in

$$\mathbb{Z}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n][b_1, \ldots, b_m] = \mathbb{Z}[b_1, \ldots, b_m][\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$$

Unser Polynom ist aber auch symmetrisch in den ζ_i, folglich liegt es wieder nach 2.9.7 sogar in $\mathbb{Z}[b_1, \ldots, b_m][a_1, \ldots, a_n]$. □

2.10.9 (**Grad der Resultante**). Wir zeigen nun noch die Behauptungen für den Grad der Resultante, die beim Beweis für die Schranke von Bézout benötigt wurden. Als Polynom in $\mathbb{Z}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \xi_1, \ldots, \xi_m]$ ist die Resultante ja offensichtlich homogen vom Grad mn. Dahingegen sind die $a_i \in \mathbb{Z}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ homogen vom Grad i und die $b_j \in \mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_m]$ homogen vom Grad j. Aus der algebraischen Unabhängigkeit der elementarsymmetrischen Polynome folgt, daß ein Monom $a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n} b_1^{\mu_1} \ldots b_m^{\mu_m}$ nur dann mit von Null verschiedenem Koeffizienten in der Resultante auftauchen kann, wenn gilt

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n + \mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + m\mu_m = nm$$

Setzen wir hier insbesondere für a_i gewisse $a_i(X) \in k[X]$ vom Grad $\leq i$ und für b_j gewisse $b_j(X) \in k[X]$ vom Grad $\leq j$ ein, so ist die Resultante ein Polynom in $k[X]$ vom Grad $\leq mn$.

Ergänzung 2.10.10 (**Die Resultante als Determinante**). Sei M die Matrix aus nebenstehendem Bild. Eine explizite Formel für die Resultante ist

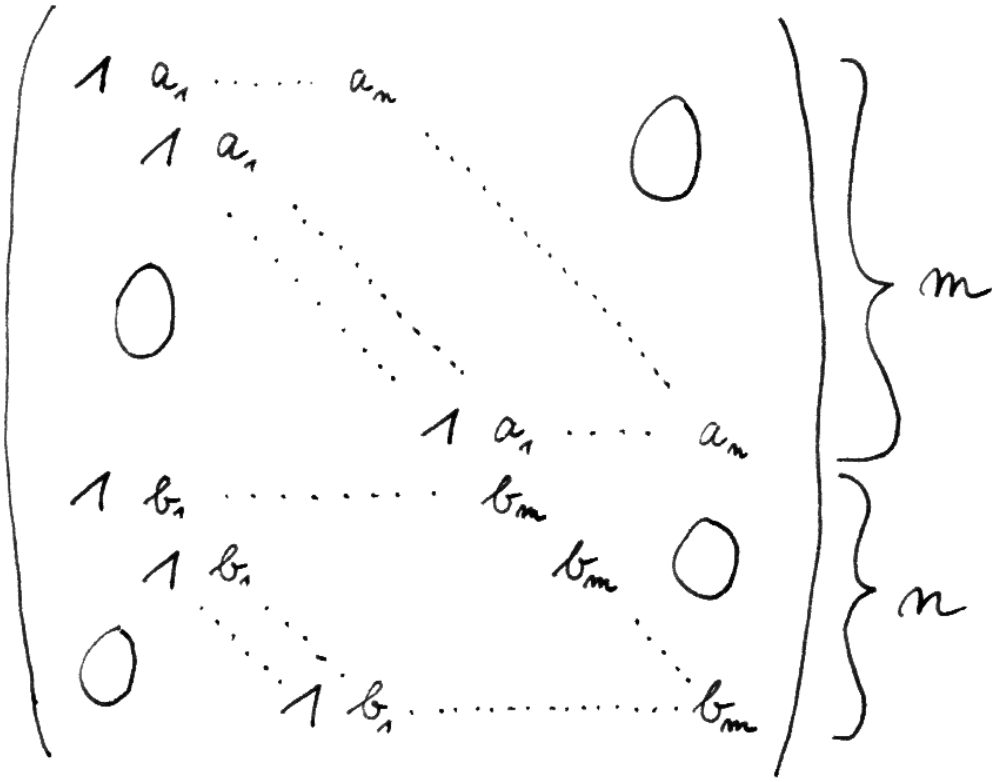
$$\mathrm{Res}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = \det M$$

Um das einzusehen, kann man wie folgt argumentieren: Gegeben zwei normierte nicht konstante Polynome $f, g \in k[T]$ mit Koeffizienten in einem Körper k sind ja gleichbedeutend:

(1) Unsere beiden Polynome sind teilerfremd in $k[T]$;

(2) Es gibt Polynome p, q mit $\deg p < \deg g$ und $\deg q < \deg f$, für die gilt $pf + qg = 1$.

In der Tat ist $(2) \Rightarrow (1)$ offensichtlich und $(1) \Rightarrow (2)$ folgt unmittelbar aus dem abstrakten chinesischen Restsatz 2.3.4, wenn wir etwa das Urbild kleinsten Grades von $(0, 1) \in k[T]/\langle f\rangle \times k[T]/\langle g\rangle$ in $k[T]$ aufsuchen. Insbesondere sehen wir so, daß p und q bereits eindeutig bestimmt sind, wenn es sie denn gibt. Nun können wir die Gleichung $pf + qg = 1$ als ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten von p und q auffassen, und die Matrix dieses Systems ist dann genau die oben gegebene Matrix, wie der Leser leicht selbst einsehen wird. Genau dann ist



Die Matrix M, deren Determinante die Resultante liefert. Gegeben zwei nicht notwendig normierte Polynome vom Grad $\leq n$ und $\leq m$ der Gestalt $a_0T^n + a_1T^{n-1} + \ldots + a_n$ und $b_0T^m + b_1T^{m-1} + \ldots + b_m$ nehmen wir diese Determinante mit den Einsen ersetzt durch a_0 beziehungsweise b_0 von nun an als unsere Definition der Resultante $\mathrm{Res}_{n,m}$.

also unser System eindeutig lösbar, wenn die Determinante der fraglichen Matrix nicht Null ist. Genau dann verschwindet also diese Determinante, wenn f und g nicht teilerfremd sind, und im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers k ist das gleichbedeutend dazu, daß f und g eine gemeinsame Nullstelle haben. Speziell erkennen wir so mit [LA1] 5.4.5, daß das Polynom $\prod(\zeta_i - \xi_j)$ in $\mathbb{Q}[\zeta_i, \xi_j]$ unsere Determinante teilt, wenn wir sie zu den Polynomen aus 2.10.5 mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}[\zeta_i, \xi_j]$ bilden. Wir erkennen sogar genauer, daß unsere Determinante bis auf eine von Null verschiedene Konstante ein Produkt von Faktoren $(\zeta_i - \xi_j)$ ist, wobei jeder Faktor mindestens einmal vorkommt. Daß hier keine Faktoren mehrfach auftreten und daß die besagte von Null verschiedene Konstante eine Eins ist, können wir unschwer prüfen, indem wir alle ζ_i Null setzen.

Übungen

Ergänzende Übung 2.10.11. Zwei beliebige homogene Polynome $f(X, Y) = a_0X^n + a_1X^{n-1}Y + \ldots + a_nY^n$ und $g(X, Y) = b_0X^m + b_1X^{m-1}Y + \ldots + b_mY^m$ mit Koeffizienten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper k haben genau dann eine gemeinsame Nullstelle außerhalb des Ursprungs, wenn die Determinante derjenigen Variante der nebenstehenden Matrix verschwindet, die entsteht, wenn wir die erste Reihe von Einsen durch a_0 und die zweite Reihe von Einsen durch b_0 ersetzen. Diese Determinante heißt dann auch die **Sylvester-Determinante**.

3 Körpererweiterungen

3.1 Grundlagen und Definitionen

Beispiele 3.1.1. Ein Körper ist nach [LA1] 5.2.26 ein kommutativer von Null verschiedener Ring, in dem jedes Element ungleich Null eine Einheit ist. Aus den Grundvorlesungen bekannt sind die Körper $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ der rationalen, reellen und komplexen Zahlen. Allgemeiner haben wir in [LA1] 5.5 zu jedem kommutativen Integritätsbereich R seinen Quotientenkörper

$$\operatorname{Quot} R$$

konstruiert, zum Beispiel ist $\operatorname{Quot} \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen und $\operatorname{Quot} K[X] = K(X)$ der Funktionenkörper über einem gegebenen Körper K. Weiter ist nach 2.4.23 der Faktorring R/pR von einem Hauptidealring nach dem von einem irreduziblen Element $p \in R$ erzeugten Ideal ein Körper. Insbesondere sind die Restklassenringe

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

für p eine Primzahl in $\mathbb{Z}$ Körper und desgleichen die Faktorringe

$$K[X]/\langle P \rangle$$

des Polynomrings $K[X]$ über einem Körper K nach einem irreduziblen Polynom $P \in K[X]$.

Definition 3.1.2. Eine Teilmenge eines Körpers heißt ein **Unterkörper**, wenn sie so mit der Struktur eines Körpers versehen werden kann, daß die Einbettung ein Körperhomomorphismus ist. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß unsere Teilmenge ein Teilring und mit der induzierten Ringstruktur ein Körper ist.

3.1.3. Sicher ist ein beliebiger Schnitt von Unterkörpern eines Körpers wieder ein Unterkörper. Ist K ein Körper und $T \subset K$ eine Teilmenge, so heißt der kleinste Unterkörper von K, der T enthält, der **von** T **erzeugte Unterkörper**. Den kleinsten Unterkörper von K, in anderen Worten den von der leeren Menge $T = \emptyset$ erzeugten Unterkörper, nennt man den **Primkörper von** K.

3.1.4. Für jeden Körper, ja jeden Ring K erinnern wir uns aus [LA1] 5.2.31 an die Definition seiner **Charakteristik** $(\operatorname{char} K) \in \mathbb{N}$ durch die Identität

$$\ker(\mathbb{Z} \to K) = \mathbb{Z} \cdot (\operatorname{char} K)$$

Hier meint $\mathbb{Z} \to K$ den nach [LA1] 5.1.10 eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach K.

3.1.5 (**Diskussion der Charakteristik**). Die Charakteristik ist also Null, wenn das neutrale Element der multiplikativen Gruppe $K^\times$ als Element der additiven Gruppe $(K,+)$ unendliche Ordnung hat, und ist sonst genau diese Ordnung. Gibt es demnach in noch anderen Worten eine natürliche Zahl $d > 0$ derart, daß in unserem Körper K gilt $1+1+\ldots+1 = 0$ (d Summanden), so ist das kleinstmögliche derartige $d > 0$ die Charakteristik $d = \operatorname{char} K$ von K. Gibt es dahingegen kein derartiges d, so hat K die Charakteristik Null.

Lemma 3.1.6 (**Kleinster Unterkörper eines Körpers**). *Die Charakteristik eines Körpers K ist entweder Null oder eine Primzahl und es gilt:*

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{char} K = 0 & \Leftrightarrow & \textit{Der kleinste Unterkörper von } K \textit{ ist isomorph zu } \mathbb{Q}; \\ \operatorname{char} K = p > 0 & \Leftrightarrow & \textit{Der kleinste Unterkörper von } K \textit{ ist isomorph zu } \mathbb{F}_p. \end{array}$$

Beweis. Sei $d = \operatorname{char} K$. Da wir eine Inklusion $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \hookrightarrow K$ haben, muß $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ein Integritätsring sein, also ist nach [LA1] 5.2.27 die Charakteristik eines Körpers entweder null oder eine Primzahl. Im Fall $\operatorname{char} K = p > 0$ prim induziert $\mathbb{Z} \to K$ unter Verwendung der universellen Eigenschaft des Restklassenrings 2.1.13 oder spezieller 2.2.6 einen Isomorphismus von $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf einen Unterkörper von K. Im Fall $d = 0$ induziert $\mathbb{Z} \to K$ unter Verwendung der universellen Eigenschaft des Quotientenkörpers [LA1] 5.5.5 einen Isomorphismus von $\mathbb{Q} = \operatorname{Quot}\mathbb{Z}$ auf einen Unterkörper von K. Man prüft leicht, daß die Bilder jeweils die kleinsten Unterkörper von K sind. □

3.2 Körpererweiterungen

Definition 3.2.1. Eine **Körpererweiterung** ist ein Paar $L \supset K$ bestehend aus einem Körper L mit einem Unterkörper K. So ein Paar $L \supset K$ nennt man dann auch eine **Körpererweiterung von** K. Man schreibt statt $L \supset K$ meist L/K und nennt K den **Grundkörper** und L den **Erweiterungskörper** oder **Oberkörper** der Körpererweiterung. Von einer **echten Körpererweiterung** fordern wir zusätzlich, daß der Erweiterungskörper nicht mit dem Grundkörper zusammenfällt.

Beispiele 3.2.2. Ein Grundbeispiel ist die Körpererweiterung $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$. Das Beispiel $\mathbb{C}(X) \supset \mathbb{C}(X^2)$ zeigt, daß es auch bei einer echten Körpererweiterung durchaus vorkommen kann, daß es einen Körperisomorphismus zwischen Grundkörper und Oberkörper gibt. In diesem Beispiel ist mit $\mathbb{C}(X^2)$ der Quotientenkörper des Rings der geraden Polynome $\mathbb{C}[X^2] \subset \mathbb{C}[X]$ gemeint.

Vorschau 3.2.3. In 3.8.6 werden wir unsere Definition abändern und vereinbaren, daß eine Körpererweiterung dasselbe ist wie ein Körperhomomorphismus. Da Körperhomomorphismen stets injektiv sind, ist das fast dasselbe. Zum jetzigen

Zeitpunkt führt allerdings die Definition einer Körpererweiterung als Körperhomomorphismus noch nicht zu mehr Klarheit, sondern vielmehr zu einer unnötig aufgeblähten Notation. Darunter leidet das Verständnis, so fürchte ich, mehr als unter einer späteren Umwidmung des Begriffs einer Körpererweiterung.

Definition 3.2.4 (Erzeugung von Körpererweiterungen). Gegeben eine Körpererweiterung L/K und Elemente des Erweiterungskörpers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ bezeichnet man mit $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset L$ den von K und den α_i erzeugten Unterkörper von L. Er ist im allgemeinen verschieden von dem von K und den α_i erzeugten Teilring $K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \subset L$. Eine Körpererweiterung L/K heiße **körperendlich**, wenn der Erweiterungskörper über dem Grundkörper als Körper endlich erzeugt ist, wenn es also in Formeln endlich viele Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ gibt mit

$$L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

3.2.5 (**Diskussion der Notation**). Das Symbol $K(X)$ kann nun leider auf zweierlei Weisen interpretiert werden: Einerseits als der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$ über K in einer Veränderlichen X, andererseits als der von K und einem weiteren Element X in einem größeren Körper L erzeugte Unterkörper. Wie viele Autoren benutzen wir nach Möglichkeit große Buchstaben vom Ende des Alphabets für die „algebraisch unabhängigen“ Variablen in einem Funktionenkörper, also im ersten Fall, und kleine Buchstaben für Elemente einer bereits gegebenen Körpererweiterung, also im zweiten Fall. Wollen wir die Freiheit unserer Veränderlichen besonders betonen, so setzen wir wie in 2.2.5 ein „Freiheitsstrichlein“ oben an die eröffnende Klammer und schreiben $K(\,'X)$ für den Funktionenkörper in einer Variablen X.

Ergänzung 3.2.6. Gegeben Körper $K \subset L$ und eine Teilmenge $T \subset L$ bezeichnen wir mit $K(T) \subset L$ auch den von K und T in L erzeugten Teilkörper und nennen ihn den **über** K **von** T **erzeugten Teilkörper von** L. Wenn wir besonders betonen wollen, daß hier T eine Teilmenge von L ist und nicht etwa ein Element von L, schreiben wir auch ausführlicher $K(\,!T)$. Gegeben Körper $K \subset L$ und eine Teilmenge $T \subset L$ kann der von K und T erzeugte Teilkörper $K(\,!T) \subset L$ von L beschrieben werden als die Vereinigung aller von endlichen Teilmengen von T über K erzeugten Teilkörper, in Formeln

$$K(\,!T) = \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T}} K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Beispiele 3.2.7. Wir haben $\mathbb{R}(\mathrm{i}) = \mathbb{R}[\mathrm{i}] = \mathbb{C}$ und $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, aber $K[\,'X] \neq K(\,'X)$, der Polynomring ist nämlich verschieden von seinem Quotientenkörper.

Übungen

Übung 3.2.8. Alle Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ lassen sich eindeutig schreiben in der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, vergleiche [GR] 2.2.4.15. Man schreibe das Inverse von $7 + \sqrt{2}$ in dieser Form.

Übung 3.2.9. Man zeige $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Übung 3.2.10. Gegeben $a, b \in \mathbb{Q}^\times$ zeige man, daß gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{b})$ genau dann, wenn a/b in $\mathbb{Q}$ ein Quadrat ist. Gegeben allgemeiner Körper $K \subset L$ einer von zwei verschiedenen Charakteristik und $\alpha, \beta \in L^\times$ mit $\alpha^2, \beta^2 \in K$ zeige man, daß gilt $K(\alpha) = K(\beta)$ genau dann, wenn $\alpha/\beta \in K$.

Übung 3.2.11. Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $P, Q \in K[X]$ teilerfremd in $K[X]$. So haben P und Q auch in L keine gemeinsame Nullstelle. Hinweis: Unser Polynomring ist ein Hauptidealring. Nun verwende man ein Analogon des Satzes von Bezout. Weitergehende Aussagen in Richtung dieser Übung faßt Proposition 3.9.12 zusammen.

Ergänzung 3.2.12. Sehr viel allgemeiner kann man für paarweise verschiedene Primzahlen $p, q, \ldots w$ und beliebige $n, m, \ldots, r \geq 2$ zeigen, daß gilt

$$\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[m]{q}, \ldots, \sqrt[r]{w})$$

Das und vieles weitere in dieser Richtung lernt man in der algebraischen Zahlentheorie, die auf dieser Vorlesung aufbaut. Den Fall $n = m = \ldots = r = 2$ behandeln wir in 4.1.35. Noch allgemeiner zeigt Besicovich [Bes40], daß gegeben paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$ und positive natürliche durch keine dieser Primzahlen teilbare Zahlen $a_1, \ldots, a_s$ und beliebige positive natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ stets gilt

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[n_1]{p_1 a_1}, \ldots, \sqrt[n_s]{p_s a_s}) : \mathbb{Q}] = n_1 \ldots n_s$$

Die Wurzeln sind hierbei stets als die positiven Wurzeln in $\mathbb{R}$ zu verstehen.

Übung 3.2.13. Seien K ein Körper und $P \in K[X] \backslash K$ ein nichtkonstantes Polynom. So ist der Ringhomomorphismus $K[Y] \to K[X]$ mit $Y \mapsto P$ injektiv und die davon induzierte Körpererweiterung $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ hat als Grad den Grad von P.

3.3 Elemente von Körpererweiterungen

Definition 3.3.1. Sei L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Gibt es ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom $0 \neq Q \in K[X]$ mit $Q(\alpha) = 0$, so heißt α **algebraisch über** K. Sonst heißt α **transzendent über** K. Unter einer **algebraischen** beziehungsweise **transzendenten Zahl** versteht man eine komplexe Zahl,

die algebraisch beziehungsweise transzendent ist über dem Körper der rationalen Zahlen. Ein berühmter Satz von Lindemann besagt, daß die Kreiszahl $\pi \in \mathbb{R}$ transzendent ist über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, vergleiche [AN1] 12.3.4.2.

3.3.2. Gegeben eine Körpererweiterung L/K und ein Element $\alpha \in L$ betrachten wir die Auswertungsabbildung

$$\begin{array}{ccc} K[X] & \to & L \\ Q & \mapsto & Q(\alpha) \end{array}$$

Ist α transzendent, so ist diese Abbildung injektiv und induziert nach der universellen Eigenschaft des Quotientenkörpers [LA1] 5.5.5 einen Isomorphismus $K(X) = \operatorname{Quot} K[X] \xrightarrow{\sim} K(\alpha) \subset L$. Den anderen Fall klärt der folgende Satz.

Satz 3.3.3 (über das Minimalpolynom). *Seien L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K. So gilt:*

1. *Es gibt in $K[X]$ unter allen normierten Polynomen P mit $P(\alpha) = 0$ genau eines von minimalem Grad. Es heißt das* **Minimalpolynom** $P = \operatorname{Irr}(\alpha, K)$ **von** α **über** K*;*

2. *Dies Minimalpolynom ist K-irreduzibel und jedes Polynom $Q \in K[X]$ mit einer Nullstelle bei α ist ein Vielfaches des Minimalpolynoms von α;*

3. *Gegeben ein normiertes K-irreduzibles Polynom $Q \in K[X]$ mit einer Nullstelle bei α ist Q bereits das Minimalpolynom von α;*

4. *Das Auswerten bei α liefert einen Isomorphismus*

$$K[X]/\langle \operatorname{Irr}(\alpha, K) \rangle \xrightarrow{\sim} K(\alpha)$$

5. *Ist $d = \operatorname{grad}(\operatorname{Irr}(\alpha, K))$ der Grad des Minimalpolynoms von α über K, so bilden die Potenzen $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{d-1}$ eine Basis des K-Vektorraums $K(\alpha)$.*

Beispiel 3.3.4. Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Das Element $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ ist algebraisch über $\mathbb{R}$ mit Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(\mathrm{i}, \mathbb{R}) = X^2 + 1$. Wir haben $\mathbb{R}(\mathrm{i}) = \mathbb{C}$ und die Abbildung $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ mit $X \mapsto \mathrm{i}$ definiert einen Ringisomorphismus $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$. Die beiden Elemente $1 = \mathrm{i}^0$ und $\mathrm{i} = \mathrm{i}^1$ bilden eine Basis von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$.

Beweis. Da $K[X]$ nach 2.4.19 ein Hauptidealring ist und da das Auswerten $\varphi_\alpha : K[X] \to L$ mit $Q \mapsto Q(\alpha)$ keine Injektion ist, wir hatten ja α algebraisch über K angenommen, gibt es ein von Null verschiedenes und dann natürlich auch ein normiertes Polynom $P \in K[X]$ mit $\ker(\varphi_\alpha) = \langle P \rangle$. Alle anderen normierten

Polynome aus $\langle P\rangle$ haben offensichtlich einen Grad, der echt größer ist als der Grad von P, und das zeigt bereits den ersten Teil des Satzes. Für unser P haben wir nach 2.2.6 weiter eine Einbettung $K[X]/\langle P\rangle \hookrightarrow L$, folglich ist $K[X]/\langle P\rangle$ ein Integritätsbereich. Nach 2.4.23 ist also P irreduzibel und $K[X]/\langle P\rangle$ sogar ein Körper. Dann induziert aber offensichtlich die Einbettung einen Isomorphismus $K[X]/\langle P\rangle \xrightarrow{\sim} K(\alpha)$. Nach 2.1.21 bilden für $d = \operatorname{grad} P$ die Bilder der Potenzen $1, X, X^2, \ldots, X^{d-1}$ eine Basis von $K[X]/\langle P\rangle$ über K, und damit bilden dann auch $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{d-1}$ eine Basis von $K(\alpha)$ über K. □

3.3.5. Ich will die Irreduzibilität des Minimalpolynoms auch noch einmal ganz explizit begründen. Wäre das Minimalpolynom P ein Produkt $P = QR$ von Polynomen positiven Grades, so gälte $Q(\alpha) \neq 0 \neq R(\alpha)$ wegen der Minimalität des Minimalpolynoms, und das würde sofort zum Widerspruch $P(\alpha) \neq 0$ führen.

3.3.6. Sei L/K ein Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Das Minimalpolynom von α über K ist im allgemeinen nur in $K[X]$ irreduzibel, in $L[X]$ spaltet es zumindest einen Faktor $(X - \alpha)$ ab und ist also reduzibel, es sei denn, wir sind im Fall $\alpha \in K$. Zum Beispiel ist $X^3 - 2$, da es ja $\mathbb{Q}$-irreduzibel ist, das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ und es gilt

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

3.3.7. Ist eine Körpererweiterung als Körpererweiterung erzeugt von einem einzigen Element über dem Grundkörper, so nennt man sie eine **einfache** oder auch eine **primitive Körpererweiterung** des Grundkörpers und das fragliche Element heißt ein **primitives Element** der Körpererweiterung. In dieser Terminologie geben die vorhergehenden Überlegungen einen Überblick über die primitiven Erweiterungen eines gegebenen Körpers: Bis auf den Funktionenkörper sind das genau die Faktorringe des Polynomrings nach irreduziblen Polynomen. Dabei können allerdings verschiedene normierte irreduzible Polynome durchaus zu „derselben“ primitiven Körpererweiterung führen – und was hier genau mit „derselben“ Körpererweiterung gemeint ist, wird im weiteren noch ausführlich diskutiert werden müssen.

Übungen

Übung 3.3.8. Alle Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ lassen sich eindeutig schreiben in der Form $a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Man schreibe das Inverse von $7 + \sqrt[3]{2}$ in dieser Form.

Übung 3.3.9. Gegeben eine Körpererweiterung L/K und ein Element $a \in L$, das algebraisch ist über K, zeige man, daß das Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(a; K)$ bis auf ein Vorzeichen mit dem charakteristischen Polynom nach [LA1] 6.6.9 des durch

Multiplikation mit a gegebenen Endomorphismus des K-Vektorraums $K(a)$ zusammenfällt. Hinweis: Cayley-Hamilton.

Übung 3.3.10. Man bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $1 + \mathrm{i}$ über $\mathbb{R}$.

Ergänzende Übung 3.3.11. Zeigen Sie, daß das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nicht in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, daß für jede Einheitswurzel ζ das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}(\zeta)$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, daß für ζ eine nichttriviale dritte Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über K in $K(\sqrt[3]{2})$ in Linearfaktoren zerfällt.

Ergänzende Übung 3.3.12. Sei $K \supset \mathbb{C}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{C}$. Gilt $K \neq \mathbb{C}$, so kann der $\mathbb{C}$-Vektorraum K nicht von einer abzählbaren Teilmenge erzeugt werden, als da heißt, K hat „überabzählbare Dimension“ über $\mathbb{C}$. Hinweis: $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen nach [AN1] 12.5.1.7 und abzählbar viele gebrochen rationale Funktionen aus $\mathbb{C}(X)$ können nur abzählbar viele Polstellen haben.

Übung 3.3.13. Seien $R \supset K$ ein Kring mit einem Teilring, der sogar ein Körper ist. Genau ist $\alpha \in R$ Nullstelle eines von Null verschiedenen Polynoms $P \in K[X]$, wenn $K[\alpha]$ endlichdimensional ist als K-Vektorraum.

Übung 3.3.14. Seien $R \supset K$ ein Kring mit einem Teilring, der sogar ein Körper ist. Ist R endlichdimensional als K-Vektorraum und ein Integritätsring, so ist R auch selbst bereits ein Körper.

Übung 3.3.15. Sei K ein Körper und $K(X)$ der Funktionenkörper über K. So sind die Elemente von K die einzigen Elemente von $K(X)$, die algebraisch sind über K.

3.4 Endliche Körpererweiterungen

Definition 3.4.1. Gegeben eine Körpererweiterung L/K ist der Oberkörper L in natürlicher Weise ein Vektorraum über dem Unterkörper K. Die Dimension von L als K-Vektorraum notieren wir

$$[L : K] := \dim_K L \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

und nennen sie den **Grad der Körpererweiterung**. Eine Körpererweiterung von endlichem Grad heißt eine **endliche Körpererweiterung**.

3.4.2 (**Diskussion der Terminologie**). Jede endliche Körpererweiterung ist körperendlich im Sinne unserer Definition 3.2.4, aber das Umgekehrte gilt nicht. Wenn wir einmal Moduln über Ringen eingeführt haben, werden wir unsere endlichen Körpererweiterungen manchmal auch ausführlicher **modulendlich** nennen, um diesen Unterschied zu betonen.

3.4.3 (**Grad einer primitiven Körpererweiterung**). Ist L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K, so stimmt nach dem letzten Teil des Satzes 3.3.3 über das Minimalpolynom der Grad $[K(\alpha) : K]$ der von α erzeugten Körpererweiterung überein mit dem Grad $\operatorname{grad}(\operatorname{Irr}(\alpha, K))$ des Minimalpolynoms von α über K. Daher rührt wohl auch die Begriffsbildung des „Grades einer Körpererweiterung“. Wir vereinbaren für diese Zahl die abkürzende Bezeichnung

$$\operatorname{grad}_K(\alpha) := \operatorname{grad}(\operatorname{Irr}(\alpha, K)) = [K(\alpha) : K]$$

und nennen sie den **Grad von α über K**.

Ergänzung 3.4.4 (**Diskussion der Notation**). Man kann sich fragen, warum man für den Grad einer Körpereweiterung L/K zusätzlich zu $\dim_K L$ noch eine eigene Notation einführen sollte. Meine Antwort auf diese Frage wäre, daß in der Notation $\dim_K L$ der Körper K unten im Index steht und dadurch weniger wichtig erscheint und schlecht selbst mit Indizes versehen werden kann. Diese Notation ist deshalb nur für das Arbeiten über einem festen Körper K praktisch. Im Zusammenhang der Körpertheorie aber sind alle auftretenden Körper gleichermaßen Hauptdarsteller, und in derartigen Situationen ist eine Notation wie $[L : K]$ geschickter.

Beispiele 3.4.5. Es gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$, $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$.

Beispiel 3.4.6. Jede endliche Körpererweiterung L/K eines algebraisch abgeschlossenen Körpers ist trivial, als da heißt, es gilt $L = K$. In der Tat muß das Minimalpolynom jedes Elements von L den Grad Eins haben. Eine andere Formulierung eines sehr ähnlichen Arguments war Übung [LA1] 6.6.26.

Proposition 3.4.7. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Für $\alpha \in L$ sind gleichbedeutend:*

1. *α ist algebraisch über K;*
2. *$[K(\alpha) : K] < \infty$;*
3. *Es gibt einen Zwischenkörper $K \subset L' \subset L$ mit $[L' : K] < \infty$ und $\alpha \in L'$.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$ folgt unmittelbar aus 3.3.3. Die Implikation $2 \Rightarrow 3$ ist offensichtlich. Aber falls gilt $\dim_K L' < \infty$, können die Potenzen α^ν von α für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ nicht K-linear unabhängig sein, also $3 \Rightarrow 1$. □

Definition 3.4.8. Eine Körpererweiterung vom Grad 2 heißt eine **quadratische Körpererweiterung**.

Proposition 3.4.9 (**Quadratische Körpererweiterungen**). *Für eine Körpererweiterung L/K mit $\operatorname{char} K \neq 2$ sind gleichbedeutend:*

1. *L/K ist eine quadratische Körpererweiterung, in Formeln $[L : K] = 2$.*
2. *L entsteht aus K durch Adjunktion einer Quadratwurzel, in Formeln $L = K(\alpha)$ für ein $\alpha \in L\backslash K$ mit $\alpha^2 \in K$.*

Beweis. $2 \Rightarrow 1$ ist klar. Für die andere Richtung $1 \Rightarrow 2$ beachte man, daß jedes $\beta \in L\backslash K$ ja notwendig ein Minimalpolynom $P(X) = X^2 + aX + b$ vom Grad zwei hat. Schreiben wir das um zu $P(X) = (X + \frac{a}{2})^2 + (b - \frac{a^2}{4})$, so finden wir $(\beta + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} - b$ und das gesuchte α ist $\alpha = \beta + \frac{a}{2}$. □

Ergänzung 3.4.10. Wir werden in 3.7.1 sehen, daß auch der Körper $\mathbb{F}_2$ eine Erweiterung vom Grad 2 besitzt. Diese Erweiterung entsteht jedoch sicher nicht durch Adjunktion einer Quadratwurzel, da jedes Element von $\mathbb{F}_2$ seine eigene Quadratwurzel ist.

Satz 3.4.11 (Multiplikativität des Grades). *Für Körper $M \supset L \supset K$ gilt*

$$[M : K] = [M : L][L : K]$$

Beweis. Wir betrachten nur den endlichen Fall. Sei $m_1, \ldots, m_r$ eine Basis von M über L und $l_1, \ldots, l_s$ eine Basis von L über K. Wir behaupten, daß dann die Produkte $l_i m_j$ eine Basis von M über K bilden. Natürlich sind sie ein Erzeugendensystem. Gilt andererseits $\sum_{i,j} k_{ij} l_i m_j = 0$ mit $k_{ij} \in K$, so folgt zunächst $\sum_i k_{ij} l_i = 0$ für alle j aufgrund der linearen Unabhängigkeit der m_j über L und dann $k_{ij} = 0$ für alle i, j aufgrund der linearen Unabhängigkeit der l_i über K. □

Korollar 3.4.12 (Grade von Elementen in Körpererweiterungen). *Gegeben eine endliche Körpererweiterung ist jedes Element des Oberkörpers algebraisch über dem Unterkörper und sein Grad über dem Unterkörper teilt den Grad unserer Körpererweiterung.*

Beweis. Sei L/K unsere Körpererweiterung und $\alpha \in L$ unser Element. Die Kette $L \supset K(\alpha) \supset K$ zeigt $[L : K] = [L : K(\alpha)][K(\alpha) : K]$. □

Beispiel 3.4.13. Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. In der Tat sind nach 2.4.30 die Polynome $X^2 - 2$ und $X^3 - 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, nach 3.3.6 sind sie also bereits die Minimalpolynome von $\sqrt{2}$ beziehungsweise $\sqrt[3]{2}$, und folglich hat $\sqrt{2}$ den Grad 2 über $\mathbb{Q}$ und $\sqrt[3]{2}$ den Grad 3.

Korollar 3.4.14. *Seien L/K eine Körpererweiterung und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ algebraisch über K. So ist $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ endlich über K und insbesondere sind alle Elemente dieser Körpererweiterung auch algebraisch über K.*

Beweis. Im Körperturm $K \subset K(\alpha_1) \subset K(\alpha_1, \alpha_2) \subset \ldots \subset K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sind alle Schritte endliche Körpererweiterungen. Nach 3.4.11 ist also auch die ganze Erweiterung endlich. □

Übungen

Ergänzende Übung 3.4.15. Ist $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$? Wenn ja, was ist sein Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$? Liegt $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$?

Ergänzende Übung 3.4.16. Sei K ein Körper und seien $P, Q \in K[X]$ irreduzibel mit $\operatorname{grad} P$ und $\operatorname{grad} Q$ teilerfremd. Sei $L = K(\alpha)$ eine Körpererweiterung von K, wobei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von P ist. Dann ist Q auch irreduzibel in $L[X]$. Hinweis: Wäre sonst β Nullstelle eines irreduziblen Faktors von Q in $L[X]$, so hätte $K(\alpha, \beta)$ zu kleinen Grad über K, denn es umfaßt $K(\alpha)$ und $K(\beta)$.

Übung 3.4.17. Die durch den Funktionenkörper $K(X)$ über einem vorgegebenen Körper K gegebene Körpererweiterung $K(X)/K$ ist stets körperendlich, aber nie endlich.

Übung 3.4.18. Man zeige für jede Körpererweiterung L/K, daß ihr Grad übereinstimmt mit dem Grad der auf den Funktionenkörpern induzierten Erweiterung, in Formeln $[L : K] = [L(X) : K(X)]$. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall primitiver Erweiterungen zurück und verwende 2.7.21 und 3.3.15.

3.5 Notationen für Erzeugung**

3.5.1. Im folgenden sollen die folgenden Konventionen befolgt werden:

$|\ \rangle$ Unsymmetrische Klammern verwenden wir, um **Erzeugung als Monoid** anzudeuten, manchmal in der Form $|\ ; \top\rangle$ im Fall der Verknüpfung $\top$;

$\langle\ \rangle$ Spitze Klammern verwenden wir, um **Erzeugung als Modul** oder **Erzeugung als Gruppe** anzudeuten, manchmal in der Form $\langle\ \rangle_k$ im Fall von Moduln über einem Ring k;

$[\ ]$ Eckige Klammern verwenden wir, um **Erzeugung als Kring** anzudeuten, allgemeiner auch Erzeugung als Ring über einem nicht notwendig kommutativen Ring, aber mit paarweise kommutierenden Erzeugern;

$\lfloor\ \rfloor$ Oben offene eckige Klammern verwenden wir, um **Erzeugung als Ring** anzudeuten, insbesondere im Fall von nicht kommutierenden Erzeugern;

$(\ )$ Runde Klammern verwenden wir, um **Erzeugung als Körper** anzudeuten;

$|_!\ \rangle, \langle_!\ \rangle, [_!\ ], \lfloor_!\ \rfloor, (_!\ )$ Steht zwischen den Klammern nur ein Symbol und meint dies Symbol eine Menge von Erzeugern und nicht einen einzigen Erzeuger, so kann das aber muß nicht durch ein Ausrufezeichen unten an der eröffnenden Klammer angezeigt werden, den **Mengenanzeiger**;

$|' \rangle, \langle' \rangle, ['], \lfloor' \rfloor$ Freies Erzeugen als Monoid oder Modul oder Kring oder Kringerweiterung kann aber muß nicht durch ein kleines **Freiheitsstrichlein** oben an der eröffnenden Klammer angezeigt werden;

$(')$ Im Fall einer Körpererweiterung meint das **Freiheitsstrichlein**, daß zwischen den Klammer algebraisch unabhängige Erzeuger stehen.

Beispiele 3.5.2. Wir schreiben $k[' x_1, \ldots, x_n] = k[x_1, \ldots, x_n]$ für Polynomring über k in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Der freie k-Vektorraum über einer Menge X aus [LA1] 2.3.4 kann bezeichnet werden mit $k\langle{}'_! X\rangle = k\langle X\rangle = kX$. Ist ein k-Vektorraum M bereits gegeben und $X \subset M$ eine Teilmenge, so schreiben wir $\langle{}_! X\rangle_k = \langle X\rangle_k = \langle kX\rangle \subset M$ für den von X erzeugten Untervektorraum. Wir kürzen $\langle\{x_1, \ldots, x_n\}\rangle_k = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle_k = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ ab und lassen k ganz weg, wenn wir hoffen, daß es aus dem Kontext hervorgeht oder wenn die Erzeugung als Untergruppe gemeint ist. Allerdings setzen wir nur dann ein Freiheitsstrichlein, wenn die Erzeuger linear unabhängig sind. Sind weiter $R \supset k$ ein Kring mit einem Teilring und sind $x_1, \ldots, x_n$ Elemente von R, so notieren wir $k[x_1, \ldots, x_n] \subset R$ den von den x_i über k in R erzeugten Teilring und erlauben uns das Freiheitsstrichlein nur, wenn die Erzeuger über k algebraisch unabhängig sind.

3.6 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Definition 3.6.1. Sei $E \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge der komplexen Zahlenebene.

1. Eine reelle affine Gerade durch zwei verschiedene Punkte von E heißt eine „aus E elementar konstruierbare Gerade“;

2. Ein Kreis durch einen Punkt von E mit Mittelpunkt in einem anderen Punkt von E heißt ein „aus E elementar konstruierbarer Kreis“ ;

3. Alle aus E elementar konstruierbaren Geraden und Kreise fassen wir zusammen unter dem Oberbegriff der „aus E elementar konstruierbaren Figuren“;

4. Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt **elementar konstruierbar aus** E, wenn er im Schnitt von zwei verschiedenen aus E elementar konstruierbaren Figuren liegt.

Satz 3.6.2 (Konstruierbarkeit und quadratische Erweiterungen). *Die folgenden beiden Teilmengen K und Q von $\mathbb{C}$ stimmen überein:*

1. *Die kleinste Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$, die 0 und 1 enthält und stabil ist unter elementaren Konstruktionen, also die Eigenschaft hat, daß jede aus K elementar konstruierbare komplexe Zahl wieder in K liegt. Wir nennen die Elemente von K die* **konstruierbaren Zahlen***;*

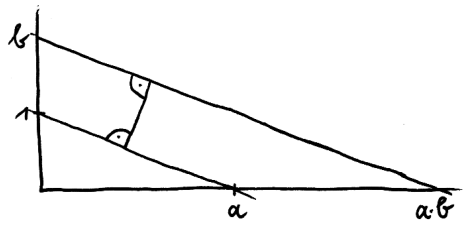
2. *Die kleinste Teilmenge $Q \subset \mathbb{C}$, die sowohl ein Teilkörper ist als auch stabil unter dem Bilden von Quadratwurzeln.*

3.6.3. Als allererstes und eigentlich noch vor der Formulierung des Satzes sollten wir uns hier überlegen, daß es solche kleinsten Teilmengen überhaupt gibt. Das ist aber klar: Wir können jeweils den Schnitt aller Teilmengen mit besagter Eigenschaft nehmen, und der hat wieder besagte Eigenschaft.

Beweis. Wir beginnen mit der Inklusion $Q \subset K$. Dazu reicht es zu zeigen, daß die Menge $K \subset \mathbb{C}$ der konstruierbaren Zahlen ein Teilkörper ist und stabil unter dem Bilden von Quadratwurzeln. Zunächst beachten wir, daß für $a \in \mathbb{C}^\times$ gleichbedeutend sind:

1. a liegt in K;
2. $|a|$ und $\frac{a}{|a|}$ liegen in K;
3. $\mathrm{Re}(a)$ und $\mathrm{Im}(a)$ liegen in K.

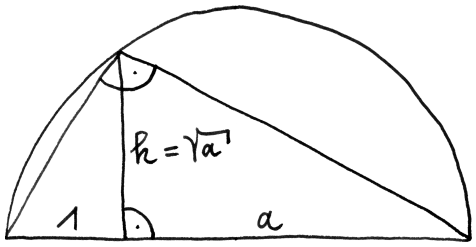
Die Äquivalenz $(1 \Leftrightarrow 2)$ ist offensichtlich. Für die Äquivalenz $(1 \Leftrightarrow 3)$ gilt es, Lote durch vorgegebene Punkte auf Geraden durch zwei vorgegebene Punkte zu konstruieren, was auch nicht schwer ist. Weiter ist K stabil unter Addition, denn mit Loten können wir auch Parallelen zu konstruierten Geraden durch konstruierte Punkte konstruieren. Um die Stabilität unter Multiplikation und Inversenbildung zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß es unproblematisch ist, Punkte auf dem Einheitskreis mithilfe von Zirkel und Lineal zu invertieren und zu multiplizieren. Daß das auch für reelle Zahlen möglich ist, zeigen die nebenstehenden Abbildungen. Also ist K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$. Nun zeigen wir, daß er stabil ist unter dem



Zur Konstruktion von Produkten reeller Zahlen mit Zirkel und Lineal

Zur Konstruktion von Inversen reeller Zahlen mit Zirkel und Lineal

Bilden von Quadratwurzeln. In der Tat ist klar, wie wir die Wurzeln von Punkten auf dem Einheitskreis mit Zirkel und Lineal bestimmen können, und daß das Wurzelziehen mit Zirkel und Lineal aus einer positiven reellen Zahl möglich ist, zeigt das nebenstehende Bild, in dem ja gilt $(h^2+a^2)+(h^2+1^2)=(a+1)^2$, also



Zur Konstruktion der Wurzel aus einer positiven reellen Zahl mit Zirkel und Lineal

$h^2 = a$. Mithin ist $K \subset \mathbb{C}$ ein Teilkörper, der stabil ist unter dem Bilden von Quadratwurzeln, und wir haben $Q \subset K$ gezeigt. Wir zeigen nun umgekehrt $K \subset Q$. Dafür müssen wir nur zeigen, daß Q stabil ist unter elementaren Konstruktionen. Sicher ist Q stabil unter der komplexen Konjugation, denn mit Q ist auch $Q \cap \bar{Q}$ ein unter dem Bilden von Quadratwurzeln stabiler Unterkörper von $\mathbb{C}$. Eine komplexe Zahl z gehört folglich zu Q genau dann, wenn ihr Real- und Imaginärteil zu Q gehören. Mit $z = x + \mathrm{i}y$ werden unsere aus Q elementar konstruierbaren Figuren nun aber beschrieben durch Gleichungen der Gestalt

$$\begin{array}{rcl}(x-a)^2+(y-b)^2 & = & c \\ ax+by & = & c\end{array}$$

für geeignete $a, b, c \in Q \cap \mathbb{R}$, und simultane Lösungen zweier verschiedener derartiger Gleichungen sind in der Tat Lösungen von linearen oder quadratischen Gleichungen mit Koeffizienten aus Q, ja sogar aus $Q \cap \mathbb{R}$. Im kompliziertesten Fall des Schnitts zweier Kreise bildet man hierzu zunächst die Differenz beider Gleichungen und erhält so eine lineare Gleichung in x und y, die man anschließend nach einer Variable auflöst und in eine der Kreisgleichungen einsetzt. Das zeigt, daß $Q \subset \mathbb{C}$ stabil ist unter elementaren Konstruktionen. Da auch 0 und 1 zu Q gehören, folgt $K \subset Q$. □

Korollar 3.6.4 (Notwendige Bedingung für Konstruierbarkeit). *Jede konstruierbare Zahl ist algebraisch und ihr Grad über $\mathbb{Q}$ ist eine Zweierpotenz.*

Vorschau 3.6.5. Das Umgekehrte gilt nicht. Es gibt durchaus algebraische komplexe Zahlen, deren Grad über $\mathbb{Q}$ eine Zweierpotenz ist, die aber keineswegs konstruierbar sind. Ein hinreichendes und notwendiges Kriterium lernen Sie in 4.4.15 kennen: Eine komplexe Zahl ist konstruierbar genau dann, wenn sie algebraisch ist und der Grad des Zerfällungskörpers ihres Minimalpolynoms als Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ eine Zweierpotenz ist.

Beweis. Es scheint mir offensichtlich, daß Q auch beschrieben werden kann als die Vereinigung aller Teilkörper von $\mathbb{C}$ der Gestalt $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ für Folgen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ komplexer Zahlen mit der Eigenschaft $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1})$ für alle i. In der Tat ist die Vereinigung aller derartigen Teilkörper offensichtlich selbst ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ und damit sicher der Kleinste unter dem Ziehen von Quadratwurzeln stabile Teilkörper von $\mathbb{C}$. Sei nun z unsere konstruierbare Zahl. Nach dem Satz gibt es eine Kette von Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r$$

mit $[K_i : K_{i-1}] = 2$ und $z \in K_r$. Es folgt $[K_r : \mathbb{Q}] = 2^r$ und der Grad von z über $\mathbb{Q}$ ist nach 3.4.12 ein Teiler von $[K_r : \mathbb{Q}]$. □

Korollar 3.6.6 (Klassische unlösbare Konstruktionsaufgaben).

1. *Das regelmäßige Siebeneck ist nicht konstruierbar mit Zirkel und Lineal;*
2. *Die Seitenlänge eines Würfels mit Volumen Zwei ist nicht konstruierbar mit Zirkel und Lineal;*
3. *Es gibt keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal, die es erlaubt, einen beliebig vorgegebenen Winkel zu dritteln.*

Ergänzung 3.6.7. Wir werden in 4.4.7 allgemeiner zeigen, daß sich für $n \geq 3$ das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt genau dann, wenn die Anzahl $\varphi(n) = |\{a \mid 1 \leq a \leq n,\ \langle a, n\rangle = 1\}|$ der zu n teilerfremden Zahlen unter n eine Zweierpotenz ist. Zum Beispiel ist das regelmäßige Dreieck konstruierbar, aber nicht das regelmäßige Neuneck. Das heißt, daß der Winkel $2\pi/3$ nicht mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden kann. Hier geben wir für diese beiden Aussagen schon mal direkte Argumente.

Ergänzung 3.6.8. Die Griechen scheinen in der hellenistischen Hochkultur Konstruktionen mit Zirkel und Lineal auf Papyrus in derselben Weise eingesetzt zu haben, wie bei uns bis etwa 1960 Rechenschieber, dann Taschenrechner, und mittlerweile Laptops eingesetzt wurden und werden: Als unverzichtbare Hilfsmittel des Ingenieurs. Das Ziehen von Kubikwurzeln etwa war wichtig, um gemäß der Formel eines gewissen Philon die Dicke des Spannseils einer Wurfmaschine so zu berechnen, daß sie ein vorgegebenes Gewicht über eine vorgegebene Entfernung schleuderte. Mehr dazu findet man in [Rus05] in Abschnitt 2.3 und zu Ende des Abschnitts 4.3.

Ergänzung 3.6.9. Die Frage der **Würfelverdopplung**, also die Frage, mit Zirkel und Lineal aus einer gegebenen Strecke eine weitere Strecke zu konstruieren derart, daß das Längenverhältnis der beiden Strecken gerade $\sqrt[3]{2}$ ist, heißt das **Deli'sche Problem**. Diese Bezeichnung geht auf eine Geschichte zurück, nach der

das Orakel in Delphi den Deliern aufgab, zur Abwehr einer Pest den würfelförmigen Altar ihres Tempels zu verdoppeln.

Beweis. 1. Nach der Bestimmung des siebten Kreisteilungspolynoms in 2.8.4 und der Gleichheit 3.3.6 vom Grad einer primitiven Körpererweiterung und dem Grad des Minimalpolynoms eines jeden Erzeugers hat $\exp(2\pi\mathrm{i}/7)$ den Grad 6 über $\mathbb{Q}$ und ist nach 3.6.4 also nicht konstruierbar.

2. Nach 3.3.6 hat die gesuchte Länge $\sqrt[3]{2}$ als algebraische Zahl den Grad 3 über $\mathbb{Q}$ und ist nach 3.6.4 also nicht konstruierbar.

3. Sicher gilt $\exp(2\pi\mathrm{i}/3) \in K$. Es reicht, $\exp(2\pi\mathrm{i}/9) \notin K$ zu zeigen. Sicher ist $\exp(2\pi\mathrm{i}/9) = \zeta$ eine Nullstelle des Polynoms $X^9 - 1$. Natürlich zerfällt dieses Polynom in

$$X^9 - 1 = (X^3 - 1)(X^6 + X^3 + 1)$$

und ζ ist Nullstelle des zweiten Faktors, unseres neunten Kreisteilungspolynom aus 2.8.6. Es reicht zu zeigen, daß dieses Polynom irreduzibel ist über $\mathbb{Q}$, denn dann hat ζ den Grad 6 über $\mathbb{Q}$ und kann nach 3.6.4 nicht konstruierbar sein. In 4.4.2 werden wir zeigen, daß alle Kreisteilungspolynome irreduzibel sind. Hier basteln wir nur ein schnelles Argument für unseren speziellen Fall zusammen, vergleiche auch 2.8.7. In $\mathbb{F}_3[X]$ gilt sicher $(X^9 - 1) = (X - 1)^9$ und $(X^3 - 1) = (X - 1)^3$ und folglich $X^6 + X^3 + 1 = (X - 1)^6$. Substituieren wir in $X^6 + X^3 + 1$ nun $X = Y + 1$, so erhalten wir in $\mathbb{F}_3[Y]$ also das Polynom Y^6. Gehen wir wieder über zu $\mathbb{Q}[Y]$, so hat $(Y + 1)^6 + (Y + 1)^3 + 1$ den konstanten Term 3. Damit können wir aus dem Eisenstein-Kriterium 2.8.2 folgern, daß unser Polynom irreduzibel ist.

3. Als Variante mag man den Winkel ϑ mit $\cos\vartheta = 3/4$ betrachten. Beide zugehörigen Punkte z auf dem Einheitskreis sind konstruierbar. Aus der Eulerformel folgt leicht $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Die reelle Zahl $x := \cos(\vartheta/3)$ löst mithin die kubische Gleichung $3/4 = 4x^3 - 3x$ und ist nach Eisenstein Nullstelle eines irreduziblen rationalen Polynoms von Grad 3. Also ist sie nicht konstruierbar und der zugehörige Punkt w auf dem Einheitskreis mit $w^3 = z$ ist auch nicht konstruierbar. Das zeigt, daß der Winkel ϑ nicht mit Zirkel und Lineal dreigeteilt werden kann. □

Satz 3.6.10 (Konstruierbarkeit, Variante). *Gegeben eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ stimmen die folgenden beiden Teilmengen K_A und Q_A von $\mathbb{C}$ überein:*

1. *Die kleinste Teilmenge $K_A \subset \mathbb{C}$, die 0 und 1 enthält und A umfaßt und stabil ist unter elementaren Konstruktionen;*
2. *Die kleinste Teilmenge $Q_A \subset \mathbb{C}$, die ein Teilkörper ist und A und $\bar{A}$ umfaßt und stabil ist unter dem Bilden von Quadratwurzeln.*

3.6.11. Gegeben eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ nennen wir die Elemente der Menge K_A aus 3.6.10 die **aus** A **konstruierbaren Zahlen**. Der Beweis unserer Variante ist vollständig analog zum Beweis von 3.6.2 und bleibe dem Leser überlassen. Durch Anwendung auf die einelementige Menge $A = \{a\}$ und Beachtung der Formel $a\bar{a} = 1$ für Punkte auf dem Einheitskreis erkennt man daraus, daß ein Winkel genau dann mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden kann, wenn für den zugehörigen Punkt a auf dem Einheitskreis das Polynom $X^3 - a$ über $\mathbb{Q}(a)$ nicht irreduzibel ist alias eine Nullstelle hat. Zum Beispiel lassen sich $360°$ und $180°$ mit Zirkel und Lineal dritteln, denn $X^3 - 1$ und $X^3 + 1$ haben rationale Nullstellen. Ebenso läßt sich $135° = 3 \times 45°$ mit Zirkel und Lineal dritteln, denn für die primitive achte Einheitswurzel $a = (\mathrm{i} - 1)/\sqrt{2}$ ist a^3 eine Nullstelle von $X^3 - a$. Andererseits läßt sich ein durch einen tranzendenten Punkt a auf dem Einheitskreis gegebener Winkel nie mit Zirkel und Lineal dritteln, denn im Funktionenkörper $\mathbb{Q}(X) \cong \mathbb{Q}(a)$ besitzt die Variable X offensichtlich keine dritte Wurzel.

3.7 Endliche Körper

Satz 3.7.1 (**Klassifikation endlicher Körper**). *Die Kardinalität eines endlichen Körpers ist stets eine echte Primzahlpotenz, und zu jeder echten Primzahlpotenz gibt es bis auf nichteindeutigen Isomorphismus genau einen endlichen Körper mit dieser Kardinalität. In Formelsprache liefert die Kardinalität also eine Bijektion*

$$\{\textit{endliche Körper}\}_{/\cong} \quad \tilde{\to} \quad \{\textit{echte Primzahlpotenzen}\}$$

3.7.2. Gegeben eine echte Primzahlpotenz q notiert man „den“ Körper mit q Elementen meist $\mathbb{F}_q$. Ich weiß nicht, ob $\mathbb{F}$ in diesem Zusammenhang für „finite“ oder für „field“, die englische Bezeichnung für Körper, steht.

Vorschau 3.7.3. Man kann zeigen, daß jeder endliche Schiefkörper schon ein Körper ist, siehe zum Beispiel [Wei74], I, §1.

Beweis. Ein endlicher Körper $\mathbb{F}$ hat notwendig eine positive Charakteristik $p = \operatorname{char} \mathbb{F} > 0$. Nach 3.1.6 ist diese Charakteristik p eine Primzahl und wir haben eine Einbettung $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathbb{F}$. Damit wird $\mathbb{F}$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Für $r = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F} = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p]$ gilt dann offensichtlich $|\mathbb{F}| = p^r$. Das zeigt, daß die Kardinalität eines endlichen Körpers stets eine Primzahlpotenz ist. Es gibt keine Körper mit nur einem Element, also liefert die Kardinalität schon mal eine Abbildung wie behauptet. Es gilt nun noch zu zeigen, daß sie injektiv und surjektiv ist. An dieser Stelle unterbrechen wir den Beweis durch einen Satz und zwei Lemmata, um die nötigen Hilfsmittel bereitzustellen. □

Satz 3.7.4 (**Zerfällung von Polynomen in Körpererweiterungen**). *Gegeben ein Körper K und ein von Null verschiedenes Polynom $P \in K[X]$ gibt es eine endli-*

che Körpererweiterung L von K derart, daß P als Element von $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Das folgt mit Induktion aus dem anschließenden Lemma 3.7.6. Wir erinnern dazu, daß nach [LA1] 5.2.44 jeder Körperhomomorphismus injektiv ist. □

Vorschau 3.7.5. Natürlich folgt obiger Satz auch unmittelbar aus der Existenz eines algebraischen Abschlusses 3.11.5. Diese Argumentation ist jedoch zumindest im Rahmen der hier gegebenen Darstellung unzulässig, da unser Satz selbst einen wesentlichen Baustein beim Beweis der Existenz algebraischer Abschlüsse darstellt. Zumindest um das folgende Lemma kommt meines Wissens kein Beweis für die Existenz algebraischer Abschlüsse herum.

Lemma 3.7.6 (Adjunktion von Nullstellen). *Gegeben ein Körper K und ein nichtkonstantes Polynom $P \in K[X]\backslash K$ gibt es einen Körperhomomorphismus $i : K \to L$ derart, daß unter der von i auf den Polynomringen induzierten Abbildung $i_{[X]} : K[X] \to L[X]$ das Bild $i_{[X]}(P)$ von P eine Nullstelle in L hat.*

3.7.7. Die Adjunktion von Quadratwurzeln haben Sie möglicherweise bereits sozusagen zu Fuß als Übung [GR] 2.2.4.14 ausgearbeitet, um die komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen zu gewinnen. Das Verfahren aus dem Beweis unseres Lemmas wird in manchen Quellen als die **Kronecker-Konstruktion** bezeichnet. Es ist eine gute Übung, im Fall der Adjunktion einer Quadratwurzel einen expliziten Isomorphismus zwischen der hier konstruierten und der in [GR] 2.2.4.14 beschriebenen Körpererweiterung anzugeben.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit P irreduzibel in $K[X]$. Dann ist $L := K[X]/\langle P\rangle$ als Faktorring eines Hauptidealrings nach einem irreduziblen Element ein Körper, vergleiche 2.4.23. Wir notieren $\bar{Q} \in L$ die Nebenklasse eines Polynoms $Q \in K[X]$. Jetzt betrachten wir den offensichtlichen Körperhomomorphismus

$$i : K \to L = K[X]/\langle P\rangle$$

mit $i(a) = \bar{a}$ und behaupten, daß die Nebenklasse $\bar{X} \in L$ von $X \in K[X]$ eine Nullstelle des Polynoms $i_{[X]}(P) \in L[X]$ ist. In der Tat finden wir für unser Polynom $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ mit Koeffizienten $a_\nu \in K$ eben $i_{[X]}(P) = \bar{a}_n X^n + \ldots + \bar{a}_1 X + \bar{a}_0$ und dann

$$\begin{aligned}(i_{[X]}(P))(\bar{X}) &= \bar{a}_n\bar{X}^n + \ldots + \bar{a}_1\bar{X} + \bar{a}_0\\ &= \overline{a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0} = \bar{P} = 0\end{aligned}$$ □

3.7.8. Gegeben ein Körper K und ein Polynom $P \in K[X]$ und eine Körpererweiterung $K \subset L$ und eine Nullstelle $\alpha \in L$ unseres Polynoms P sagen wir

auch, der Körper $K(\alpha) \subset L$ entstehe aus K durch **Adjunktion einer Nullstelle von** P. Ist $P \in K[X]$ irreduzibel, so induziert das Einsetzen von α für X einen Körperisomorphismus

$$K[X]/\langle P\rangle \xrightarrow{\sim} K(\alpha)$$

In diesem Sinne darf man also auch an die linke Seite denken, wenn von der „Adjunktion einer Nullstelle eines Polynoms zu einem Körper“ die Rede ist, sofern besagtes Polynom irreduzibel ist.

Beispiel 3.7.9. In $\mathbb{F}_5$ sind 0 und ± 1 die einzigen Quadrate. Wir erhalten also einen Körper mit 25 Elementen, indem wir zu $\mathbb{F}_5$ eine Wurzel aus 2 adjungieren, und können alle Elemente dieses Körpers dann eindeutig schreiben in der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{F}_5$.

Lemma 3.7.10. *Seien p eine Primzahl, $q = p^r$ mit $r \geq 1$ eine echte Potenz von p und L ein Körper der Charakteristik p. Zerfällt das Polynom $X^q - X$ über dem Körper L vollständig in Linearfaktoren, so bilden die Nullstellen unseres Polynoms in L einen Unterkörper der Kardinalität q.*

Beweis. Nach [LA1] 5.2.38 ist die Abbildung $F : L \to L$, $a \mapsto a^q$ ein Körperhomomorphismus. Die Nullstellen unseres Polynoms sind nun genau die Fixpunkte dieses Körperautomorphismus, und als Fixpunkte eines Körperautomorphismus bilden sie damit einen Unterkörper $\mathbb{F}$ von L. Um zu zeigen, daß dieser Unterkörper $\mathbb{F}$ genau q Elemente hat, müssen wir nachweisen, daß das Polynom $X^q - X$ nur einfache Nullstellen hat. Ist aber a eine Nullstelle, so gilt im Polynomring $\mathbb{F}_p[X]$ die Gleichheit $X^q - X = (X-a)^q - (X-a) = ((X-a)^{q-1} - 1)\,(X-a)$. Also ist jede Nullstelle unseres Polynoms einfach. □

Beweis von 3.7.1, Fortsetzung. Jetzt können wir zeigen, daß es zu jeder echten Potenz q einer Primzahl p auch tatsächlich einen Körper mit genau q Elementen gibt. Wir finden ja nach 3.7.4 eine Körpererweiterung L von $\mathbb{F}_p$, in der das Polynom $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, und nach 3.7.10 bilden die Nullstellen dieses Polynoms in L dann einen Unterkörper der Kardinalität q. Schließlich müssen wir, um unsere Klassifikation der endlichen Körper abzuschließen, noch zeigen, daß je zwei endliche Körper derselben Kardinalität isomorph sind. Ist $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit $|\mathbb{F}| = q = p^r$ Elementen, so gilt $a^{q-1} = 1$ für alle $a \in \mathbb{F}^\times$ nach [LA2] 6.3.8, also haben wir $a^q - a = 0$ für alle $a \in \mathbb{F}$. Insbesondere sind die Minimalpolynome der Elemente von $\mathbb{F}$ über $\mathbb{F}_p$ genau die $\mathbb{F}_p$-irreduziblen Faktoren des Polynoms $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$. Die Erzeuger der Körpererweiterung $\mathbb{F}$ sind damit genau die Nullstellen der $\mathbb{F}_p$-irreduziblen Faktoren P vom Grad r unseres Polynoms $X^q - X$. Da nach [LA2] 6.4.8 die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers zyklisch ist, gibt es solche Erzeuger und damit auch solche Faktoren und mit 3.3.3 folgt

$$\mathbb{F} \cong \mathbb{F}_p[X]/\langle P\rangle$$

für einen und jeden $\mathbb{F}_p$-irreduziblen Faktor P vom Grad r des Polynoms $X^q - X$. Das zeigt, daß ein endlicher Körper durch die Zahl seiner Elemente bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. Das Argument zeigt nebenbei bemerkt auch, wie man in endlichen Körpern explizit rechnen kann. □

3.7.11. Teile dieses Beweises lassen sich mithilfe der allgemeinen Theorie, sobald wir sie einmal entwickelt haben, auch schneller erledigen: Die Eindeutigkeit erhält man aus dem Satz 3.8.2 über die Eindeutigkeit von Zerfällungskörpern. Die Existenz folgt wie oben daraus, daß $X^q - X$ keine mehrfachen Nullstellen hat, aber das kann man nach 3.9.15 auch daraus folgern, daß die Ableitung dieses Polynoms keine Nullstellen hat.

Satz 3.7.12 (Unterkörper endlicher Körper). *Gegeben ein endlicher Körper F liefert die Kardinalität eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Unterkörper } K \subset F\} & \tilde{\to} & \{q \in \mathbb{N} \mid \exists r \in \mathbb{N} \textit{ mit } q^r = |F|\} \\ K & \mapsto & |K| \end{array}$$

3.7.13. Gegeben zwei endliche Körper läßt sich insbesondere der eine in den anderen einbetten genau dann, wenn die Kardinalität des einen eine Potenz der Kardinalität des anderen ist. Mit den Methoden der Galois-Theorie werden wir dies Resultat in 4.3.3 sehr viel müheloser einsehen können als im folgenden Beweis.

Beweis. Für den Grad $d = [F : K]$ unserer Körpererweiterung gilt sicher $|F| = |K|^d$, also liefert die Kardinalität jedenfalls eine Abbildung zwischen den im Satz beschriebenen Mengen. Weiter muß unser Unterkörper K, wenn es ihn denn gibt, genau aus den $(|K| - 1)$-ten Einheitswurzeln von F mitsamt der Null bestehen. Das zeigt die Injektivität unserer Abbildung. Für den Nachweis ihrer Surjektivität überlegen wir uns zunächst, daß es in $\mathbb{F}_{q^r}$ stets genau $(q - 1)$ Elemente der Ordnung $q - 1$ gibt. Das ist klar, da $\mathbb{F}_{q^r}^\times$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $q^r - 1$ ist und da gilt $(q - 1)|(q^r - 1)$, genauer ist der Quotient ja $q^{r-1} + q^{r-2} + \ldots + q + 1$. Also gibt es in $\mathbb{F}_{q^r}$ genau q Lösungen der Gleichung $X^q - X$ und nach 3.7.10 bilden diese einen Unterkörper von $\mathbb{F}_{q^r}$ mit q Elementen. □

Übungen

Übung 3.7.14. Ein endlicher Körper kann nie algebraisch abgeschlossen sein.

Übung 3.7.15. Geben Sie einen Körperisomorphismus $\mathbb{F}_5(\sqrt{2}) \tilde{\to} \mathbb{F}_5(\sqrt{3})$ an als $\mathbb{F}_5$-lineare Abbildung in Bezug auf die Basen $1, \sqrt{2}$ links und $1, \sqrt{3}$ rechts.

Ergänzende Übung 3.7.16 (**Partialbruchzerlegung**). Ist k ein Körper, so wird eine k-Basis des Funktionenkörpers $k(X)$ gebildet von erstens den $(X^n)_{n\geq 1}$ mitsamt zweitens den

$$(X^d P^{-n})_{n\geq 1,\, \operatorname{grad} P > d \geq 0}$$

für $P \in k[X]$ normiert und irreduzibel zuzüglich drittens der 1 aus $k(X)$. Für den Fall k algebraisch abgeschlossen vergleiche man [LA1] 5.5.12. Sonst ziehe man sich für den Beweis der linearen Unabhängigkeit mit 3.7.4 auf den Fall von in Linearfaktoren zerfallenden Nennern zurück.

Ergänzende Übung 3.7.17. Man bestimme die Partialbruchzerlegung, also die Darstellung in der Basis aus 3.7.16, von $(1+x^4)^{-1}$ in $\mathbb{R}(X)$.

Übung 3.7.18. Man zeige, daß es im Polynomring über einem endlichen Körper irreduzible Polynome von jedem positiven Grad gibt.

Ergänzende Übung 3.7.19. Geben Sie Verknüpfungstafeln für die Addition und die Multiplikation eines Körpers mit vier Elementen an.

Übung 3.7.20. Man zeige, daß gegeben eine Primzahl p und $r \geq 1$ das Produkt der irreduziblen normierten Polynome in $\mathbb{F}_p[X]$, deren Grad r teilt, gerade $X^q - X$ ist für $q := p^r$.

Übung 3.7.21. Man zeige, daß es gegeben eine Primzahl $p > 2$ und $r \geq 1$ stets einen endlichen Körper der Charakteristik p gibt, dessen multiplikative Gruppe ein Element der Ordnung 2^r hat.

3.8 Zerfällungskörper

Definition 3.8.1. Seien K ein Körper und $P \in K[X]\backslash 0$ ein von Null verschiedenes Polynom. Unter einem **minimalen Zerfällungskörper** oder kürzer **Zerfällungskörper von** P verstehen wir eine Körpererweiterung M/K derart, daß (1) das Polynom P in $M[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt und daß (2) der Körper M über K erzeugt wird von den Nullstellen von P. Mit einem Zerfällungskörper meint man also eigentlich eine Körpererweiterung und sollte deshalb besser von einer **Zerfällungserweiterung** reden, aber das tut kein Mensch.

Satz 3.8.2 (Existenz und Eindeutigkeit von Zerfällungskörpern). *Seien K ein Körper und $P \in K[X]\backslash 0$ ein von Null verschiedenes Polynom. So existieren Zerfällungskörper von P, und sind M/K und M'/K zwei Zerfällungskörper von P, so gibt es einen Körperisomorphismus $M \xrightarrow{\sim} M'$, der auf K die Identität induziert.*

Beweis der Existenz. Die Existenz eines Zerfällungskörpers folgt leicht aus Satz 3.7.4, nach dem es für jedes Polynom eine Körpererweiterung gibt, in der es in Linearfaktoren zerfällt: Wir müssen darin dann nur noch den von besagten Nullstellen erzeugten Teilkörper betrachten. Die Eindeutigkeit zeigen wir erst nach den Beweis von 3.8.12. □

3.8.3 (**Fragen der Eindeutigkeit und Terminologie**). Da ein Zerfällungskörper für ein Polynom damit in gewisser Weise eindeutig ist, spricht man auch oft von *dem* Zerfällungskörper eines Polynoms. Das ist jedoch auch wieder irreführend: Im allgemeinen gibt es nämlich zwischen zwei Zerfällungskörpern M, M' desselben Polynoms durchaus verschiedene Isomorphismen $M \xrightarrow{\sim} M'$, und das auch dann noch, wenn wir die naheliegende Forderung stellen, daß unsere Isomorphismen auf K die Identität induzieren sollen. Zerfällungskörper eines vorgegebenen Polynoms sind in diesem Sinne „wohlbestimmt bis auf nicht eindeutigen Isomorphismus“. Sie sollten bereits einige Strukturen kennen, die wohlbestimmt sind bis auf nicht eindeutigen Isomorphismus: Mengen mit zwei Elementen, Gruppen mit drei Elementen, eindimensionale Vektorräume über einem gegebenen Körper, etc. Beispiele für Strukturen, die wohlbestimmt sind bis auf eindeutigen Isomorphismus, wären dahingegen: Mengen mit einem Element, Gruppen mit zwei Elementen, der Ring der ganzen Zahlen, der Körper der rationalen Zahlen, der Körper der reellen Zahlen. Eigentlich bräuchte man eben zum Schreiben über Mathematik außer dem bestimmten und dem unbestimmten Artikel noch ein Zwischending für „wohlbestimmt bis auf nicht eindeutigen Isomorphismus“, aber es wäre wohl vermessen, die deutsche Grammatik dahingehend erweitern zu wollen. Wir sind mit unseren beiden Arten von Artikeln verglichen etwa mit dem Russischen sogar schon gut bedient. Sie werden das merken, sobald Sie mathematische Artikel lesen, die aus dieser Sprache übersetzt sind: Oft sind dann in der Übersetzung ohne Verstand bestimmte oder unbestimmte Artikel gewählt worden, was man dann beim Lesen erst im Geiste korrigieren muß, damit sich ein sinnvoller Text ergibt. Um diese Phänomene der „Wohlbestimmtheit bis auf nicht eindeutigen Isomorphismus“ im vorliegenden Fall begrifflich zu fassen, führen wir zunächst einmal eine geeignete Terminologie ein.

Definition 3.8.4. Sei K ein Kring. Unter einem **K-Kring** verstehen wir ein Paar (L, i) bestehend aus einem Kring L und einem Ringhomomorphismus $i : K \to L$. Ist (M, j) ein weiterer K-Kring, so verstehen wir unter einem **Homomorphismus von K-Kringen** $L \to M$ einen Kringhomomorphismus $\varphi : L \to M$ mit $\varphi \circ i = j$. Alternativ sprechen wir auch von einem **Homomorphismus über** K. Die Menge aller solchen Homomorphismen notieren wir

$$\mathrm{Kring}^K(L, M)$$

Einen bijektiven Ringhomomorphismus über K nennen wir auch einen **Isomorphismus von K-Kringen** oder einen **Isomorphismus über** K.

Beispiel 3.8.5. Satz [LA1] 5.3.5 über das Einsetzen in Polynome kann in dieser Terminologie dahingehend formuliert werden, daß für jeden Kring K und jeden K-Kring (R, i) das Auswerten $\varphi \mapsto \varphi(X)$ bei X eine Bijektion

$$\mathrm{Kring}^K(K[X], R) \xrightarrow{\sim} R$$

liefert. Die Umkehrabbildung ordnet jedem Element $b \in R$ den durch das Einsetzen von b erklärten Ringhomomorphismus $K[X] \to R$ zu. Dasselbe gilt allgemeiner für jede K-Ringalgebra R.

Definition 3.8.6. Ist K ein Körper, so bezeichnen wir einen K-Kring, der seinerseits ein Körper ist, auch als eine **Körpererweiterung von** K. Das hatten wir bereits in 3.2.3 angedeutet. Wenn wir pedantisch sein wollen, sprechen wir von einer „Körpererweiterung im verallgemeinerten Sinne“. Unsere Homomorphismen und Isomorphismen von K-Kringen nennen wir in diesem Kontext **Homomorphismen** beziehungsweise **Isomorphismen von Körpererweiterungen**. Fassen wir $i : K \hookrightarrow L$ auf als die Einbettung eines Unterkörpers $K \subset L$ und ist $j : K \to M$ ein weiterer Körperhomomorphismus, so nennen wir einen Körperhomomorphismus $L \to M$ über K auch eine **Ausdehnung** von j auf L und benutzen Notationen wie zum Beispiel $\tilde{j} : L \to M$.

Ergänzung 3.8.7 (**Terminologische Kompatibilitäten**). Wir erinnern daran, daß wir in [LA2] 9.9.1 eine K-Kringalgebra erklärt hatten als einen K-Vektorraum A mit einer K-bilinearen Abbildung $A \times A \to A$ derart, daß $(A, +)$ mit dieser Abbildung als Multiplikation eine Kring ist. Gegeben ein Körper K wird jeder K-Kring (A, i) im Sinne der vorhergehenden Definition 3.8.4 eine K-Kringalgebra in diesem Sinne, wenn wir die abelsche Gruppe $(A, +)$ durch die Abbildung $K \times A \to A, (\lambda, a) \mapsto i(\lambda)a$ zu einem K-Vektorraum machen. Jede K-Kringalgebra A wird umgekehrt durch den einzigen Homomorphismus $K \to A$ von K-Kringalgebren zu einem K-Kring. Diese beiden Konzepte sind also äquivalent.

Proposition 3.8.8 (**Ausdehnungen auf primitive Erweiterungen**). *Gegeben eine Körpererweiterung $j : K \hookrightarrow M$ und eine primitive algebraische Erweiterung $K(\alpha)$ ihres Unterkörpers K liefert das Auswerten an α eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kring}^K(K(\alpha), M) & \tilde{\to} & \{\beta \in M \mid \mathrm{Irr}(\alpha, K)(\beta) = 0\} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(\alpha) \end{array}$$

3.8.9. In Worten werden also die Ausdehnungen von $j : K \hookrightarrow M$ zu einer Einbettung $\tilde{j} : K(\alpha) \hookrightarrow M$ parametrisiert durch die Nullstellen in M des Minimalpolynoms von α über K. In der Formulierung dieser Proposition haben wir beim Auswerten des Polynoms $\mathrm{Irr}(\alpha, K) \in K[X]$ auf $\beta \in M$ stillschweigend die Elemente von K mit ihren Bildern in M unter j identifiziert, in der Notation aus [LA1] 5.3.9 ist also $\mathrm{Irr}(\alpha, K)(\beta) := \mathrm{E}_{j,\beta}(\mathrm{Irr}(\alpha, K))$ gemeint. Die Proposition gilt unverändert und mit demselben Beweis für jeden K-Kring M, ja für jede K-Ringalgebra M.

Beispiel 3.8.10. Wir haben im Fall $K = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{C}$, $\alpha = \mathrm{i}$ etwa

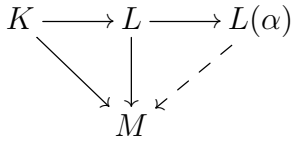
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kring}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\mathrm{i}), \mathbb{C}) & \tilde{\to} & \{\beta \in \mathbb{C} \mid \beta^2 + 1 = 0\} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(\mathrm{i}) \end{array}$$

Beweis. Wir setzen $P := \mathrm{Irr}(\alpha, K)$ und etablieren der Reihe nach die Bijektionen

$$\begin{array}{lcll} \mathrm{Kring}^K(K[X], M) & \tilde{\to} & M & \varphi \mapsto \varphi(X) \\ \mathrm{Kring}^K(K[X]/\langle P\rangle, M) & \tilde{\to} & \{\beta \in M \mid P(\beta) = 0\} & \varphi \mapsto \varphi(\bar{X}) \\ \mathrm{Kring}^K(K(\alpha), M) & \tilde{\to} & \{\beta \in M \mid P(\beta) = 0\} & \varphi \mapsto \varphi(\alpha) \end{array}$$

Die erste Bijektion gilt für jeden Kring K und jeden K-Kring M und wurde eben in 3.8.5 wiederholt. Die zweite Bijektion gilt für jeden Kring K und jeden K-Kring M und jedes Polynom $P \in K[X]$ und folgt aus der universellen Eigenschaft des Faktorrings, da für φ gegeben durch $\varphi(X) = \beta$ die Bedingung $\varphi(P) = 0$ gleichbedeutend ist zu $P(\beta) = 0$. Die dritte Bijektion folgt, da unter den Annahmen der Proposition das Einsetzen von α einen Isomorphismus $K[X]/\langle P\rangle \tilde{\to} K(\alpha)$ induziert. □

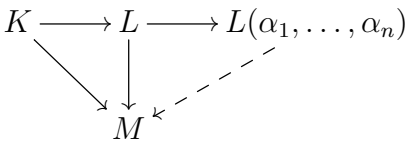
Lemma 3.8.11 (**Primitives Ausdehnbarkeitskriterium**). *Sei ein kommutatives Dreieck von Körperhomomorphismen gegeben wie in der linken Hälfte des Diagramms*



und sei $L \subset L(\alpha)$ eine primitive Körpererweiterung von L mit α algebraisch über K derart, daß das Minimalpolynom $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ in $M[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. So laßt sich der Körperhomomorphismus $L \to M$ wie durch den gestrichelten Pfeil angedeutet zu einem Körperhomomorphismus $L(\alpha) \to M$ ausdehnen.

Beweis. Das Minimalpolynom $\mathrm{Irr}(\alpha, L)$ ist ein Teiler von $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ und muß deshalb nach Annahme eine Nullstelle $\beta \in M$ haben. Nach 3.8.8 erhalten wir für jede solche Nullstelle eine Ausdehnung durch $\alpha \mapsto \beta$. □

Proposition 3.8.12 (**Allgemeines Ausdehnbarkeitskriterium**). *Sei ein kommutatives Dreieck von Körperhomomorphismen gegeben wie in der linken Hälfte des Diagramms*



und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über K derart, daß alle ihre Minimalpolynome $\mathrm{Irr}(\alpha_i, K)$ in $M[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfallen. So laßt sich der Körperhomomorphismus $L \to M$ wie durch den gestrichelten Pfeil angedeutet zu einem Körperhomomorphismus $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to M$ ausdehnen.

Beweis. Das folgt induktiv aus dem Ausdehnbarkeitskriterium für primitive Erweiterungen 3.8.11. □

Vorschau 3.8.13. Diese Proposition wird auch unmittelbar aus der allgemeineren und vielleicht „glatteren“ Aussage 3.11.9 über Einbettungen in den algebraischen Abschluß folgen: Mit 3.11.3.2 dürfen wir M algebraisch über K annehmen. Nach 3.11.9 läßt sich M dann über K in einen algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K einbetten. Wieder nach 3.11.9 können wir auch $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ über K in $\bar{K}$ einbetten, und nach Annahme liegt sein Bild dann notwendig im Bild von M.

Beweis der Eindeutigkeit von Zerfällungskörpern 3.8.2. Seien K ein Körper und $K \hookrightarrow M$ und $K \hookrightarrow M'$ Zerfällungskörper desselben Polynoms $P \in K[X]$, also $M = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ für die Nullstellen α_i einer Faktorisierung von P in Linearfaktoren und analog für M'. Das allgemeine Ausdehnbarkeitskriterium 3.8.12 liefert uns Injektionen $M \hookrightarrow M'$ und $M' \hookrightarrow M$ über K. Da beide Seiten endlichdimensionale Vektorräume sind über K und da unsere Injektionen beide K-linear sind, müssen sie beide Isomorphismen sein. □

Satz 3.8.14 (Maximalzahl von Ausdehnungen). *Gegeben eine Körpererweiterung ist die Zahl der Ausdehnungen auf den Erweiterungskörper eines Homomorphismus des Grundkörpers in irgendeinen weiteren Körper beschränkt durch den Grad unserer Körpererweiterung. Ist also in Formeln L/K eine endliche Körpererweiterung und $j : K \hookrightarrow M$ ein Körperhomomorphismus, so gilt*

$$|\operatorname{Kring}^K(L, M)| \leq [L : K]$$

Erster Beweis. Gibt es einen Zwischenkörper L' mit $K \subset L' \subset L$ aber $K \neq L' \neq L$, so folgt der Satz mit vollständiger Induktion über den Grad unserer Körpererweiterung. Sonst gilt $L = K(\alpha)$ für ein $\alpha \in L$, und die Erweiterungen von j zu einer Einbettung von $K(\alpha)$ in M werden nach 3.8.8 parametrisiert durch die Nullstellen in M des Minimalpolynoms von α über K. Dieses Polynom hat aber den Grad $[K(\alpha) : K]$ und höchstens ebensoviele Nullstellen in M. □

Zweiter Beweis. Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ paarweise verschiedene K-lineare Körperhomomorphismen $L \to M$. Nach Satz 3.8.15 über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren, den wir im Anschluß beweisen, sind sie linear unabhängig im M-Vektorraum $\operatorname{Hom}_K(L, M)$, ja sogar im M-Vektorraum $\operatorname{Ens}(L^\times, M)$. Gegeben eine K-Basis $B \subset L$ von L bleiben ihre Restriktionen offensichtlich linear unabhängig im M-Vektorraum $\operatorname{Ens}(B, M)$ und es folgt $r \leq |B|$. □

Satz 3.8.15 (Lineare Unabhängigkeit von Charakteren). *Die Menge aller Homomorphismen von einer Gruppe in die multiplikative Gruppe eines Körpers ist stets linear unabhängig im Vektorraum aller Abbildungen von besagter Gruppe in besagten Körper.*

3.8.16. Dasselbe gilt mit demselben Beweis allgemeiner auch für die Menge aller Homomorphismen von einem Monoid in die multiplikative Gruppe eines Körpers.

Beweis. Bezeichnen wir unsere Gruppe mit G und unserem Körper mit M, so behaupten wir in Formeln, daß $\mathrm{Grp}(G, M^\times)$ eine linear unabhängige Teilmenge des M-Vektorraums $\mathrm{Ens}(G, M)$ ist. Sei in der Tat sonst

$$a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \ldots + a_n\chi_n = 0$$

eine nichttriviale lineare Relation kürzestmöglicher Länge mit $a_i \in M$ und $\chi_i : G \to M^\times$ paarweise verschiedenen Gruppenhomomorphismen. Wegen $\chi(1) = 1$ für alle Charaktere χ haben wir notwendig $n \geq 2$. Wegen $\chi_1 \neq \chi_2$ finden wir $g \in G$ mit $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$. Unsere Gleichung impliziert nun aber für jedes und insbesondere auch für dieses $g \in G$ durch Substituieren von gh für h beziehungsweise Multiplizieren mit $\chi_1(g)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1\chi_1(g)\chi_1 + a_2\chi_2(g)\chi_2 + a_n\chi_n(g)\chi_n &= 0 \\ a_1\chi_1(g)\chi_1 + a_2\chi_1(g)\chi_2 + a_n\chi_1(g)\chi_n &= 0 \end{aligned}$$

Deren Differenz wäre dann eine kürzere und wegen $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$ nichttriviale Linearkombination im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Definition 3.8.17. Eine Körpererweiterung heißt **algebraisch**, wenn alle Elemente der Erweiterung algebraisch sind über dem Grundkörper.

3.8.18. Jede endliche Körpererweiterung ist also nach 3.4.7 auch algebraisch. Genauer ist nach 3.4.7 eine Körpererweiterung algebraisch genau dann, wenn sie eine Vereinigung von Teilerweiterungen ist, die jeweils endlich sind über dem Grundkörper.

Definition 3.8.19. Eine Körpererweiterung N/K heißt **normal**, wenn sie algebraisch ist und wenn für alle Elemente $\alpha \in N$ ihr Minimalpolynom $\mathrm{Irr}(\alpha; K)$ in Bezug auf den Unterkörper K in $N[X]$ bereits vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

3.8.20 (**Diskussion der Terminologie**). In der älteren Literatur, zum Beispiel in [Art], wird der Begriff „normal“ manchmal auch abweichend definiert als diejenige Eigenschaft einer Körpererweiterung, die wir später mit „Galois“ bezeichnen werden. Ich finde die Begriffsbildung in beiden Varianten ungeschickt: Normalerweise ist eine Körpererweiterung nämlich keineswegs normal im mathematischen Sinne, oder um es anders auszudrücken: Normal zu sein ist für Körpererweiterungen etwas ganz Besonderes. Aber gut, ein Psychologe ist vermutlich durchaus auch der Ansicht, daß es für einen Menschen etwas ganz Besonderes ist, normal zu sein, und für eine Körpererweiterung erst recht: So fern vom umgangssprachlichen Wortsinn ist unsere mathematische Terminologie also auch wieder nicht.

Beispiele 3.8.21. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist normal über $\mathbb{Q}$, aber $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist nicht normal über $\mathbb{Q}$, denn wir können $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ einbetten in $\mathbb{R}$ und die beiden anderen Wurzeln des in $\mathbb{Q}[X]$ irreduziblen Polynoms $X^3 - 2$ sind nicht reell.

Proposition 3.8.22 (Bilder normaler Erweiterungen). *Gegeben eine normale Körpererweiterung N/K und eine beliebige Körpererweiterung L/K gilt für je zwei Körperhomomorphismen $\varphi, \psi \in \mathrm{Kring}^K(N, L)$ bereits*

$$\varphi(N) = \psi(N)$$

Beweis. Wir können diese Unterkörper von L beide beschreiben als die Menge aller Nullstellen in L von Minimalpolynomen über K von Elementen von N. □

3.8.23. Besonders oft wird Proposition 3.8.22 über Bilder normaler Erweiterungen im Fall eines Körperturms $K \subset N \subset L$ angewandt. Dann liefert sie für N/K normal und $\varphi \in \mathrm{Kring}^K(N, L)$ beliebig $\varphi(N) = N$. In der Tat können wir ja dann als ψ die Einbettung $\psi : N \hookrightarrow L$ mit $\psi(N) = N$ wählen.

Satz 3.8.24 (Charakterisierung normaler Erweiterungen). *Für eine endliche Körpererweiterung N/K sind gleichbedeutend:*

1. *N/K ist normal;*
2. *N ist der Zerfällungskörper eines Polynoms $P \in K[X]$.*

Beweis. 1⇒2. Ist N normal über K und erzeugt von $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, so ist N ein Zerfällungskörper für das Produkt der Minimalpolynome $\mathrm{Irr}(\alpha_i, K)$ der α_i über K. Für die andere Implikation machen wir einen Umweg und zeigen zusätzlich die Äquivalenz zu der folgenden technischen Aussage:

3. *Gegeben ein Polynom $Q \in K[X]$ und ein Zerfällungskörper L von Q haben je zwei Körperhomomorphismen $\varphi, \psi \in \mathrm{Ring}^K(N, L)$ in L dasselbe Bild $\varphi(N) = \psi(N)$.*

Die Implikation 2⇒3 gilt für beliebiges L/K, die Teilkörper $\varphi(N), \psi(N)$ werden eben beide erzeugt von allen Nullstellen von P in L. Schließlich zeigen wir noch 3⇒1. Sei dazu $\alpha \in N$ gegeben. Wir ergänzen α zu einem endlichen Erzeugendensystem von N über K, sagen wir $N = K(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ und betrachten das Produkt Q der Minimalpolynome über K unserer Erzeuger und dessen Zerfällungskörper L/K. Für jede Nullstelle $\beta \in L$ von $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ können wir unsere Einbettung $K \hookrightarrow L$ zunächst nach 3.8.8 fortsetzen zu einer Einbettung $K(\alpha) \hookrightarrow L$ mit $\alpha \mapsto \beta$ und dann nach 3.8.12 weiter zu einer Einbettung $\varphi : N \hookrightarrow L$. Jede Nullstelle von $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ in L liegt also in $\varphi(N)$ für ein und damit nach Annahme jedes $\varphi \in \mathrm{Kring}^K(N, L)$. Also zerfällt unser Polynom $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$ bereits in $\varphi(N)$ und a forteriori in N vollständig in Linearfaktoren. □

Proposition 3.8.25 (Vergrößern zu normaler Erweiterung). *Jede endliche Körpererweiterung läßt sich zu einer endlichen normalen Körpererweiterung vergrößern.*

Beweis. Gegeben eine endliche Körpererweiterung L/K behaupten wir in Formeln, daß es stets eine endliche Erweiterung N/L gibt, für die N/K normal ist. Um das zu zeigen, nehmen wir Erzeuger $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ von L über K und konstruieren N als Zerfällungskörper über L des Produkts ihrer Minimalpolynome. Dies N ist dann natürlich auch Zerfällungskörper des besagten Produkts über K und damit normal über K. □

Übungen

Übung 3.8.26. Man zeige, daß eine algebraische Körpererweiterung eines unendlichen Körpers stets dieselbe Kardinalität hat wie der Ausgangskörper. Diese Erkenntnis wird bei einer Konstrution des algebraischen Abschlusses benötigt werden.

Übung 3.8.27. Es sei K ein Körper, $P \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n und L/K der Zerfällungskörper von P. Zeigen Sie die Abschätzung $[L{:}K] \leq n!$. Mutige zeigen stärker $[L{:}K] | n!$. Hinweise: Induktion über den Grad n von P. Man beachte $n!m!|(n+m)!$ nach der Formel für die Binomialkoeffizienten im Fall eines nicht irreduziblen Polynoms. Im Fall eines irreduziblen Polynoms entsteht durch Adjunktion einer Nullstelle eine Körpereweiterung vom Grad n.

Übung 3.8.28. Es seien M/L und L/K endliche oder allgemeiner algebraische Körpererweiterungen. Man zeige: Ist M/K normal, so ist auch M/L normal. Sind L_1 und L_2 normale Körpererweiterungen von K und $L_1, L_2 \subset M$, so ist $L_1 \cap L_2$ normal über K. Geben Sie ein Beispiel für Körper $M \supset L \supset K$ an, bei dem M/L und L/K jeweils normal sind, M/K jedoch nicht normal ist.

Übung 3.8.29. Man formuliere präzise und zeige, daß es bis auf nichteindeutigen Isomorphismus genau ein minimales N wie in Proposition 3.8.25 gibt. Dies N heißt die **normale Hülle von L über K**.

Übung 3.8.30. Jede endliche Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ ist isomorph als $\mathbb{R}$-Kring zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Hinweis: $\mathbb{C}$ ist bekanntlich algebraisch abgeschlossen.

Ergänzende Übung 3.8.31. Sei k ein Körper und $a \in k^\times$ und $n \geq 1$. Man zeige, daß im Zerfällungskörper des Polynoms $X^n - a$ auch das Polynom $X^n - 1$ stets in Linearfaktoren zerfällt, daß aber umgekehrt im Zerfällungskörper des Polynoms $X^n - 1$ ein Polynom $X^n - a$ nicht notwendig in Linearfaktoren zerfallen muß.

Übung 3.8.32. Gegeben eine endliche Körpererweiterung $K \subset L$ zeige man, daß jedes Polynom aus dem Polynomring $L[X]$ Teiler eines Polynoms aus dem Polynomring $K[X]$ ist.

Übung 3.8.33. Man zeige: Gegeben eine Primzahl p und zwei primitive p-te Einheitswurzeln $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$ gilt $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\xi)$ und es gibt genau einen Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\zeta) \to \mathbb{Q}(\zeta)$ mit $\zeta \mapsto \xi$. Hinweis: Irreduzibilität des p-ten Kreisteilungspolynoms 2.8.4.

3.9 Vielfachheit von Nullstellen

3.9.1. Ist K ein Körper, $P \in K[X]$ ein Polynom und $\lambda \in K$ eine Nullstelle von P, so nennen wir das Supremum über alle $n \in \mathbb{N}$ mit $(X-\lambda)^n | P$ die **Vielfachheit der Nullstelle** λ oder auch ihre **Ordnung**. Das Nullpolynom hat insbesondere an jeder Stelle eine Nullstelle der Vielfachheit ∞ und gar keine Nullstelle bei λ ist dasselbe wie eine „Nullstelle der Vielfachheit Null“.

3.9.2. Unter einer **mehrfachen Nullstelle** eines Polynoms mit Koeffizienten in einem Körper oder allgemeiner einem kommutativen Integritätsbereich verstehen wir eine Nullstelle der Vielfachheit mindestens Zwei. Sagen wir, unser Polynom habe „mehrfache Nullstellen“, so ist gemeint, daß es mindestens eine mehrfache Nullstelle haben soll. Eigentlich wäre es gemäß unserer allgemeinen Konventionen [GR] 2.1.7.3 präziser, zu sagen, es habe „eine mehrfache Nullstelle“, aber das ist unüblich. Möglicherweise rührt das daher, daß man sich eine mehrfache Nullstelle gerne denkt als „mehrere Nullstellen, die zusammenfallen“. Das Nullpolynom hat stets mehrfache Nullstellen, bei ihm haben ja sogar alle Nullstellen die Vielfachheit ∞.

Satz 3.9.3 (**Mehrfache Nullstellen bei Irreduzibilität über Teilkörper**). *Seien $K \subset L$ Körper. Gilt $\operatorname{char} K = 0$ oder ist K endlich, so hat ein K-irreduzibles Polynom $P \in K[X]$ keine mehrfachen Nullstellen in L.*

3.9.4. Wir werden in 3.9.18 und 3.9.26 sogar noch etwas allgemeinere Aussagen zeigen. Das braucht jedoch einige Vorbereitungen.

Beispiel 3.9.5 (**Ein K-irreduzibles Polynom mit mehrfachen L-Nullstellen**). In positiver Charakteristik können irreduzible Polynome über einem Körper durchaus mehrfache Nullstellen in einem Erweiterungskörper haben. Um ein Beispiel anzugeben, beachten wir zunächst, daß für K ein Körper positiver Charakteristik $\operatorname{char} K = p > 0$ jedes Element $a \in K$ höchstens eine p-te Wurzel in K hat. In der Tat folgt aus $b^p = a$ leicht $(X^p - a) = (X-b)^p$, mithin ist b die einzige Nullstelle des Polynoms $X^p - a$. Wir betrachten nun den Körper $K := \mathbb{F}_p(T)$. Nach dem Eisensteinkriterium 2.8.3 sind die Polynome $X^n - T$ für $n \geq 1$ irreduzibel in $K[X]$. Das Polynom $X^p - T \in K[X]$ ist also K-irreduziblel und hat in seinem Zerfällungskörper mehrfache Nullstellen, genauer eine einzige Nullstelle $\sqrt[p]{T}$ der Vielfachheit p.

Definition 3.9.6. Für ein Polynom $P = a_nX^n + \ldots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ mit Koeffizienten in einem beliebigen Ring R erklären wir seine **Ableitung** oder genauer **formale Ableitung** $P' \in R[X]$ durch die Vorschrift

$$P' := na_nX^{n-1} + \ldots + 2a_2X + a_1$$

Lemma 3.9.7 (Ableitungsregeln). *Auch für das formale Ableiten gelten die Summenregel $(P+Q)' = P' + Q'$ und die Produktregel $(PQ)' = P'Q + PQ'$.*

Beweis. Die Summenregel ist offensichtlich. Bei der Produktregel sind mithin beide Seiten additiv in P und Q und wir dürfen uns deshalb auf den Fall $P = aX^i$ und $Q = bX^j$ zurückziehen. In diesem Fall prüft man die Formel leicht explizit. □

Lemma 3.9.8 (Ableitung und mehrfache Nullstellen). *Gegeben K ein Körper, $g \in K[X]$ ein Polynom und $\alpha \in K$ eine Nullstelle von g ist α genau dann eine mehrfache Nullstelle von g, wenn auch die Ableitung g' von g bei α verschwindet.*

Beispiel 3.9.9. Sei p eine Primzahl. Unser Polynom $P := X^p - T$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p(T)$ hat, wie in 3.9.5 diskutiert, in seinem Zerfällungskörper $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{T})$ nur eine einzige Nullstelle $\alpha = \sqrt[p]{T}$ der Vielfachheit p. Nach unserem Lemma muß also gelten $P'(\alpha) = 0$. In unserem Fall ist sogar stärker $P' = 0$ selbst das Nullpolynom.

Beweis. Aus $g = (x-\alpha)^2 f$ folgt mit der Produktregel 3.9.7 leicht $g'(\alpha) = 0$. Gilt umgekehrt $g(\alpha) = g'(\alpha) = 0$ und schreiben wir $g = (x-\alpha)h$, so folgt wieder mit der Produktregel 3.9.7 aus $g'(\alpha) = 0$ unmittelbar $h(\alpha) = 0$. □

3.9.10. Gegeben ein Körper K und Polynome $f, g \in K[X]$, die nicht beide Null sind, gibt es genau ein normiertes Polynom $d \in K[X]$, das das von f und g erzeugte Ideal erzeugt, in Formeln

$$\langle f, g\rangle = \langle d\rangle$$

Per definitionem gilt $d|f$ und $d|g$ und es gibt $a, b \in K[X]$ mit $d = af + bg$. Insbesondere folgt für ein Polynom c aus $c|f$ und $c|g$ bereits $c|d$. Mithin ist d der eindeutig bestimmte normierte gemeinsame Teiler größtmöglichen Grades von f und g. Wir nennen d den **größtgradigen gemeinsamen normierten Teiler** von f und g und notieren ihn

$$d = \mathrm{ggnT}(f, g) = \mathrm{ggnT}_K(f, g)$$

Man kann ihn, analog wie in [LA1] 4.4.19 im Fall der ganzen Zahlen erklärt, mit dem euklidischen Algorithmus unschwer explizit berechnen. Der Index K zeigt im Fall einer Körpererweiterung $K \subset L$ an, ob unser ggnT in $K[X]$ oder in $L[X]$ zu verstehen ist. Wir zeigen als nächstes, daß dieser Index überflüssig ist.

Ergänzung 3.9.11. Analog finden wir, daß jede Menge von Polynomen in einer Veränderlichen mit Koeffizienten einem Körper, die mindestens ein von Null verschiedenes Polynom enthält, genau einen größtgradigen gemeinsamen normierten Teiler besitzt.

Proposition 3.9.12 (Körpererweiterungen und Polynomdivision). *Seien $K \subset L$ Körper und $f, g \in K[X]$ Polynome mit $g \neq 0$. So gilt:*

1. *Das Teilen mit Rest von f durch g führt zum selben Resultat unabhängig davon, ob wir es in $K[X]$ oder in $L[X]$ durchführen;*
2. *Genau dann ist g ein Teiler von f in $L[X]$, wenn dasselbe gilt in $K[X]$;*
3. *Der größtgradige gemeinsame normierte Teiler von f und g in $K[X]$ ist auch der größtgradige gemeinsame normierte Teiler von f und g in $L[X]$, in Formeln*
$$\mathrm{ggnT}_K(f,g) = \mathrm{ggnT}_L(f,g)$$

Beweis. 1. Schreiben wir $f = qg + r$ mit $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g$, so sind q und r schon eindeutig bestimmt. Insbesondere ist die Lösung in $K[X]$ auch die einzig mögliche Lösung in $L[X]$.

2. Das ist der Spezialfall von Teil 1 mit Rest $r = 0$.

3. Seien dazu d_K beziehungsweise d_L der größtgradige gemeinsame normierte Teiler von f und g in $K[X]$ beziehungsweise in $L[X]$ nach 3.9.10. Natürlich ist d_K auch ein gemeinsamer Teiler in $L[X]$, also gilt $d_K | d_L$ nach 3.9.10. Andererseits haben wir eine Darstellung $d_K = qf + pg$ mit $q, p \in K[X]$, also gilt auch umgekehrt $d_L | d_K$. Zusammen folgt $d_L = d_K$. □

3.9.13 (**Teilerfremde Polynome**). Ich erinnere an unsere Definition [LA1] 5.2.16: Zwei Elemente eines Krings oder allgemeiner die Elemente einer beliebigen Teilmenge eines Krings heißen **teilerfremd**, wenn sie außer Einheiten keine gemeinsamen Teiler haben. Im Fall eines Hauptidealrings ist das offensichtlich gleichbedeutend dazu, daß das von unseren Elementen erzeugte Ideal der ganze Ring ist. Gegeben eine Körpererweiterung $K \subset L$ und Polynome $f, g \in K[X]$ sind unsere Polynome nach 3.9.12 teilerfremd in $K[X]$ genau dann, wenn sie teilerfremd sind in $L[X]$, denn sind sie beide Null, so sind sie nicht teilerfremd, und andernfalls gilt nach 3.9.12 insbesondere

$$\mathrm{ggnT}_K(f,g) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{ggnT}_L(f,g) = 1$$

Lemma 3.9.14 (Gemeinsame Nullstellen und gemeinsame Teiler). *Gegeben ein Körper K haben zwei Polynome $f, g \in K[X]$ genau dann eine gemeinsame Nullstelle in mindestens einem Erweiterungskörper L/K, wenn sie nicht teilerfremd sind als Elemente von $K[X]$.*

Beweis. Gibt es eine Körpererweiterung L/K und $\alpha \in L$ mit $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, so folgt $(X-\alpha)|f$ und $(X-\alpha)|g$ und f und g sind nicht teilerfremd in $L[X]$ und dann nach 3.9.13 auch nicht in $K[X]$. Haben umgekehrt f und g einen gemeinsamen Teiler positiven Grades, so hat dieser Teiler in mindestens einer Körpererweiterung L/K eine Nullstelle und diese ist dann auch eine gemeinsame Nullstelle von f und g in L. □

Lemma 3.9.15 (**Ableitung und Existenz mehrfacher Nullstellen**). *Für ein von Null verschiedenes Polynom mit Koeffizienten in einem Körper sind gleichbedeutend:*

1. *Das Polynom hat mehrfache Nullstellen in seinem Zerfällungskörper;*
2. *Das Polynom hat mehrfache Nullstellen in mindestens einer Erweiterung seines Koeffizientenkörpers;*
3. *Das Polynom und seine Ableitung sind nicht teilerfremd.*

3.9.16. Bei der Bedingung „teilerfremd“ kommt es wegen 3.9.13 nicht darauf an, ob wir sie in unserem ursprünglichen Polynomring oder im Polynomring mit Koeffizienten in einem beliebigen Erweiterungskörper verstehen.

Beweis. Seien K unser Körper und $P \in K[X]\backslash 0$ unser Polynom.

$1 \Rightarrow 2$. Das ist offensichtlich.

$2 \Rightarrow 3$. Ist α eine mehrfache Nullstelle des Polynoms P in einer Körpererweiterung L von K, so ist α eine gemeinsame Nullstelle von P und P' in L. Damit sind P und P' nicht teilerfremd, da sie beide von $(X-\alpha)$ geteilt werden.

$3 \Rightarrow 2$. Es gibt eine Körpererweiterung M/K, in der sowohl P als auch P', falls es nicht eh verschwindet, in Linearfaktoren zerfallen. Sind P und P' nicht teilerfremd, haben sie in M eine gemeinsame Nullstelle α und damit ist α eine mehrfache Nullstelle von P in M nach 3.9.8. Dann ist α auch eine mehrfache Nullstelle im von den Nullstellen von P erzeugten Teilkörper von M, und der ist ein Zerfällungskörper von P und damit, wie in 3.8.2 diskutiert, der bis auf nichteindeutigen Isomorphismus über K eindeutig bestimmte Zerfällungskörper. □

Definition 3.9.17 (**Separable Polynome**). Ein Polynom mit Koeffizienten in einem Körper, das in keiner Körpererweiterung seines Koeffizientenkörpers mehrfache Nullstellen hat, heißt **separabel**. Offensichtlich gleichbedeutend ist die Bedingung, daß unser Polynom in seinem Zerfällungskörper keine mehrfachen Nullstellen hat.

Satz 3.9.18 (**Separabilität irreduzibler Polynome**). *Seien K ein Körper und $P \in K[X]$ ein K-irreduzibles Polynom. So sind gleichbedeutend:*

1. *Das Polynom P ist nicht separabel;*
2. *Die Ableitung P' von P ist das Nullpolynom;*
3. *Es gilt* $\operatorname{char} K = p > 0$ *und es gibt* $Q \in K[X]$ *mit* $P(X) = Q(X^p)$*;*
4. *Jede Nullstelle unseres Polynoms in einer beliebigen Erweiterung seines Koeffizientenkörpers ist ein mehrfache Nullstelle.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Hat P mehrfache Nullstellen, so ist es nach 3.9.15 nicht teilerfremd zu seiner Ableitung. Wenn aber ein irreduzibles Polynom nicht teilerfremd ist zu einem weiteren Polynom echt kleineren Grades, muß dieses weitere Polynom das Nullpolynom sein.

$2 \Leftrightarrow 3$. Das scheint mir offensichtlich für ein beliebiges Polynom mit Koeffizienten in einem Körper K.

$2 \Rightarrow 4$. Ist die Ableitung das Nullpolynom, so ist jede Nullstelle unseres Polynoms auch eine Nullstelle seiner Ableitung, mithin nach 3.9.8 eine mehrfache Nullstelle unseres Polynoms.

$4 \Rightarrow 1$. Das scheint mir offensichtlich. □

Definition 3.9.19 (**Separable Elemente von Körpererweiterungen**)**.** Sei L/K eine Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in L$ heißt **separabel über** K, wenn es algebraisch ist und eine einfache Nullstelle seines Minimalpolynoms $\operatorname{Irr}(\alpha; K)$.

Definition 3.9.20 (**Separable Körpererweiterungen**)**.** Eine Körpererweiterung L/K heißt **separabel**, wenn jedes Element von L separabel ist über K. Insbesondere ist jede separable Körpererweiterung per definitionem algebraisch.

3.9.21. Nach Satz 3.9.18 zur Separabilität irreduzibler Polynome ist ein Element eines Körpers separabel über einem Teilkörper genau dann, wenn es über diesem algebraisch ist mit separablem Minimalpolynom. In der Tat haben wir gezeigt, daß bei einem irreduziblen Polynom eine Nullstelle in einem Zerfällungskörper mehrfache Nullstelle ist genau dann, wenn das auf alle Nullstellen zutrifft.

Beispiel 3.9.22. In Charakteristik Null ist jede algebraische Körpererweiterung separabel nach Satz 3.9.18 zur Separabilität irreduzibler Polynome. Nicht separabel ist $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{T})$ über $\mathbb{F}_p(T)$, denn nach 3.9.5 ist $(X - \sqrt[p]{T})^p = X^p - T$ ein $\mathbb{F}_p(T)$-irreduzibles Polynom.

Definition 3.9.23. Ein Körper heißt **vollkommen**, wenn er entweder die Charakteristik Null hat oder aber für $p = \operatorname{char} K > 0$ die Abbildung $x \mapsto x^p$ eine Surjektion $K \twoheadrightarrow K$ ist.

Ergänzung 3.9.24. Für „vollkommen“ sagt man in diesem Zusammenhang auf Englisch **perfect** und auf Französisch **parfait**.

Beispiel 3.9.25 (**Endliche Körper sind vollkommen**). Jeder endliche Körper vollkommen, denn jeder Körperhomomorphismus und damit insbesondere der Frobeniushomomorphismus ist injektiv und folglich im Fall eines endlichen Körpers auch surjektiv.

Satz 3.9.26 (**Irreduzible Polynome über vollkommenen Körpern**). *Jedes irreduzible Polynom über einem vollkommenen Körper ist separabel. Jede algebraische Erweiterung eines vollkommenen Körpers ist separabel.*

Beweis. Sei K unser vollkommener Körper. Im Fall $\operatorname{char} K = 0$ ist nach 3.9.18 jedes K-irreduzible Polynom separabel. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\operatorname{char} K = p > 0$ und $P \in K[X]$ irreduzibel. Wäre P nicht separabel, so hätte P nach 3.9.18 die Form $P = b_n(X^p)^n + \ldots + b_1 X^p + b_0$. Nehmen wir aber nun $a_n, \ldots, a_0 \in K$ mit $a_i^p = b_i$ und betrachten $Q = a_n X^n + \ldots + a_0$, so folgt $P = Q^p$ im Widerspruch zur Irreduzibilität von P. □

3.9.27 (**Algebraische Körpererweiterungen endlicher Körper sind separabel**). Jede algebraische Körpererweiterung eines endlichen Körpers ist separabel, da jeder endliche Körper vollkommen ist nach 3.9.25 und folglich jede algebraische Körpererweiterung darüber separabel ist nach 3.9.26.

Satz 3.9.28 (**Charakterisierung separabler Körpererweiterungen**). *Für eine Körpererweiterung L/K sind gleichbedeutend:*

1. *L/K ist separabel;*
2. *L wird erzeugt über K von Elementen, die separabel sind über K.*

Ist L/K endlich, so sind auch gleichbedeutend:

3. *Für jede Vergrößerung N/L von L zu einer normalen Erweiterung von K gilt $|\mathrm{Kring}^K(L, N)| = [L : K]$;*
4. *Es gibt mindestens eine Körpererweiterung N/K von K mit der Eigenschaft $|\mathrm{Kring}^K(L, N)| = [L : K]$.*

Beweis. Zeigen wir $1 \Leftrightarrow 2$ für endliche Erweiterungen, so folgt es leicht im allgemeinen. Wir dürfen uns also für den Rest des Beweises auf den Fall L/K endlich beschränken. $1 \Rightarrow 2$ ist klar. Für $2 \Rightarrow 3$ dürfen wir mit Induktion über den Grad $[L : K]$ annehmen $L = K(\alpha)$. Da α separabel ist, sind die $[L : K]$ Nullstellen

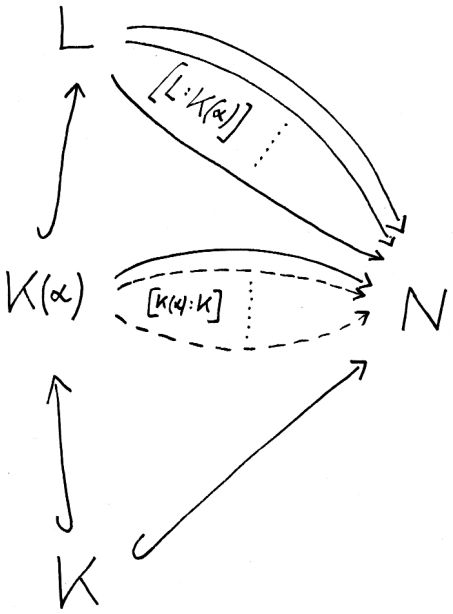


Illustration zum Beweis von 3.9.28, Implikation $2 \Rightarrow 3$. Die durchgezogenen Pfeile ganz oben sollen mögliche Erweiterungen des durchgezogenen Pfeils in der Mitte andeuten. Jeder andere der $[K(\alpha) : K]$ Pfeile in der Mitte besitzt genauso $[L : K(\alpha)]$ Erweiterungen nach ganz oben, nur sind diese nicht eingezeichnet.

seines Minimalpolynoms in N paarweise verschieden und liefern mit 3.8.8 paarweise verschiedene Erweiterungen der Einbettung $K \hookrightarrow N$ zu Körperhomomorphismen $K(\alpha) \hookrightarrow N$. Die Implikation $3 \Rightarrow 4$ ist klar. Für $4 \Rightarrow 1$ argumentieren wir durch Widerspruch: Wäre ein $\alpha \in L$ nicht separabel über K, so gäbe es nach 3.8.8 für jedes N weniger als $[K(\alpha) : K]$ Ausdehnungen von $K \hookrightarrow N$ zu einer Einbettung $K(\alpha) \hookrightarrow N$ und damit nach Satz 3.8.14 über die maximal mögliche Zahl von Ausdehnungen notwendig auch weniger als $[L : K]$ Ausdehnungen von $K \hookrightarrow N$ zu einer Einbettung $L \hookrightarrow N$. □

Korollar 3.9.29. *Seien K ein Körper, L/K eine endliche separable Erweiterung und N/K eine normale Erweiterung. So gilt*

$$\mathrm{Ring}^K(L, N) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Ring}^K(L, N)| = [L : K]$$

Ergänzung 3.9.30 (**Diskriminante als Determinante**). Ich erkläre noch eine alternative Beschreibung der Diskriminante, deren Herleitung 3.9.15 verwendet. Ich behaupte genauer für die $a_i \in \mathbb{Z}[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$, die gegeben werden durch die Identität $T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n = (T + \zeta_1) \ldots (T + \zeta_n)$, daß die Determinante der nebenstehenden Matrix M gegeben wird durch die Formel

$$\det M = \prod_{i \neq j} (\zeta_i - \zeta_j)$$

und folglich genau unsere Diskriminante aus 2.9.14 ist. Um das zu zeigen, beachten wir zunächst, daß beide Seiten symmetrische Polynome sind und daß zumin-

dest in $\mathbb{Q}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ alle $(\zeta_i - \zeta_j)$ nach 3.9.15 und [LA1] 5.4.5 und 2.10.10 das Polynom $(\det M)$ teilen. Dann aber wechselt der Ausdruck $(\det M)/(\zeta_i - \zeta_j)$ unter der Vertauschung von ζ_i und ζ_j sein Vorzeichen und muß nach [LA1] 5.4.5 folglich ein weiteres Mal durch $(\zeta_i - \zeta_j)$ teilbar sein. Mithin ist $\det M$ in $\mathbb{Q}['\zeta_1, \ldots, \zeta_n]$ durch $\prod_{i \neq j}(\zeta_i - \zeta_j)$ teilbar. Sicher ergibt das Wegteilen ein symmetrisches Polynom, das höchstens auf den Hyperebenen $\zeta_i = \zeta_j$ verschwindet. Wäre dies Polynom nicht konstant, so könnten wir mit denselben Argumenten ein weiteres Mal einen Faktor $\prod_{i \neq j}(\zeta_i - \zeta_j)$ herausziehen. Das führt jedoch zu einem Widerspruch, wenn wir etwa erst durch $\zeta_1^{2(n-1)}$ teilen, für $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$ paarweise verschiedene rationale Zahlen einsetzen, und $\zeta_1 \in \mathbb{Q}$ gegen ∞ streben lassen: $(\det M)/\zeta_1^{2(n-1)}$ bleibt dann nämlich beschränkt, wie wir sehen, indem wir alle Spalten außer der Ersten mit ζ_1^{-1} multiplizieren, und $(\prod_{i \neq j}(\zeta_i - \zeta_j))/\zeta_1^{2(n-1)}$ strebt gegen eine von Null verschiedene Zahl, aber $(\prod_{i \neq j}(\zeta_i - \zeta_j))^r/\zeta_1^{2(n-1)}$ strebt für $r \geq 2$ stets nach Unendlich. Es gilt also nur noch, die Konstante $c \in \mathbb{Q}$ zu bestimmen mit

$$\det M = c \prod_{i \neq j}(\zeta_i - \zeta_j)$$

Dazu setzen wir $\zeta_i = -\zeta^i$ mit ζ einer primitiven n-ten Einheitswurzel. Dann folgt $(T + \zeta_1) \ldots (T + \zeta_n) = T^n - 1$ und $(\det M) = n^n(-1)^{n-1}$ und andererseits

$$\prod_{i \neq j}(\zeta_i - \zeta_j) = \prod_{i=1}^{n} \left(\zeta^i \prod_{j \neq i}(1 - \zeta^{j-i}) \right)$$

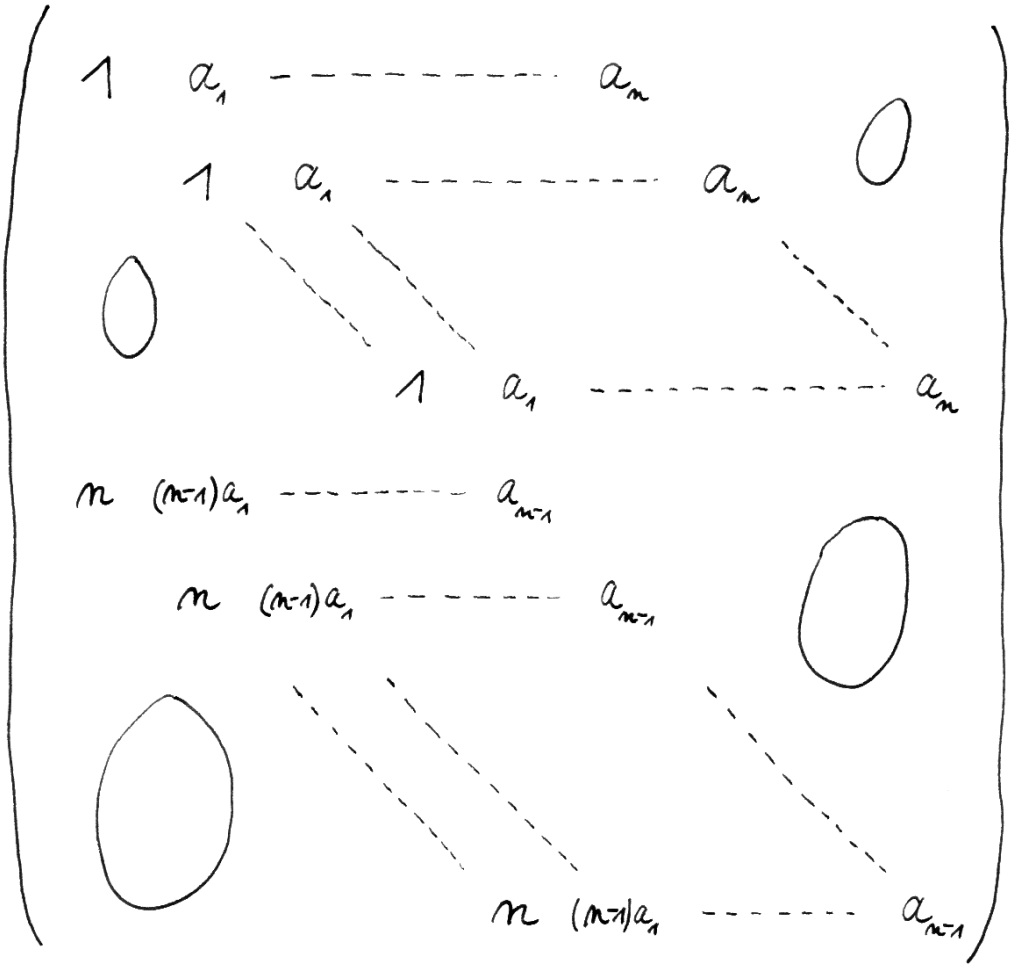
Das Produkt aller n-ten Einheitswurzeln ist nun sicher $(-1)^{n-1}$ und das zweite Produkt kann berechnet werden als der Wert an der Stelle $t = 1$ des Polynoms $(t^n - 1)/(t - 1) = t^{n-1} + \ldots + t + 1$. So erhalten wir für die gesuchte Konstante c schließlich $(-1)^{n-1}n^n = (-1)^{n-1}n^n c$ und damit $c = 1$ wie gewünscht.

Übungen

Übung 3.9.31 (**Diskriminante eines Produkts**). Gegeben normierte Polynome f, g zeige man

$$\operatorname{Disk}(fg) = \operatorname{Disk}(f) \operatorname{Res}(f, g) \operatorname{Res}(g, f) \operatorname{Disk}(g)$$

Übung 3.9.32. Man bestimme den normierten größtgradigen gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $X^4 + X^3 - 2X^2 + 3X - 15$ und $X^3 - 6X^2 - 12X + 35$ in $\mathbb{Q}[X]$. Haben diese Polynome in einer Körperwerweiterung von $\mathbb{Q}$ eine gemeinsame Nullstelle?



Die Determinante dieser Matrix stimmt überein mit der Diskriminante des Polynoms $T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n$, wie sie in 2.9.16 für jedes normierte Polynom erklärt wird. In der in 2.10.6 eingeführten Terminologie ist die Diskriminante eines normierten Polynoms f vom Grad n also genau die Resultante $\mathrm{Disk}_n(f) = \mathrm{Res}_{n,n-1}(f, f')$ unseres Polynoms mit seiner Ableitung. Das sei von nun ab auch unsere Definition der Diskriminante $\mathrm{Disk}_n(f)$ eines beliebigen Polynoms f vom Grad $\leq n$. Man kann, wie obige Formel zeigt, von diesem Polynom Disk_n sogar noch einen Faktor a_0 abspalten.

Übung 3.9.33. Finden Sie alle komplexen mehrfachen Nullstellen des Polynoms $X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 4$.

Übung 3.9.34. Man zeige nocheinmal mit Sonderbetrachtungen in kleiner Charakteristik, daß gegeben ein Körper k und $p, q \in k$ das Polynom $X^3 + pX + q$ genau dann nicht separabel ist, wenn gilt $27q^2 + 4p^3 = 0$.

Übung 3.9.35 (**Ableitung und logarithmische Ableitung von Reihen**). Gegeben ein Ring R erklärt man die formale Ableitung einer Laurentreihe $f = \sum a_n t^n \in R(\!(t)\!)$ durch $f' := \sum n a_n t^{n-1}$. Wieder zeige man Summenregel und Produktregel. Für $f \in 1 + tR[\![t]\!]$ und $\mathbb{Q} \subset R$ zeige man zusätzlich $(\log f)' = f'/f$ für $\log f$ wie in [AN1] 12.6.3.11.

Ergänzende Übung 3.9.36. Seien P, Q nicht konstante Polynome mit Koeffizienten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Man zeige: Haben unsere beiden Polynome dieselben Nullstellen und dieselben „Einsstellen“, gelten also in Formeln für die zugehörigen Abbildungen $P, Q : k \to k$ die Gleichheiten $P^{-1}(0) = Q^{-1}(0)$ und $P^{-1}(1) = Q^{-1}(1)$ von Teilmengen von k, so folgt $P = Q$. Hinweis: Wäre $P \neq Q$, so wäre $P - Q$ ein von Null verschiedenes Polynom mit $|P^{-1}(1) \cup P^{-1}(0)|$ Nullstellen und folglich mindestens diesem Grad. Für d das Maximum der Grade unserer Polynome folgt $d \geq |P^{-1}(1) \cup P^{-1}(0)|$. Für P vom Grad d folgt, daß P' mit Vielfachheiten gerechnet zu viele Nullstellen haben muß und deshalb Null ist.

Übung 3.9.37. Man zeige: Ein Polynom mit Koeffizienten in einem Körper der Charakteristik Null ist separabel genau dann, wenn es von keinem Quadrat eines irreduziblen Polynoms geteilt wird.

Übung 3.9.38. Man zeige: Seien $M \supset L \supset K$ Körper. Ist M/L separabel und L/K separabel, so ist M/K separabel. Hinweis: Man ziehe sich zunächst auf den Fall endlicher Erweiterungen zurück und verwende dann 3.9.28, insbesondere $4 \Rightarrow 1$, mit N einer Vergrößerung von M zu einer normalen Erweiterung von K.

Ergänzende Übung 3.9.39. In jeder Körpererweiterung M/K gibt es unter allen Zwischenkörpern $L \subset M$, die separabel sind über K, einen größten. Er heißt der **separable Abschluß von K in M**. Hinweis: Man verwende 3.9.38.

Übung 3.9.40. Eine algebraische Körpererweiterung derart, daß nur die Elemente des kleinen Körpers über diesem separabel sind, heißt **rein inseparabel**. Man zeige, daß eine algebraische Erweiterung L/K eines Körpers K der Charakteristik $p > 0$ rein inseparabel ist genau dann, wenn für jedes Element von L die p^r-te Potenz für hinreichend großes r in K liegt. Salopp gesprochen sind also rein inseparable Erweiterungen genau die Erweiterungen, die durch die sukzessive Adjunktion p-ter Wurzeln in Charakteristik p entstehen. Hinweis: 3.9.18.

Ergänzende Übung 3.9.41. Man zeige: Ist M/K eine algebraische Körpererweiterung und $L \subset M$ der separable Abschluß von K in M, so ist die Körpererweiterung M/L rein inseparabel. Hinweis: Man verwende 3.9.38.

Vorschau 3.9.42. Man kann im Fall positiver Charakteristik $p > 0$ auch für jede Körpererweiterung L/K die Menge L_{i} aller Elemente von L betrachten, die unter wiederholtem Anwenden des Frobenius, also unter wiederholtem Bilden der p-ten Potenz irgendwann einmal in K landen. Dann ist L_{i} der größte über K rein inseparable algebraische Unterkörper von L. Auch wenn L/K algebraisch oder sogar endlich ist, muß hier L/L_{i} nicht separabel sein. Das gilt jedoch, wenn zusätzlich L/K eine normale algebraische Körpererweiterung ist, vergleiche 4.1.30.

Übung 3.9.43. Man zeige für jede rein inseparable algebraische Körpererweiterung L/K und jede weitere Körpererweiterung N/K die Abschätzung

$$|\mathrm{Kring}^K(L,N)| \leq 1$$

Ergänzende Übung 3.9.44. Gegeben eine algebraische Körpererweiterung L/K erklärt man ihren **Separabilitätsgrad** als $[L:K]_{\mathrm{s}} := [S:K]$ für $S \subset L$ den separablen Abschluß von K in L.

1. Gegeben eine endliche Körpererweiterung L/K zeige man

   $$[L:K]_{\mathrm{s}} := \sup_{N/K} |\mathrm{Kring}^K(L,N)|$$

   Das Supremum der Zahl möglicher Homomorphismen ist dabei über alle Körpererweiterungen N/K zu bilden und alle Werte in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ sind erlaubt. Hinweis: 3.9.41 und 3.9.43.

2. Man zeige, daß der Separabilitätsgrad im Fall endlicher Körpererweiterungen multiplikativ ist, daß also für $M/L/K$ endliche Erweiterungen gilt

   $$[M:K]_{\mathrm{s}} = [M:L]_{\mathrm{s}}[L:K]_{\mathrm{s}}$$

Die beiden Identitäten aus der vorhergehenden Übung gelten auch für beliebige algebraische Körpererweiterungen. Um das zu zeigen, muß man nur wissen, daß sich jeder Körper in einen algebraisch abgeschlossenen Körper einbetten läßt, und muß sich überlegen, daß für jede algebraische Körpererweiterung L/K und jede algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung N/K gilt $[L:K]_{\mathrm{s}} = |\mathrm{Kring}^K(L,N)|$.

Übung 3.9.45 (**Rein inseparable Erweiterungen eines Funktionenkörpers**). Sei k ein vollkommener Körper positiver Charakteristik $p > 0$ und $L/k(T)$ eine endliche rein inseparable Erweiterung seines Funktionenkörpers. So ist unsere

Körpererweiterung für genau ein $r \in \mathbb{N}$ zur Körpererweiterung $k(X)/k(T)$ gegeben durch $X \mapsto T^{p^r}$ isomorph. Hinweis: Man mag ohne Beschränkung der Allgemeinheit $[L : k(T)] = p$ annehmen. Dann überlegt man sich, daß in $k(\sqrt[p]{T})$ bereits alle Elemente von $k(T)$ eine p-te Wurzel haben.

Ergänzende Übung 3.9.46. Gegeben ein Körper k induzieren die Einbettungen $k[X] \hookrightarrow k[\![X]\!] \hookrightarrow k(\!(X)\!)$ einen Ringhomomorphismus und nach [LA1] 5.5.5 eine Einbettung $k(X) \hookrightarrow k(\!(X)\!)$. Man zeige, daß im Fall $\operatorname{char} k = 0$ diese Einbettung für rationale Funktionen, die bei $X = 0$ keinen Pol haben, durch ein formales Analogon der Taylorformel beschrieben werden kann. Hierbei gilt es zunächst, die Ableitung eines Quotienten vermittels der Quotientenregel zu erklären.

3.10 Satz vom primitiven Element

Lemma 3.10.1 (Überdeckung durch affine Teilräume). *Ein affiner Raum über einem unendlichen Körper kann nicht durch endlich viele echte affine Teilräume überdeckt werden.*

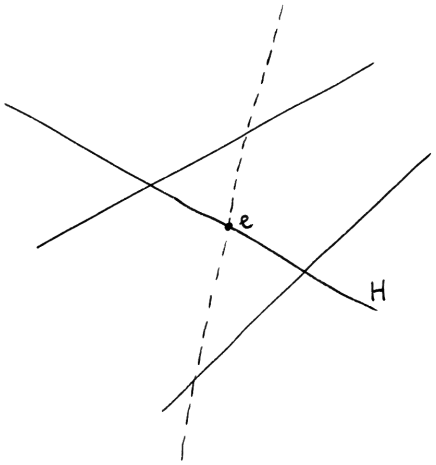


Illustration zum Beweis von 3.10.1

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch und gehen von einer Überdeckung durch möglichst wenige Teilräume aus. Wir finden also einen Punkt, der im ersten Teilraum liegt, aber nicht in den anderen, und eine Gerade durch diesen Punkt, die nicht im ersten Teilraum enthalten ist. Sie trifft dann jeden unserer Teilräume in höchstens einem Punkt, hat aber selbst unendlich viele Punkte. □

Lemma 3.10.2 (Überdeckung durch Untervektorräume). *Ein Vektorraum kann nicht durch endlich viele Untervektorräume von unendlicher Kodimension überdeckt werden.*

3.10.3. Man folgert leicht, daß ein affiner Raum nicht durch endlich viele affine Teilräume unendlicher Kodimension überdeckt werden kann.

Beweis. Seien sonst K ein Körper und $V = U_1 \cup \ldots \cup U_r$ ein Gegenbeispiel über K. Im Dualraum V^* sind nach Annahme die Teilräume $U_i^\perp$ der auf einem U_i verschwindenden Linearformen unendlichdimensional. Wir finden also induktiv $f_i \in U_i^\perp$ derart, daß die Familie $f_1, \ldots, f_r$ linear unabhängig ist. Das bedeutet, daß die lineare Abbildung $V \to K^r$ gegeben durch $v \mapsto (f_1(v), \ldots, f_r(v))$ surjektiv ist. Auf der Vereinigung der U_i ist sie jedoch nicht surjektiv, sie wird ja nach Konstruktion in die Teilmenge aller Tupel von K^r abgebildet, bei denen mindestens eine Koordinate Null ist. □

3.10.4. Unser Argument beim Beweis von Lemma 3.10.1 zeigt feiner, daß ein affiner Raum über einem Körper $\mathbb{F}$ mit mehr als n Elementen $|\mathbb{F}| > n$ nie die Vereinigung von nur n echten affinen Teilräumen sein kann. Unser Argument beim Beweis von Lemma 3.10.2 zeigt feiner, daß ein Vektorraum V nicht von Untervektorräumen $U_1, \ldots, U_r$ mit $\dim(V/U_i) \geq i$ überdeckt werden kann.

Korollar 3.10.5 (Überdeckung durch Teilkörper). *Ein Körper kann nicht durch endlich viele echte Teilkörper überdeckt werden.*

Beweis im Fall von Charakteristik Null. Jeder Unterkörper ist in diesem Fall ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum. Die Behauptung folgt so aus Lemma 3.10.1, nach dem ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum nicht durch endlich viele echte Untervektorräume überdeckt werden kann. □

Beweis im Fall eines endlichen Körpers. Ein endlicher Körper kann nicht durch echte Teilkörper überdeckt werden, da seine multiplikative Gruppe nach [LA2] 6.4.8 zyklisch ist. □

Beweis im Fall eines unendlichen Körpers in positiver Charakteristik. Jeder echte Teilkörper eines unendlichen Körpers ist entweder unendlich oder endlich und hat in beiden Fällen als Untervektorraum in Bezug auf den Primkörper unendliche Kodimension. Die Behauptung folgt so aus Lemma 3.10.2, nach dem ein Vektorraum nicht durch endlich viele Untervektorräume von unendlicher Kodimension überdeckt werden kann. □

Satz 3.10.6 (Unterscheidung von Körperhomomorphismen). *Gegeben Körpererweiterungen L/K und M/K desselben Grundkörpers K und endlich viele paarweise verschiedene Homomorphismen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathrm{Kring}^K(L, M)$ von Körpererweiterungen gibt es stets ein Element $\alpha \in L$, dessen Bilder $\sigma_i(\alpha)$ unter unseren Körperhomomorphismen paarweise verschieden sind.*

Beweis. Sicher ist $L_{ij} := \{\beta \in L \mid \sigma_i(\beta) = \sigma_j(\beta)\}$ stets ein Teilkörper von L und für $i \neq j$ ist L_{ij} sogar ein echter Teilkörper von L. Da ein Körper nach 3.10.5 nicht durch endlich viele echte Teilkörper überdeckt werden kann, gibt es stets ein $\alpha \in L \setminus \bigcup_{i \neq j} L_{ij}$. □

Korollar 3.10.7 (Teilkörper und Primitivität). *Eine Körpererweiterung ist genau dann endlich und primitiv, wenn sie nur endlich viele Zwischenkörper hat.*

Beweis. Läßt eine Körpererweiterung L/K nur endlich viele Zwischenkörper zu, so kann sie von ihren echten Zwischenkörpern nach 3.10.5 nicht überdeckt werden. Also gibt es ein $\alpha \in L$, das in keinem echten Zwischenkörper liegt. Dann gilt notwendig $L = K(\alpha)$ und α kann nicht transzendent sein, da sonst die $K(\alpha^n)$ eine unendliche Familie paarweise verschiedener Zwischenkörper wären. Ist umgekehrt $L = K(\alpha)$ eine primitive endliche Körpererweiterung, so betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Zwischenkörper } M, \\ K \subset M \subset K(\alpha) \end{array} \right\} & \to & \left\{ \begin{array}{c} \text{Normierte Teiler in } L[X] \\ \text{des Minimalpolynoms } \operatorname{Irr}(\alpha, K) \end{array} \right\} \\ M & \mapsto & \operatorname{Irr}(\alpha, M) \end{array}$$

Es reicht zu zeigen, daß sie injektiv ist. In der Tat wird aber M über K bereits von den Koeffizienten des Minimalpolynoms $\operatorname{Irr}(\alpha, M)$ erzeugt, denn für den von diesen Koeffizienten über K erzeugten Teilkörper $M' \subset M$ gilt $[L : M'] = \operatorname{grad}(\operatorname{Irr}(\alpha, M)) = [L : M]$. Da jedes Polynom nur endliche viele normierte Teiler besitzt, folgt die Behauptung. □

Satz 3.10.8 (vom primitiven Element). *Ist L/K eine endliche separable Körpererweiterung, so gibt es ein Element $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$.*

Beweis. Nach 3.8.25 können wir L vergrößern zu einer normalen Erweiterung N von K. Wegen der Separabilität von L/K gibt es dann nach 3.9.29 genau $[L : K]$ Körperhomomorphismen über K von L nach N, in Formeln

$$|\operatorname{Kring}^K(L, N)| = [L : K]$$

Nach Satz 3.10.6 über die Unterscheidung von Körperhomomorphismen gibt es Elemente $\alpha \in L$ derart, daß die $\sigma(\alpha)$ für $\sigma \in \operatorname{Kring}^K(L, N)$ paarweise verschieden sind. Gegeben solch ein α liefert die Restriktion eine Injektion

$$\operatorname{Kring}^K(L, N) \hookrightarrow \operatorname{Kring}^K(K(\alpha), N)$$

Die Identität $L = K(\alpha)$ folgt dann unmittelbar aus der Kette von Gleichungen und Ungleichungen

$$[L : K] = |\operatorname{Kring}^K(L, N)| \leq |\operatorname{Kring}^K(K(\alpha), N)| \leq [K(\alpha) : K] \leq [L : K] \quad \square$$

Lemma* 3.10.9 (Überdeckung durch Nebenklassen). *Eine abelsche Gruppe kann nicht durch endlich viele Nebenklassen zu Untergruppen von unendlichem Index überdeckt werden.*

Ergänzung 3.10.10. Dies Lemma ist eine gemeinsame Verallgemeinerung unserer beiden Lemmata 3.10.1 und 3.10.2 vom Beginn dieses Abschnitts, aber abgesehen davon für uns nicht von Belang. Noch stärker gilt sogar: Eine Überdeckung einer Gruppe durch endlich viele Linksnebenklassen bleibt eine Überdeckung, wenn wir daraus alle Linksnebenklassen zu Untergruppen von unendlichem Index weglassen. Diese Aussage wird als **Neumann's Lemma** zitiert. Bernhard Neumann studierte in den dreißiger Jahren Mathematik in Freiburg und Berlin. Die Machtübernahme durch die Nationalsozialisten trieb ihn in die Emigration.

Beweis. Wir argumentieren durch Widerspruch und gehen von einem Gegenbeispiel einer Überdeckung durch möglichst wenige Nebenklassen aus. Bezeichne bei so einem Gegenbeispiel G unsere abelsche Gruppe und $H_0, H_1, \ldots, H_n \subset G$ unsere überdeckenden Nebenklassen. Die zugehörigen Untergruppen notieren wir $\vec{H}_0, \vec{H}_1, \ldots, \vec{H}_n$. Für alle i dürfen wir $|(\vec{H}_0 + \vec{H}_i)/\vec{H}_i| \in \{1, \infty\}$ annehmen, indem wir andernfalls für alle i mit $|(\vec{H}_0 + \vec{H}_i)/\vec{H}_i| < \infty$ die Nebenklasse H_i von $\vec{H}_i$ zur Nebenklasse $\vec{H}_0 + H_i$ von $\vec{H}_0 + \vec{H}_i$ vergrößern und beachten, daß die Untergruppe $\vec{H}_0 + \vec{H}_i$ in diesem Fall immer noch unendlichen Index in G hat. Weiter können unsere Nebenklassen nicht alle Nebenklassen unter derselben Untergruppe sein, wir dürfen also $\vec{H}_0 \not\subset \vec{H}_1$ annehmen. Da wir von einem kleinsten Gegenbeispiel ausgegangen waren, finden wir $g \in H_1 \setminus \bigcup_{i\neq 1} H_i$. Wegen $g \notin H_0$ gilt $g + \vec{H}_0 \subset H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$ alias

$$\vec{H}_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Big((H_i - g) \cap \vec{H}_0 \Big)$$

Hier sind aber die $(H_i - g) \cap \vec{H}_0$ entweder leer oder Nebenklassen unter $\vec{H}_i \cap \vec{H}_0$, das wegen $|(\vec{H}_0 + \vec{H}_i)/\vec{H}_i| = |\vec{H}_0/(\vec{H}_i \cap \vec{H}_0)| \in \{1, \infty\}$ jeweils entweder ganz $\vec{H}_0$ ist oder eine Untergruppe von unendlichem Index. Ersteres kann nicht passieren, da $g + \vec{H}_0$ in keinem der H_i enthalten ist. Wir hätten also ein noch kürzeres Gegenbeispiel konstruiert. Dieser Widerspruch zeigt das Lemma. □

3.11 Algebraischer Abschluß*

3.11.1. In der Literatur ist es üblich, sich bei der Entwicklung der Körpertheorie stark auf den Satz von der Existenz eines algebraischen Abschlusses zu stützen. Das hat meines Erachtens den Nachteil, daß der Beweis dieses Satzes eher mengentheoretischer Natur ist und zu den anderen Themen der Vorlesung nicht recht

passen will. Um die Entwicklung der Grundlagen der Algebra von den Schwierigkeiten bei der Formalisierung der Mengenlehre zu entlasten, entwickle ich in diesem Text die Grundzüge der Körpertheorie unabhängig vom Satz über die Existenz eines algebraischen Abschlusses. Ich diskutiere den Satz und seinen Beweis hier nur, damit weiterführende Vorlesungen darauf zurückgreifen können. Der folgende Abschnitt ist also für die weitere Entwicklung dieser Vorlesung unerheblich und kann ohne Schaden übersprungen werden.

3.11.2. Ich erinnere daran, daß eine Körpererweiterung nach 3.8.17 algebraisch heißt, wenn alle Elemente der Erweiterung algebraisch sind über dem Grundkörper. Ich erinnere daran, daß eine Körpererweiterung L/K körperendlich heißt, wenn der Erweiterungskörper über dem Grundkörper als Körper endlich erzeugt ist.

Satz 3.11.3 (über algebraische Körpererweiterungen). *1. Jede körperendliche algebraische Körpererweiterung ist endlich;*

2. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Diejenigen Elemente von L, die algebraisch sind über K, bilden einen Unterkörper von L;*

3. *Seien $M \supset L \supset K$ Körper. Ist M algebraisch über L und L algebraisch über K, so ist M algebraisch über K.*

Beweis. 1. Sei $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Sind alle α_i algebraisch über K, so sind sie erst recht algebraisch über $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$. Wir betrachten die Körperkette

$$K \subset K(\alpha_1) \subset K(\alpha_1, \alpha_2) \subset \ldots \subset K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = L$$

Da hier alle Schritte endlich sind nach 3.4.7, ist auch L/K endlich nach 3.4.11.

2. Sind α und $\beta \in L$ algebraisch über K, so haben wir $[K(\alpha, \beta) : K] < \infty$ nach Teil 1. Mithin sind alle Elemente von $K(\alpha, \beta)$ algebraisch über K nach 3.4.7.

3. Für $\alpha \in M$ betrachten wir die Koeffizienten $\beta_0, \ldots, \beta_r \in L$ seines Minimalpolynoms über L. Dann ist α sogar algebraisch über $K(\beta_0, \ldots, \beta_r)$. Der Turm von endlichen Körpererweiterungen

$$K \subset K(\beta_0, \ldots, \beta_r) \subset K(\beta_0, \ldots, \beta_r, \alpha)$$

zeigt damit, daß α algebraisch ist über K. □

Definition 3.11.4. Ein **algebraischer Abschluß** eines Körpers ist eine algebraische Erweiterung durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Satz 3.11.5 (über den algebraischen Abschluß). *Jeder Körper besitzt einen algebraischen Abschluß und dieser algebraische Abschluß ist eindeutig bis auf im allgemeinen nicht eindeutigen Isomorphismus von Körpererweiterungen.*

3.11.6. Wegen dieser partiellen Eindeutigkeit erlaubt man sich meist den bestimmten Artikel und eine Notation und spricht von *dem* algebraischen Abschluß eines Körpers K und notiert ihn

$$\bar{K}$$

Ein algebraischer Abschluß von $\mathbb{R}$ wäre etwa der Körper $\mathbb{C}$, wie wir ihn in [LA1] 2.7.4 als Teilring des Rings der reellen (2×2)-Matrizen eingeführt haben, mit der dort konstruierten Einbettung von $\mathbb{R}$. Ein weiterer algebraischer Abschluß wäre der wie in [GR] 2.2.4.14 zu $K = \mathbb{R}$ durch das explizite Erklären einer Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ konstruierte Körper, wieder mit der dort konstruierten Einbettung von $\mathbb{R}$. Sicher sind diese beiden Körpererweiterungen von $\mathbb{R}$ isomorph, aber es gibt zwischen ihnen sogar genau zwei Isomorphismen, von denen keiner „besser“ ist als der andere.

3.11.7. Die größte separable Teilerweiterung in einem algebraischen Abschluß eines Körpers nennt man seinen **separablen Abschluß**.

Beweis. Gegeben ein Körper K konstruiert man ohne Schwierigkeiten eine Einbettung $K \hookrightarrow \Omega$ in eine Menge Ω derart, daß es für keine algebraische Erweiterung von K eine surjektive Abbildung nach Ω gibt. Die Menge $\Omega = \mathcal{P}(K[X] \times \mathbb{N})$ wäre etwa eine Möglichkeit: Jedes Element einer algebraischen Erweiterung L von K ist ja eine von endlich vielen Nullstellen eines Polynoms aus $K[X]$, so daß wir unter Zuhilfenahme des Auswahlaxioms eine injektive Abbildung $L \hookrightarrow K[X] \times \mathbb{N}$ finden können. Die Existenz einer Surjektion $L \twoheadrightarrow \Omega$ stünde damit im Widerspruch zu [GR] 2.1.6.7, wonach es keine Surjektion $K[X] \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathcal{P}(K[X] \times \mathbb{N})$ geben kann. Jetzt betrachte man die Menge aller Tripel (M, s, φ) bestehend aus einer Teilmenge $M \subset \Omega$, einer Struktur s eines Körpers darauf und einem Köperhomomorphismus $\varphi : K \to M$, bezüglich dessen M algebraisch ist über K. Nach dem Zorn'schen Lemma [LA1] 1.9.15 existiert bezüglich der offensichtlichen Teilordnung ein maximales derartiges Tripel, und bei solch einem maximalen Tripel ist M notwendig algebraisch abgeschlossen: Sonst könnten wir nämlich mit der Kronecker-Konstruktion 3.7.6 eine endliche Erweiterung L/M von M finden und die Einbettung $M \hookrightarrow \Omega$ zu einer Einbettung von Mengen $L \hookrightarrow \Omega$ ausdehnen – hier verwenden wir implizit nocheinmal das Zorn'sche Lemma, nach dem es eine maximale Ausdehnung auf eine Teilmenge von L geben muß, die aber nicht surjektiv sein kann und deshalb bereits auf ganz L definiert sein muß. So erhielten wir ein noch größeres Tripel und dieser Widerspruch zeigt die Existenz. Seien nun $K \hookrightarrow \bar{K}$ und $K \hookrightarrow E$ zwei algebraische Abschlüsse von K. Nach Proposition 3.11.9 über Ausdehnungen von Körpereinbettungen, die wir im Anschluß beweisen, läßt sich die Identität auf K fortsetzen zu einem Körperhomomorphismus $\varphi : \bar{K} \to E$. Er ist wie jeder Körperhomomorphismus injektiv und liefert für jedes Polynom $P \in K[X]$ eine Bijektion zwischen den Nullstel-

len von P in $\bar{K}$ und den Nullstellen von P in E. Folglich muß er auch surjektiv sein. □

Alternativer Beweis für die Existenz eines algebraischen Abschlusses. Dieser Beweis basiert auf Grundkenntnissen über maximale Ideale, die in dieser Vorlesung nicht behandelt wurden, genauer auf [KAG] 1.6.4 und [KAG] 1.6.7. Sei K unser Körper. Wir betrachten die Menge $S = K[X]\backslash K$ aller nicht konstanten Polynome mit Koeffizienten in K und bilden den riesigen Polynomring

$$R = K[X_f]_{f\in S}$$

Hier gibt es also für jedes nichtkonstante Polynom f aus $K[X]$ eine eigene Variable X_f. In diesem riesigen Polynomring betrachten wir das Ideal $\mathfrak{a} \subset R$, das von allen $f(X_f)$ erzeugt wird, und zeigen $\mathfrak{a} \neq R$. Sonst könnten wir nämlich $1 \in R$ schreiben als eine endliche Summe

$$1 = \sum_{f\in E} g_f f(X_f)$$

für $E \subset S$ endlich und geeignete $g_f \in R$. Nun gibt es nach 3.7.4, angewandt auf das Produkt der f aus E, eine Körpererweiterung L von K derart, daß alle f aus E in L eine Nullstelle $\alpha_f \in L$ haben. Für die übrigen $f \in S$ wählen wir Elemente $\alpha_f \in L$ beliebig und betrachten den Einsetzungshomomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & R & \to & L \\ & X_f & \mapsto & \alpha_f \end{array}$$

Dieser Ringhomomorphismus müßte nun die Eins in R auf die Null in L abbilden und das kann nicht sein. Folglich gilt $\mathfrak{a} \neq R$ und es gibt nach [KAG] 1.6.4, bei dessen Beweis das Zorn'sche Lemma eingeht, ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$. Dann ist $K_1 = R/\mathfrak{m}$ nach [KAG] 1.6.7 ein Körper und jedes nichtkonstante Polynom $f \in K[X]\backslash K$ hat eine Nullstelle in K_1, nämlich die Nebenklasse von X_f. Iterieren wir diese Konstruktion, so erhalten wir ein Kette von Körpern

$$K = K_0 \hookrightarrow K_1 \hookrightarrow K_2 \hookrightarrow \ldots$$

derart, daß jedes nichtkonstante Polynom mit Koeffizienten in K_i eine Nullstelle hat in K_{i+1}. Die aufsteigende Vereinigung $\bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ ist dann ein algebraisch abgeschlossener Körper, der K enthält. □

Ergänzung 3.11.8. Eigentlich hatte ich versprochen, beliebige Vereinigungen nur zu bilden von Systemen von Teilmengen einer bereits anderweitig bekannten Menge, und recht eigentlich müssen unsere Inklusionen auch keine Einbettungen von Teilmengen sein. Wenn Sie es so genau nehmen, muß ich daran erinnern, daß

wir disjunkte Vereinigungen von beliebigen Familien von Mengen erlaubt hatten. Dann kann ich mich darauf zurückziehen, daß hier eigentlich der Quotient der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i=0}^{\infty} K_i$ nach derjenigen Äquivalenzrelation gemeint sein soll, die erzeugt wird durch die Bedingung, daß für alle i jedes $x \in K_i$ äquivalent sein soll zu seinem Bild in K_{i+1}. Formal ist diese Konstruktion ein Spezialfall der allgemeinen Konstruktion eines „Kolimes in der Kategorie der Mengen“, wie Sie ihn in [TS] 7.1.2 in voller Allgemeinheit kennenlernen können.

Proposition 3.11.9 (**Ausdehnung von Körpereinbettungen**). *Eine Einbettung eines Körpers in einen algebraisch abgeschlossenen Körper läßt sich auf jede algebraische Erweiterung unseres ursprünglichen Körpers ausdehnen.*

3.11.10. Ist also in Formeln $K \hookrightarrow L$ eine algebraische Körpererweiterung, so läßt sich jede Einbettung $K \hookrightarrow F$ von K in einen algebraisch abgeschlossenen Körper F ausdehnen zu einer Einbettung $L \hookrightarrow F$. Es reicht hier sogar, wenn wir von F nur fordern, daß die Minimalpolynome $\operatorname{Irr}(\alpha, K)$ aller Elemente α irgendeines Erzeugendensystems von L über K vollständig in Linearfaktoren zerfallen, sobald wir sie als Polynome in $F[X]$ betrachten.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $K \subset L$ annehmen. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es unter allen Zwischenkörpern M mit $K \subset M \subset L$, auf die sich unsere Einbettung $K \hookrightarrow F$ fortsetzen läßt, mindestens einen Maximalen. Ich behaupte $M = L$. Sonst gäbe es nämlich $\alpha \in L \backslash M$, und dies α wäre algebraisch über M, mit Minimalpolynom $f \in M[X]$. Die Minimalpolynom hätte eine Nullstelle $\beta \in F$, und nach Proposition 3.8.8 über das Ausdehnen auf primitive Erweiterungen könnten wir dann $M \hookrightarrow F$ fortsetzen zu einer Einbettung $M(\alpha) \to F$ durch $\alpha \mapsto \beta$ im Widerspruch zur Maximalität von M. □

3.11.11. Der algebraische Abschluß des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar nach 3.8.26.

Beispiel 3.11.12 (**Algebraischer Abschluß endlicher Körper**). Einen algebraischen Abschluß eines endlichen Primkörpers $\mathbb{F}_p$ können wir wie folgt konstruieren: Wir wählen eine Folge $r(0), r(1), \ldots$ von natürlichen Zahlen so, daß jeweils gilt $r(i) | r(i+1)$ und daß jede natürliche Zahl eines unserer Folgenglieder teilt. Dann gibt es nach 3.7.12 Einbettungen $\mathbb{F}_{p^{r(i)}} \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^{r(i+1)}}$. Wir wählen nun jeweils eine derartige Einbettung und bilden mit ihrer Hilfe die aufsteigende Vereinigung

$$\bar{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{F}_{p^{r(i)}}$$

Das ist dann offensichtlich ein algebraischer Abschluß von $\mathbb{F}_p$. Wie diese aufsteigende Vereinigung ganz genau zu verstehen ist, hatte ich bereits zu Ende des

alternativen Beweises für die Existenz eines algebraischen Abschlusses 3.11.5 erläutert. Der Nachweis, daß wir so in der Tat einen algebraischen Abschluß von $\mathbb{F}_p$ erhalten, ist nicht schwer und bleibe dem Leser überlassen.

3.11.13. Ich erinnere an dem Körper $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ der formalen Laurentreihen mit komplexen Koeffizienten aus [LA1] 5.3.46.

Satz 3.11.14 (Algebraischer Abschluß des Laurentreihenkörpers). *Der in hoffentlich offensichtlicher Weise präzise zu definierende Körper*

$$\bigcup_{\gamma\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \mathbb{C}(\!(t^{1/\gamma})\!)$$

der **Puiseux-Reihen mit komplexen Koeffizienten** *ist algebraisch abgeschlossen und damit der algebraische Abschluß des Körpers der formalen Laurentreihen* $\mathbb{C}(\!(t)\!) = \operatorname{Quot}\mathbb{C}[\![t]\!]$.

3.11.15. Analoges gilt, wenn wir $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null ersetzen.

Beweis. Das folgt sofort aus dem im Anschluß bewiesenen Lemma 3.11.17. □

3.11.16. Die obige Konstruktion kann auch für einen beliebigen Koeffizientenring k durchgeführt werden. Wir erhalten so den **Ring der Puiseux-Reihen mit Koeffizienten in** k. Für eine formal befriedigende Definition mag man sich auf das allgemeine Konzept eines „Kolimes“ aus [TS] 7.1.9 stützen.

Lemma 3.11.17 (Nullstellen von Polynomen in Laurentreihen). *Seien $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $P \in k[\![t]\!][X]$ ein Polynom mit Koeffizienten im Potenzreihenring über k, und $\lambda \in k$ eine n-fache Nullstelle von seinem Bild $\bar{P} \in k[X]$. Wird n nicht von der Charakteristik unseres Körpers geteilt, so besitzt P für geeignetes γ mit $1 \leq \gamma \leq n$ eine Nullstelle in $\lambda + t^{1/\gamma}k[\![t^{1/\gamma}]\!]$.*

3.11.18. Wir erlauben hier nur Nullstellen endlicher Ordnung und machen insbesondere keine Aussage für den Fall, daß $\bar{P} \in k[X]$ das Nullpolynom ist. Mit dem Symbol $k[\![t^{1/\gamma}]\!]$ ist der Ring $k[\![s]\!]$ gemeint mit seiner durch $t \mapsto s^\gamma$ gegebenen Einbettung von $k[\![t]\!]$. Ich bin verblüfft, daß mir der Beweis auch für nicht notwendig normiertes P zu gelingen scheint.

Beweis. Indem wir X durch $X + \lambda$ substituieren, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda = 0$ annehmen. Nach unseren Annahmen hat P dann die Gestalt

$$P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n + \ldots + a_NX^N$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in tk[\![t]\!]$ und $a_n \in k^\times + tk[\![t]\!]$. Wir verwenden nun die Bewertung $v : k[\![t]\!] \to \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$, die jeder Potenzreihe a den Grad ihres Terms niedrigster

Ordnung $v(a) := \sup\{\nu \mid t^\nu | a\}$ zuordnet. Im Spezialfall $v(a_0) = 1$ alias $a_0 \in k^\times t + t^2 k[\![t]\!]$ führt für unsere Nullstelle der Ansatz

$$\mu_1 t^{1/n} + \mu_2 t^{2/n} + \dots$$

mit $\mu_i \in k$ zum Ziel. Ist etwa $a_0 \in \tilde{a}_0 t + t^2 k[\![t]\!]$ und $a_n \in \tilde{a}_n + tk[\![t]\!]$, so erhalten wir die Gleichung $\tilde{a}_0 + \tilde{a}_n \mu_1^n = 0$ und können dazu eine Lösung μ_1 finden, die notwendig verschieden ist von Null. Dann erhalten wir leicht induktiv eines unserer μ_i aus den Vorhergehenden: Der wesentliche Punkt ist dabei, daß in einer Entwicklung

$$(\mu_1 t^{1/n} + h)^n = \mu_. t + (n\mu_1^{n-1} t^{(n-1)/n})h + \dots$$

der Koeffizient des linearen Terms nicht Null ist. Im etwas allgemeineren Fall, daß für das kleinste $k < n$ mit $a_k \neq 0$ auch die Bewertung $b := v(a_k)$ minimal ist unter den Bewertungen der Koeffizienten $v(a_0), \dots, v(a_{n-1})$, müssen wir „in erster Näherung“ eine Lösung der Gleichung $\tilde{a}_k t^b X^k + \tilde{a}_n X^n = 0$ finden, mit der Notation $\tilde{a} \in k^\times$ für den Koeffizienten der t-Potenz niedrigsten Grades in $a \in k[\![t]\!] \backslash 0$. Solch eine Lösung finden wir in der Form $\mu_1 t^\alpha$ mit $\alpha = b/(n-k)$, und wir finden sogar eine von Null verschiedene Lösung mit $\mu_1 \in k^\times$. Dann führt ähnlich der Ansatz

$$\mu_1 t^\alpha + \mu_2 t^{\alpha + 1/(n-k)} + \mu_3 t^{\alpha + 2/(n-k)} + \dots$$

für eine Nullstelle mit $\mu_2, \mu_3, \dots \in k$ zum Erfolg. Um schließlich unser Problem in voller Allgemeinheit zu lösen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_0 \neq 0$ annehmen, da ja sonst die Null von $k[\![t]\!]$ bereits eine Lösung ist. Dann suchen wir das Minimum α der $v(a_k)/(n-k)$ mit $0 \leq k < n$, es werde etwa an den Stellen $i, j, \dots, l$ angenommen, und müssen „in erster Näherung“ eine Lösung der Gleichung

$$\tilde{a}_i t^{v(a_i)} X^i + \tilde{a}_j t^{v(a_j)} X^j + \dots + \tilde{a}_l t^{v(a_l)} X^l + \tilde{a}_n X^n = 0$$

finden. Wegen $v(a_i) + i\alpha = v(a_j) + j\alpha = \dots = v(a_l) + l\alpha = n\alpha$ finden wir mit dem Ansatz $X = \mu_1 t^\alpha$ eine Lösung dieser Gleichung, und zwar sogar eine Lösung mit $\mu_1 \in k^\times$. Ist nun γ der Nenner von α in seiner maximal gekürzten Darstellung, so führt wieder der Ansatz

$$\mu_1 t^\alpha + \mu_2 t^{\alpha + 1/\gamma} + \mu_3 t^{\alpha + 2/\gamma} + \dots$$

und induktiv zu bestimmenden $\mu_2, \mu_3, \dots \in k$ zum Erfolg. □

Definition 3.11.19. Seien K ein Körper und $\mathcal{P} \subset K[X] \backslash 0$ ein Menge von von Null verschiedenen Polynomen. Unter einem **Zerfällungskörper von** $\mathcal{P}$ verstehen wir eine Körpererweiterung L/K derart, daß (1) jedes Polynom $P \in \mathcal{P}$ in $L[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt und daß (2) der Körper L über K erzeugt wird von den Nullstellen der Polynome $P \in \mathcal{P}$.

Übungen

Ergänzende Übung 3.11.20. Man zeige, daß eine Körpererweiterung L/K normal ist genau dann, wenn sie der Zerfällungskörper einer Menge von Polynomen $\mathcal{P} \subset K[X]\backslash 0$ ist. Hinweis: Man kopiere den Beweis von 3.8.24. Bei Punkt 3 dort reicht es, für M einen algebraischen Abschluß von K zu betrachten.

Übung 3.11.21. Gegeben ein endlicher Körper ist die multiplikative Gruppe seines algebraischen Abschlusses in unkanonischer Weise isomorph zur Gruppe aller Elemente von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, deren Ordnung teilerfremd ist zur Charakteristik unseres Körpers.

Übung 3.11.22. Ist L/K eine Körpererweiterung durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper, so bilden die über K algebraischen Elemente von L einen algebraischen Abschluß von K.

Übung 3.11.23. Sei L/K eine Körpererweiterung durch einen algebraisch abgeschlossenen Körper. Man zeige, daß jede normale Körpererweiterung von K als Körpererweiterung von K isomorph ist zu genau einem Unterkörper $M \subset L$ mit $M \supset K$.

Übung 3.11.24. Unter der **normalen Hülle** einer Körpererweiterung L/K versteht man eine Körpererweiterung N/L derart, daß N/K normal ist und daß es für jede weitere Körpererweiterung N_1/L mit dieser Eigenschaft einen Körperhomomorphismus $N \to N_1$ über K gibt. Man zeige, daß jede algebraische Körpererweiterung eine normale Hülle besitzt, und daß jeder Homomorphismus über K zwischen zwei normalen Hüllen ein Isomorphismus sein muß. Das rechtfertigt dann zu einem gewissen Maße den bestimmten Artikel.

3.12 Schiefkörper über den reellen Zahlen*

3.12.1. Der Inhalt des folgenden Abschnitts ist für die weitere Entwicklung dieser Vorlesung nicht von Belang. Die Thematik schien mir jedoch zu interessant, um sie ganz auszulassen. Anwendungen ergeben sich insbesondere in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen und allgemeiner in der abstrakten Theorie nicht notwendig kommutativer Ringe, in der Schiefkörper eine wichtige Rolle spielen. Unter einem Schiefkörper verstehen wir wie in [LA1] 1.1.3 einen Ring R, der nicht der Nullring ist, und in dem alle von Null verschiedenen Elemente Einheiten sind.

Proposition 3.12.2 (Schiefkörper über den reellen Zahlen). *Jede endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Ringalgebra, die ein Schiefkörper ist, ist als $\mathbb{R}$-Ringalgebra isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, oder zum Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen aus [LA1] 5.6.4.*

Ergänzung 3.12.3. Statt endlicher Dimension über $\mathbb{R}$ brauchen wir sogar nur anzunehmen, daß unsere Ringalgebra als $\mathbb{R}$-Vektorraum abzählbar erzeugt ist. Derselbe Beweis funktioniert, da wir etwa nach 3.3.12 wissen, daß auch jede Erweiterung abzählbarer Dimension von $\mathbb{R}$ bereits algebraisch ist.

Beweis. Sei K unsere $\mathbb{R}$-Ringalgebra. Die Struktur als $\mathbb{R}$-Ringalgebra liefert uns einen eindeutig bestimmten Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Ringalgebren $\mathbb{R} \to K$, der wegen $K \neq 0$ sogar injektiv sein muß. Wir fassen ihn von nun an zur Vereinfachung der Notation als die Inklusion einer Teilmenge $\mathbb{R} \subset K$ auf. Gegeben $\alpha \in K \backslash \mathbb{R}$ können wir unsere Einbettung $\mathbb{R} \hookrightarrow K$ zu einer Einbettung $\mathbb{C} \hookrightarrow K$ fortsetzen, deren Bild α enthält: In der Tat ist die $\mathbb{R}$-Ringalgebra $\mathbb{R}[\alpha]$ ein Integritätsring und nach 3.3.14 notwendig eine echte algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ und muß nach 3.8.30 also isomorph sein zu $\mathbb{C}$. Um die Notation nicht unnötig aufzublähen, denken wir uns von nun an vermittels dieser Einbettung $\mathbb{C}$ als einen Teilkörper $\mathbb{C} \subset K$. Jetzt machen wir K zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum durch Multiplikation von links. Die Multiplikation mit $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ von rechts wird dann ein $\mathbb{C}$-linearer Endomorphismus $J \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} K$ mit $J^2 = -\operatorname{id}_K$. Als Endomorphismus endlicher Ordnung [LA2] 5.3.15 oder einfacher als Endomorphismus der Ordnung Vier ist er diagonalisierbar nach [LA2] 5.3.14 und liefert wegen $J^2 = -\operatorname{id}$ eine Zerlegung $K = K^+ \oplus K^-$ mit $K^\pm = \{a \in K \mid \mathrm{i}\, a = \pm a\, \mathrm{i}\}$. Für alle $\alpha \in K^+$ ist nun $\mathbb{C}[\alpha]$ nach 3.3.14 ein Körper und es folgt $K^+ = \mathbb{C}$. Gilt $K \neq \mathbb{C}$, so gibt es nach dem Beginn des Beweises auch in $K^- \oplus \mathbb{R}$ ein Element j mit $\mathrm{j}^2 = -1$. Setzen wir $\mathrm{j} = \beta + \alpha$ mit $\beta \in K^-$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so folgt $-1 = \mathrm{j}^2 = \beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2$ mit dem ersten und letzten Term in K^+ und dem mittleren Term in K^-. Damit folgt erst $2\alpha\beta = 0$ und dann $\alpha = 0$ und man erkennt $\mathrm{j} \in K^-$. Für jedes von Null verschiedene $\mathrm{j} \in K^-$ induziert aber die Multiplikation mit j von rechts einen Isomorphismus $K^+ \xrightarrow{\sim} K^-$. Setzen wir $\mathrm{k} := \mathrm{ij}$, so ist also $\{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{ij}\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von K und es gilt $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1$ und $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji}$. Daraus aber folgt sofort $\mathrm{k}^2 = -1 = \mathrm{ijk}$. □

Ergänzung 3.12.4. Eine **Kompositionsalgebra** ist ein reeller endlichdimensionaler Skalarproduktraum V mit einer bilinearen Verknüpfung $\mu : V \times V \to V$ derart, daß gilt $\|\mu(v,w)\| = \|v\| \cdot \|w\|$ $\forall v, w \in V$. Topologische Methoden zeigen, daß die Dimension eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Kompositionsalgebren mit Einselement,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{0,1,2,4,8\}$$

liefert. Genauer ist $\mu_v : w \to \mu(v,w)$ für jeden festen Vektor $v \in V$ der Länge Eins orthogonal und induziert folglich eine Permutation der Einheitssphäre von V. Für jedes $w \in V$ gibt es mithin genau ein $\rho(w) = \rho_v(w) \in V$ mit $\mu(v, \rho(w)) = w$. Gilt also $\dim V > 1$ und halten wir einen weiteren Einheitsvektor t mit $t \perp v$ fest,

so ist $\mu(t, \rho(w))$ ein Einheitsvektor, der auf w senkrecht steht. Man sieht leicht, daß er stetig von w abhängt und so ein stetiges tangentiales Vektorfeld ohne Nullstelle auf der Einheitsshpäre in V liefert. Mit topologischen Methoden kann man aber zeigen, daß es derartige Vektorfelder nur auf Sphären der Dimensionen $1, 3, 7$ geben kann, daß das also in anderer Terminologie die einzigen **parallelisierbaren Sphären** sind. Die fraglichen Kompositionsalgebren sind 0, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und die sehr merkwürdige Struktur der sogenannten **Oktaven** $\mathbb{O}$, auch genannt **Oktonionen** oder **Cayley'sche Zahlen**, bei denen die Multiplikation nicht mehr assoziativ ist. Zur Konstruktion dieser Struktur erinnern wir aus [LA1] 5.6.6 den dort ausgezeichneten Isomorphismus $\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{\mathrm{opp}}$, $q \mapsto \bar{q}$ und setzen $\mathbb{O} := \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ mit der nicht assoziativen Multiplikation $\mu((a, b), (x, y)) := (ax - \bar{y}b, b\bar{x} + ya)$. Das Skalarprodukt ist jeweils das „offensichtliche". Mehr dazu findet man etwa bei [E$^+$92].

Übungen

Ergänzende Übung 3.12.5. Explizit gilt für das Skalarprodukt auf den Oktaven $\|(a, b)\|^2 = a\bar{a} + b\bar{b}$. Man zeige, daß die Oktaven in der Tat eine Kompositionsalgebra bilden. Ich empfehle, bei der Rechnung die übrigen gemischten Terme zu zwei Realteilen von Quaternionen zusammenzufassen, die sich dann zu Null addieren. Man zeige weiter: Sind zwei natürliche Zahlen jeweils eine Summe von acht Quadraten, so auch ihr Produkt.

4 Galoistheorie

4.1 Galoiserweiterungen

Definition 4.1.1. Ein Isomorphismus von einem Körper zu sich selbst heißt auch ein **Automorphismus** unseres Körpers. Gegeben eine Körpererweiterung L/K heißt die Gruppe aller Körperautomorphismen von L, die K punktweise festhalten, die **Galoisgruppe** $\mathrm{Gal}(L/K)$ der Körpererweiterung L/K.

Ergänzung 4.1.2. Bezeichnet Ring die Kategorie der Ringe und Ring^K die Kategorie der Ringe unter K, so können wir die Galoisgruppe in kategorientheoretischer Notation schreiben als $\mathrm{Gal}(L/K) = (\mathrm{Kring}^K)^\times(L)$ und im Fall einer endlichen Erweiterung als $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Kring}^K(L,L)$, da dann alle Körperhomomorphismen über K von L in sich selber bereits injektiv und durch Vergleich der K-Dimensionen sogar Isomorphismen sind.

Beispiele 4.1.3. $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ ist eine Gruppe mit zwei Elementen, der Identität und der komplexen Konjugation. Betrachten wir in $\mathbb{R}$ die dritte Wurzel $\sqrt[3]{2}$ von 2, so besteht $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ nur aus der Identität, denn jeder Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ muß die einzige Lösung der Gleichung $x^3 = 2$ in diesem Körper auf sich selbst abbilden.

Lemma 4.1.4. *Der Grad einer Körpererweiterung ist eine obere Schranke für die Kardinalität ihrer Galoisgruppe. Ist also in Formeln L/K unsere Körpererweiterung, so gilt in $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$ die Ungleichung*

$$|\mathrm{Gal}(L/K)| \leq [L:K]$$

Beweis. Das folgt sofort aus Satz 3.8.14, nach dem sogar die Zahl der Körperhomomorphismen über K von L in einen beliebigen weiteren Körper M über K beschränkt ist durch der Erweiterunggrad $|\mathrm{Ring}^K(L,M)| \leq [L:K]$. □

Proposition 4.1.5. *Ist q eine echte Primzahlpotenz und $r \geq 1$, so ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung r, erzeugt vom* **Frobenius-Homomorphismus** *oder kurz* **Frobenius**

$$F : \mathbb{F}_{q^r} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{q^r}, \quad a \mapsto a^q$$

4.1.6. In [LA1] 5.2.38 hatten wir bereits einen Frobeniushomomorphismus eingeführt. Der Frobeniushomomorphismus hier ist seine l-te Potenz für l gegeben durch $q = p^l$ mit p prim.

Beweis. Sicher erzeugt F in der Galoisgruppe eine zyklische Untergruppe der Ordnung r. Nach dem vorhergehenden Satz 4.1.4 hat die Galoisgruppe jedoch höchstens r Elemente. □

Definition 4.1.7. Eine Körpererweiterung L/K heißt eine **Galoiserweiterung** oder kurz **Galois**, wenn sie normal und separabel ist.

4.1.8. Operiert eine Gruppe G auf einer Menge X, so schreiben wir ganz allgemein X^G für die Menge der Fixpunkte. Ist speziell X ein Körper L und G eine Gruppe von Körperautomorphismen von L, so ist $L^G \subset L$ offensichtlich ein Unterkörper von L. Er heißt der **Fixkörper von** G.

Satz 4.1.9 (Galoiserweiterungen durch Gruppenoperationen). *Seien L ein Körper, G eine endliche Gruppe von Automorphismen von L und L^G der Fixkörper von G. So gilt:*

1. *Jedes Element $\alpha \in L$ ist algebraisch über L^G und sein Minimalpolynom über L^G wird gegeben durch die Formel*

$$\operatorname{Irr}(\alpha, L^G) = \prod_{\beta \in G\alpha} (X - \beta)$$

2. *Die Körpererweiterung L/L^G ist eine endliche Galoiserweiterung vom Grad $[L : L^G] = |G|$ mit Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L/L^G) = G$.*

Beweis. Wir setzen $K := L^G$. Schreiben wir $\prod_{\beta \in G\alpha}(X - \beta) = \sum a_i X^i$, so gilt für jedes Element $\sigma \in G$ die von der Mitte her zu entwickelnde Gleichungskette

$$\sum \sigma(a_i) X^i = \prod_{\beta \in G\alpha} (X - \sigma(\beta)) = \prod_{\beta \in G\alpha} (X - \beta) = \sum a_i X^i$$

Also gehört unser Produkt zu $K[X]$. Es teilt das Minimalpolynom $\operatorname{Irr}(\alpha, K)$, da mit α auch alle $\sigma(\alpha)$ für $\sigma \in G$ Nullstellen des besagten Minimalpolynoms sein müssen. Es wird aber auch vom fraglichen Minimalpolynom geteilt, da es bei α verschwindet. Da unser Produkt ebenso wie das Minimalpolynom normiert ist, müssen diese beiden Polynome übereinstimmen und der erste Punkt ist erledigt. Per definitionem ist dann L/K normal und separabel, also Galois. Als nächstes zeigen wir die Identität

$$[L : K] = |G|$$

Wir bemerken dazu, daß es nach Proposition 3.10.6 über die Unterscheidung von Körperhomomorphismen ein $\alpha \in L$ gibt mit $|G\alpha| = |G|$. Unsere Beschreibung des Minimalpolynoms von α über K zeigt dann $[K(\alpha) : K] = |G|$. Für $\beta \in L$ ist aber auch $K(\alpha, \beta)$ eine endliche separable Erweiterung von K und nach dem Satz vom primitiven Element 3.10.8 gibt es γ mit $K(\alpha, \beta) = K(\gamma)$. Aus $\operatorname{grad}(\operatorname{Irr}(\gamma, K)) \leq |G|$ folgt dann $K(\gamma) = K(\alpha)$ und damit $\beta \in K(\alpha)$. Insgesamt folgt $K(\alpha) = L$ und $[L : K] = [K(\alpha) : K] = |G|$. Mit dieser Erkenntnis

bewaffnet folgern wir schließlich die Gleichheit $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ ohne weitere Schwierigkeiten aus der Ungleichungskette

$$|G| \leq |\mathrm{Gal}(L/K)| \leq [L:K] = |G|$$

Hier kommt die mittlere Ungleichung von 4.1.4 her. □

Alternative zum Beweis der Abschätzung $[L : L^G] \leq |G|$. Wir können hier alternativ auch durch Widerspruch mit dem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren argumentieren. Nehmen wir an, die Elemente von G seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ und es gebe in L eine um Eins größere über $K := L^G$ linear unabhängige Familie $x_0, \ldots, x_r$. In der Matrix der $\sigma_i(x_j)$ sind dann notwendig die Spalten $\sigma_*(x_j)$ linear abhängig, wir finden also $y_0, \ldots, y_r$ in L nicht alle Null mit $\sum_j y_j \sigma_i(x_j) = 0\ \forall i$. Durch Umnummerieren der x_j dürfen wir hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y_0 \neq 0$ annehmen, und indem wir von $y_0, \ldots, y_r$ zu $yy_0, \ldots, yy_r$ übergehen, finden wir sogar eine lineare Relation unserer Spaltenvektoren für beliebig vorgegebenes $y_0 = z \in L$. Schreiben wir das um zu $\sum_j \sigma_i^{-1}(y_j) x_j = 0\ \forall i$ und summieren diese Gleichungen, so ergibt sich

$$\sum_j \lambda_j x_j = 0$$

für $\lambda_j = \sum_i \sigma_i^{-1}(y_j)$. Sicher gilt auch $\lambda_j \in K$ für alle j, und aus der linearen Unabhängigkeit der x_j folgt so $\lambda_j = 0$ für alle j und insbesondere $\lambda_0 = 0$. Nach der linearen Unabhängigkeit von Charakteren 3.8.15, angewandt auf die Homomorphismen $\sigma_i : L^\times \to L^\times$, gibt es jedoch ein $z \in L^\times$ mit $\sum_i \sigma_i^{-1}(z) \neq 0$. Das ist der gesuchte Widerspruch. □

4.1.10. Aus Satz 4.1.9 über Galoiserweiterungen durch Gruppenoperationen folgt, daß bei einer endlichen Körpererweiterung die Kardinalität der Galoisgruppe sogar den Grad der Körpererweiterung teilen muß, in Formeln

$$|\mathrm{Gal}(L/K)| \mid [L:K]$$

In der Tat folgt für $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ sowohl $|G| = [L : L^G]$ als auch $L^G \supset K$, also $|G|[L^G : K] = [L : K]$.

Vorschau 4.1.11. Ist L/K eine endliche Galois-Erweiterung, so ist $\alpha \in L$ nach dem ersten Beweis von 4.1.9 ein primitives Element genau dann, wenn es von keinem Element der Galoisgruppe festgehalten wird. Wir können sogar stets ein $\alpha \in L$ so wählen, daß es mit seinen Galois-Konjugierten eine K-Basis von L bildet: Das sagt uns der „Satz von der Normalbasis“ 6.1.6. Diese schärfere Aussage stimmt keineswegs für jedes primitive Element, wie das Beispiel $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$, $\alpha = \mathrm{i}$ zeigt.

Satz 4.1.12 (**Charakterisierung endlicher Galoiserweiterungen**). *Seien L/K eine endliche Körpererweiterung und $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ ihre Galoisgruppe. So sind gleichbedeutend:*

1. *L/K ist eine Galoiserweiterung;*
2. *Die Ordnung der Galoisgruppe stimmt überein mit dem Grad der Körpererweiterung, in Formeln $|G| = [L : K]$;*
3. *Der Unterkörper K stimmt überein mit dem Fixkörper der Galoisgruppe, in Formeln $K = L^G$.*

Beweis. Wir beginnen mit 1⇒2. Nach 3.9.29 gibt es für L endlich, separabel und normal über K genau $[L : K]$ Körperhomomorphismen $L \to L$ über K. Als Körperhomomorphismen sind diese natürlich injektiv und wegen der Gleichheit der K-Dimensionen sind sie dann auch surjektiv, also Elemente der Galoisgruppe. Zur Implikation 2⇒3 erinnern wir die Gleichheit $|G| = [L : L^G]$ aus 4.1.9. Gilt außerdem $|G| = [L : K]$ für einen Unterkörper $K \subset L^G$, so erhalten wir aus der Multiplikativität des Grades von Körpererweiterungen $[L^G : K] = 1$ und damit $L^G = K$. Zur Implikation 3⇒1 müssen wir nur aus 4.1.9 erinnern, daß L/L^G stets eine endliche Galoiserweiterung ist. □

Ergänzung 4.1.13. Auch für eine beliebige algebraische Körpererweiterung gilt noch, daß sie genau dann Galois ist, wenn der Unterkörper der Fixkörper der Galoisgruppe ist. Hier folgt die eine Implikation aus 4.1.33, und die andere aus 3.11.10.

Beispiel 4.1.14. Unter der Voraussetzung $\mathrm{char}\, K \neq 2$ ist jede quadratische Körpererweiterung L von K Galois mit Galoisgruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und die Elemente $\alpha \in L\backslash K$ mit $\alpha^2 \in K$ sind genau diejenigen von Null verschiedenen Elemente von L, die vom nichttrivialen Element der Galoisgruppe auf ihr Negatives geschickt werden.

Definition 4.1.15. Eine Wirkung einer Gruppe auf einer Menge heißt **treu**, englisch **faithful**, französisch **fidèle**, wenn nur das neutrale Element jedes Element der Menge festhält.

Definition 4.1.16. Eine Wirkung einer Gruppe auf einer Menge heißt **transitiv**, wenn unsere Menge nicht leer ist und je zwei ihrer Elemente durch ein geeignetes Gruppenelement ineinander überführt werden können.

Satz 4.1.17 (**Operation der Galoisgruppe auf Nullstellen**). *Gegeben L/K eine Körpererweiterung und $P \in K[X]$ ein Polynom betrachte man die Operation der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ auf der Menge $\{\alpha \in L \mid P(\alpha) = 0\}$ der Nullstellen von P in L.*

1. *Ist P ein K-irreduzibles Polynom, das in L zerfällt, und ist L endlich und normal, so ist die Operation der Galoisgruppe auf den L-Nullstellen von P transitiv;*

2. *Ist $P \in K[X]$ ein von Null verschiedenes Polynom und L sein Zerfällungskörper, so ist die Operation der Galoisgruppe auf den L-Nullstellen von P treu;*

3. *Ist L der Zerfällungskörper eines K-irreduziblen Polynoms $P \in K[X]$, so operiert die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ treu und transitiv auf der Menge der Nullstellen von P in L.*

Ergänzung 4.1.18. Die erste Aussage gilt auch ohne daß wir $[L : K] < \infty$ annehmen und folgt in dem Fall unmittelbar aus 3.11.10.

Beweis. Für je zwei Nullstellen $\alpha, \beta \in L$ von P gibt es nach unserer Proposition 3.8.8 über das Ausdehnen auf primitive Erweiterungen einen Körperhomomorphismus $K(\alpha) \to L$ über K mit $\alpha \mapsto \beta$, der sich dann nach dem allgemeinen Ausdehnbarkeitskriterium 3.8.12 weiter ausdehnen läßt zu einem Körperhomomorphismus $L \to L$ über K. Treu ist die Operation in Teil 2, da der Zerfällungskörper eines Polynoms per definitionem bereits von den Nullstellen des besagten Polynoms erzeugt wird. Die dritte Aussage folgt aus den beiden anderen. □

4.1.19 (**Grundfrage der Galoistheorie**). Die Grundfrage der Galoistheorie ist, welche Permutationen der Nullstellenmenge eines vorgegebenen irreduziblen Polynoms denn nun von einem Automorphismus seines Zerfällungskörpers oder genauer von einem Element der Galoisgruppe seiner Zerfällungserweiterung herkommen. Man nennt diese Galoisgruppe die **Galoisgruppe unseres irreduziblen Polynoms**. Hierzu gebe ich gleich drei Beispiele.

Beispiel 4.1.20 (**Ein kubisches Polynom mit Galoisgruppe $\mathcal{S}_3$**). Ist L der Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$, so kommen alle Permutationen der Nullstellenmenge unseres Polynoms von Elementen der Galoisgruppe her und wir haben folglich $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathcal{S}_3$. In der Tat ist $L/\mathbb{Q}$ normal als Zerfällungskörper und sogar Galois, da in Charakteristik Null jede Körpererweiterung separabel ist. Damit folgt insbesondere $[L : \mathbb{Q}] = |\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})|$. Jetzt realisieren wir L als einen Teilkörper

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta\sqrt[3]{2}, \zeta^2\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{C}$$

der komplexen Zahlen, mit $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ der reellen dritten Wurzel von 2 und $\zeta = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,/3)$ einer dritten Einheitswurzel. Diese Darstellung zeigt $L \neq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, da ja unser L nicht in $\mathbb{R}$ enthalten ist. In $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})[X]$ zerfällt unser Polynom $X^3 - 2$ also in einen linearen und einen irreduziblen quadratischen Faktor, folglich ist L eine quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Zusammen ergibt sich $[L : \mathbb{Q}] =$

6 und mithin $|\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})| = 6$. Die Operation von $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$ auf der Menge $\{\sqrt[3]{2}, \zeta\sqrt[3]{2}, \zeta^2\sqrt[3]{2}\}$ liefert nun nach der Treuhheit 4.1.17 der Operation eine Einbettung $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathcal{S}_3$, und da beide Seiten gleichviele Elemente haben, muß diese Einbettung ein Isomorphismus sein.

Beispiel 4.1.21 (**Ein kubisches Polynom mit zyklischer Galoisgruppe**). Ist L der Zerfällungskörper von $X^3 + X^2 - 2X - 1$ über $\mathbb{Q}$, so kommen genau die zyklischen Permutationen der Nullstellenmenge unseres Polynoms von Elementen der Galoisgruppe her und wir haben folglich $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. In der Tat können wir mit $\zeta = \exp(2\pi\mathrm{i}/7)$ einer siebten Einheitswurzel die drei komplexen Nullstellen unseres Polynoms schreiben als $\alpha = \zeta + \bar{\zeta}$, $\beta = \zeta^2 + \bar{\zeta}^2$ sowie $\gamma = \zeta^3 + \bar{\zeta}^3$, wie man leicht nachrechnet. Ich bin im übrigen den umgekehrten Weg gegangen und habe mein Polynom aus den Linearfaktoren zu diesen drei Nullstellen zusammenmultipliziert. Wie dem auch sei besitzt unser Polynom keine ganzzahligen Nullstellen, denn $\alpha, \beta, \gamma \notin \mathbb{Z}$ ist leicht zu sehen, also nach [LA1] 5.3.44 auch keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$, und ist als Polynom vom Grad 3 folglich irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Unsere Nullstellen erfüllen nun jedoch die Relationen $\alpha^2 = \beta + 2$, $\beta^2 = \gamma + 2$ und $\gamma^2 = \alpha + 2$, woraus unmittelbar die Behauptung folgt. In 4.7.13 geben wir im übrigen ein Kriterium an, das es erlaubt, die Galoisgruppe einer kubischen Gleichung ganz mechanisch zu bestimmen.

Beispiel 4.1.22 (**Ein kubisches Polynom mit trivialer Galoisgruppe**). Man betrachte den Funktionenkörper $\mathbb{F}_3(T)$ über dem Körper mit drei Elementen und darüber das Polynom $X^3 - T$. Es hat nur eine einzige Nullstelle in seinem Zerfällungskörper, die aber eben eine dreifache Nullstelle ist. Seine Galoisgruppe ist folglich trivial. Im übrigen ist ein Zerfällungskörper hier die Körpererweiterung $\mathbb{F}_3(T) \hookrightarrow \mathbb{F}_3(U)$ mit $T \mapsto U^3$ und darin zerfällt unser Polynom als $X^3 - T = X^3 - U^3 = (X - U)^3$.

Proposition 4.1.23 (**Quotientenkörper eines Invariantenrings**). *Operiert eine endliche Gruppe G auf einem kommutativen Integritätsbereich R, so liefert die offensichtliche Einbettung einen Isomorphismus*

$$\operatorname{Quot}(R^G) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Quot} R)^G$$

des Quotientenkörpers seines Invariantenrings mit den Invarianten seines Quotientenkörpers.

Beweis. Jeden Bruch $f/h \in (\operatorname{Quot} R)^G$ können wir mit $\prod_{\sigma \in G\setminus 1} \sigma(h)$ erweitern zu einem Bruch, dessen Nenner im Invariantenring R^G liegt, da er ja das Produkt aller $\sigma(h)$ mit $\sigma \in G$ ist und bei diesem Produkt die Gruppenoperation nur die Faktoren permutiert. So ein Bruch kann aber nur dann G-invariant sein, wenn auch sein Zähler in R^G liegt. □

Beispiel 4.1.24. Für jeden Körper k ist nach 4.1.9 und 4.1.23 in den Notationen von 2.9.7 die Erweiterung

$$k('s_1, \ldots, s_n) = k('X_1, \ldots, X_n)^{\mathcal{S}_n} \subset k('X_1, \ldots, X_n)$$

eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $\mathcal{S}_n$. Unsere Erweiterung ist natürlich auch ein Zerfällungskörper der **allgemeinen Gleichung**

$$T^n + s_1 T^{n-1} + \ldots + s_{n-1} T + s_n$$

Hier fassen wir die s_i schlicht als algebraisch unabhängige Variablen des Funktionenkörpers $k('s_1, \ldots, s_n)$ über k auf. Nach unserer Konvention sollten wir hier vielleicht sogar große Buchstaben vom Ende des Alphabets benutzen, zum Beispiel Y_i statt s_i. Insbesondere ist die allgemeine Gleichung nach 4.1.9 irreduzibel, da ja alle ihre Wurzeln einfach sind und zueinander konjugiert unter der Galoisgruppe. Die Irreduzibilität dieses Polynoms kann aber auch bereits aus 2.7.20 abgeleitet werden.

Übungen

Übung 4.1.25. Gegeben eine endliche separable Körpererweiterung ist ihre normale Hülle Galois. Mutigere zeigen dasselbe, ohne die Endlichkeit vorauszusetzen.

Übung 4.1.26. Gegeben $n \geq 1$ zeige man, daß $\mathbb{C}(X^n) \subset \mathbb{C}(X)$ eine Galoiserweiterung vom Grad n ist mit zyklischer Galoisgruppe.

Ergänzende Übung 4.1.27. Man zeige, daß sich jede endliche Erweiterung eines vollkommenen Körpers zu einer endlichen Galoiserweiterung vergrößern läßt. Man zeige, daß sich wie in [LA2] 5.3.2 behauptet jeder Endomorphismus x eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem vollkommenen Körper auf genau eine Weise zerlegen läßt als $x = x_\mathrm{s} + x_\mathrm{n}$ mit x_s halbeinfach, x_n nilpotent und $x_\mathrm{s} x_\mathrm{n} = x_\mathrm{n} x_\mathrm{s}$.

Übung 4.1.28. Man zeige: Gegeben eine Körpererweiterung L/K und zwei verschiedene normierte irreduzible Polynome in $K[X]$ kann kein Element der Galoisgruppe eine Nullstelle des einen Polynoms in eine Nullstelle des anderen Polynoms überführen.

Übung 4.1.29. Seien k ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $\lambda \in k^\times$ und $t = t_\lambda : k(X) \xrightarrow{\sim} k(X)$ der Körperautomorphismus über k mit $X \mapsto X + \lambda$. Man zeige, daß der Körper der Invarianten genau das Bild derjenigen Einbettung $k(Y) \hookrightarrow k(X)$ ist, die durch $Y \mapsto X^p - \lambda^{p-1} X$ gegeben wird. Man zeige, daß auch die induzierte Einbettung $k[Y] \hookrightarrow k[X]$ einen Isomorphismus auf den Ring der t-Invarianten von $k[X]$ induziert.

Ergänzende Übung 4.1.30. Jede normale Körpererweiterung mit trivialer Galoisgruppe ist rein inseparabel im Sinne von 3.9.40. Für jede normale Körpererweiterung K/k mit Galoisgruppe G ist K^G/k rein inseparabel. Hinweis: 3.9.18. Im Fall unendlicher Erweiterungen verwende man 3.11.9.

Ergänzende Übung 4.1.31 (**Satz von Gilmer**). Man zeige, daß eine algebraische Körpererweiterung L/K derart, daß jedes Polynom aus $K[X]$ in L eine Nullstelle hat, ein algebraischer Abschluß von K sein muß. Hinweis: Man beginne mit dem Fall der Charakteristik Null. Jede endliche Körpererweiterung von K besitzt dann nach 3.10.8 ein primitives Element und läßt sich folglich in L einbetten. Gegeben ein Polynom $P \in L[X]$ gilt das insbesondere für seinen Zerfällungskörper über dem von seinen Koeffizienten in L erzeugten Teilkörper über K. Im Fall positiver Charakteristik argumentiere man erst mit dem separablen Abschluß von K in unserem Zerfällungskörper und dann mit 3.9.40.

Übung 4.1.32. Man bestimme die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers des Polynoms $X^4 - 5$ über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$.

Ergänzende Übung 4.1.33. Ist L/K eine algebraische, aber nicht notwendig endliche Körpererweiterung und $G \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ eine beliebige, nicht notwendig endliche Untergruppe, so ist L/L^G immer noch eine Galoiserweiterung, deren Galoisgruppe jedoch nicht mit G übereinzustimmen braucht. Zum Beispiel erzeugt der Frobenius-Homomorphismus nicht die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$, aber der Fixkörper seines Erzeugnisses ist dennoch $\mathbb{F}_p$.

Übung 4.1.34 (**Galoistheorie quadratischer Erweiterungen**). Man zeige: Jede Körpererweiterung L/K von Grad zwei in Charakteristik zwei ist Galois mit Galoisgruppe $\Gamma \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und für $\gamma \in \Gamma$ das nichttriviale Element der Galoisgruppe gilt

$$\{\alpha \in L \backslash 0 \mid \gamma(\alpha) = -\alpha\} = \{\alpha \in L \backslash K \mid \alpha^2 \in K\}$$

Übung 4.1.35. Gegeben eine Körpererweiterung L/K in Charakteristik ungleich zwei und $\alpha, \beta \in L \backslash K$ mit $\alpha^2, \beta^2 \in K$ zeige man $\alpha \in K(\beta) \Leftrightarrow \alpha \in K\beta$. Hinweis: 4.1.14 oder 3.2.10. Gegeben paarweise teilerfremde quadratfreie natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ zeige man, daß a_n kein Quadrat ist in $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_{n-1}})$. Hinweis: Andernfalls gäbe es ein kürzestmögliches Gegenbeispiel, und dann wäre $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_{n-2}})$ mit $a_{n-1}a_n$ ein noch kürzeres Gegenbeispiel. Schließlich zeige man, daß die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$ über $\mathbb{Q}$ Galois ist mit Galoisgruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Diese Aussage kann auch als Spezialfall der sogenannten Kummertheorie 6.5.3 verstanden werden.

Übung 4.1.36 (**Artin-Schreier-Erweiterungen**). Gegeben ein Körper F positiver Charakteristik $p > 0$ betrachten wir für $a \in F$ das Polynom $X^p - X - a$. Ist β eine Nullstelle dieses Polynoms in einer Körpererweiterung L/K, so sind die anderen Nullstellen $\beta + \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{F}_p$. Insbesondere ist $F(\beta)$ bereits der Zerfällungskörper

von $X^p - X - a$ und alle irreduziblen Faktoren von $X^p - X - a$ in $F[X]$ haben denselben Grad, a forteriori den Grad Eins oder den Grad p. Hat unser Polynom keine Nullstelle in F, so ist $F(\beta)/F$ mithin eine Galoiserweiterung vom Grad p mit zyklischer Galoisgruppe.

Übung 4.1.37. Man zeige: Gegeben eine endliche Galoiserweiterung L/K ist die **Spurabbildung** $\mathrm{S}_L^K : L \to K$ gegeben durch

$$x \mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x)$$

eine K-lineare von Null verschiedene Abbildung und die **Spurform** $L \times L \to K$ gegeben durch $(x, y) \mapsto \mathrm{S}_L^K(xy)$ ist eine nichtausgeartete Bilinearform auf dem K-Vektorraum L. Hinweis: Lineare Unabhängigkeit von Charakteren 3.8.15. In [KAG] 8.3.1 wird die Spur auf beliebige endliche Körperwerweiterungen verallgemeinert.

4.2 Anschauung für die Galoisgruppe*

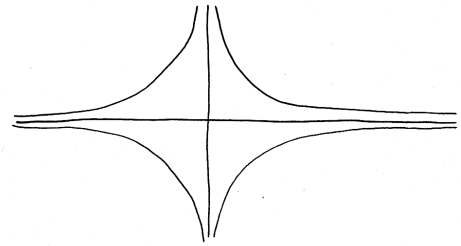
4.2.1. Formal ist der nun folgende Abschnitt für die logische Kohärenz dieser Vorlesung nicht von Belang. Es wird darin auch nichts bewiesen. Ich denke jedoch, daß die im folgenden erklärten Ideen bei der historischen Entwicklung der Theorie von zentraler Bedeutung waren und hoffe, daß sie Ihnen beim Verständnis helfen.

4.2.2 (**Reelle Nullstellen einer Familie reeller Polynome**). Zum Aufwärmen betrachten wir zunächst einmal ein normiertes Polynom $P \in \mathbb{R}(t)[X]$ mit Koeffizienten im Funktionenkörper $\mathbb{R}(t) = \mathrm{Quot}\,\mathbb{R}[t]$ über dem Körper der reellen Zahlen. Sei $E = E_P \subset \mathbb{R}$ die endliche Menge der Polstellen der Koeffizienten von P. An jeder anderen Stelle $\lambda \in \mathbb{R}\backslash E$ können wir die Koeffizienten von P bei $t = \lambda$ auswerten und erhalten so ein Polynom $P_\lambda \in \mathbb{R}[X]$. Die Punkte $\lambda \in \mathbb{R}\backslash E$ nennen wir „die Parameter λ, für die P_λ definiert ist“. Die reellen Nullstellen der Polynome P_λ hängen dann vom Parameter λ ab und eine bildliche Darstellung der **simultanen Nullstellenmenge**

$$\mathcal{Z} := \{(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \notin E,\ P_\lambda(\alpha) = 0\}$$

als Teilmenge der Ebene vermittelt eine gewisse Anschauung für diese Abhängigkeit. Ist etwa $P = X^2 - (1/t)$, so ist P_λ definiert für $\lambda \neq 0$ und wir haben $\mathcal{Z} = \{(\lambda, \alpha) \mid \lambda \neq 0,\ \alpha^2 - (1/\lambda) = 0\}$.

4.2.3 (**Komplexe Nullstellen einer Familie komplexer Polynome**). Nun betrachten wir analog ein normiertes Polynom $P \in \mathbb{C}(z)[X]$ mit Koeffizienten im Funktionenkörper $\mathbb{C}(z) = \mathrm{Quot}\,\mathbb{C}[z]$ über dem Körper der komplexen Zahlen. Sei



Noch falsche graphische Darstellung der Menge $\{(\lambda, \alpha) \mid \lambda \neq 0,\ \alpha^2 - 1/\lambda = 0\}$, die linke Hälfte muß weg.

wieder $E = E_P \subset \mathbb{C}$ die endliche Menge der Polstellen der Koeffizienten von P. An jeder anderen Stelle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash E$ können wir die Koeffizienten von P bei $z = \lambda$ auswerten und erhalten so ein Polynom $P_\lambda \in \mathbb{C}[X]$. Die Punkte $\lambda \in \mathbb{C}\backslash E$ nennen wir „die Parameter λ, für die P_λ definiert ist“. Die komplexen Nullstellen der Polynome P_λ hängen dann vom Parameter λ ab und wir betrachten analog die **simultane Nullstellenmenge**

$$\mathcal{Z} := \{(\lambda, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \mid \lambda \notin E,\ P_\lambda(\alpha) = 0\}$$

Ist etwa zur Abwechslung diesmal $P = X^2 - z$, so ist P_λ definiert für alle λ und wir haben $\mathcal{Z} = \{(\lambda, \alpha) \mid \alpha^2 - \lambda = 0\}$.

4.2.4. Gegeben eine stetige Abbildung $p : Z \to C$ von metrischen oder topologischen Räumen verstehen wir unter einer **stetigen Selbstabbildung über** C eine stetige Abbildung $f : Z \to Z$ mit $p \circ f = p$. Das Monoid der Selbstabbildungen von Z über C notieren wir abkürzend

$$\mathrm{Top}_C(Z) = \mathrm{Top}_C(Z, p)$$

4.2.5 (**Galoisgruppe und stetige Selbstabbildungen**). Sei $P \in \mathbb{C}(z)[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom. Wir bilden die Körpererweiterung

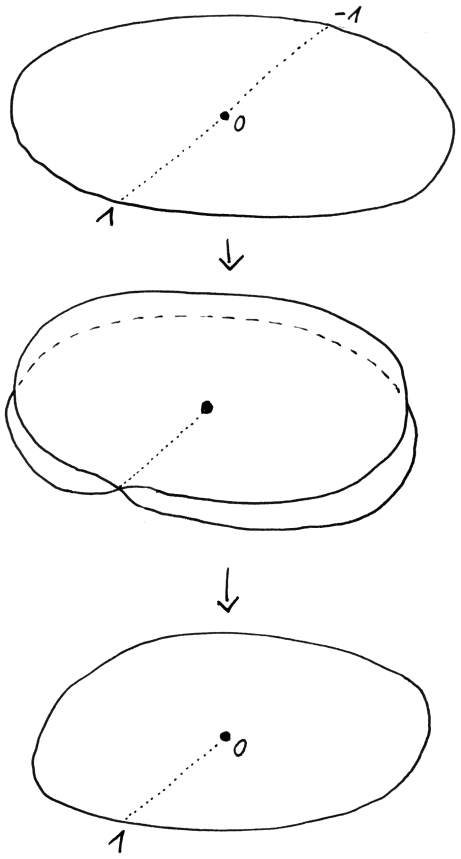
$$L := \mathbb{C}(z)[X]/\langle P(X)\rangle$$

und betrachten deren Galoisgruppe $\Gamma := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(z))$. Die Nebenklassen der Potenzen $\bar{X}^n$ für $0 \leq n < \mathrm{grad}(P)$ bilden eine $\mathbb{C}(z)$-Basis von L und die Elemente der Galoisgruppe Γ werden in dieser Basis durch Matrizen dargestellt. Sicher finden wir $u \in \mathbb{C}(z)\backslash 0$ derart, daß alle diese Matrizen bereits Einträge in $\mathbb{C}[z, u^{-1}] \subset \mathbb{C}(z)$ haben. Dann stabilisiert Γ das Bild $L_0 \subset L$ von $\mathbb{C}[z, u^{-1}][X]$. Nehmen wir zusätzlich an, daß auch P Koeffizienten in $\mathbb{C}[z, u^{-1}]$ hat, so ist $L_0 \subset L$ ein Teilring und der offensichtliche Ringhomomorphismus induziert sogar einen Isomorphismus

$$\mathbb{C}[z, u^{-1}][X]/\langle P(X)\rangle \xrightarrow{\sim} L_0$$

mit $\langle P(X)\rangle$ das von $P(X)$ in diesem kleineren Ring erzeugte Ideal. Dann erhalten wir nach der universellen Eigenschaft von Faktorringen eine Bijektion

$$\mathrm{Kring}^{\mathbb{C}}(L_0, \mathbb{C}) \ \xrightarrow{\sim}\ \mathcal{Z}_u := \{(\lambda, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \mid u(\lambda) \neq 0, P_\lambda(\alpha) = 0\}$$



Dies Bild kam bereits in [LA1] 2.7.6 vor als Illustration für die Abbildung $z \mapsto z^2$ der komplexen Zahlenebene auf sich selbst. Für die durch Adjunktion einer Quadratwurzel aus z entstehende Erweiterung L des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(z)$ ist nun $P = X^2 - z$ das Minimalpolynom eines Erzeugers und wir erhalten eine stetige Bijektion $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}$ mit stetiger Umkehrung vermittels der Vorschrift $z \mapsto (z^2, z)$. Die Komposition $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z} \to \mathbb{C}$ mit der Projektion auf die erste Koordinate ist also gerade unsere Abbildung $z \mapsto z^2$. Wir sehen so anschaulich, daß die Galoisgruppe von $L/\mathbb{C}(z)$ gerade $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

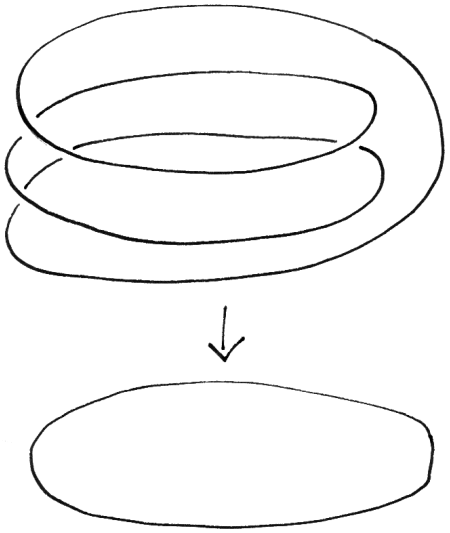
durch die Vorschrift $\varphi \mapsto (\varphi(z), \varphi(\bar{X}))$. Die Operation von Γ auf L_0 induziert durch Vorschalten eine Rechtsoperation von Γ auf $\mathrm{Kring}^{\mathbb{C}}(L_0, \mathbb{C})$ und vermittels unserer Bijektion eine Rechtsoperation von Γ auf $\mathcal{Z}_u$. Die versprochene Anschauung für die Galoisgruppe liefert nun ein Satz, nach dem diese Operation einen Isomorphismus

$$\Gamma^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}_{\mathbb{C}}(\mathcal{Z}_u, \mathrm{pr}_1)$$

der Opponierten der Galoisgruppe mit dem Monoid der stetigen Selbstabbildungen über $\mathbb{C}$ der eingeschränkten simultanen Nullstellenmenge $\mathcal{Z}_u$ induziert.

4.2.6. Wir beweisen den oben behaupteten Satz hier nicht. Ich hätte gerne einmal einen Studenten, der mir einen Beweis als Bachelorarbeit ausschreibt. Feinere Aussagen der algebraischen Geometrie [Gro71, Théorème 10.11] zeigen, daß für u das Produkt des Hauptnenners der Koeffizienten von P mit dem Zähler der Diskriminante von P der Teilring $L_0 \subset L$ bereits unter der Galoisgruppe stabil sein muß.

4.2.7 (**Hilfen zur graphischen Darstellung**). Seien $P \in \mathbb{C}(z)[X]$ wie zuvor ein normiertes irreduzibles Polynom und $E \subset \mathbb{C}$ die Menge der Polstellen seiner Ko-



Anschauung für die durch Adjunktion einer dritten Wurzel aus z entstehende Körpererweiterung des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(z)$ nach 4.2.7. Ich finde, man sieht in diesem Fall auch recht anschaulich, daß die Galoisgruppe zyklisch von der Ordnung drei sein sollte.

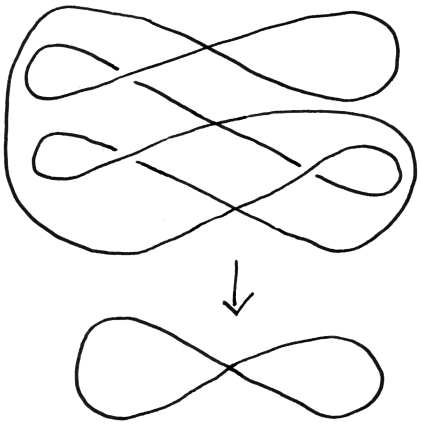
effizienten. Die Abbildung $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{Z} \to \mathbb{C}\backslash E$ hat dann endliche nichtleere Fasern, genauer besteht die Faser über $\lambda \in \mathbb{C}\backslash E$ aus den Punkten (λ, α) mit $P_\lambda(\alpha) = 0$. Ändern wir nun u von oben dahingehend, daß es auch noch an allen Nullstellen der Diskriminante von P verschwindet, so hat jede Faser von

$$\mathrm{pr}_1 : \mathcal{Z}_u \to \mathbb{C}_{u\neq 0}$$

genau $\mathrm{grad}\, P$ Elemente und ist nebenbei bemerkt eine „Überlagerung“. Indem wir nun um jede Nullstelle von u einen Kreis ziehen, der keine andere Nullstelle von u umläuft, und alle diese Kreise in $\mathbb{C}_{u\neq 0}$ durch sich nicht kreuzende Wege mit einem festen Punkt verbinden und das Urbild eines solchen Gebildes in der simultanen Nullstellenmenge $\mathcal{Z}_u$ zeichnen, erhalten wir eine gewisse Anschauung für die Abbildung $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{Z}_u \to \mathbb{C}_{u\neq 0}$ und das Monoid ihrer Decktransformationen. Bezeichnet genauer $S \subset \mathbb{C}_{0\neq 0}$ unser in der komplexen Zahlenebene gezeichnetes Gebilde aus verbundenen Kreisen, so liefert die Restriktion auf $\mathrm{pr}_1^{-1}(S)$ eine Bijektion zwischen dem Monoid der Decktransformationen von $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{Z}_u \to \mathbb{C}_{u\neq 0}$ und dem Monoid der Decktransformationen von $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{pr}_1^{-1}(S) \to S$.

Ergänzung 4.2.8. Wir zeigen im folgenden noch, daß unsere Rechtsoperation durch stetige Abbildungen über $\mathbb{C}$ geschieht, aber nicht, daß sie einen Isomorphismus liefert. Gegeben $\gamma \in \Gamma$ haben wir sicher $\gamma(\bar{X}) = c_0 + c_1\bar{X} + \ldots + c_{n-1}\bar{X}^{n-1}$ für gewisse $c_\nu \in \mathbb{C}[z, u^{-1}]$. Bezeichnet $(\lambda, \alpha) \mapsto \varphi_{(\lambda,\alpha)}$ die Umkehrabbildung unserer Bijektion $\varphi \mapsto (\varphi(z), \varphi(\bar{X}))$, so finden wir $(\varphi_{(\lambda,\alpha)} \circ \gamma)(\bar{X}) = c_0(\lambda) + c_1(\lambda)\alpha + \ldots + c_{n-1}(\lambda)\alpha^{n-1}$. Die Rechtsoperation von $\gamma \in \Gamma$ auf $\mathcal{Z}_u$ wird also in Formeln gegeben durch die Vorschrift

$$(\lambda, \alpha) \mapsto (\lambda, c_0(\lambda) + c_1(\lambda)\alpha + \ldots + c_{n-1}(\lambda)\alpha^{n-1})$$



Versuch der bildlichen Darstellung einer Körpererweiterung vom Grad 3 mit trivialer Galoisgruppe, die also insbesondere nicht normal ist. Die Figur Acht unten stellt $S \subset \mathbb{C}_{u\neq 0}$ dar in einem Fall, in dem u nur zwei Nullstellen hat. Die komplizierte Figur oben stellt $\mathrm{pr}_1^{-1}(S)$ dar.

und geschieht insbesondere durch stetige Selbstabbildungen über $\mathbb{C}$. Das löst unser Versprechen ein.

Vorschau 4.2.9. Statt „Funktionen mit Parametern“ betrachtet man auch in der Algebra besser „Funktionen in mehreren Variablen“. Diese Sichtweise können Sie in der Algebraischen Geometrie kennenlernen. Der dort als [KAG] 8.6.2 bewiesene Satz über „Körper und ihre Kurven“ ist eine Variante der obigen Aussagen für einen beliebigen algebraischen Grundkörper statt $\mathbb{C}$. Einen Beweis der oben gegebenen Behauptungen wird man jedoch eher in einer Vorlesung über Riemann'sche Flächen finden, die sich an eine Vorlesung zur Funktionentheorie anschließt.

4.3 Zwischenkörper durch Untergruppen

Satz 4.3.1 (Galoiskorrespondenz). *Gegeben eine endliche Galoiserweiterung L/K mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ liefern das Bilden der Galoisgruppe $M \mapsto \mathrm{Gal}(L/M)$ und das Bilden des Fixkörpers $H \mapsto L^H$ zueinander inverse inklusionsumkehrende Bijektionen*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Zwischenkörper } M\\ \textit{unserer Körpererweiterung}\\ K \subset M \subset L\end{array}\right\} \quad \stackrel{\sim}{\leftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{c}\textit{Untergruppen } H\\ \textit{ihrer Galoisgruppe}\\ H \subset G\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \stackrel{\phi}{\mapsto} & H := \mathrm{Gal}(L/M) \\ M := L^H & \stackrel{\psi}{\mapsfrom} & H \end{array}$$

Unter dieser Bijektion entsprechen die Normalteiler H von G genau denjenigen Zwischenkörpern M, die normal sind über K, und in diesen Fällen liefert das Ein-

schränken von Elementen der Galoisgruppe einen Isomomorphismus von Gruppen $G/H \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L^H/K)$ *alias eine kurze exakte Sequenz*

$$\mathrm{Gal}(L/M) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(M/K)$$

Vorschau 4.3.2 (**Galoiskorrespondenz als Äquivalenz von Kategorien**). In der Sprache der Kategorientheorie ausgedrückt liefert für L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G der Funktor $\mathrm{Kring}^K(\ , L)$ der K-linearen Körperhomomorphismen nach L eine Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Körpererweiterungen von } K, \\ \text{die sich in } L \text{ einbetten lassen} \end{array} \right\} \xrightarrow{\approx} \left\{ \begin{array}{c} \text{transitive} \\ G\text{-Mengen} \end{array} \right\}^{\mathrm{opp}}$$

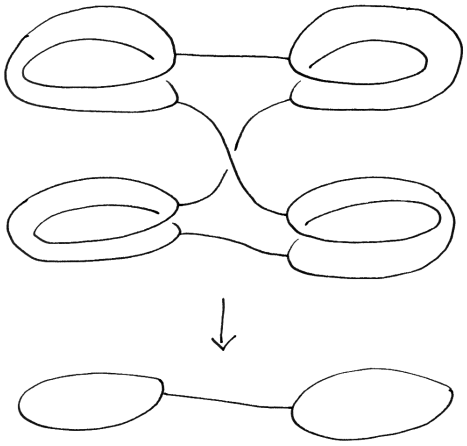
Das folgt aus obigem Satz mit einfachen Zusatzüberlegungen. Umgekehrt kann man auch obigen Satz auch leicht aus dieser Aussage folgern.

Beweis. Nach der Definition der Normalität und Separabilität ist für jeden Zwischenkörper M auch L/M normal und separabel, also Galois, und damit folgt $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ aus unserer Erkenntnis 4.1.12, daß bei einer endlichen Galoiserweiterung der Grundkörper gerade der Fixkörper der Galoisgruppe ist. Ohne alle Schwierigkeiten folgt $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ aus unserer Erkenntnis 4.1.9, daß das Bilden des Fixkörpers zu einer endlichen Gruppe von Körperautomorphismen stets eine Galoiserweiterung mit besagter Gruppe als Galoisgruppe liefert. Das zeigt die erste Behauptung. Man prüft nun leicht $g(L^H) = L^{gHg^{-1}}$ für alle $g \in G$, das gilt sogar für eine beliebige Operation einer beliebigen Gruppe auf einer beliebigen Menge. In Worten entspricht unter unserer Galoiskorrespondenz also das Verschieben von Zwischenkörpern mit einem Element der Galoisgruppe $g \in G$ der Konjugation von Untergruppen mit besagtem Element $g \in G$. Insbesondere ist L^H invariant unter G genau dann, wenn H in G ein Normalteiler ist. Da aber G nach 4.1.17 transitiv operiert auf den Wurzeln der Minimalpolynome aller Elemente von L, ist L^H invariant unter G genau dann, wenn es normal ist über K. Schließlich faktorisiert dann die durch Einschränken von Körperhomomorphismen gegebene Abbildung $G \to \mathrm{Gal}(L^H/K)$ über G/H und liefert eine Injektion $G/H \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L^H/K)$, die mit einem Abzählargument bijektiv sein muß. □

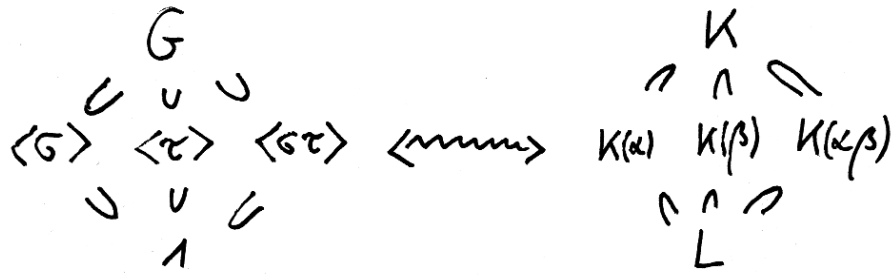
Beispiel 4.3.3 (**Unterkörper endlicher Körper mit Galoistheorie**). Nach 4.1.5 ist für jede Potenz $q = p^r$ mit $r \geq 1$ einer Primzahl p die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung r, erzeugt vom Frobenius-Homomorphismus $a \mapsto a^p$. Die Untergruppen dieser Gruppe $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}r$ sind nach [LA2] 6.3.17 genau die Gruppen $\mathbb{Z}d/\mathbb{Z}r$ für Teiler d von r. Das liefert im Licht der Galoiskorrespondenz 4.3.1 einen neuen Beweis unserer Klassifikation 3.7.12 aller Unterkörper eines endlichen Körpers.

Definition 4.3.4. Eine Körpererweiterung L/K heißt **biquadratisch**, wenn sie den Grad $[L : K] = 4$ hat und erzeugt wird von zwei Elementen $\alpha, \beta \in L$ mit $\alpha^2, \beta^2 \in K$.

Beispiel 4.3.5. $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ ist biquadratisch über $\mathbb{Q}$, denn $(a + b\sqrt{5})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{5} + 5b^2$ kann nie 3 sein, weder für $a = 0$ noch für $b = 0$ und erst recht nicht für $a \neq 0$, $b \neq 0$.



Dies Bild ist wie in 4.2.7 zu verstehen und stellt eine biquadratische Erweiterung des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(z)$ dar, etwa durch die Adjunktion von Quadratwurzeln aus $(z \pm 1)$, wo die beiden Punkte ± 1 in den beiden Kreisen unten zu denken sind.



Links die fünf Untergruppen der Klein'schen Vierergruppe, rechts die ihnen unter der Galoiskorrespondenz entsprechenden fünf Zwischenkörper einer biquadratischen Erweiterung im Fall einer von Zwei verschiedenen Charakteristik.

Lemma 4.3.6. *Jede biquadratische Erweiterung in einer von zwei verschiedenen Charakteristik ist Galois und ihre Galoisgruppe ist die Klein'sche Vierergruppe* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $L = K(\alpha, \beta)$ mit $\alpha^2, \beta^2 \in K$ unsere biquadratische Erweiterung. Für die nichttrivialen Elemente $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K(\alpha))$, $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K(\beta))$ haben wir

$$\sigma : \begin{cases} \alpha & \mapsto & \alpha \\ \beta & \mapsto & -\beta \end{cases} \qquad \tau : \begin{cases} \alpha & \mapsto & -\alpha \\ \beta & \mapsto & \beta \end{cases}$$

In der Tat kann etwa β unter σ nicht auch noch festgelten werden und muß mithin auf die andere Nullstelle seines Minimalpolynoms gehen. Wir finden so eine vierelementige Teilmenge $\{\mathrm{id}, \sigma, \tau, \sigma\tau\} \subset \mathrm{Gal}(L/K)$. Das muß dann aber schon die ganze Galoisgruppe sein, denn unsere Erweiterung hat Grad vier. □

4.3.7. Die Klein'sche Vierergruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_2^2$ hat fünf Untergruppen: Den Nullpunkt, drei Geraden, und die ganze Gruppe. Sie entsprechen in unserer biquadratischen Erweiterung aus 4.3.6 den Unterkörpern

$$L \supset K(\alpha), K(\beta), K(\alpha\beta) \supset K$$

Eine K-Basis von L besteht aus $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$, wie die simultane Eigenraumzerlegung von L unter σ und τ zeigt. Ein primitives Element ist zum Beispiel $\alpha + \beta$, da es von keinem nichttrivialen Element der Galoisgruppe festgehalten wird.

Satz 4.3.8 (Fundamentalsatz der Algebra). *Der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.*

4.3.9. Alternative Beweise diskutieren wir in [LA1] 5.3.27. Als Übung dürfen Sie zeigen, daß aus einem beliebigen angeordneten Körper R, in dem jedes Polynom ungerader Ordnung eine Nullstelle hat und jedes positive Element eine Quadratwurzel, durch Adjunktion einer Quadratwurzel von (-1) bereits ein algebraisch abgeschlossener Körper entsteht.

Beweis. Sei $L/\mathbb{R}$ eine endliche normale Körpererweiterung von $\mathbb{R}$. Sei $G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{R})$ ihre Galoisgruppe und $S \subset G$ eine 2-Sylow von G, die in unseren Konventionen auch die triviale Gruppe sein darf. So haben wir $[L : \mathbb{R}] = |G|$ und $[L : L^S] = |S|$. Folglich ist $L^S/\mathbb{R}$ eine Erweiterung von ungeradem Grad. Da jedes Polynom aus $\mathbb{R}[X]$ von ungeradem Grad nach dem Zwischenwertsatz [AN1] 12.3.3.8 eine reelle Nullstelle hat, folgt $L^S = \mathbb{R}$. Mithin haben wir $S = G$ und G ist eine 2-Gruppe. Nach Satz 1.3.9 über die Struktur von p-Gruppen besitzt sie Folge vo Untergruppen, bei der jede Index zwei in der nächsten hat. Nach der Galoiskorrespondenz entsteht die Körpererweiterung L aus $\mathbb{R}$ durch sukzessive Körpererweiterungen vom Grad 2, also nach 3.4.9 durch sukzessive Adjunktion von Quadratwurzeln. Haben wir $L \neq \mathbb{R}$, so gibt es insbesondere einen Zwischenköper $M/\mathbb{R}$ vom Grad zwei, der also durch Adjunktion einer Quadratwurzel entsteht. Es folgt $\mathrm{Ring}^{\mathbb{R}}(M, \mathbb{C}) \neq \emptyset$, denn jede reelle Zahl hat bereits eine Quadratwurzel in $\mathbb{C}$. Jeder solche Homomorphismus ist ein Isomorphismus $M \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$,

denn wir wissen $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. In $\mathbb{C}$ hinwiederum und damit auch in M hat jedes Element schon eine Quadratwurzel und daraus folgt $L = M$. Also kann M keine keine nichttrivialen algebraischen Körpererweiterungen besitzen. □

Übungen

Übung 4.3.10. Gegeben eine endliche Galoiserweiterung L/K und zwei Untergruppen $I \subset H$ ihrer Galoisgruppe zeige man für den Grad der Erweiterung der zugehörigen Fixkörper die Formel

$$[L^I : L^H] = |H/I|$$

Hinweise: 4.1.12, 3.4.11, [LA2] 6.1.5, 4.3.1.

Übung 4.3.11. Man drücke $\sqrt{3}$ aus als Polynom in $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ mit rationalen Koeffizienten: Das muß möglich sein, da dies Element nach 4.3.7 primitiv ist in $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Übung 4.3.12. Seien L/K eine endliche Körpererweiterung und $K_1, K_2 \subset L$ zwei Zwischenkörper mit K_i/K Galois und $K_1 \cap K_2 = K$. So ist auch der von K_1 und K_2 erzeugte Unterkörper $K_1K_2 \subset L$ Galois über K und es gilt $\mathrm{Gal}(K_1K_2/K) \tilde{\to} \mathrm{Gal}(K_1/K) \times \mathrm{Gal}(K_2/K)$ vermittels der Restriktionen.

Ergänzende Übung 4.3.13. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Man konstruiere einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Gal}(L^H/K)$ und dem Quotienten N/H nach H des **Normalisators** $N = \mathrm{N}_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ von H in G.

Übung 4.3.14. Man zeige: Für jeden Körper k, dessen Charakteristik kein Teiler von n ist, hat der Zerfällungskörper des Polynoms

$$T^n + a_2T^{n-2} + \ldots + a_{n-1}T + a_n$$

mit Koeffizienten im Funktionenkörper $k('a_2, \ldots, a_n)$ in $n-1$ algebraisch unabhängigen Veränderlichen als Galoisgruppe die volle symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$. Hinweis: Man gehe aus von 4.1.24; Die Galoisgruppe eines Polynoms über einem Körper K ändert sich nicht unter Substitutionen des Typs $T = Y + \lambda$ für $\lambda \in K$; die Galoisgruppe ändert sich nicht beim Übergang zu Funktionenkörpern $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(L(X)/K(X))$. Die Irreduzibilität folgt bereits aus 2.7.20.

Ergänzung 4.3.15. Bei der Behandlung kubischer Gleichungen in 4.7.7 werden wir sehen, daß auch im Fall eines Körpers k der Charakteristik Drei das Polynom $T^3 + pT + q$ über $k('p, q)$ die volle symmetrische Gruppe als Galoisgruppe hat. Andererseits ist im Fall eines Körpers k der Charakteristik Zwei das Polynom $T^2 + p$ über $k('p)$ inseparabel und seine Galoisgruppe ist trivial und ist nicht die volle symmetrische Gruppe.

4.4 Galoisgruppen von Kreisteilungskörpern

4.4.1. Gegeben $n \geq 1$ interessieren wir uns nun für den Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ des Polynoms $X^n - 1$. Dieser Zerfällungsköper heißt der n-te **Kreisteilungskörper** und wird unter Mißbrauch der Notation bezeichnet mit $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$. Er ist normal als Zerfällungskörper und separabel über $\mathbb{Q}$ wegen Charakteristik Null und mithin eine Galois-Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Ich stelle mir als n-ten Kreisteilungskörper meist konkret den Unterkörper $\mathbb{Q}(\zeta) \subset \mathbb{C}$ vor mit $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$. Auch ohne Rückgriff auf den Körper der komplexen Zahlen wissen wir nach [LA2] 6.4.8, daß die n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n bilden. Die Erzeuger dieser Gruppe heißen die **primitiven n-ten Einheitswurzeln**. Nach unserer Definition der Kreisteilungspolynome in 2.8.1 sind sie gerade die Nullstellen des n-ten Kreisteilungspolynoms

$$\Phi_n = \prod_{\operatorname{ord}\zeta = n} (X - \zeta)$$

Wir hatten schon in 2.8.1 mit Induktion über n gezeigt, daß dieses Polynom Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ und sogar in $\mathbb{Z}$ hat, und 2.8.4 besagte, daß für $n = p$ prim das p-te Kreisteilungspolynom Φ_p irreduzibel ist in $\mathbb{Q}[X]$. Nun zeigen wir ganz allgemein, daß für alle $n \geq 1$ das n-te Kreisteilungspolynom Φ_n irreduzibel ist in $\mathbb{Q}[X]$. Nach 2.7.11 ist das ganz allgemein für normierte Polynome in $\mathbb{Z}[X]$ gleichbedeutend dazu, irreduzibel zu sein in $\mathbb{Z}[X]$.

Satz 4.4.2 (Galoisgruppen der Kreisteilungskörper). *1. Die Kreisteilungspolynome $\Phi_n(X)$ sind irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$;*

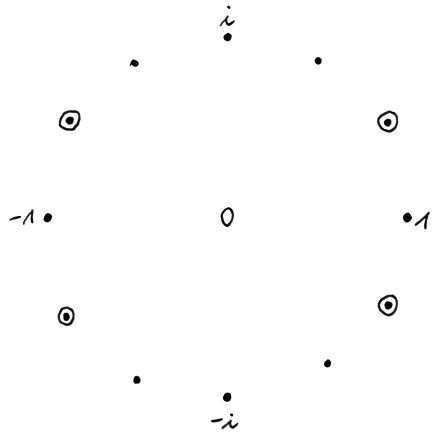
2. *Bezeichnet μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln im n-ten Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ und $\operatorname{Aut}(\mu_n)$ ihre Automorphismengruppe, so liefern die offensichtichen Abbildungen Isomorphismen*

$$\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut}(\mu_n) \xleftarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

   Auf diese Weise erhalten wir einen Isomorphismus zwischen der Galoisgruppe des n-ten Kreisteilungskörpers und der Einheitengruppe des Restklassenrings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;

3. *Gegeben zwei primitive n-te Einheitswurzeln $\zeta, \xi \in \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ existiert genau ein Körperhomomorphismus $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ mit $\sigma(\zeta) = \xi$.*

4.4.3. Die Irreduzibilität der Kreisteilungspolynome für prime Einheitswurzeln haben wir bereits in 2.8.4 gezeigt. In diesem Fall vereinfacht sich der Beweis entsprechend.



Die zwölften Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$, eingekringelt die vier primitiven zwölften Einheitswurzeln

4.4.4. Wählt man eine Einbettung des n-ten Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ nach $\mathbb{C}$, so ist das Bild stets der von $\mathbb{Q}$ und $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$ in $\mathbb{C}$ erzeugte Teilkörper. Von den Automorphismen unseres Kreisteilungskörpers läßt sich jedoch außer der Identität nur ein einziger stetig auf $\mathbb{C}$ fortsetzen, und dieser Automorphismus ist für jede Wahl der Einbettung derselbe und kann beschrieben werden als der Automorphismus, der jede Einheitswurzel auf ihr multiplikatives Inverses wirft.

4.4.5. Ich schicke dem Beweis einige allgemeine Betrachtungen zu zyklischen Gruppen voraus. Für $n \geq 1$ liefert ja sicher die Multiplikation einen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ zwischen der Einheitengruppe unseres Restklassenrings und der Automorphismengruppe seiner zyklischen Gruppe. Die Umkehrabbildung kann angegeben werden durch die Abbildungsvorschrift $\psi \mapsto \psi(1)$ für jeden Automorphismus ψ. Ist allgemeiner C irgendeine additiv notierte zyklische Gruppe der Ordnung n, so erhalten wir folglich einen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(C)$ durch die Abbildungsvorschrift $a \mapsto (c \mapsto ac)$, und ist μ irgendeine multiplikativ notierte zyklische Gruppe der Ordnung n, so erhalten wir ebenso einen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mu)$ durch die Abbildungsvorschrift $a \mapsto (\zeta \mapsto \zeta^a)$. Des weiteren gibt es für je zwei Erzeuger einer zyklischen Gruppe genau einen Automorphismus, der den einen in den anderen überführt.

Beweis. 1. Ist ζ eine primitive n-te Einheitswurzel, so sind alle anderen primitiven n-ten Einheitswurzeln von der Form ζ^a für $a \in \mathbb{Z}$ mit a teilerfremd zu n alias mit $\langle a, n\rangle = \langle 1\rangle$. Sei nun $\Phi_n = fg$ eine Zerlegung in $\mathbb{Z}[X]$ mit f dem Minimalpolynom von ζ. Sicher sind dann alle Nullstellen von f auch primtive n-te Einheitswurzeln. Sicher ist auch g normiert. Es reicht zu zeigen, daß für jede Nullstelle $\zeta \in \mathbb{C}$ von f und $p \in \mathbb{N}$ prim mit $p \nmid n$ auch ζ^p eine Nullstelle von f ist, denn dann sind alle Wurzeln von Φ_n schon Wurzeln von f und es folgt $\Phi_n = f$. Aber sei sonst p prim mit $p \nmid n$ und $g(\zeta^p) = 0$. Nach Annahme teilt dann f das

Polynom $g(X^p)$ in $\mathbb{Q}[X]$ und nach Gauß sogar in $\mathbb{Z}[X]$ und nach Übergang zu $\mathbb{F}_p[X]$ ist $\bar{f}$ Teiler von $\bar{g}(X^p) = \bar{g}^p$. Dann haben aber $\bar{f}$ und $\bar{g}$ eine gemeinsame Nullstelle im Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über $\mathbb{F}_p$ und das steht im Widerspruch dazu, daß nach 3.9.15 das Polynom $X^n - 1$ über $\mathbb{F}_p$ für $p \nmid n$ keine mehrfachen Nullstellen in seinem Zerfällungskörper hat.

2. Sicher wird $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ erzeugt von jeder primitiven n-ten Einheitswurzel ζ, und da Φ_n nach Teil 1 ihr Minimalpolynom ist, folgt mit 3.3.3

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}) : \mathbb{Q}] = \deg \Phi_n = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$$

Sicher liefert die Operation der Galoisgruppe auf den n-ten Einheitswurzeln weiter eine Einbettung $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mu_n)$ und nach [LA2] 7.3.3 haben wir einen kanonischen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mu_n)$. Da diese drei Gruppen alle gleichviele Elemente haben, folgt der Satz. □

4.4.6. Man erklärt die **Euler'sche φ-Funktion** $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ durch die Vorschrift

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \text{Zahl der zu } n \text{ teilerfremden } d \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq d \leq n \\
&= \text{Zahl der Erzeuger der Gruppe } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\
&= |\{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \mathrm{ord}(x) = n\}| \\
&= |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|
\end{aligned}$$

Wir haben etwa $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$ und so weiter. Nach 4.4.2 haben wir auch $\varphi(n) = \deg \Phi_n = [\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}) : \mathbb{Q}]$.

Satz 4.4.7 (Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke). *Genau dann ist das regelmäßige n-Eck konstruierbar mit Zirkel und Lineal, wenn der Wert $\varphi(n)$ der Euler'schen φ-Funktion an der Stelle n eine Zweierpotenz ist.*

Beweis. Sei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel. Ist $\varphi(n) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ keine Zweierpotenz, so kann ζ nicht konstruierbar sein nach 3.6.4. Ist $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz, so ist $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ eine 2-Gruppe. Nach 1.3.9 oder einfacher induktiv nach [LA2] 6.4.5 gibt es dann in G eine Kette von Normalteilern von G der Gestalt

$$G = G_r \supset G_{r-1} \supset \ldots \supset G_0 = 1$$

mit $G_i/G_{i-1} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq r$. Deren Fixkörper bilden eine Kette

$$\mathbb{Q} = K_r \subset K_{r-1} \subset \ldots \subset K_0 = \mathbb{Q}(\zeta)$$

von Teilkörpern mit $[K_{i-1} : K_i] = 2$ für $1 \leq i \leq r$. Diese Kette hinwiederum zeigt mit 3.6.2, daß ζ konstruierbar ist. □

Lemma 4.4.8 (Rechenregeln für die Euler'sche φ-Funktion). *1. Sind positive natürliche Zahlen n und m teilerfremd, so gilt $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$;*

2. Für p eine Primzahl und $r \geq 1$ beliebig gilt $\varphi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$.

Beweis. 1. Der Isomorphismus $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ von Ringen induziert einen Isomorphismus $(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ der zugehörigen Einheitengruppen.

2. Es gibt p^{r-1} Vielfache n von p mit $1 \leq n \leq p^r$, also gilt

$$\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1} = p^{r-1}(p-1) \qquad \square$$

4.4.9 (**Diskussion der Zahlen n mit $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz**). Damit $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz ist, darf nach den eben erklärten Rechenregeln 4.4.8 nur der Primfaktor 2 in n mehrfach vorkommen, und alle anderen Primfaktoren müssen die Gestalt $2^r + 1$ haben. Nur dann kann aber $2^r + 1$ eine Primzahl sein, wenn r selbst eine Zweierpotenz ist, denn sonst wäre $r = st$ mit $t > 1$ ungerade, und wir könnten die Gleichung

$$(1 - X^t) = (1 - X)(1 + X + \ldots + X^{t-1})$$

spezialisieren zu $X = -2^s$ und so $1 + 2^r$ nichttrivial faktorisieren. Genau dann ist also $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz, wenn alle Primfaktoren von n Fermat'sche Primzahlen im Sinne der folgenden Bemerkung sind und keine Primfaktoren außer der Zwei mehrfach vorkommen.

Ergänzung 4.4.10. Die Zahlen $F_k := 1 + 2^{2^k}$ heißen **Fermat'sche Zahlen**. F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sind prim, aber $F_5 = 1 + 2^{32} = 641 \cdot 6700417$ ist nach Euler nicht prim. Es ist nicht bekannt, ob es außer den 5 Ersten noch weitere Fermat'sche Zahlen gibt, die prim sind. Bekannt ist, daß die Fermat'schen Zahlen F_k für $5 \leq k \leq 32$ nicht prim sind, jedenfalls habe ich das 2020 mit Zitat in Wikipedia gelesen.

Ergänzung 4.4.11. Wie gesagt kann $\varphi(m)$ auch interpretiert werden als die Ordnung der Einheitengruppe des Restklassenrings $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, in Formeln

$$\varphi(m) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times|$$

Wenden wir auf diese Gruppe unsere Erkenntnis [LA2] 6.3.8 an, daß die Ordnung jedes Elements einer endlichen Gruppe die Gruppenordnung teilt, so erhalten wir für b teilerfremd zu m insbesondere die sogenannte **Euler'sche Kongruenz**

$$b^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Ergänzung 4.4.12. Wenn man die Eulersche φ-Funktion einführt, so darf die witzige Identität

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

nicht fehlen. Um sie zu zeigen bemerke man, daß auch für jedes Vielfache $n = cd$ einer Zahl d schon gilt $\varphi(d) = |\{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \operatorname{ord}(x) = d\}|$. In der Tat liefert nämlich die Multiplikation mit c eine Einbettung $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, deren Bild genau aus allen $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ besteht, deren Ordnung d teilt.

Übungen

Übung 4.4.13. Man zeige, daß man aus einem regelmäßigen 7-Eck mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges 35-Eck konstruieren kann. Hinweis: Man verwende 3.6.10.

Übung 4.4.14. Wieviele zu 140000 teilerfremde Zahlen a mit $1 \leq a \leq 140000$ gibt es?

Übung 4.4.15 (**Konstruierbarkeitskriterium**). Man zeige: Eine komplexe algebraische Zahl ist konstruierbar genau dann, wenn der Grad des Zerfällungskörpers ihres Minimalpolynoms über $\mathbb{Q}$ eine Zweierpotenz ist.

Übung 4.4.16. Man zeige, daß die Einheitswurzeln des n-ten Kreisteilungskörpers für gerades n genau die n-ten Einheitswurzeln sind und für ungerades n genau die $2n$-ten Einheitswurzeln.

Übung 4.4.17. Man zeige für die Euler'sche φ-Funktion und alle $n \geq 1$ die Identität $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$.

Übung 4.4.18. Seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen und k ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches. Man zeige $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1},\ \sqrt[m]{1}) = \mathbb{Q}(\sqrt[k]{1})$ für beliebige entsprechende primitive Einheitswurzeln Hinweis: Ist $k = an = bm$ mit $(a, b) = 1$, so gibt es x, y mit $ax + by = 1$ alias $\zeta_k = (\zeta_k^a)^x(\zeta_k^b)^y$.

Übung 4.4.19. Gegeben $n > 2$ zeige man, daß im Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}) = \mathbb{Q}(\zeta)$ für ζ eine primitive n-te Einheitswurzel gilt $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})] = 2$ und $[\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)/2$. Man folgere $\Phi_n(X) = X^{\varphi(n)}\Phi_n(X^{-1})$.

4.5 Quadratisches Reziprozitätsgesetz

4.5.1. Gegeben ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ stellen wir uns nun die Frage, ob es ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$a = x^2 + by$$

Ist das der Fall, so nennt man a einen **quadratischen Rest modulo** b. Gleichbedeutend können wir auch fragen, ob eine Restklasse $\bar{x} \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ existiert mit

$\bar{a} = \bar{x}^2$, ob also $\bar{a}$ ein Quadrat ist in $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$. Es mag a priori nicht klar sein, ob diese Frage derart wichtig ist, daß ihre Behandlung einen eigenen Abschnitt verdient. A posteriori hat sich die Untersuchung dieser Frage und ihrer Verallgemeinerungen jedoch als derart fruchtbar erwiesen, daß es mir angemessen scheint, sie hier zu diskutieren. Zunächst reduzieren wir unsere Frage im folgenden auf den Fall b prim und erklären dann, wie sie in diesem Fall durch das sogenannte „quadratische Reziprozitätsgesetz“ gelöst wird. Es gibt verschiedene Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, dessen verblüffende Aussage viele Mathematiker fasziniert hat. Wir geben hier einen Beweis mit den Methoden der Galoistheorie. Er ist vielleicht nicht der elementarste Beweis, aber in meinen Augen doch der Beweis, bei dem am wenigsten „gezaubert“ wird. Darüber hinaus weist er eine Richtung, in der es interessante Verallgemeinerungen gibt.

4.5.2 (**Reduktion auf $b = p^n$ eine Primzahlpotenz**). Gegeben $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ teilerfremd ist a ein Quadrat modulo $b_1 b_2$ genau dann, wenn es ein Quadrat ist modulo b_1 und ein Quadrat modulo b_2. Das folgt unmittelbar aus unserem Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z}/b_1 b_2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/b_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b_2\mathbb{Z}$$

alias dem chinesischen Restsatz [LA2] 6.3.11. Nach dieser Bemerkung werden wir uns bei der Untersuchung unserer ursprünglichen Frage auf den Fall beschränken, daß b eine echte Primzahlpotenz ist. Für Zahlen b, deren Primfaktorzerlegung wir nicht kennen, ist uns damit zwar wenig geholfen, aber für diese b ist nun einmal schlicht kein schnelles Verfahren bekannt, mit dem die Frage entschieden werden könnte, ob ein gegebenes a quadratischer Rest modulo b ist oder nicht.

4.5.3 (**Reduktion auf a teilerfremd zu $b = p^n$**). Sei nun also b eine echte Primzahlpotenz, sagen wir $b = p^n$. Ist dann $a = p^r\alpha$ die Darstellung von a als Produkt mit α teilerfremd zu p, so ist die Gleichung

$$a = p^r\alpha = x^2 + yp^n$$

für $r \geq n$ bereits mit $x = 0$ lösbar. Haben wir dahingegen $r + t = n$ mit $t > 0$, so folgt aus der Identität $p^r\alpha = x^2 + yp^r p^t$, daß die maximale p-Potenz, die die rechte Seite teilt, entweder gerade ist oder mindestens p^{r+1}. Diese Gleichung ist also für $t > 0$ nur unter der Annahme r gerade lösbar und unter dieser Annahme genau dann, wenn die Gleichung

$$\alpha = \tilde{x}^2 + yp^t$$

lösbar ist alias wenn α ein Quadrat ist modulo p^t. Auf diese Weise können wir uns bei der Untersuchung unserer ursprünglichen Frage auf den Fall zurückziehen, daß b eine echte Primzahlpotenz ist und zusätzlich a teilerfremd zu b.

4.5.4 (**Reduktion von $b = p^n$ auf $b = p$ für $p \neq 2$**). Ist p eine ungerade Primzahl und a teilerfremd zu p, so ist a ein Quadrat modulo p^n für $n \geq 2$ genau dann, wenn a ein Quadrat ist modulo p. Das folgt leicht aus [LA2] 6.5.31 oder besser seinem Beweis, wo Sie gezeigt haben, daß die Projektion $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ faktorisiert über einen Isomorphismus mit der Projektion als zweitem Pfeil in der Form

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$

Da die Zwei teilerfremd ist zu p, ist nun jedes Element von $\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$ das Doppelte von einem anderen, und das beendet auch bereits unsere Reduktion. Durch Induktion über n kann man sogar explizit eine Lösung finden: Gegeben $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{Z}$ mit $a = \tilde{x}^2 + \tilde{y}p^n$ machen wir zur Lösung der Gleichung $a = x^2 + yp^{n+1}$ den Ansatz $x = \tilde{x} + \lambda p^n$ und finden für λ die Gleichung

$$a = \tilde{x}^2 + 2\lambda p^n \tilde{x} + \lambda^2 p^{2n} + yp^{n+1}$$

Wegen $a - \tilde{x}^2 = \tilde{y}p^n$ kann sie umgeschrieben werden zu

$$2\lambda\tilde{x} = \tilde{y} - \lambda^2 p^n - yp$$

Da nun nach Annahme 2 und a und damit auch $\tilde{x}$ invertierbar sind in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, hat diese Gleichung stets eine Lösung λ.

4.5.5 (**Reduktion von $b = 2^n$ auf $b = 8$**). Eine ungerade Zahl ist ein quadratischer Rest modulo 2^n für $n \geq 3$ genau dann, wenn sie ein quadratischer Rest ist modulo 8 alias kongruent zu 1 modulo 8. Daß diese Bedingung notwendig ist, scheint mir offensichtlich. Um zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist, erinnern wir wieder aus [LA2] 6.5.31 oder besser seinem Beweis, daß sich die offensichtliche Surjektion $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ als rechte Vertikale in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}
\end{array}$$

mit den offensichtlichen Surjektionen in den Vertikalen einbetten läßt. Aus diesem Diagramm ist die Behauptung dann unmittelbar ersichtlich. Um eine explizite Lösung zu finden, machen wir wieder Induktion über s und gehen also aus von einer Lösung der Gleichung $a = x^2 + y2^s$ mit $s \geq 3$. Ist y gerade, also $y = 2\tilde{y}$, so steht unsere Lösung für $s + 1$ schon da. Sonst ersetzen wir x durch $x + 2^{s-1}$ und finden so auch eine Lösung mit y gerade.

4.5.6. Mit diesen Überlegungen haben wir also unsere ursprüngliche Frage zurückgeführt auf die Frage, welche Zahlen quadratische Reste sind modulo ungerader Primzahlen und modulo 8. Ganz allgemein wissen wir seit [LA1] 5.3.40,

wiewiele Elemente eines endlichen Körpers $\mathbb{F}$ Quadrate sind, nämlich im Fall der Charakteristik Zwei alle und im Fall einer von 2 verschiedenen Charakteristik knapp über die Hälfte, genauer $(|\mathbb{F}|+1)/2$ Elemente. Aber welche? In 4.5.22 erklären wir, wie diese Frage für endliche Primkörper durch das Zusammenwirken von quadratischem Reziprozitätsgesetz 4.5.7 und Ergänzungssatz 4.5.17 effizient gelöst werden kann.

Satz 4.5.7 (**Quadratisches Reziprozitätsgesetz**). *Seien p und q verschiedene ungerade Primzahlen.*

1. *Ist p oder q kongruent zu 1 modulo 4, so ist p ein Quadrat modulo q genau dann, wenn q ein Quadrat ist modulo p;*

2. *Sind p und q kongruent zu 3 modulo 4, so ist p ein Quadrat modulo q genau dann, wenn q kein Quadrat ist modulo p.*

4.5.8. Hier werden die Buchstaben p, q anders verwendet als im Zusammenhang mit endlichen Körpern üblich. Dort bezeichnet meist q eine Potenz von p.

Beispiel 4.5.9. Wir betrachten $p = 7$ und $q = 103$. Wir finden $103 \equiv 5 \pmod 7$ und durch Ausprobieren sehen wir, daß $0, 1, 2, 4$ die einzigen Quadrate im Körper mit 7 Elementen sind. Insbesondere ist 103 kein Quadrat modulo 7. Unsere Primzahlen sind nun beide kongruent zu 3 modulo 4, und Teil zwei des quadratischen Reziprozitätsgesetzes sagt uns dann, daß 7 notwendig ein Quadrat modulo 103 sein muß. Ausprobieren liefert in der Tat $25^2 = 625 = 6 \times 103 + 7$.

4.5.10 (**Allgemeines zu zyklischen Gruppen**). Wir schicken dem Beweis einige allgemeine Überlegungen zu zyklischen Gruppen voraus. Ich erinnere zunächst daran, daß nach [LA2] 6.5.25 jede nichttriviale zyklische Gruppe G gerader Ordnung $2n$ genau eine Untergruppe der Ordnung 2 und genau eine Untergruppe vom Index 2 hat. Für den in additiver Notation geschriebenen Gruppenhomomorphismus

$$(n\cdot) : G \to G$$

ist das Bild die einzige Untergruppe der Ordnung 2 und der Kern die einzige Untergruppe vom Index 2. Für den in additiver Notation geschriebenen Gruppenhomomorphismus

$$(2\cdot) : G \to G$$

ist dahingegen das Bild die einzige Untergruppe vom Index 2 und der Kern die einzige Untergruppe der Ordnung 2.

Beispiel 4.5.11. Im Fall der additiven Gruppe $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ ist $\{\bar{0}, \bar{n}\} = n\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ die einzige zweielementige Untergruppe und $2\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ die einzige Untergruppe vom Index 2.

4.5.12. Wir erinnern daran, daß die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers stets zyklisch ist. Im Fall der multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_p^\times$ für p eine ungerade Primzahl ist entsprechend $\{1,-1\}$ die einzige zweielementige Untergruppe und $(\mathbb{F}_p^\times)^2$ die einzige Untergruppe vom Index 2 und das Potenzieren mit $(p-1)/2$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\mathbb{F}_p^\times \twoheadrightarrow \{1,-1\}$ mit Kern $(\mathbb{F}_p^\times)^2$. Wir führen nun für p prim und $a \in \mathbb{Z}$ das sogenannte **Legendre-Symbol** ein durch die Vorschrift

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 0 & a \text{ ist ein Vielfaches von } p; \\ 1 & a \text{ ist ein Quadrat modulo } p, \text{ aber kein Vielfaches von } p; \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für p eine ungerade Primzahl erhalten wir damit die Kongruenz

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

In der Tat folgt das für a teilerfremd zu p aus den vorhergehenden Überlegungen dieses Unterpunktes und in den anderen Fällen ist es eh klar. Des weiteren hängt auch für beliebige Primzahlen p das Legendresymbol nur von der Restklasse modulo p ab und es gilt die Multiplikativität

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$$

In der Tat folgt das für a und b teilerfremd zu p aus den vorhergehenden Überlegungen dieses Unterpunktes und in den anderen Fällen ist es eh klar.

4.5.13 (**Quadratische Teilerweiterungen in Galoiserweiterungen**). Seien L/K eine endliche Galoiserweiterung und $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ ihre Galoisgruppe. Gegeben eine Untergruppe $H \subset G$ der Galoisgruppe vom Index 2 ist nach der Galoiskorrespondenz oder auch bereits nach 4.1.9 ihr Fixkörper L^H eine quadratische Erweiterung von K. Ist die Charakteristik kein Teiler von $|H|$, so kann dieser Fixkörper offensichtlich beschrieben werden durch die Formel

$$L^H = \left\{ \sum_{\sigma\in H} \sigma(\gamma) \,\middle|\, \gamma \in L \right\}$$

Die Bedingung an die Charakteristik wird dabei für die Inklusion $\subset$ benötigt, weil man damit $\alpha \in L^H$ schreiben kann als $\alpha = |H|^{-1}\sum_{\sigma\in H}\sigma(\alpha)$. Gilt zusätzlich $\mathrm{char}\, K \neq 2$, so sind die Elemente $\alpha \in L^H \backslash K$ mit $\alpha^2 \in K$ genau die Eigenvektoren zum Eigenwert (-1) des nichttrivialen Elements τ der zweielementigen

Gruppe $\mathrm{Gal}(L^H/K) \cong G/H$. Man überlegt sich leicht, daß dieser Eigenraum beschrieben werden kann als

$$\mathrm{Eig}(\tau|L^H;-1) = \left\{ \sum_{\sigma\in H} \sigma(\gamma) - \sum_{\sigma\ \in G\setminus H} \sigma(\gamma) \,\middle|\, \gamma \in L \right\}$$

Gegeben $\gamma \in L$ gilt für $\alpha := \sum_{\sigma\in H} \sigma(\gamma) - \sum_{\sigma\ \in G\setminus H} \sigma(\gamma)$ auch ohne Voraussetzungen an die Charakteristik stets $\alpha \in L^H$ und $\tau(\alpha) = -\alpha$ für $\tau \in G\setminus H$ und damit $\alpha^2 \in K$ sowie unter den zusätzlichen Annahmen $\alpha \neq 0$ und $\mathrm{char}(K) \neq 2$ zusätzlich $L^H = K(\alpha) = K + K\alpha$.

Satz 4.5.14 (Quadratwurzeln in primen Kreisteilungskörpern). *Gegeben p eine ungerade Primzahl gilt*

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{p} &\in \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1}) \quad \textit{falls} \quad p \equiv 1 \pmod 4 \\ \pm\sqrt{-p} &\in \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1}) \quad \textit{falls} \quad p \equiv 3 \pmod 4 \end{aligned}$$

4.5.15. Explizit prüft man für eine von Null verschiedene dritte Einheitswurzel ζ leicht $(\zeta - \zeta^2)^2 = -3$ und damit $\pm\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$. Die Beziehung zwischen regelmäßigem Fünfeck und goldenem Schnitt [AN1] 12.4.5.30 liefert $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt[5]{1})$.

Beweis. Wir erinnern unseren Isomorphismus $\mathbb{F}_p^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1}), \mathbb{Q})$ aus 4.4.2 und die Erkenntnis aus [LA2] 6.4.8, daß $\mathbb{F}_p^\times$ eine zyklische Gruppe ist. Nach 4.5.10 hat die Galoisgruppe genau eine Untergruppe vom Index Zwei. Nach der Galoiskorrespondenz liegt damit in $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$ genau eine quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ und nach 4.5.13 und 4.5.12 hat für $\zeta \in \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$ eine primitive p-te Einheitswurzel das Element

$$\alpha := \sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times} \left(\frac{a}{p}\right) \zeta^a$$

die Eigenschaft $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$. Dies Element α erzeugt folglich, wenn es nicht Null ist, die fragliche quadratische Erweiterung. Wir zeigen nun genauer durch explizite Rechnung die Formel

$$\alpha^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$$

In der Tat, beachten wir $(\frac{ab^2}{p}) = (\frac{a}{p})$ für $b \in \mathbb{F}_p^\times$, so ergibt sich durch Substitution von ab für a die zweite Gleichung der Kette

$$\alpha^2 = \sum_{a,b\in\mathbb{F}_p^\times} \left(\frac{ab}{p}\right) \zeta^{a+b} = \sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times} \left(\frac{a}{p}\right) \sum_{b\in\mathbb{F}_p^\times} (\zeta^{a+1})^b$$

Bei $a = -1$ ergibt sich ganz rechts der Beitrag $(\frac{-1}{p})(p-1)$. Bei $a \neq -1$ beachten wir, daß für $\eta = \zeta^{a+1}$ wie für jede von Eins verschiedene p-te Einheitswurzel die Relation

$$1 + \eta + \eta^2 + \ldots + \eta^{p-1} = 0$$

erfüllt ist, so daß die Summanden mit $a \neq -1$ jeweils den Beitrag $-(\frac{a}{p})$ liefern. Da nun die Summe der $(\frac{a}{p})$ über alle $a \in \mathbb{F}_p^\times$ verschwindet, und erst dafür brauchen wir $p \neq 2$, liefern alle Summanden mit $a \neq -1$ zusammen den Beitrag $(\frac{-1}{p})$ und mit 4.5.12 folgern wir

$$\alpha^2 = (\tfrac{-1}{p})(p-1) + (\tfrac{-1}{p}) = (\tfrac{-1}{p})p = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p \qquad \square$$

Ergänzung 4.5.16. Im übrigen folgt im vorhergehenden Beweis $\alpha^2 \in \mathbb{Z}$ auch ohne alle Rechnung aus der Identität $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}[\zeta] = \mathbb{Z}$. Um sie einzusehen, bemerkt man, daß $\mathbb{Z}[\zeta]$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist, der Schnitt ist mithin nach [LA2] 6.5.1 auch eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Andererseits aber ist er auch ein Teilring von $\mathbb{Q}$, und diese beiden Eigenschaften zusammen zeigen nach Übung 2.2.9 bereits, daß unser Schnitt $\mathbb{Z}$ sein muß.

Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes. Sei wie zuvor p eine ungerade Primzahl. Wir betrachten die eindeutige quadratische Teilerweiterung unseres p-ten Kreisteilungskörpers, die wir in 4.5 bestimmt hatten zu $\mathbb{Q}(\zeta) \supset \mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$ mit $\alpha^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$. Die Teilringe

$$\mathbb{Z}[\zeta] \supset \mathbb{Z}[\alpha] \supset \mathbb{Z}$$

sind offensichtlich stabil unter der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ und $\mathbb{Z}[\zeta]$ ist eine endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe. Jede Primzahl $q \neq p$ liefert unter $\mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ ein Element σ_q der Galoisgruppe mit $\sigma_q(\zeta) = \zeta^q$. Sicher ist

$$R := \mathbb{Z}[\zeta]/q\mathbb{Z}[\zeta]$$

nicht der Nullring und der von diesem Element σ_q auf R induzierte Ringautomorphismus $\sigma_q : R \to R$ ist der Frobenius $r \mapsto r^q$ zur Primzahl q, die in diesem Fall die Charakteristik unseres Rings ist, denn σ_q stimmt auf ζ und $\mathbb{F}_q$ mit dem Frobenius überein und zusammen erzeugen diese Elemente unseren Ring. Das Bild von α in R notieren wir

$$\bar{\alpha} \in R$$

Das Bild der offensichtlichen Einbettung $\mathbb{F}_q \hookrightarrow R$ notieren wir kurz $\mathbb{F}_q \subset R$. Wir haben also $\bar{\alpha}^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\bar{p}$. Das Auswerten an $\bar{\alpha}$ induziert mithin einen surjektiven Ringhomomorphismus $\mathbb{F}_q[X]/\langle X^2 - \bar{\alpha}^2\rangle \twoheadrightarrow \mathbb{F}_q[\bar{\alpha}] \subset R$. Wir sind dann in genau einem der beiden folgenden Fälle:

1. $X^2 - \bar{\alpha}^2$ ist nicht irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$ und $\bar{\alpha}^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\bar{p}$ ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_q$ und es gibt, falls $q \neq 2$, nach dem chinesischen Restsatz einen surjektiven Ringhomomorphismus $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \twoheadrightarrow \mathbb{F}_q[\bar{\alpha}]$ und es gilt $\sigma_q(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$;

2. $X^2 - \bar{\alpha}^2$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$ und $\bar{\alpha}^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\bar{p}$ ist kein Quadrat in $\mathbb{F}_q$ und $\mathbb{F}_q[\bar{\alpha}]$ ist eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{F}_q$ und es gilt $\sigma_q(\bar{\alpha}) = -\bar{\alpha}$.

Nun haben wir $\bar{\alpha}^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\bar{p}$ und zusammen mit unserer vergleichsweise banalen Erkenntnis $\sigma_q(\alpha) = (\frac{q}{p})\alpha$ und damit auch $\sigma_q(\bar{\alpha}) = (\frac{q}{p})\bar{\alpha}$ folgt unter der Annahme $q \neq 2$ unmittelbar

$$\left(\frac{-1}{q}\right)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$$

Zusammen mit unserer Erkenntnis $(\frac{-1}{q}) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$ aus 4.5.12 folgt das quadratische Reziprozitätsgesetz. □

Proposition 4.5.17 (Ergänzungssatz). *Für jede ungerade Primzahl p gilt*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{für } p \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1 & \text{für } p \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Beweis. Wir beginnen wie beim Beweis des Reziprozitätsgesetzes und betrachten feiner

$$\beta := (\alpha - 1)/2 = \sum_{a \in (\mathbb{F}_p^\times)^2} \zeta^a$$

Dann haben wir wieder $\mathbb{Z}[\zeta] \supset \mathbb{Z}[\beta] \supset \mathbb{Z}$ und diese Teilringe sind stabil unter der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ und für alle zu p teilerfremden ganzen Zahlen q finden wir

$$\sigma_q(\beta) = \begin{cases} \beta & \text{falls } (\frac{q}{p}) = 1; \\ \beta - \alpha & \text{falls } (\frac{q}{p}) = -1. \end{cases}$$

Wie zuvor ist $R := \mathbb{Z}[\zeta]/q\mathbb{Z}[\zeta]$ nicht der Nullring und der von diesem Element σ_q auf R induzierte Ringautomorphismus $\sigma_q : R \to R$ ist im Fall einer Primzahl $q \neq p$ der Frobenius $r \mapsto r^q$. Das Bild der offensichtlichen Einbettung $\mathbb{F}_q \hookrightarrow R$ notieren wir von nun an kurzerhand $\mathbb{F}_q \subset R$. Das Bild von β in R notieren wir

$$\bar{\beta} \in R$$

Weiter finden wir $\beta^2 = (\alpha^2 - 2\alpha + 1)/4$. Da wir stets $\alpha^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p = 4u + 1$ schreiben können mit $u \in \mathbb{Z}$, ergibt sich $\beta^2 = u - \beta$ und das Einsetzen von $\bar{\beta}$ für X induziert einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\mathbb{F}_q[X]/\langle X^2 + X - u\rangle \twoheadrightarrow \mathbb{F}_q[\bar{\beta}]$$

Wir prüfen weiter, daß unsere Polynome $X^2 + X - u$ haben für $q \neq p$ prim nie mehrfache Nullstellen haben. Im Fall $q = 2$ hat die Ableitung überhaupt keine Nullstelle, im Fall $q \neq 2$ ist die einzige Nullstelle der Ableitung $-1/2$ und der Wert dort multipliziert mit 4 ist $1 - 2 - 4u = -(4u + 1)$ und das ist nicht Null wegen $q \neq p$. Weiter gilt auch $\bar{\alpha} \neq 0$ für alle $q \neq p$ wegen $\bar{\alpha}^2 = \pm\bar{p} \neq 0$. Wir sind also in genau einem der folgenden zwei Fälle:

1. Das Polynom $X^2 + X - u$ ist reduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$, es gibt einen surjektiven Ringhomomorphismus $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \twoheadrightarrow \mathbb{F}_q[\bar{\beta}]$, es gilt $\sigma_q(\bar{\beta}) = \bar{\beta}$ und damit gilt $\sigma_q(\beta) = \beta$ wegen $\bar{\alpha} \neq 0$;

2. Das Polynom $X^2 + X - u$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$ und es gilt $\sigma_q(\bar{\beta}) \neq \bar{\beta}$ und damit $\sigma_q(\beta) \neq \beta$.

Für $q \neq 2$ fallen wir von hier aus auf die bereits beim Beweis des Reziprozitätsgesetzes angestellten Überlegungen zurück. Für $q = 2$ jedoch sind wir im ersten Fall für u gerade und im zweiten Fall für u ungerade und haben folglich

$$(-1)^u = \left(\frac{2}{p}\right)$$

Die Parität von u hängt nun offensichtlich nur von der Restklasse von p modulo 8 ab und kurzes Durchprobieren zeigt, daß wir so genau den Ergänzungssatz erhalten. □

4.5.18. Ich erinnere an unsere Untersuchungen zu Summen von zwei Quadraten 2.6.6. Dort war das Scharnier unserer Argumentation die Frage:

> Ist $(X^2 + 1)$ irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$ für eine vorgegebene Primzahl q?

Die Antwort war, daß das genau dann gilt, wenn $q \equiv 3 \pmod 4$. Beim Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes hinwiederum waren das Scharnier unserer Argumentation die Fragen:

> Ist $(X^2 - p)$ irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$, für eine Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ und eine vorgegebene Primzahl q?
>
> Ist $(X^2 + p)$ irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$, für eine Primzahl $p \equiv 3 \pmod 4$ und eine vorgegebene Primzahl q?

Beide hatten für $q \neq 2$ die Antwort „Ja“ genau dann, wenn gilt $(\frac{q}{p}) = -1$, wenn also q kein Quadrat ist modulo p. Im Fall $q = 2$ ist die Antwort dahingegen immer „Ja“, denn dort haben wir $(X^2 - 1) = (X^2 + 1) = (X + 1)^2$, aber diese Antwort hat nichts mehr mit $(\frac{2}{p})$ zu tun. Wenn wir aber stattdessen fragen

Ist (X^2+X-u) irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$, für eine ungerade Primzahl p und $4u+1=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p$ und eine vorgegebene Primzahl q?

so ist die Antwort „Ja“genau dann, wenn gilt $(\frac{q}{p})=-1$, wenn also q kein Quadrat ist modulo p, und das für alle Primzahlen q.

Vorschau 4.5.19. In der „algebraischen Zahlentheorie“ werden gewisse Tricks der vorhergehenden Argumentation zu einer Theorie ausgebaut. Gegeben ein **Zahlkörper** alias eine endliche Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ kann man ganz allgemein in L einen ausgezeichneten Teilring konstruieren, der als abelsche Gruppe endlich erzeugt ist und der stabil ist unter der Galoisgruppe $G:=\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, nämlich den sogenannten **Ganzheitsring** oder **Ganzzahlenring**

$$\mathfrak{o}_L := \{r\in L \mid r \text{ ist Nullstelle eines normierten Polynoms aus } \mathbb{Z}[X]\}$$

Daß diese Teilmenge $\mathfrak{o}_L \subset L$ in der Tat ein Teilring ist, zeigen wir in [KAG] 5.1.8. In unserem Beispiel $\mathbb{Q}(\zeta)\supset\mathbb{Q}(\alpha)\supset\mathbb{Q}$ sind die Ganzheitsringe gerade die Teilringe $\mathbb{Z}[\zeta]\supset\mathbb{Z}[\beta]\supset\mathbb{Z}$, die wir beim Beweis des Ergänzungssatzes haben vom Himmel fallen lassen. Ganz allgemein zeigt man dann, daß für q eine Primzahl der Quotient $\mathfrak{o}_L/q\mathfrak{o}_L$ als $\mathbb{F}_q$-Vektorraum die Dimension $[L:\mathbb{Q}]$ hat. Im Fall $[L:\mathbb{Q}]=2$ muß es einen Isomorphismus

$$\mathbb{F}_q[X]/\langle X^2+aX+b\rangle \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}_L/q\mathfrak{o}_L$$

geben. Je nachdem, ob unser quadratisches Polynom irreduzibel ist, zwei verschiedene Nullstellen hat oder eine doppelte Nullstelle, ist die $\mathbb{F}_q$-Kringalgebra $\mathfrak{o}_L/q\mathfrak{o}_L$ isomorph zu $\mathbb{F}_{q^2}, \mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q$ oder $\mathbb{F}_q[T]/\langle T^2\rangle$. Das ist, was wir oben mit $\mathfrak{o}_L=\mathbb{Z}[\beta]$ schemenhaft gesehen haben, ohne die Theorie voll zu entwickeln.

4.5.20. Die Abbildung $n\mapsto(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ von der Menge der ungeraden ganzen Zahlen in das Monoid der Vorzeichen ist die Verknüpfung der Restklassenabbildung mit dem einzigen Gruppenisomorphismus

$$2\mathbb{Z}+1\to(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}^\times$$

Insbesondere ist sie multiplikativ alias ein Monoidhomomorphismus.

4.5.21. Die Abbildung $n\mapsto(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ von der Menge der ungeraden ganzen Zahlen in das Monoid der Vorzeichen ist die Verknüpfung der Restklassenabbildung mit einem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$2\mathbb{Z}+1\to(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times\twoheadrightarrow\mathbb{Z}^\times$$

Insbesondere ist sie multiplikativ alias ein Monoidhomomorphismus. In diesem Fall beachte man, daß es sogar vier Gruppenhomomorphismen $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{Z}^\times$ alias $\mathbb{F}_2^2\to\mathbb{F}_2$ gibt, von denen drei surjektiv sind.

Ergänzung 4.5.22. Will man Legendre-Symbole tatsächlich ausrechnen, so erweist sich deren Erweiterung zu den sogenannten **Jacobi-Symbolen** als praktisch. Man definiert genauer für $a \in \mathbb{Z}$ beliebig und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit Primfaktorzerlegung $n = p_1 p_2 \dots p_r$ das Jacobi-Symbol als Produkt von Legendre-Symbolen

$$\left(\frac{a}{n}\right) := \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{a}{p_r}\right)$$

Aus den entsprechenden Eigenschaften des Legendre-Symbols folgt, daß auch das Jacobi-Symbol nur von der Restklasse von a modulo n abhängt und daß gilt

$$\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right) \quad \text{und für } n \text{ ungerade} \quad \left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Schließlich folgt aus dem quadratischen Reziprozitätsgesetz 4.5.7, daß allgemeiner für je zwei ungerade Zahlen $m, n \geq 1$ das **Reziprozitätsgesetz für Jacobi-Symbole**

$$\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}\frac{m-1}{2}}\left(\frac{n}{m}\right)$$

gilt, denn auch die Vorzeichen sind multiplikativ in ungeraden m und n, wie man durch Fallunterscheidung prüft. Für jede ungerade Zahl $n \geq 1$ folgt schließlich aus dem Ergänzungssatz 4.5.17 mühelos der **Ergänzungssatz für Jacobi-Symbole**

$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{für } n \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1 & \text{für } n \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Für die Primzahlen 1231 und 1549 finden wir so etwa

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{1231}{1549}\right) = \left(\tfrac{1549}{1231}\right) = \left(\tfrac{318}{1231}\right) = \left(\tfrac{2}{1231}\right)\left(\tfrac{159}{1231}\right) = \left(\tfrac{159}{1231}\right) = -\left(\tfrac{1231}{159}\right) = -\left(\tfrac{118}{159}\right) = \\
&= -\left(\tfrac{2}{159}\right)\left(\tfrac{59}{159}\right) = -\left(\tfrac{59}{159}\right) = -\left(\tfrac{159}{59}\right) = -\left(\tfrac{41}{59}\right) = -\left(\tfrac{59}{41}\right) = -\left(\tfrac{18}{41}\right) = \\
&= -\left(\tfrac{2}{41}\right)\left(\tfrac{9}{41}\right) = -\left(\tfrac{9}{41}\right) = -\left(\tfrac{41}{9}\right) = -\left(\tfrac{5}{9}\right) = -\left(\tfrac{9}{5}\right) = -\left(\tfrac{4}{5}\right) = -\left(\tfrac{2}{5}\right)^2 = -1
\end{aligned}$$

mit unserem Reziprozitätsgesetz und Ergänzungssatz für Jacobi-Symbole. Die Zahl 1231 ist demnach kein quadratischer Rest modulo 1549. Alternativ hätten wir auch den Rest von $1231^{1548/2} = 1231^{774}$ modulo 1548 ausrechnen können. Das dauert so lange auch wieder nicht, da wir zur Beschleunigung der Rechnung 774 in eine Summe von Zweierpotenzen entwickeln können als $774 = 512+256+4+2$, und dann müssen wir nur noch neun Quadrate in $\mathbb{Z}/1549\mathbb{Z}$ berechnen und vier dieser Quadrate in $\mathbb{Z}/1549\mathbb{Z}$ multiplizieren. Ganz so schnell wie obige Rechnung geht das dann aber doch nicht.

Übungen

Übung 4.5.23. Sei $a \in \mathbb{Z}$ fest vorgegeben. Man zeige: Ob a ein Quadrat ist modulo einer Primzahl q hängt nur von der Restklasse von q modulo $4a$ ab.

Ergänzung 4.5.24. Im Fall $a = -1$ kennen wir das das Resultat der vorhergehenden Übung 4.5.23 im Übrigen bereits aus 2.6.6. In der Sprache der algebraischen Zahlentheorie ist das eine starke Aussage über die Beziehungen zwischen dem „Verzweigungsverhalten der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q}$ an verschiedenen Primstellen“. Unser Beweis des Reziprozitätsgesetzes, das erst mal den Fall a prim liefert, geht aus vom explizit bekannten Verzweigungsverhalten bei Kreisteilungserweiterungen und folgert das Resultat daraus durch eine Art Galois-Abstieg.

Ergänzende Übung 4.5.25. Ein berühmter **Satz von Kronecker-Weber** besagt, daß jede endliche Galoiserweiterung des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit abelscher Galoisgruppe als Unterkörper eines Kreisteilungskörpers realisiert werden kann. Man zeige das für alle quadratischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}$.

Ergänzung 4.5.26. Man mag den Satz von Kronecker-Weber interpretieren als eine explizite Beschreibung der „maximalen abelschen Erweiterung“ von $\mathbb{Q}$: Sie entsteht durch die Adjunktion aller Einheitswurzeln. **Hilbert's zwölftes Problem** fragt nach einer ähnlich expliziten Beschreibung der „maximalen abelschen Erweiterung“ eines beliebigen Zahlkörpers, als da heißt, eines beliebigen Körpers der Charakteristik Null von endlichem Grad über $\mathbb{Q}$.

Übung 4.5.27. Ist 283 ein quadratischer Rest modulo 397? Hinweis: 397 ist eine Primzahl.

Übung 4.5.28. Gibt es eine Quadratzahl, deren Darstellung im Dezimalsystem mit der Ziffernfolge 39 endet? Für welche Ziffern $a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ gibt es eine Quadratzahl, die mit der Ziffernfolge ab endet?

4.6 Radikalerweiterungen

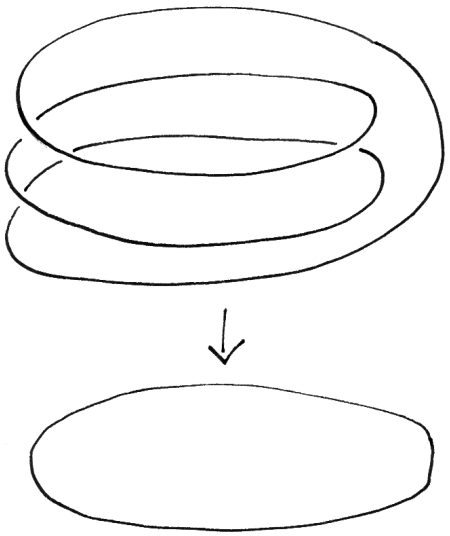
Definition 4.6.1. Eine Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe heißt eine **zyklische Erweiterung**. Eine Galoiserweiterung mit abelscher Galoisgruppe heißt eine **abelsche Erweiterung**.

4.6.2. Zerfällt das Polynom $X^n - 1$ in einem Körper vollständig in Linearfaktoren, so sagen wir, der besagte Körper **enthalte alle n-ten Einheitswurzeln**. Wir sagen, eine Körpererweiterung L/K **entstehe durch Adjunktion einer n-ten Wurzel**, wenn gilt $L = K(\alpha)$ für ein $\alpha \in L$ mit $\alpha^n \in K$.

Satz 4.6.3 (Zyklische Erweiterungen). *Seien K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl derart, daß unser Körper alle n-ten Einheitswurzeln enthält und daß seine Charakteristik n nicht teilt. So gilt:*

1. *Alle zyklischen Erweiterungen von K vom Grad n entstehen durch die Adjunktion einer n-ten Wurzel;*

2. *Adjungieren wir zu K eine n-te Wurzel, so erhalten wir eine zyklische Erweiterung, deren Grad n teilt.*



Anschauung für die durch Adjunktion einer dritten Wurzel aus T entstehenden Körpererweiterung des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(T)$. In 4.2.7 wird erklärt, wie dies Bild zu interpretieren ist. Ich finde, man sieht in diesem Fall auch recht anschaulich, daß die Galoisgruppe zyklisch von der Ordnung drei sein muß.

4.6.4. Der Beweis des ersten Teils beschreibt die Elemente sogar genauer, deren n-te Potenz im Grundkörper liegt und die unsere Erweiterung erzeugen: Es handelt sich genau um die Eigenvektoren eines beliebigen Erzeugers der Galoisgruppe mit einer primitiven n-ten Einheitswurzel als Eigenwert. Im Fall einer quadratischen Erweiterung wissen wir das schon länger.

4.6.5 (**Adjunktion von Einheitswurzeln und anderen Wurzeln im Vergleich**). Man beachte den fundamentalen Unterschied zwischen der Erweiterung eines Körpers durch n-te Einheitswurzeln und der Erweiterung eines Körpers mit n-ten Einheitswurzeln durch n-te Wurzeln aus von Eins verschiedenen Elementen: Setzen wir der Einfachkeit halber Charakteristik Null voraus, so ist im ersten Fall nach 4.4.2 und 4.6.10 die Ordnung der Galois-Gruppe ein Teiler von $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$ und im zweiten Fall ein Teiler von n.

Beweis. 2. Bezeichne $\mu_n \subset K^\times$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Unter unsere Annahme an die Charakteristik sind sie paarweis verschieden, denn die Null ist dann die einzige Nullstelle der Ableitung von $X^n - 1$. Entsteht $L = K(\alpha)$ durch Adjunktion einer n-ten Wurzel aus $a = \alpha^n \in K$, so sind die Wurzeln des Polynoms $X^n - a$ genau alle $\zeta\alpha$ mit ζ den n-ten Einheitswurzeln und unsere Erweiterung ist folglich Galois. Weiter erhalten wir eine Injektion der Galoisgruppe

in die Gruppe μ_n der n-ten Einheitswurzeln, indem wir jedem $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ diejenige Einheitswurzel ζ zuordnen mit $\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$, also die Einheitswurzel $\sigma(\alpha)/\alpha$. An dieser Stelle verwenden wir, daß nicht nur L sondern sogar unser Grundkörper K alle n-ten Einheitswurzeln enthält, um nämlich zu zeigen, daß $\sigma \mapsto \sigma(\alpha)/\alpha$ ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mu_n$ ist. Da nach [LA2] 6.4.8 jede endliche Gruppe von Einheitswurzeln zyklisch ist, liefert die Adjunktion n-ter Wurzeln in der Tat zyklische Erweiterungen, deren Ordnung n teilt.

1. Sei umgekehrt L/K eine zyklische Erweiterung vom Grad n. Sei $\sigma \neq \mathrm{id}$ ein Erzeuger der Galoisgruppe. Wir fassen σ auf als eine K-lineare Abbildung $\sigma : L \to L$. Da gilt $\sigma^n = \mathrm{id}$ nach Voraussetzung. Da $X^n - 1$ in $K[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt und paarweise verschiedene Nullstellen hat, ist σ nach der im Anschluß bewiesenen Proposition 4.6.6 diagonalisierbar und seine Eigenwerte sind n-te Einheitswurzeln. Da aus $\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$ und $\sigma(\beta) = \eta\beta$ für n-te Einheitswurzeln ζ und η folgt $\sigma(\alpha\beta) = \zeta\eta\alpha\beta$, bilden die Eigenwerte von σ sogar eine Untergruppe $U \subset \mu_n$. Enthielte diese Untergruppe nicht alle n-ten Einheitswurzeln, so gäbe es einen Teiler d von n mit $d \neq n$ derart, daß σ^d als einzigen Eigenwert die 1 hätte. Dann müßte aber σ^d aufgrund seiner Diagonalisierbarkeit bereits selbst die Identität sein im Widerspruch zu unseren Annahmen. Also besteht U aus allen n-ten Einheitswurzeln und es gibt ein von Null verschiedenes $\alpha \in L$ mit $\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$ für ζ eine primitive n-ten Einheitswurzel. Wir haben dann notwendig $\sigma(\alpha^n) = \alpha^n$, also $\alpha^n \in K$, aber die Potenzen $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ sind linear unabhängig über K als Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von σ. Es folgt $[K(\alpha) : K] = n$ und damit $L = K(\alpha)$. □

Proposition 4.6.6. *Seien f ein Endomorphismus eines Vektorraums V über einem Körper K und $P \in K[X]$ ein normiertes Polynom ohne mehrfache Nullstellen, das in K vollständig in Linearfaktoren zerfällt und f annulliert, in Formeln $P(f) = 0$. So ist f diagonalisierbar und seine Eigenwerte sind Nullstellen von P.*

Beweis. Man wähle einen Vektor $v \in V$ und suche dazu einen normierten Teiler $Q = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_r)$ von P kleinstmöglichen Grades r mit $Q(f) : v \mapsto 0$. Dann ist

$$E := \langle v, f(v), f^2(v), \ldots f^{r-1}(v) \rangle$$

ein unter f stabiler Untervektorraum von V. Andererseits ist $(f-\lambda_2) \ldots (f-\lambda_r)v$ nach Annahme nicht Null und folglich ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_1 in E. In derselben Weise finden wir auch Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Da Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind nach [LA1] 6.6.18, ist damit $f|_E$ diagonalisierbar und v eine Summe von Eigenvektoren von f. Die Proposition folgt. □

Zweiter Beweis. Wenn man bereits weiß, daß ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums genau dann diagonalisierbar ist, wenn sein Minimal-

polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt und keine mehrfachen Nullstellen hat, so bleibt im Fall eines endlichdimensionalen Raums nichts zu zeigen. Der Fall eines unendlichdimensionalen Raums ist für uns aber eh nicht relevant, und man kann sich von dort auch unschwer auf den Fall eines endlichdimensionalen Raums zurückziehen. □

Dritter Beweis. Der chinesische Restsatz liefert einen Ringisomorphismus

$$K[X]/\langle P\rangle \tilde{\to} K[X]/\langle X-\lambda_1\rangle \times \ldots \times K[X]/\langle X-\lambda_n\rangle$$

für λ_i die Nullstellen von P. Ist $1 = e_1 + \ldots + e_n$ die zugehörige Zerlegung der Eins in die Einselemente der Faktoren und vereinbaren wir für jeden Vektor $v \in V$ und $Q \in K[X]/\langle P\rangle$ die Notation $Qv = (Q(f))(v)$, so wird $v = e_1v + \ldots + e_nv$ eine Zerlegung mit $e_iv \in \mathrm{Eig}(f;\lambda_i)$. □

Korollar 4.6.7 (Galoiserweiterungen von Primzahlgrad). *Seien p eine Primzahl und K ein Körper einer Charakteristik $\mathrm{char}\, K \neq p$, der alle p-ten Einheitswurzeln enthält. Genau dann ist eine echte Erweiterung unseres Körpers Galois vom Grad p, wenn sie durch Adjunktion einer p-ten Wurzel entsteht.*

Beweis. Eine Galoiserweiterung von Primzahlgrad ist zyklisch, denn jede Gruppe von Primzahlordnung ist zyklisch. Das Korollar folgt damit aus 4.6.3. □

Definition 4.6.8. Sind in einem Körper Ω zwei Teilkörper $K, L \subset \Omega$ gegeben, so bezeichnet $(KL) \subset \Omega$ den von K und L in Ω erzeugten Teilkörper. Man nennt diesen Körper das **Kompositum von K und L in Ω**.

4.6.9 (**Diskussion der Notation**). Für das Kompositum ist die abkürzende Notation $(KL) = KL$ üblich. Ich verwende hier etwas pedantisch die Notation (KL), da ja KL in unseren Konventionen [GR] 2.2.1.3 a priori nur die Menge aller Produkte bedeutet und man oft runde Klammern als Symbol für die „Erzeugung als Körper“ verwendet.

Satz 4.6.10 (Translationssatz der Galoistheorie). *Seien in einem Körper Ω zwei Teilkörper $L, K \subset \Omega$ gegeben. Ist $L \supset (L \cap K)$ eine endliche Galoiserweiterung, so ist auch $(LK) \supset K$ eine endliche Galoiserweiterung und die Restriktion liefert einen Isomorphismus von Galoisgruppen*

$$\mathrm{Gal}((LK)/K) \tilde{\to} \mathrm{Gal}(L/L\cap K)$$

4.6.11. Insbesondere gilt dieser Situation $[L : L\cap K] = [(LK) : K]$. Ohne die Galois-Bedingung gilt das im Allgemeinen nicht. Als Gegenbeispiel betrachte man in $\Omega := \mathbb{C}$ die von zwei verschiedenen dritten Wurzeln aus 2 über $\mathbb{Q}$ erzeugten Teilkörper K und L. Da jeder von ihnen nur zwei Teilkörper hat, muß hier gelten $L \cap K = \mathbb{Q}$. Ihr Kompositum (LK) hat Grad 6 über $\mathbb{Q}$ und damit Grad 2 über L und über K.

Vorschau 4.6.12. Der obige Translationssatz gilt auch ohne die Annahme, unsere Erweiterung sei endlich. Sogar wenn wir nur $L \supset (L \cap K)$ normal annehmen, folgt bereits $(LK) \supset K$ normal und die Restriktion liefert einen Isomorphismus von Galoisgruppen. Wir zeigen das in 6.2.2.

Beweis. Mit $L/L \cap K$ ist auch $(LK)/K$ erzeugt von endlich vielen separablen Elementen beziehungsweise ein Zerfällungskörper. Also ist $(LK)/K$ Galois und K ist nach 4.1.12 der Fixkörper der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}((LK)/K)$, in Formeln $K = (LK)^G$. Da L normal ist über $L \cap K$, stabilisieren alle Körperautomorphismen von (LK) über K den Unterkörper L und die durch Restriktion gegebene Abbildung $\rho : \mathrm{Gal}((LK)/K) \to \mathrm{Gal}(L/L \cap K)$ zwischen den Galoisgruppen ist offensichtlich injektiv. Der Fixkörper des Bildes von ρ ist aber genau $L^{\rho(G)} = L \cap K$. Das zeigt mit unserem Satz 4.1.9 über Galoiserweiterungen durch Gruppenoperationen $\rho(G) = \mathrm{Gal}(L/L \cap K)$ alias die Surjektivität der Restriktionsabbildung. □

Korollar 4.6.13. *Sind in einem Körper Ω Teilkörper $T \supset S$ sowie M gegeben und ist $T \supset S$ endlich und Galois, so ist auch $(TM) \supset (SM)$ endlich und Galois und die Restriktion liefert eine Inklusion von Galoisgruppen*

$$\mathrm{Gal}((TM)/(SM)) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(T/S)$$

4.6.14. Der Fall $T = M$ zeigt, daß wir hier im allgemeinen keine Gleichheit von Galoisgruppen erwarten dürfen.

Beweis. Wir wenden den Translationssatz an auf $L := T$ und $K := (SM)$. Mit $T \supset S$ ist ja erst recht $T \supset (T \cap (SM))$ Galois, etwa nach der Galoiskorrespondenz. Also ist nach dem Translationssatz 4.6.10 auch die Körpererweiterung $(TM) = (T(SM)) \supset (SM)$ Galois und letztere beiden Erweiterungen haben nach dem Translationssatz dieselbe Galoisgruppe. □

Definition 4.6.15. Sei L/K eine Körpererweiterung. Wir nennen L eine **Radikalerweiterung von** K, wenn es eine Körperkette

$$L = K_r \supset \ldots \supset K_1 \supset K_0 = K$$

gibt derart, daß der nächstgrößere Körper jeweils entsteht durch Adjunktion einer Wurzel, daß es also in Formeln jeweils $\alpha_i \in K_i$ und $n_i \geq 2$ gibt derart, daß gilt $\alpha_i^{n_i} \in K_{i-1}$ und $K_i = K_{i-1}(\alpha_i)$.

4.6.16. Das Wort „Radikal“ ist der lateinische Ausdruck für „Wurzel“. Unsere Radikalerweiterungen würde man also auf Deutsch bezeichnen als „Erweiterungen, die durch sukzessives Wurzelziehen entstehen“.

Definition 4.6.17. Sei M/K eine Körpererweiterung. Wir sagen, ein Element $\alpha \in M$ läßt sich **darstellen durch Radikale über** K, wenn sich $K(\alpha)$ über K in eine Radikalerweiterung von K einbetten läßt, wenn es also in Formeln eine Radikalerweiterung L/K gibt mit $\mathrm{Ring}^K(K(\alpha), L) \neq \emptyset$.

Beispiel 4.6.18. Die folgende reelle Zahl läßt sich darstellen durch Radikale über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:

$$\frac{\sqrt[7]{\sqrt[5]{6}+3}+13}{\sqrt[2]{3}+8} - \sqrt[17]{19876} + \sin(\pi/7)$$

Definition 4.6.19. Seien K ein Körper und $P \in K[X]\backslash 0$ ein von Null verschiedenes Polynom. Wir sagen, die Gleichung $P(X) = 0$ läßt sich **auflösen durch Radikale**, wenn sich alle Nullstellen des Polynoms P in seinem Zerfällungskörper durch Radikale über K darstellen lassen.

4.6.20. Ist unser Polynom irreduzibel, so läßt es sich offensichtlich genau dann auflösen durch Radikale, wenn sich eine Nullstelle durch Radikale über K darstellen läßt.

Definition 4.6.21. Eine Gruppe G heißt **auflösbar**, wenn es eine Folge von Untergruppen $1 = G_r \subset \ldots \subset G_1 \subset G_0 = G$ gibt mit G_i normal in G_{i-1} und G_{i-1}/G_i abelsch für $1 \leq i \leq r$.

4.6.22. Ist G eine endliche auflösbare Gruppe, so gibt es offensichtlich auch eine Folge wie in der Definition mit G_{i-1}/G_i nicht nur abelsch, sondern sogar zyklisch von Primzahlordnung.

Proposition 4.6.23 (Radikalerweiterungen und Galoiserweiterungen). *Sei K ein Körper der Charakteristik $\mathrm{char}\, K = 0$ und sei L/K eine Körpererweiterung von K. So sind gleichbedeutend:*

1. *Die Erweiterung L läßt sich einbetten in eine Radikalerweiterung von K;*
2. *Die Erweiterung L läßt sich einbetten in eine endliche Galoiserweiterung von K mit auflösbarer Galoisgruppe.*

Beweis. $2 \Rightarrow 1$. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung mit auflösbarer Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. So gibt es eine Folge von Untergruppen

$$1 = G_r \subset \ldots \subset G_1 \subset G_0 = G$$

mit G_i normal in G_{i-1} und G_{i-1}/G_i zyklisch von Primzahlordnung für $1 \leq i \leq r$. Die zugehörige Kette von Fixkörpern ist eine Kette von Galoiserweiterungen von Primzahlgrad

$$L = K_r \supset \ldots \supset K_1 \supset K_0 = K$$

Adjungieren wir eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel ζ, so erhalten wir nach dem Translationssatz 4.6.10 oder besser seinem Korollar 4.6.13 und zusätzlich unserer Diskussion von Kreisteilungserweiterungen für den ersten Schritt wieder eine Kette

$$L(\zeta) = K_r(\zeta) \supset \ldots \supset K_1(\zeta) \supset K_0(\zeta) \supset K$$

von Galoiserweiterungen und alle höheren Schritte sind entweder von Primzahlordnung oder trivial. Nach Korollar 4.6.7 über Galoiserweiterungen von Primzahlgrad ensteht hier, da wir nun die entsprechenden Einheitswurzeln auch mit im Boot haben, jede höhere Stufe durch Adjunktion einer geeigneten Wurzel aus der vorherigen Stufe. Mithin läßt sich L in eine Radikalerweiterung von K einbetten, nämlich in die Radikalerweiterung $L(\zeta)$.

$1 \Rightarrow 2$. Sei L/K eine Radikalerweiterung. Offensichtlich können wir L auch erhalten, indem wir sukzessive Wurzeln von Primzahlordnung adjungieren. Es gibt also eine Körperkette

$$L = K_r \supset \ldots \supset K_1 \supset K_0 = K$$

sowie geeignete $\alpha_i \in K_i$ und Primzahlen p_i derart, daß für alle $i \geq 1$ gilt $K_i = K_{i-1}(\alpha_i)$ und $\alpha_i^{p_i} \in K_{i-1}$. Ist n das Produkt dieser p_i und adjungieren wir zu L eine primitive n-te Einheitswurzel ζ, so ist im Körperturm

$$L(\zeta) = K_r(\zeta) \supset \ldots \supset K_1(\zeta) \supset K_0(\zeta) = K(\zeta) \supset K$$

jeder Schritt eine abelsche Erweiterung. Das folgt im ersten Schritt aus dem Translationssatz der Galoistheorie oder besser seinem Korollar 4.6.13, da wir ja nach 4.4.2 bereits wissen, daß $\mathbb{Q}(\zeta) \supset \mathbb{Q}$ eine abelsche Erweiterung ist. Andererseits wissen wir $K_i(\zeta) = K_{i-1}(\zeta)(\alpha_i)$ mit $\alpha_i^{p_i} \in K_{i-1}(\zeta)$ und damit ist nach Korollar 4.6.7 über Galoiserweiterungen von Primzahlgrad diese Erweiterung eine zyklische Galoiserweiterung oder trivial. Vergrößern wir nun $L(\zeta)$ zu einer normalen Erweiterung N/K und betrachten darin das Kompositum $M \subset N$ aller $\varphi(L(\zeta))$ mit $\varphi \in \mathrm{Ring}^K(L(\zeta), N)$, betrachten also in anderer Terminologie die normale Hülle M von $L(\zeta)$, so ist M eine Galoiserweiterung von K und es gibt einen Körperturm

$$M = M_t \supset \ldots \supset M_1 \supset M_0 = K$$

derart, daß jede Stufe eine abelsche Erweiterung ist: Um solch einen Körperturm anzugeben, zählen wir unsere φ auf als $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, beginnen mit $M_1 = M_0(\zeta)$ und adjungieren der Reihe nach $\varphi_1(\alpha_1)$, $\varphi_1(\alpha_2)$, …, $\varphi_1(\alpha_r)$, $\varphi_2(\alpha_1)$, $\varphi_2(\alpha_2)$, …, $\varphi_2(\alpha_r)$, …, $\varphi_m(\alpha_1)$, $\varphi_m(\alpha_2)$, …, $\varphi_m(\alpha_r)$. Die Galoiskorrespondenz zeigt dann, daß die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(M/K)$ auflösbar ist. □

Satz 4.6.24 (**Auflösbarkeit von Gleichungen durch Radikale**). *Seien K ein Körper der Charakteristik $\operatorname{char} K = 0$ und $P \in K[X]\backslash 0$ ein von Null verschiedenes Polynom. So sind gleichbedeutend:*

1. *Die Gleichung $P(X) = 0$ läßt sich auflösen durch Radikale;*
2. *Die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von P über K ist auflösbar.*

Beweis. Die Gleichung $P(X) = 0$ läßt sich auflösen durch Radikale genau dann, wenn sich der Zerfällungskörper L unseres Polynoms in eine Radikalerweiterung von K einbetten läßt. Nach Proposition 4.6.23 ist das gleichbedeutend dazu, daß sich L in eine endliche Galoiserweiterung M des Körpers K mit auflösbarer Galoisgruppe einbetten läßt. Da L schon selbst Galois ist und da seine Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L/K)$ ein Quotient der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(M/K)$ ist und da nach 4.6.31 Quotienten auflösbarer Gruppen auflösbar sind, ist das auch gleichbedeutend dazu, daß L selbst eine auflösbare Galoisgruppe hat. □

Proposition 4.6.25. *Hat ein irreduzibles Polynom fünften Grades aus $\mathbb{Q}[X]$ genau drei reelle und zwei komplexe Nullstellen, so ist seine Galoisgruppe die volle symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_5$ und ist damit nicht auflösbar.*

Beweis. Die komplexe Konjugation τ vertauscht zwei Nullstellen und läßt die übrigen fest. Da die Galoisgruppe G transitiv auf der 5-elementigen Menge der Nullstellen operiert, teilt nach der Bahnformel 5 die Gruppenordnung und es gibt nach 1.4.9 ein $g \in G$ von der Ordnung $\operatorname{ord} g = 5$. Man sieht etwa mit [LA1] 6.1.10, daß g und τ schon ganz $\mathcal{S}_5$ erzeugen. □

Beispiel 4.6.26. Das Polynom $X(X^2+4)(X^2-4) = X^5 - 16X$ hat genau drei reelle Nullstellen und Extrema bei $X = \pm 2/\sqrt[4]{5}$ mit Werten $\pm 32(\frac{1}{5} - 1)1/\sqrt[4]{5}$, die im Absolutbetrag größer sind als zwei. Das Polynom $X^5 - 16X + 2$ hat also ebenfalls genau drei reelle und zwei komplexe Nullstellen, und es ist darüber hinaus irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ nach dem Eisensteinkriterium 2.8.2. Seine Galoisgruppe ist nach 4.6.25 folglich nicht auflösbar, und damit kann nach 4.6.24 die Gleichung $X^5 - 16X + 2 = 0$ nicht durch Radikale gelöst werden.

Beispiel 4.6.27. Das Polynom $X^5 - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium 2.8.2. Es ist jedoch durchaus auflösbar durch Radikale.

4.6.28 (**Adjunktion höherer Wurzeln**). Seien K ein Körper und $a \in K$ ein Element und $n \geq 1$. Ich will diskutieren, wie eine Körpererweiterung $K(\alpha)$ mit $\alpha^n = a$ und der Zerfällungskörper von $X^n - a$ aussehen können. Zunächst einmal muß ein Polynom der Gestalt $X^n - a$ nicht irreduzibel sein, wie bereits $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ zeigt. Im Zerfällungskörper von $X^n - a$ müssen auch keineswegs alle n-ten Wurzeln von a isomorphe Teilkörper erzeugen, etwa haben wir $X^4 - 9 = (X^2+3)(X^2-3)$ und $\mathbb{Q}(\mathrm{i}\sqrt{3})$ ist nicht isomoph zu $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Beispiel 4.6.29. Bemerkung 1.6.3 zeigt, daß die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_4$ auflösbar ist. Eine nichtabelsche einfache Gruppe kann nie auflösbar sein. Alle Gruppen mit weniger als 60 Elementen sind auflösbar und die Ikosaedergruppe alias die Gruppe der geraden Permutationen von 5 Elementen ist bis auf Isomorphismus die einzige nichtauflösbare Gruppe mit 60 Elementen. Beides werden wir aber hier nicht zeigen.

Ergänzung 4.6.30. Jede Gruppe der Ordnung 18 ist auflösbar. In der Tat gibt es nur eine 3-Sylow, die ist notwendig normal und wir sind fertig.

Übungen

Übung 4.6.31. Man zeige: Jede Untergruppe einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar. Gegeben $G \supset N$ eine Gruppe mit Normalteiler ist die ganze Gruppe G auflösbar genau dann, wenn N und G/N auflösbar sind. Hinweis: [LA2] 6.2.20.

Ergänzende Übung 4.6.32. Gegeben eine Gruppe G erklärt man ihre **derivierte Gruppe** als das Untergruppenerzeugnis der Menge aller Kommutatoren

$$\mathcal{D}G := (G, G)$$

und setzt induktiv $\mathcal{D}^{i+1}G := \mathcal{D}(\mathcal{D}^i G)$. Man zeige, daß eine Gruppe genau dann auflösbar ist, wenn ihre höheren derivierten Gruppen irgendwann trivial werden, wenn also in Formeln gilt $\mathcal{D}^i G = 1$ für $i \gg 0$. Man zeige weiter, daß alle höheren Derivierten $\mathcal{D}^i G$ einer Gruppe G Normalteiler von G sind.

Übung 4.6.33. Eine Gruppe G heißt **überauflösbar**, wenn es eine Folge $G = G_r \supset G_{r-1} \supset G_{r-2} \supset \ldots \supset G_0 = 1$ von Normalteilern von G gibt mit G_i/G_{i-1} zyklisch für $1 \leq i \leq r$. Man zeige: Jede endliche nilpotente Gruppe ist überauflösbar.

Übung 4.6.34. Gegeben Primzahlen p, q ist die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers L von $X^p - q \in \mathbb{Q}[X]$ isomorph zum semidirekten Produkt $\mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{F}_p^\times$ in Bezug auf die offensichtliche Wirkung von $\mathbb{F}_p^\times$ auf $\mathbb{F}_p$. Hinweis: Mit 4.7.9 kann man das sogar allgemeiner zeigen für $q \in \mathbb{Q}^\times \backslash (\mathbb{Q}^\times)^p$. Wählt man zu einem Erzeuger von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})/\mathbb{Q})$ ein Urbild $\rho \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, so ist $\sigma := \rho^p$ von der Ordnung $p-1$ und restringiert zu einem Erzeuger von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})/\mathbb{Q})$.

Übung 4.6.35. Seien in einem Körper Ω zwei Teilkörper $L, K \subset \Omega$ gegeben. Sind $L \supset (L \cap K)$ und $K \supset (L \cap K)$ beide endliche Galoiserweiterungen, so ist auch $(LK) \supset (L \cap K)$ eine endliche Galoiserweiterung und die Restriktionen liefern einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{Gal}((LK)/L \cap K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L/L \cap K) \times \mathrm{Gal}(K/L \cap K)$$

4.7 Lösung kubischer Gleichungen

4.7.1. Jetzt interessieren wir uns für **kubische Gleichungen**, also Gleichungen der Gestalt

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Ihre Galoisgruppen sind auflösbar als Untergruppen von $\mathcal{S}_3$, also müssen sich kubische Gleichungen zumindest in Charakteristik Null durch Radikale lösen lassen. Um explizite Lösungsformeln anzugeben, bringen wir zunächst durch die Substitution $x := y - a/3$ den quadratischen Term zum Verschwinden und gehen über zu einer Gleichung der Gestalt $y^3 + py + q = 0$. Für die Lösungen derartiger Gleichungen gibt der folgende Satz eine explizite Formel.

Satz 4.7.2. *Gegeben komplexe Zahlen p, q erhält man genau die Lösungen der Gleichung $y^3 + py + q = 0$, wenn man in der* **Cardano'schen Formel**

$$y_{1/2/3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

bei beiden Summanden dieselbe Quadratwurzel fest wählt und dann die beiden Kubikwurzeln so zieht, daß ihr Produkt gerade $-p/3$ ist.

4.7.3. Dasselbe gilt sogar für jeden beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper einer von zwei und drei verschiedenen Charakteristik. Dieser Trick war bei den Italienern schon im 16.-ten Jahrhundert bekannt und wurde von den Experten sorgsam geheimgehalten. Diese schlagende Anwendung der komplexen Zahlen war der Ausgangspunkt ihres Siegeszugs in der höheren Mathematik. Selbst wenn alle drei Nullstellen unserer kubischen Gleichung reell sind, ist es nicht möglich, unser Lösungsverfahren ohne die Verwendung der komplexen Zahlen anzuwenden. Die Bemerkung 4.7.11 zeigt, daß der Übergang zu komplexen Zahlen hier wirklich notwendig und nicht etwa nur unserer Ungeschicklichkeit geschuldet ist.

Beweis. Daß wir auf diese Weise wirklich nur Lösungen unserer Gleichung erhalten, kann man unschwer nachrechnen. Daß wir alle Lösungen erhalten, folgt auch recht schnell: Stimmen zwei derartige Lösungen überein, sagen wir $u + v = \zeta u + \zeta^{-1} v$ für verträgliche Wahlen u und v der beiden Kubikwurzeln und eine dritte Einheitswurzel $\zeta \neq 1$, so folgern wir $(1 - \zeta)u = (\zeta^{-1} - 1)v$, also $\zeta u = v$, also $u^3 = v^3$, damit das Verschwinden der Diskriminante $27q^2 + 4p^3$, und damit gibt es auch nur höchstens zwei Lösungen nach 2.9.18. Stimmen alle drei so konstruierten Lösungen überein, so folgt zusätzlich $\zeta^{-1} u = v$, also $u = v = 0$ und $q = p = 0$ und unsere Gleichung hat in der Tat als einzige Lösung $y = 0$. □

4.7.4. Wie wir sehen, ist es nicht schwer, die Cardano'sche Formel nachzuprüfen. Ich will nun erst erklären, wie man durch Galoistheorie auf diese Formel geführt

wird, und anschließend in **??**, warum man sie dann auch in der Situation von Satz 4.7.2 anwenden darf, in denen diese Herleitung a priori nicht sinnvoll ist.

4.7.5 (**Plan zur Herleitung der Cardano'schen Formeln**). Wir gehen aus von einem Körper Z einer Charakteristik $\operatorname{char} Z \neq 2, 3$ mit einer treuen Operation der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$ und einer nichttrivialen dritten Einheitswurzel $\zeta \neq 1$ im Fixkörper K. Die Gruppe $\mathcal{S}_3$ ist auflösbar, genauer ist das Signum eine Surjektion auf die zweielementige Gruppe und ihr Kern ist eine zyklische Gruppe A_3 der Ordnung drei. Nach der Galoiskorrespondenz bilden die Invarianten von $\langle\sigma\rangle = A_3$ also einen Zwischenkörper Q und in der Körperkette

$$K \subset Q \subset Z$$

ist die erste Erweiterung quadratisch und die zweite zyklisch von der Ordnung drei. Sei $\sigma \in \mathcal{S}_3$ eine zyklische Permutation und die Bahn von $\alpha \in Z$ habe die drei Elemente α, β, γ mit $\sigma(\alpha) = \beta, \sigma(\beta) = \gamma, \sigma(\gamma) = \alpha$. Wir betrachten das Polynom

$$(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) = X^3 + rX^2 + pX + q$$

und finden $r, p, q \in K$ und wollen α, β, γ durch durch Wurzelausdrücke in r, p, q beschreiben. Wir konzentrieren uns auf α. Nach dem Beweis des Satzes 4.6.3 über zyklische Erweiterungen, vergleiche auch 4.6.4, gilt es dafür α zu zerlegen in Eigenvektoren unter σ zu den Eigenwerten $1, \zeta, \zeta^2$, sagen wir

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_\zeta + \alpha_{\zeta^2}$$

mit $\sigma(\alpha_\xi) = \xi\alpha_\xi$. Dazu brauchen wir $\zeta \in K$ und $\operatorname{char} K \neq 3$. Wir schreiben diese Eigenwertzerlegung in neuen Notationen als

$$\alpha = t + u + v$$

und finden $t, a := u^3, b := v^3 \in Q$. Nun induziert jede Transposition $\tau \in \mathcal{S}_3$ denselben Automorphismus τ von Q und wir zerlegen unsere drei Elemente aus Q weiter in Eigenvektoren unter τ zu den Eigenwerten ± 1 als

$$t = t_+ + t_- \qquad a = a_+ + a_- \qquad b = b_+ + b_-$$

Dazu brauchen wir $\operatorname{char} K \neq 2$. Dann gilt $t_+, a_+, b_+ \in K$ und $t_+^2, a_+^2, b_+^2 \in K$. Offensichtlich gilt für das Produkt $E := (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$ bereits $E \in Q^\times$ und $\tau(E) = -E$. Folglich ist $Q = K \oplus KE$ die Zerlegung von Q in Eigenräume unter τ und es gilt

$$D := E^2 \in K$$

Jetzt gilt es nur noch, die Elemente $t_+, a_+, b_+ \in K$ auszurechnen sowie die Konstanten $T, A, B \in K$ mit $t_- = TE$ und $a_- = AE$ und $b_- = BE$. Sobald das geleistet ist, finden wir als Lösungsformel

$$\alpha = t + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = t_+ + T\sqrt{D} + \sqrt[3]{a_+ + A\sqrt{D}} + \sqrt[3]{b_+ + B\sqrt{D}}$$

Da wir bei der Herleitung keine Eigenschaft von α verwendet haben, die die beiden anderen Nullstellen β, γ nicht genauso haben, können wir alle Lösungen in dieser Form schreiben, indem wir eine Quadratwurzel $\sqrt{D}$ fest wählen und dann verschiedene dritte Wurzeln ziehen. Wir behaupten hier nicht, daß alle möglichen Wahlen von dritten Wurzeln dann Nullstellen liefern, das ist auch im allgemeinen falsch. Um unseren Rechenplan umzusetzen, erkläre ich in einem Einschub, wie man die darin verwendeten Eigenwertzerlegungen bestimmen kann.

4.7.6 (**Eigenwertzerlegung unter Endomorphismus endlicher Ordnung**). Seien K ein Körper und Z ein K-Vektorraum und $\sigma : Z \to Z$ eine K-lineare Abbildung und $n \in \mathbb{N}$ mit $\sigma^n = \mathrm{id}$. Die Charakteristik $\mathrm{char}\, K$ sei kein Teiler von n und das Polynom $X^n - 1$ zerfalle vollständig in K. Wir wissen etwa aus 4.6.6, daß sich jeder Vektor $z \in Z$ eindeutig als eine Summe von Elementen der Eigenräume von σ zu den verschiedenen Eigenwerten darstellen lassen muß. Hier geben wir nun diese Darstellung ganz explizit an. Gegeben eine n-te Einheitswurzel $\zeta \in K$ setzen wir dazu

$$z_\zeta := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-i} \sigma^i(z)$$

So gilt $\sigma(z_\zeta) = \zeta z_\zeta$ alias $z_\zeta \in \mathrm{Eig}(\sigma; \zeta)$. Darüberhinaus folgt

$$z = \sum_{\zeta^n = 1} z_\zeta$$

aus der Erkenntnis $\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i = 0$ für jede n-te Einheitswurzel $\zeta \neq 1$. Damit haben wir die Eigenwertzerlegung von z gefunden.

4.7.7 (**Herleitung der Cardano'schen Formeln**). Wir übernehmen die Notation aus unserem Plan 4.7.5, ziehen uns aber auf den einfacher zu berechnenden Fall

$$Y^3 + pY + q = (Y - \alpha)(Y - \beta)(Y - \gamma)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in Z$ zurück, was ja wie zuvor besprochen durch eine einfache Substitution gelingt. Das bedeutet, daß zusätzlich gilt $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Wir finden

$$\begin{array}{rclcll} t & = & \alpha_1 & = & \frac{1}{3}(\alpha + \sigma(\alpha) + \sigma^2(\alpha)) & = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \\ u & = & \alpha_\zeta & = & \frac{1}{3}(\alpha + \zeta^{-1}\sigma(\alpha) + \zeta^{-2}\sigma^2(\alpha)) & = \frac{1}{3}(\alpha + \zeta^2\beta + \zeta\gamma) \\ v & = & \alpha_{\zeta^2} & = & \frac{1}{3}(\alpha + \zeta^{-2}\sigma(\alpha) + \zeta^{-4}\sigma^2(\alpha)) & = \frac{1}{3}(\alpha + \zeta\beta + \zeta^2\gamma) \end{array}$$

Wegen $\alpha+\beta+\gamma=0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 3u &= (1-\zeta)\alpha+(\zeta^2-\zeta)\beta \\ 3v &= (1-\zeta^2)\alpha+(\zeta-\zeta^2)\beta \end{aligned}$$

Um beim Ausmultiplizieren von $a:=u^3$ den Rechenaufwand zu verringern, formen wir um zu $3u/(1-\zeta)=\alpha-\zeta\beta$ und beachten $(1-\zeta)^3=1-3\zeta+3\zeta^2-1=3(\zeta^2-\zeta)$ und $q=-\alpha\beta\gamma=\alpha^2\beta+\beta^2\alpha$ und $(\zeta-\zeta^2)^2=-3$ und finden

$$\begin{array}{ccccc} 9a/(\zeta^2-\zeta) & = & 9u^3/(\zeta^2-\zeta) & = & \alpha^3-3\zeta\alpha^2\beta+3\zeta^2\alpha\beta^2-\beta^3 \\ 9\tau(a)/(\zeta^2-\zeta) & & & = & -\alpha^3+3\zeta^2\alpha^2\beta-3\zeta\alpha\beta^2+\beta^3 \\ 18a_+/(\zeta^2-\zeta) & & & = & 3(\zeta^2-\zeta)(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2) \\ a_+ & & & = & -q/2 \\ 18a_-/(\zeta^2-\zeta) & & & = & 2\alpha^3+3(\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)-2\beta^3 \\ a_- & & & = & (\zeta^2-\zeta)E/18 \end{array}$$

wegen $E:=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=2\alpha^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-2\beta^3$. Indem wir ζ und ζ^2 vertauschen, erhalten wir für $b:=v^3$ ebenso $b_+=-q/2$ und $b_-=(\zeta-\zeta^2)E/18$. In 2.9.18 haben wir unter der Annahme $\alpha+\beta+\gamma=0$ bereits

$$D:=E^2=-4p^3+-27q^2$$

gefunden. So erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \alpha &= u+v \\ &= \sqrt[3]{a_++a_-}+\sqrt[3]{b_++b_-} \\ &= \sqrt[3]{a_++A\sqrt{D}}+\sqrt[3]{b_++B\sqrt{D}} \\ &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}+\tfrac{\zeta^2-\zeta}{18}\sqrt{-4p^3-27q^2}}+\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}+\tfrac{\zeta-\zeta^2}{18}\sqrt{-4p^3-27q^2}} \\ &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{q}{2}\right)^2+\left(\tfrac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

mit dem letzten Schritt wegen der bereits oben bemerkten Identität $(\zeta-\zeta^2)^2=-3$. Ich bemerke, daß es hier von der Wahl der jeweiligen festen Quadratwurzel in der vorletzten und der letzten Zeile abhängt, ob bei der letzten Gleichung der erste und zweite Summand jeweils für sich genommen gleich bleiben oder ob sie vielmehr Plätze tauschen. Unsere Gleichungen für $3u$ und $3v$ von oben liefern auch

$$\begin{aligned} 9uv &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+(\zeta+\zeta^2)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)^2+(\zeta+\zeta^2-2)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \\ &= -3p \end{aligned}$$

alias $uv = -p/3$. Unsere Formel liefert mithin alle Lösungen sogar unter der zusätzlichen Maßgabe, daß wir die dritten Wurzeln so zu wählen haben, daß ihr Produkt $-p/3$ ist. Unter dieser Bedingung ist auch leicht einzusehen, daß wir stets Lösungen erhalten.

4.7.8 (**Die Cardano'schen Formeln für Kringe**). Ist unser Polynom nicht irreduzibel oder besteht seine Galoisgruppe nur aus den drei geraden Permutationen der drei Nullstellen, so funktioniert das obige Argument nur noch in mehr oder weniger stark modifizierter Form. Wir können aber ganz allgemein den Kring $k := \mathbb{Z}[2^{-1}, 3^{-1}, \zeta]$ betrachten für eine von Eins verschiedene dritte Einheitswurzel ζ. Dann lassen wir auf dem Polynomring

$$L := k[{}'\alpha, \beta, \gamma]$$

die Gruppe $\mathcal{S}_3$ der Permutationen der drei Variablen operieren. Der Invariantenring ist der Polynomring $K := k[{}'p, q, r]$ mit

$$(Y - \alpha)(Y - \beta)(Y - \gamma) = Y^3 + rY^2 + pY + q$$

Die Injektion $K \hookrightarrow L$ induziert auf den Faktorringen beider Ringe nach dem von $-r = \alpha + \beta + \gamma$ erzeugt Ideal wieder eine Injektion $\bar{K} \hookrightarrow \bar{L}$. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$ operiert auch auf den Faktorringen und $\bar{K}$ ist der Invariantenring und wir haben $\bar{L} = k[{}'\alpha, \beta]$ sowie $\bar{K} = k'[p, q]$ mit der Bezeichnung $\alpha, \beta, \gamma, p, q$ für die Bilder dieser Elemente in den jeweiligen Faktorringen. In diesem Kontext bleiben alle unsere Rechnungen a posteriori sinnvoll und wir erhalten $\alpha = u + v$ mit $uv = -p/3$ und $u^3 = -(q/2) + c$ sowie $v^3 = -(q/2) - c$ mit $c^2 = (p/3)^3 + (q/2)^2$. Hierdurch sind zwar u und v nicht eindeutig bestimmt, aber wenn wir eine Wahl fest treffen und dann $\alpha := u+v$ sowie $\beta := \zeta u+\zeta^{-1}v$ sowie $\gamma := \zeta^{-1}u+\zeta v$ setzen, so prüft man in $\bar{L}$ der Tat

$$(Y - \alpha)(Y - \beta)(Y - \gamma) = Y^3 + pY + q$$

Alle diese Formeln bleiben nun natürlich richtig unter jedem Homomorphismus von $\bar{L}$ in einen beliebigen Körper oder sogar beliebigen Ring und bedeuten die Cardano'schen Formeln in großer Allgemeinheit. Wir haben bei der Herleitung sogar den Vorteil, daß wir zusätzlich den Ringautomorphismus $\kappa : k \xrightarrow{\sim} k$ mit $\kappa(\zeta) = \zeta^2$ und $\kappa^2 = \mathrm{id}$ zur Verfügung haben. Offensichtlich gilt dann $\kappa(u) = v$ und das formalisiert die Beobachtung in obiger Rechnung, daß „für v alles genauso geht wie für u, nur mit ζ und ζ^2 vertauscht".

Proposition 4.7.9 (**Irreduzibilität primer Wurzelgleichungen**). *Gegeben ein Körper K und eine Primzahl p ist für $a \in K$ das Polynom $X^p - a$ entweder irreduzibel oder es besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Sicher zerfällt unser Polynom in seinem Zerfällungskörper für eine geeignete p-te Einheitswurzel ζ als $X^p - a = \prod_{\nu=1}^{p}(X - \zeta^\nu b)$ mit $a = b^p$ wegen p ungerade. Zerfällt es nun in K als $X^p - a = fg$ mit f, g normiert und $0 < k := \operatorname{grad} f < p$, so kann man aus dem konstanten Term von f und a und Vorzeichen eine p-te Wurzel von a zusammenmultiplizieren. In der Tat hat der konstante Term c von f die Gestalt $c = \pm\xi b^k$ für eine p-te Einheitswurzel ξ. Für $d := \pm c = \xi b^k$ Es folgt $d^p = b^{kp} = a^k$. Unter der Annahme $a \neq 0$ führt der Ansatz $(d^n a^m)^p = a$ zur Gleichung $a^{nk+mp} = a$ alias $nk + mp = 1$ und jede Lösung $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ liefert für $a \neq 0$ eine p-te Wurzel $d^n a^m$ von a in K. Der Fall $a = 0$, in dem man keine negativen Potenzen von d und a bilden könnte, ist eh unproblematisch. □

Ergänzung 4.7.10 (**Irreduzibilität allgemeiner Wurzelgleichungen**). In [Rom06, 14.1.4] findet man ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Irreduzibilität des Polynoms $T^n - a \in K[T]$ gegeben $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig und K ein beliebiger Körper und $a \in K$. Daß es im allgemeinen nicht so einfach ist wie im primen Fall aus 4.7.9, zeigt die Zerlegung

$$X^4 + 4a^4 = \big((X^2 + 2a^2) + 2aX\big)\big((X^2 + 2a^2) - 2aX\big)$$

Dort können wir natürlich noch $X = T^r$ substitutieren. Weiter ist $X^m - a^m$ offensichtlich durch $X - a$ teilbar und auch diese Teilbarkeit bleibt bei der Substitution $X = T^r$ erhalten. Gilt also $4|n$ und $a \in -4K^4$, so ist $T^n - a$ nicht irreduzibel, und gibt es $m > 1$ mit $m|n$ und $a \in K^m$, so ist $T^n - a$ auch nicht irreduzibel. Das Kriterium sagt nun, daß wenn keine dieser beiden Bedingungen zutrifft, daß dann unser Polynom $T^n - a$ auch in der Tat irreduzibel ist.

4.7.11 (**Notwendigkeit des Ausgreifens in die komplexen Zahlen**). Sei eine kubische Gleichung $X^3 + pX + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ gegeben, die drei reelle Lösungen besitzt, von denen jedoch keine zum Koeffizientenkörper $K := \mathbb{Q}(p, q) \subset \mathbb{R}$ gehört, etwa $X^3 - \frac{3}{4}X + \frac{3}{16}$ nach dem Eisensteinkriterium. Wir zeigen, daß es dann nicht möglich ist, eine Kette

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r \subset \mathbb{R}$$

von Teilkörpern von $\mathbb{R}$ so zu finden, daß unser Polynom in K_r vollständig zerfällt und K_{i+1} jeweils durch Adjunktion der positiven l_i-ten Wurzel aus einem positiven Element $a_i \in K_i \cap \mathbb{R}_{>0}$ entsteht, in Formeln

$$K_{i+1} = K_i(\sqrt[l_i]{a_i})$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hier die l_i als prim annehmen. Weiter ist das Quadrat $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ des Produkts der Differenzen der Nullstellen aus 2.9.18 in unserem Fall notwendig positiv und wir dürfen $K_1 = K(\sqrt{\Delta})$

annehmen. Unser irreduzibles kubisches Polynom ist dann auch irreduzibel über K_1, denn es kann erst in einer Körpererweiterung vom Grad Drei eine Nullstelle haben. Seinen Zerfällungskörper Z über K können wir in eine Körperkette $K \subset K_1 \subset Z \subset \mathbb{R}$ einfügen und Z/K_1 ist dann Galois vom Grad $[Z : K_1] = 3$. Gegeben eine Wurzel $\alpha \in \mathbb{R}$ unseres kubischen Polynoms mit $\alpha \notin K_s$ ist für $s \geq 1$ nach dem Translationssatz 4.6.13 also $K_s(\alpha)/K_s$ Galois vom Grad Drei. Für r kleinstmöglich mit $\alpha \in K_r$ muß damit $[K_r : K_{r-1}]$ ein Vielfaches von Drei sein. Wegen $K_r = K_{r-1}(\sqrt[l]{a})$ mit $a = a_r$ und $l = l_r$ prim muß aber nach 4.7.9 unser Polynom $X^l - a$ irreduzibel gewesen sein in $K_{r-1}[X]$ und wir folgern $[K_r : K_{r-1}] = l$. Zusammen zeigt das $l = 3$ und $K_r = K_{r-1}(\alpha)$ und damit K_r/K_{r-1} Galois vom Grad drei. Dann hinwiederum muß $X^3 - a$ in K_r vollständig in Linearfaktoren zerfallen und K_r muß drei dritte Einheitswurzeln enthalten und das steht im Widerspruch zu unserer Annahme $K_r \subset \mathbb{R}$. Der Übergang ins Komplexe oder alternativ die Verwendung trigonometrischer Funktionen zu ihrer Lösung „durch Radikale“ ist in anderen Worten unumgänglich. Lateinisch spricht man bei reellen Gleichungen dritten Grades dieser Art vom **casus irreducibilis**.

Übungen

Ergänzende Übung 4.7.12. Sei $n \geq 1$ und K ein Körper, der alle n-ten Einheitswurzeln enthält und dessen Charakteristik n nicht teilt. Man zeige: Gegeben $a \in K$ ist das Polynom $X^n - a$ irreduzibel in $K[X]$ genau dann, wenn a für keinen Teiler $d > 1$ von n eine d-te Wurzel in K besitzt.

Übung 4.7.13. Ein irreduzibles Polynom dritten Grades der Gestalt $Y^3 + pY + q$ mit Koeffizienten in einem Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k \neq 2$ hat genau dann die Galoisgruppe $\mathcal{S}_3$ über k, wenn $-4p^3 - 27q^2$ kein Quadrat in k ist. In unserer Terminologie ist $-4p^3 - 27q^2$ das Negative der Diskriminante unseres Polynoms, aber hier sind auch andere Konventionen verbreitet.

Beispiel 4.7.14. Das Polynom $X^3 - 2$ hat nach 4.1.20 oder 4.7.13 die Galoisgruppe $\mathcal{S}_3$ über $\mathbb{Q}$, denn $-108 = (-27)4$ ist kein Quadrat in $\mathbb{Q}$. Dasselbe Polynom hat jedoch Galoisgruppe A_3 über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$ nach unserem Satz über Radikalerweiterungen 4.6.3. Damit alles zusammenpaßt, muß -108 ein Quadrat im dritten Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1})$ sein. Zum Glück stimmt das auch, für ζ eine primitive dritte Einheitswurzel gilt nämlich $(\zeta - \zeta^{-1})^2 = -3$.

4.8 Einheitswurzeln und reelle Radikale*

4.8.1. Die Tabelle

	sin	cos
π	0	-1
$\pi/2$	1	0
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/5$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}/2\sqrt{2}$	$(\sqrt{5}+1)/4$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/7$	?	?
$\pi/8$	$\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}$
$\pi/9$	?	?
$\pi/10$	$(\sqrt{5}-1)/4$	$\sqrt{5+\sqrt{5}}/2\sqrt{2}$
$\pi/11$	?	?

aus [AN1] 12.4.5.33 zeigt einige $n \geq 1$, für die $\sin(\pi/n)$ und $\cos(\pi/n)$ in geschlossener Form als „reelle algebraische Ausdrücke“ dargestellt werden können, ohne daß wir bei der Berechnung der besagten Ausdrücke den Körper der reellen Zahlen verlassen müßten. Sie zeigt auch einige Fragezeichen für Fälle, in denen keine derartige Darstellung zur Verfügung steht. Wir zeigen im Folgenden, daß das nicht etwa an unserer Ungeschicklichkeit liegt, sondern daß es derartige reelle Darstellungen für die meisten n schlicht nicht gibt. Diese Aussage gilt es zunächst einmal zu präzisieren.

Definition 4.8.2. Gegeben eine Körpererweiterung $F \subset E$ definieren wir den **Radikalabschluß von** F **in** E als den kleinsten Zwischenkörper $R \subset E$ derart, daß für alle $p \geq 1$ gilt $(x^p \in R) \Rightarrow (x \in R)$. Wir notieren ihn

$$R = \mathrm{rad}(F \subset E)$$

Beispiel 4.8.3. Die folgende reelle Zahl gehört zum Radikalabschluß des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen:

$$\frac{\sqrt[7]{\sqrt[5]{6}+3}+13}{\sqrt[2]{3}+8} - \sqrt[17]{19876}$$

Definition 4.8.4. Gegeben eine Körpererweiterung $F \subset E$ definieren wir den **Quadratwurzelabschluß von** F **in** E als den kleinsten Zwischenkörper $Q \subset E$ derart, daß gilt $(x^2 \in Q) \Rightarrow (x \in Q)$. Wir notieren ihn

$$Q = \mathrm{quad}(F \subset E)$$

4.8.5. Den Quadratwurzelabschluß $\mathrm{quad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{C})$ der rationalen Zahlen in den komplexen Zahlen hatten wir bereits in 3.6.2 betrachtet und gezeigt, daß er genau aus allen konstruierbaren Zahlen besteht.

Satz 4.8.6 (Markus Rost). *Der Radikalabschluß der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen trifft jeden Kreisteilungskörper nur innerhalb des Quadratwurzelabschlusses der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt also in Formeln*

$$\mathrm{rad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1}) \quad \subset \quad \mathrm{quad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$$

Ergänzung 4.8.7. Für jeden Teilkörper $K \subset \mathbb{R}$ und jedes $n \geq 1$ gilt allgemeiner $\mathrm{rad}(K \subset \mathbb{R}) \cap K(\sqrt[n]{1}) \subset \mathrm{quad}(K \subset \mathbb{R})$. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe.

4.8.8. Der Satz von Rost zeigt, daß $\cos(2\pi/7)$ nicht zum Radikalabschluß von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ gehören kann. In der Tat gehört diese reelle Zahl zu einem Kreisteilungskörper und müßte nach dem Satz von Rost anderfalls sogar zum Quadratwurzelabschluß von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ gehören. Das steht jedoch im Widerspruch zu unserer Erkenntnis, daß das regelmäßige Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Weiter ist $\cos(2\pi/7)$ nach 4.1.21 auch eine von drei reellen Nullstellen des Polynoms $X^3 + X^2 - 2X - 1$. Wir sehen so ein weiteres Mal, daß kubische Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, selbst wenn sie drei reelle Nullstellen haben, im allgemeinen nicht durch „algebraische Rechenoperationen im Rahmen der reellen Zahlen“ gelöst werden können. Im übrigen ist $\cos(2\pi/7)$ ein Erzeuger des Schnitts des siebten Kreisteilungskörpers mit der reellen Achse, dieser Schnitt muß Grad $6/2 = 3$ über $\mathbb{Q}$ haben, und besagtes Polynom ist gerade das Minimalpolynom von $\cos(2\pi/7)$ über $\mathbb{Q}$.

4.8.9. Genau dann gehört $\sin(\pi/n)$ zum Radikalabschluß der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen, wenn das regelmäßige n-Eck konstruierbar alias $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz ist. In der Tat liegt $\sin(\pi/n)$ sicher in einem Kreisteilungskörper. Liegt $\sin(\pi/n)$ auch im Radikalabschluß $\mathrm{rad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$ der rationalen in den reellen Zahlen, so folgt $\sin(\pi/n) \in \mathrm{quad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$ aus dem Satz 4.8.6 von Rost. Damit ist $\sin(\pi/n)$ aber nach 3.6.2 konstruierbar und damit dann unschwer auch das regelmäßige n-Eck. Der Beweis der Gegenrichtung bleibe dem Leser überlassen.

Beweis des Satzes von Rost 4.8.6. Wir halten eine natürliche Zahl $n \geq 1$ für den folgenden Beweis fest und vereinbaren die Abkürzung $Q := \mathrm{quad}(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$ für den Quadratwurzelabschluß der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen und $E := \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$ für den n-ten Kreisteilungskörper, mit einem E wie Einheitswurzel. Um den Satz zu zeigen, reicht es sicher nachzuweisen, daß für jeden Teilkörper $R \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $R \cap E \subset Q$ auch der durch Adjunktion einer primen

reellen Wurzel, also durch Adjunktion eines Elements $x \in \mathbb{R}$ mit $x^p \in R$ für eine Primzahl p entstehende Teilkörper $R(x) \subset \mathbb{R}$ diese Eigenschaft hat. Im Fall $[R(x) : R] < p$ folgt aus unseren Annahmen bereits $R(x) = R$. In der Tat haben wir für $q = [R(x) : R]$ und $a = x^p$ ja

$$\det_R(x|R(x))^p = \det_R(x^p|R(x)) = a^q$$

Es gibt also $c \in R$ mit $c^p = a^q$. Im Fall $q < p$ können wir $1 = \alpha p + \beta q$ schreiben, es folgt $a = a^{\alpha p+\beta q} = (a^\alpha c^\beta)^p$ und a hat bereits eine p-te Wurzel $y = a^\alpha c^\beta$ in R, woraus wegen $R \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ folgt $y = \pm x$ und $R(x) = R$. Es bleibt also nur noch, den Fall $[R(x) : R] = p$ zu diskutieren und in diesem Fall die Implikation

$$R \cap E \subset Q \quad \Rightarrow \quad R(x) \cap E \subset Q$$

zu zeigen. Im Fall $R(x) \cap E = R \cap E$ ist das klar. Sonst ist $(R(x) \cap E)/(R \cap E)$ eine nichttriviale Galoiserweiterung, denn das sind beides Zwischenkörper einer endlichen abelschen Erweiterung. Nach dem Translationssatz 4.6.10 ist dann auch $((R(x) \cap E)R)/R$ eine nichttriviale Galoiserweiterung. Da $R(x)/R$ Primzahlgrad hat, folgt $((R(x) \cap E)R) = R(x)$, und $R(x)/R$ ist mithin selbst eine Galoiserweiterung vom Grad p. Das Polynom $X^p - a$ ist dann notwendig das Minimalpolynom von x über R, und da jede Galoiserweiterung normal ist, müssen alle seine Nullstellen auch zu $R(x)$ gehören, also alle ζx für ζ eine beliebige p-te Einheitswurzel. Damit müssen aber alle p-ten Einheitswurzeln zu $R(x)$ gehören, also zu $\mathbb{R}$, und das gilt nur im Fall $p = 2$. Mithin sind wir in diesem Fall, und durch das Rückverfolgen unserer Argumente erhalten wir

$$[(R(x) \cap E) : (R \cap E)] = 2$$

Der Körper $R(x) \cap E$ entsteht also aus dem Teilkörper $R \cap E \subset Q$ durch Adjunktion einer Quadratwurzel. Folglich liegt $R(x) \cap E$ in der Tat bereits selbst im Quadratwurzelabschluß Q von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. □

5 Verallgemeinerungen ins Unendliche*

5.1 Ordinalzahlen

Definition 5.1.1. Eine Anordnung einer Menge heißt eine **Wohlordnung**, wenn jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Beispiel 5.1.2. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist wohlgeordnet mit ihrer üblichen Anordnung aus [LA1] 4.1.20, wie wir in 5.2.2 formal zeigen werden. Die Menge der rationalen Zahlen ist nicht wohlgeordnet mit ihrer üblichen Anordnung.

5.1.3. Gegeben eine teilgeordnete Menge X versteht man unter einem **unmittelbaren Nachfolger** oder kurz **Nachfolger** eines Elements $x \in X$ das kleinste Element „oberhalb von x“, also in Formeln das kleinste Element der Menge $\{y \in X \mid y > x\}$, wenn es denn existiert. Jedes Element hat höchstens einen unmittelbaren Nachfolger. Ebenso versteht man unter einem **unmittelbaren Vorgänger** oder kurz **Vorgänger** eines Elements $x \in X$ das größte Element „unterhalb von x“, in Formeln also das größte Element der Menge $\{y \in X \mid y < x\}$, wenn es denn existiert. Jedes Element hat höchstens einen unmittelbaren Vorgänger.

5.1.4. Jede nichtleere wohlgeordnete Menge besitzt ein kleinstes Element, das wir meist mit 0 bezeichnen. In einer wohlgeordneten Menge $(\Omega, \leq)$ hat weiter jedes Element a außer dem größten, wenn denn ein größtes Element existiert, einen unmittelbaren Nachfolger, nämlich das kleinste Element von $\Omega_{>a}$. Wir notieren diesen unmittelbaren Nachfolger

$$S(a)$$

für englisch „successor“. Manche Elemente besitzen auch unmittelbare Vorgänger, aber keineswegs alle.

Definition 5.1.5. Eine Teilmenge A einer wohlgeordneten Menge Ω heißt ein **Anfangsstück**, wenn A mit einem Element von Ω auch alle kleineren Elemente von Ω enthält.

5.1.6. Jedes von der ganzen Menge verschiedene Anfangsstück A einer wohlgeordneten Menge Ω ist von der Gestalt $A = \Omega_{<a}$ für genau ein $a \in \Omega$, nämlich für a das kleinste Element des Komplements $\Omega \backslash A$.

Definition 5.1.7. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von teilgeordneten Mengen heißt ein **Morphismus von teilgeordneten Mengen**, wenn gilt $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$. Ein **Isomorphismus von teilgeordneten Mengen** oder auch **Ordnungsisomorphismus** ist ein bijektiver Morphismus von teilgeordneten Mengen, dessen Inverses auch ein Morphismus von teilgeordneten Mengen ist. Zwei teilgeordnete

Mengen heißen **ordnungsisomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Ordnungsisomorphismus gibt.

Satz 5.1.8 (Vergleich von wohlgeordneten Mengen). *1. Gegeben wohlgeordnete Mengen $(\Omega, \leq)$ und $(\Omega', \leq')$ gibt es höchstens einen Isomorphismus von $(\Omega, \leq)$ mit einem Anfangsstück von $(\Omega', \leq')$;*

2. Gegeben wohlgeordnete Mengen $(\Omega, \leq)$ und $(\Omega', \leq')$ ist mindestens eine von beiden ordnungsisomorph zu einem Anfangsstück der anderen.

5.1.9. Insbesondere sind zwei Anfangsstücke einer wohlgeordneten Menge nur dann ordnungsisomorph, wenn sie gleich sind als Teilmengen.

Beweis. 1. Gegeben zwei verschiedene derartige Isomorphismen f, g gäbe es ein kleinstes Element $b \in \Omega$, auf dem sie verschiedene Werte annähmen. Dies Element müßte jedoch sowohl unter f als auch unter g auf das kleinste Element von $\Omega' \backslash f(\Omega_{<b}) = \Omega' \backslash g(\Omega_{<b})$ abgebildet werden. Widerspruch!

2. Wir betrachten das Mengensystem aller Anfangsstücke $A \subset \Omega$, die zu einem Anfangsstück von Ω' ordnungsisomorph sind. Die Vereinigung über dieses Mengensystem ist offensichtlich das größte Anfangsstück $A_{\max} \subset \Omega$, das zu einem Anfangsstück von Ω' ordnungsisomorph ist. Gilt $A_{\max} = \Omega$ oder $A_{\max} \cong \Omega'$, so sind wir fertig. Sonst aber wäre $A_{\max}$ vereinigt mit dem kleinsten Element außerhalb auch ordnungsisomorph zum Bild von $A_{\max}$ in Ω' vereinigt mit dem kleinsten Element außerhalb, im Widerspruch zur Maximalität von $A_{\max}$. □

Lemma 5.1.10. *Auf jeder Menge existiert eine Wohlordnung.*

Beweis. Sei X unsere Menge. Wir betrachten die Menge $\mathcal{W}$ aller Paare $(\Omega, \leq)$ mit $\Omega \subset X$ einer Teilmenge und $\leq$ einer Wohlordnung auf Ω. Auf dieser Menge $\mathcal{W}$ erklären wir eine Teilordnung durch die Vorschrift $(\Omega, \leq) \leq (\Omega', \leq')$ genau dann, wenn $(\Omega, \leq)$ ein Anfangsstück von $(\Omega', \leq')$ ist. Das Zorn'sche Lemma liefert die Existenz eines maximalen Paares $(\Omega_{\max}, \leq_{\max}) \in \mathcal{W}$. Für solch ein Paar gilt $\Omega_{\max} = X$, da wir sonst $(\Omega_{\max}, \leq_{\max})$ noch vergrößern könnten, indem wir ein weiteres Element von X hinzunehmen und die Anordnung dahingehend erweitern, daß es das größte Element der dadurch neu entstehenden Menge wird. □

5.1.11. Unter einer **Ordinalzahl** versteht man eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen. Gegeben zwei Ordinalzahlen ω und ω' nennen wir ω kleinergleich ω', wenn ω isomorph ist zu einem Anfangsstück von ω'. Wir schreiben dann

$$\omega \leq \omega'$$

Der zweite Teil des Satzes 5.1.8 bedeutet, daß je zwei Ordinalzahlen vergleichbar sind, wohingegen der zweite Teil bedeutet, daß gegeben eine durch eine wohlgeordnete Menge $(\Omega, \leq)$ repräsentierte Ordinalzahl die angeordnete Klasse aller Ordinalzahlen, die echt kleiner sind als diese, isomorph ist als angeordnete Klasse zur angeordneten Menge $(\Omega, \leq)$ selber. Jede Ordinalzahl besitzt einen unmittelbaren Nachfolger. Diejenigen Ordinalzahlen, die keinen unmittelbaren Vorgänger besitzen, heißen **Limeszahlen**. In diesem Sinne ist 0 also auch eine Limeszahl. Problematisch ist hierbei allerdings, daß wir uns mit unserem Begriff einer Isomorphieklasse in die „Klasse aller Mengen“ begeben, die schon am Rande des Gebietes liegt, in dem ich mich mit dem alleinigen Rüstzeug der naiven Mengenlehre noch sicher fühle. Man kann jedoch auch alternativ kanonische Repräsentanten wählen und mit von Neumann eine Ordinahlzahl definieren als eine wohlgeordnete Menge Ω mit der Eigenschaft, daß jedes ihrer Elemente mit der Menge der kleineren Elemente, zusammenfällt, in Formeln

$$a = \{b \in \Omega \mid b < a\} \quad \forall a \in \Omega$$

Ergänzung 5.1.12. Man definiert die **Addition** von Ordinalzahlen als das Hintereinandersetzen von wohlgeordneten Mengen. Sie ist sicher assoziativ. Es gilt jedoch zu beachten, daß diese Addition nicht kommutativ ist, zum Beispiel haben wir für die durch die wohlgeordnete Menge $\mathbb{N}$ repräsentierte Ordinalzahl ω die Formeln $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$. Wieder eine andere Ordinalzahl wäre etwa $\omega + \omega$. Man erklärt das **Produkt** zweier Ordinalzahlen als das kartesische Produkt von wohlgeordneten Mengen, versehen mit der lexikographischen Ordnung, und hätte für ω wie eben etwa

$$\omega \cdot \omega = \omega + \omega + \ldots$$

in hoffentlich verständlicher Schreibweise. Dieses Produkt ist sicher assoziativ, aber nicht kommutativ, zum Beispiel gilt $2 \cdot \omega = \omega + \omega \neq \omega = \omega \cdot 2$.

5.2 Wohlordnung und natürliche Zahlen

5.2.1. Ich erinnere an [LA1] 4.1.2. Führt man die Mengenlehre axiomatisch ein, so definiert man eine Menge als **unendlich**, wenn es eine injektive aber nicht bijektive Abbildung von unserer Menge in sich selbst gibt. Eine Menge heißt **endlich**, wenn sie nicht unendlich ist. Die Existenz einer unendlichen Menge ist eines der Axiome der Mengenlehre, wir nennen es kurz das **Unendlichkeitsaxiom**.

Satz 5.2.2 (**Charakterisierung der natürlichen Zahlen**). *Die Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer Anordnung aus [LA1] 4.1.20 ist die bis auf eindeutigen Ordnungsisomorphismus eindeutig bestimmte kleinste unendliche wohlgeordnete Menge.*

5.2.3. Insbesondere ist jede endliche wohlgeordnete Menge isomorph zu genau einem Anfangsstück der Menge der natürlichen Zahlen. Um welches Anfangsstück es sich dabei handelt, kann noch nicht einmal von der gewählten Wohlordnung abhängen, denn verschiedene Möglichkeiten würden schnell zu einer injektiven nicht surjektiven Selbstabbildung unserer Menge führen, die es ja wegen der Endlichkeit nicht geben kann. Insbesondere ist jede endliche Menge X, wie wir bereits in [LA1] 4.1.21 gesehen haben, in Bijektion zu einer Menge der Gestalt $\{n \in \mathbb{N} \mid n < a\}$ für genau ein $a \in \mathbb{N}$. Diese natürliche Zahl nennen wir ihre **Kardinalität** und schreiben $|X| = a$.

Beweis. Nach 5.1.10 und 5.1.8 können wir „die kleinste unendliche Ordinalzahl“ bilden: Dazu wählen wir mithilfe des Unendlichkeitsaxioms 5.2.1 eine unendliche Menge, erklären darauf mithilfe von 5.1.10 eine Wohlordnung, vereinigen disjunkt mit einem weiteren Element, und erweitern unsere Wohlordnung so, daß das neue Element das Größte wird. In der so entstehenden unendlichen wohlgeordneten Menge $(\Omega, \leq)$ mit einem größten Element betrachten das kleinste b derart, daß $\Omega_{<b}$ unendlich ist. Dieses $\omega = \Omega_{<b}$ ist dann die kleinste unendliche wohlgeordnete Menge in dem Sinne, daß sie in jeder unendlichen wohlgeordneten Menge als Anfangsstück auftritt. Zwischen je zwei derartigen wohlgeordneten Mengen gibt es nach 5.1.8 genau einen Ordnungsisomorphismus. Es gilt nun zu zeigen, daß ω ordnungsisomorph ist zu unserer in [LA1] 4.1.20 beschriebenen angeordneten Menge $\mathbb{N}$. Die Menge ω hat sicher kein größtes Element, denn ein solches könnten wir ihr wegnehmen und so ein unendliches echtes Anfangsstück erhalten. Mithin hat in ω jedes Element einen Nachfolger. Die Abbildung $S : \omega \to \omega$, die jedem Element seinen Nachfolger zuordnet, ist injektiv, denn haben zwei Elemente x und y denselben Nachfolger, so führen beide Annahmen $x < y$ und $x > y$ leicht zum Widerspruch. Offensichtlich gehört auch das kleinste Element $o \in \omega$ nicht zum Bild von S. Um zu zeigen, daß das Tripel (ω, o, S) die definierenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen nach [LA1] 4.1.5 hat, müssen wir nur noch prüfen, daß es keine echte S-stabile Teilmenge $Z \subsetneq \omega$ gibt mit $o \in Z$. Gegeben eine echte Teilmenge $Z \subsetneq \omega$ gäbe es aber in $\omega \backslash Z$ ein kleinstes Element b. Gilt zusätzlich $o \in Z$, so folgt $b \neq o$. Jedes Element von ω außer der Null hat aber einen Vorgänger, denn für jedes $b \in \omega$ ist $\omega_{<b}$ endlich und im Fall $b \neq o$ nicht leer und hat damit als nichtleere endliche angeordnete Menge nach [LA1] 4.1.4 ein größtes Element a. Aus $a \in Z$ folgt dann aber sofort $S(a) = b \in Z$, und das ist der gesuchte Widerspruch. □

5.3 Dimension als Kardinalität

Definition 5.3.1. Gibt es zwischen zwei Mengen eine Bijektion, so sagt man auch, sie seien **gleichmächtig**.

Vorschau 5.3.2. Unter einer **Kardinalzahl** versteht man eine Äquivalenzklasse in der Klasse aller Mengen unter der Äquivalenzrelation, die durch die Existenz einer Bijektion erklärt wird. Die Äquivalenzklasse einer Menge heißt dann ihre **Kardinalität**. Hier rede ich sehr vorsichtig von der „Klasse“ aller Mengen, da wir ja bereits aus [GR] 2.1.3.9 wissen, daß es nicht sinnvoll ist, von der „Menge aller Mengen“ zu reden. Die Gesamtheit aller Kardinalitäten ist dann auch keine Menge mehr, und wir stoßen hier wieder an die Grenze dessen, was im Rahmen der naiven Mengenlehre noch sinnvoll behandelt werden kann. Die Gesamtheit aller Kardinalitäten von Mengen, die Elemente eines gegebenen Universums [LA2] 9.11.3 sind, ist aber durchaus noch eine wohldefinierte Teilmenge besagten Universums.

5.3.3. Nach [GR] 2.1.6.7 ist keine Menge gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge.

Satz 5.3.4 (**Kardinalitäten von Basen**). *Zwischen je zwei Basen ein- und desselben Vektorraums gibt es eine Bijektion.*

Beweis. Nach dem Austauschsatz 5.3.5 gibt es eine Injektion von jeder Basis in jede andere Basis. Die Behauptung folgt dann mit dem Satz von Schröder-Bernstein 5.3.6. □

Lemma 5.3.5 (**Austauschsatz**). *Ist V ein Vektorraum, $E \subset V$ ein Erzeugendensystem und $L \subset V$ eine linear unabhängige Teilmenge, so gibt es eine Injektion $\varphi : L \hookrightarrow E$ derart, daß auch $(E \backslash \varphi(L)) \cup L$ ein Erzeugendensystem von V ist.*

Beweis. In [LA1] 1.8.2 hatten wir das für L endlich bereits gezeigt. Wir erweitern nun unseren Beweis und betrachten die „durch Einschränkung“ angeordnete Menge aller „partiellen Austauschungen“ (L', φ') bestehend aus einer Teilmenge $L' \subset L$ und einer dazu gegebenen Injektion $\varphi' : L' \hookrightarrow E$ mit der Eigenschaft, daß auch $(E \backslash \varphi'(L')) \cup L'$ ein Erzeugendensystem von V ist. Dann zeigen wir, daß gegeben ein angeordnetes System $\mathcal{L}$ von partiellen Austauschungen auch die Vereinigung L° mit dem darauf durch Fortsetzung definierten φ° eine partielle Austauschung ist, daß also $(E \backslash \varphi^\circ(L^\circ)) \cup L^\circ$ ein Erzeugendensystem ist. Aber wählen wir für einen Vektor von V unter allen Darstellung als Linearkombination von Vektoren aus einem $(E \backslash \varphi'(L')) \cup L'$ mit $(L', \varphi') \in \mathcal{L}$ eine Darstellung aus, für die wir so wenig Vektoren aus $E \backslash \varphi'(L')$ wie möglich brauchen, so ist leicht zu sehen, daß dabei diese Vektoren bereits alle zu $E \backslash \varphi^\circ(L^\circ)$ gehören. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es also eine maximale partielle Ausdehnung $(L_{\max}, \varphi_{\max})$, und es bleibt zu zeigen $L_{\max} = L$. Sonst gäbe es aber einen Vektor $w \in L \backslash L_{\max}$, und nach [LA1] 1.8.4 könnten wir den auch noch in unser Erzeugendensystem hereintauschen alias $\varphi_{\max}$ ausdehnen auf $L_{\max} \cup \{w\}$, im Widerspruch zur Maximalität. □

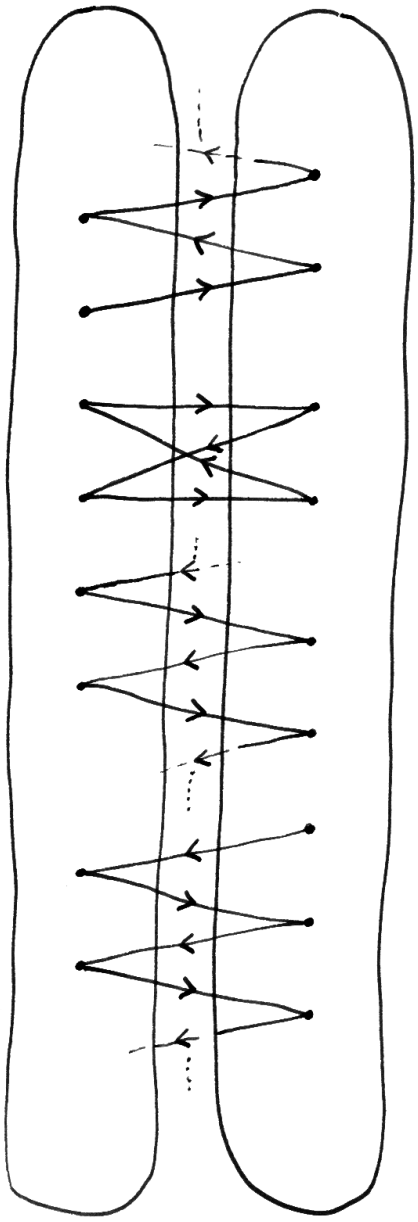


Illustration der vier Typen von Äquivalenzklassen im Beweis des Satzes von Schröder-Bernstein

Satz 5.3.6 (Schröder-Bernstein). *Seien X und Y zwei Mengen. Gibt es eine Injektion $f : X \hookrightarrow Y$ und eine Injektion $g : Y \hookrightarrow X$, so gibt es auch eine Bijektion zwischen X und Y.*

Beweis. Wir dürfen unsere beiden Mengen X und Y als disjunkt annehmen, indem wir sie andernfalls etwa durch $X \times \{0\}$ und $Y \times \{1\}$ ersetzen. Wir betrachten auf der Vereinigung $X \cup Y$ nun die Äquivalenzrelation $\sim$, die erzeugt wird von $x \sim f(x)$ und $y \sim g(y)$, und interessieren uns für deren Äquivalenzklassen. Besitzt in einer derartigen Äquivalenzklasse A ein Element $x \in A \cap X$ kein Urbild unter g, so hat unsere Äquivalenzklasse die Gestalt „einer in X beginnenden Kette“

$$A = \{x, f(x), gf(x), fgf(x), \dots\}$$

Besitzt ein Element $y \in A \cap Y$ kein Urbild unter f, so hat unsere Äquivalenzklasse die Gestalt „einer in Y beginnenden Kette“

$$A = \{y, g(y), fg(y), gfg(y), \dots\}$$

Sind wir in keinem der beiden vorhergehenden Fälle und ist unsere Äquivalenzklasse endlich, so hat sie die Gestalt „einer geschlossenen Kette“

$$A = \{x, f(x), gf(x), fgf(x), \dots, (gf)^i(x) = x\}$$

für ein $i \geq 1$ und jedes $x \in A \cap X$. Sind wir schließlich in keinem der drei vorhergehenden Fälle, so hat unsere Äquivalenzklasse die Gestalt „einer nach beiden Seiten unendlichen Kette“

$$A = \{x_i, y_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

mit x_i und y_i paarweise verschieden und $f(x_i) = y_i$, $g(y_i) = x_{i+1} \forall\, i \in \mathbb{Z}$. Man überzeugt sich nun leicht, dass für jede Äquivalenzklasse entweder f oder g oder beide eine Bijektion zwischen den Elementen aus X in unserer Äquivalenzklasse und den Elementen aus Y in unserer Äquivalenzklasse liefern. Im Zweifelsfall wählen wir hier f und erhalten auf diese Weise eine wohlbestimmte Bijektion zwischen X und Y. □

5.3.7 (**Vergleichbarkeit von Kardinalitäten**). Gegeben zwei Mengen X, Y gibt es stets entweder eine Inklusion $X \hookrightarrow Y$ oder eine Inklusion $Y \hookrightarrow X$. In der Tat, betrachten wir auf der Menge aller Tripel (X', f, Y') mit $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ und $f : X' \xrightarrow{\sim} Y'$ einer Bijektion die offensichtliche Teilordnung, so können wir das Zorn'sche Lemma anwenden und ein maximales Tripel finden, für das dann offensichtlich entweder $X' = X$ oder $Y' = Y$ gilt. Wir schreiben $|X| \leq |Y|$ falls es eine Inklusion $X \hookrightarrow Y$ gibt. Mit dem Satz von Schröder-Bernstein 5.3.6 sehen wir, daß $|X| \leq |Y| \leq |X|$ bereits $|X| = |Y|$ impliziert.

Ergänzung 5.3.8. Es liegt nun nahe, auf der Gesamtheit aller möglichen Kardinalitäten, etwa von Mengen eines gegebenen Universums, eine Teilordnung einzuführen durch die Vorschrift $|X| \leq |Y|$ genau dann, wenn eine Injektion $X \hookrightarrow Y$ existiert. Daß diese Teilordnung total ist, daß also darunter je zwei Kardinalitäten vergleichbar sind, folgt dann aus 5.3.7.

Satz 5.3.9 (**Multiplikationssatz der Mengenlehre**). *Für jede unendliche Menge ist ihr kartesisches Quadrat gleichmächtig zur Menge selber, in Formeln*

$$|M \times M| = |M|$$

Beweis. Wir zeigen zunächst eine schwächere Aussage.

Lemma 5.3.10. *Für jede unendliche Menge M gilt $|\mathbb{N} \times M| = |M|$.*

Beweis. Um dies Lemma zu zeigen, müssen wir nach Schröder-Bernstein 5.3.6 nur die Existenz einer Injektion $\mathbb{N} \times M \hookrightarrow M$ nachweisen. Dazu betrachten wir die Menge aller Paare (A, φ) mit $A \subset M$ und $\varphi : \mathbb{N} \times A \hookrightarrow A$ einer Injektion. Sie ist ein offensichtlicher Weise induktiv teilgeordnet und besitzt folglich ein maximales Element $(A_{\max}, \varphi_{\max})$. Gilt $|A_{\max}| = |M|$, so haben wir schon gewonnen. Sonst gilt nach 5.3.7 jedoch $|A_{\max}| \neq |M|$ und wir finden nach 5.3.12 eine abzählbare unendliche Menge $Z \subset M \backslash A_{\max}$. Dann aber können wir unsere Injektion zu einer Injektion $\mathbb{N} \times (A_{\max} \cup Z) \hookrightarrow A_{\max} \cup Z$ ausdehnen, indem wir eine Injektion $\mathbb{N} \times Z \xrightarrow{\sim} Z$ wählen. Widerspruch! □

Nun zeigen wir den Multiplikationssatz. Wir betrachten dazu die Menge aller Paare (A, φ) mit $A \subset M$ und $\varphi : A \times A \hookrightarrow A$ einer Injektion. Sie ist in offensichtlicher Weise induktiv teilgeordnet und besitzt folglich ein maximales Element $(A_{\max}, \varphi_{\max})$. Sicher ist dann $A_{\max}$ unendlich. Im Fall $|A_{\max}| = |M|$ haben wir schon gewonnen. Sonst gilt $|A_{\max}| < |M|$ nach 5.3.7 und dann nach Lemma 5.3.10 sogar $|\mathbb{N} \times A_{\max}| < |M|$. Wir finden also eine Einbettung $\psi : \mathbb{N} \times A_{\max} \hookrightarrow M$, von der wir sogar $\psi(0, a) = a$ fordern dürfen. Wählen wir nun eine Injektion $\xi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ mit $\xi(0, 0) = 0$, können wir die Injektion

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{N} \times A_{\max}) \times (\mathbb{N} \times A_{\max}) & \hookrightarrow & (\mathbb{N} \times A_{\max}) \\ ((i, a), (j, b)) & \mapsto & (\xi(i, j), \varphi_{\max}(a, b)) \end{array}$$

bilden. Vermittels ψ erhalten wir eine Injektion $(\operatorname{im} \psi) \times (\operatorname{im} \psi) \hookrightarrow (\operatorname{im} \psi)$, die $\varphi_{\max}$ fortsetzt. Widerspruch zur Maximalität von $(A_{\max}, \varphi_{\max})$! □

Ergänzung 5.3.11. Gegeben Mengen X, Y mit $2 \leq |X| \leq |Y|$ und Y unendlich kann man zeigen, daß gilt $|\operatorname{Ens}(Y, X)| = |\operatorname{Ens}(Y, \{0, 1\})| = |\operatorname{Pot}(Y)|$. Im allgemeinen ist die Frage nach der Kardinalität einer Menge von Abbildungen $\operatorname{Ens}(Y, X)$ nicht so leicht zu beantworten.

Übungen

Übung 5.3.12. Lassen wir aus einer unendlichen Menge endlich viele Elemente weg, so erhalten wir eine gleichmächtige Menge.

Übung 5.3.13. Gegeben ein von Null verschiedener Vektorraum abzählbarer Dimension über einem unendlichen Körper zeige man, daß der Vektorraum dieselbe Kardinalität hat wie der Grundkörper. Gegeben ein Vektorraum unendlicher Dimension über einem abzählbaren Körper zeige man, daß die Kardinalität jeder seiner Basen übereinstimmt mit der Kardinalität des ganzen Vektorraums. Jede algebraische Körpererweiterung eines unendlichen Körpers hat dieselbe Kardinalität wie besagter Körper. Hinweis: 5.3.10.

Übung 5.3.14. Gegeben ein unendlichdimensionaler Vektorraum zeige man, daß sein Dualraum stets eine im Sinne von Kardinalitäten echt größere Dimension hat. Hinweis: Man beginne mit der Betrachtung von Vektorräumen über dem Körper mit zwei Elementen und verwende 5.3.13 sowie [GR] 2.1.6.7.

Übung 5.3.15. Jede unendliche Menge ist gleichmächtig zur Menge ihrer endlichen Teilmengen. Gegeben eine surjektive Abbildung mit endlichen Fasern zwischen unendlichen Mengen sind unsere beiden Mengen gleichmächtig.

5.4 Anwendungen in der Analysis*

5.4.1 (**Die kleinste überabzählbare Ordinalzahl**). Wir können nach 5.1.10 und 5.1.8 insbesondere auch „die kleinste überabzählbare Ordinalzahl“ bilden: Dazu wählen wir mit 5.1.10 eine Wohlordnung auf einer überabzählbaren Menge, etwa auf $\mathbb{R}$, und betrachten in der so entstehenden überabzählbaren wohlgeordneten Menge $(\Omega, \leq)$ das kleinste b derart, daß $\Omega_{<b}$ überabzählbar ist. Dieses $\omega = \Omega_{<b}$ ist dann die kleinste überabzählbare wohlgeordnete Menge in dem Sinne, daß sie in jeder überabzählbaren wohlgeordneten Menge als Anfangsstück auftritt. Aber versuchen sie bloß nicht, eine derartige kleinste überabzählbare wohlgeordnete Menge explizit anzugeben! Bereits einen Repräsentanten für die „kleinste unendliche Ordinalzahl“ schreiben wir zwar leichthin auf's Papier als $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, aber ob das eigentlich eine explizite Darstellung ist, scheint mir bei näherem Hinsehen auch schon recht fragwürdig.

5.4.2. Die kleinste überabzählbare Ordinalzahl $(\omega, \leq)$ besitzt kein größtes Element, denn ein solches könnten wir ihr leicht wegnehmen. Die **Alexandroff'sche Halbgerade** wird erklärt, indem man $\omega \times [0, 1)$ lexikographisch anordnet und mit der Topologie versieht, die von allen Teilmengen $\{x \mid x > y\}$ und $\{x \mid x < y\}$ für $y \in \omega \times [0, 1)$ erzeugt wird. Läßt man aus $\omega \times [0, 1)$ das kleinste Element weg, so entsteht eine nicht parakompakte wegzusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit, wie wir im folgenden zeigen werden. Zunächst zeigen wir, daß wir

so eine wegzusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit erhalten. Genauer behaupten wir, daß $\omega_{<a} \times [0,1)$ homöomorph ist zu $[0,1)$ für alle $a \in \omega$: Ist sonst b kleinstmöglich mit $\omega_{<b} \times [0,1)$ nicht homöomorph zu $[0,1)$, so könnte b keinen direkten Vorgänger haben, wäre also eine Limeszahl, wir fänden also eine streng monoton wachsende Folge mit Supremum b, und abzählbar viele $[0,1)$ zu verkleben ist unproblematisch. Daß unser Raum nicht parakompakt ist, zeigen wir nach einer Vorbemerkung als 5.4.4.

Lemma 5.4.3. *Eine Selbstabbildung einer überabzählbaren wohlgeordneten Menge, die das kleinste Element auf sich selbst abbildet und jedes andere Element auf ein echt Kleineres, hat mindestens eine überabzählbare Faser.*

Beweis. Sei Ω unsere überabzählbare wohlgeordnete Menge und $f : \Omega \to \Omega$ unsere Selbstabbildung, von der wir in Formeln ausgedrückt fordern $f(0) = 0$ und $f(a) < a \quad \forall a \neq 0$. Es gilt zu zeigen, daß ein $b \in \Omega$ existiert mit $f^{-1}(b)$ überabzählbar. Nun muß für alle $a \in \Omega$ die Menge $\{f^n(a) \mid n \geq 0\}$ ein kleinstes Element besitzen, und das kann nur das kleinste Element 0 unserer wohlgeordneten Menge Ω sein. In anderen Worten gibt es für alle $a \in \Omega$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(a) = 0$. Wären nun alle Fasern von f abzählbar, so wären auch die Mengen $(f^n)^{-1}(0)$ abzählbar für alle $n \in \mathbb{N}$ und Ω wäre abzählbar als die Vereinigung all dieser abzählbar vielen abzählbaren Mengen. Widerspruch! □

Lemma 5.4.4. *Die Alexandroff'sche Halbgerade 5.4.2 ist nicht parakompakt. Dasselbe gilt auch für das Komplement des kleinsten Elements in der Alexandroff'schen Halbgerade.*

Beweis. Wir betrachten für jedes $a \in \omega$ das offene Intervall U_a aller Punkte, die kleiner sind als mindestens ein Punkt von $\{a\} \times [0,1)$. Sicher bilden diese U_a eine offene Überdeckung, und ich behaupte, daß diese Überdeckung keine lokal endliche Verfeinerung zuläßt. In der Tat kann man für jede Verfeinerung eine Abbildung $f : \omega \to \omega$ finden mit $f(0) = 0$ und $f(a) < a$ falls $a \neq 0$ derart, daß für $a \neq 0$ jeweils ein $t_a \in (0,1)$ existiert, für das das Intervall $[(f(a), t_a), (a, 0)]$ ganz in einer offenen Menge unserer Verfeinerung enthalten ist. Diese Abbildung f hat nun nach 5.4.3 eine überabzählbare Faser. Ist etwa $f^{-1}(b)$ überabzählbar, so hat $f^{-1}(b)$ keine obere Schranke in ω, aber es gibt natürlich ein kleinstes Element $c \in f^{-1}(b)$. Wir erkennen nun, daß $(c,0)$ zu unendlich vielen offenen Mengen unserer Verfeinerung gehört, denn für alle $a \in f^{-1}(b)$ gibt es eine offene Menge unserer Verfeinerung, die $(a,0)$ und $(c,0)$ beide enthält. □

Lemma 5.4.5. *Seien gegeben eine Menge X und darin ein System von Teilmengen $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.*

1. *Hat $\mathcal{E}$ eine Kardinalität $\leq |\mathbb{R}|$, so hat auch die davon erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ eine Kardinalität $\leq |\mathbb{R}|$, in Formeln*

$$|\mathcal{E}| \leq |\mathbb{R}| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{M}(\mathcal{E})| \leq |\mathbb{R}|$$

2. *Hat $\mathcal{E}$ eine Kardinalität $\geq |\mathbb{R}|$, so hat die davon erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ dieselbe Kardinalität wie $\mathcal{E}$, in Formeln*

$$|\mathcal{E}| \geq |\mathbb{R}| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{M}(\mathcal{E})| = |\mathcal{E}|$$

5.4.6 (**Vergleich von Lebesgue-Mengen und Borel-Mengen**). Die σ-Algebra der Borelmengen in $\mathbb{R}$ kann von einem abzählbaren Mengensystem erzeugt werden, mithin gilt nach unserem Satz 5.4.5 die Abschätzung $|\operatorname{Borel}(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}|$. Dahingegen hat die Cantormenge [AN3] 1.2.39 dieselbe Kardinalität wie $\mathbb{R}$ und alle ihre Teilmengen sind Lebesgue-meßbar. Folglich stimmt wieder nach 5.4.5 die Kardinalität der σ-Algebra der Lebesgue-Mengen in $\mathbb{R}$ überein mit der Kardinalität von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Beweis. Die von einem Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ kann wie folgt beschrieben werden: Wir beginnen mit der kleinsten überabzählbaren Ordinalzahl ω und behaupten zunächst die Existenz und Eindeutigkeit zweier Abbildungen $[0,\omega] \to \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$, $\alpha \mapsto \Pi_\alpha$ und $\alpha \mapsto \Sigma_\alpha$ mit der Eigenschaft $\Pi_0 = \Sigma_0 = \mathcal{E}$ und so, dass für $\alpha > 0$ gilt

$$\Pi_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \text{abzählbare Schnitte von Mengen aus} \\ \text{irgendwelchen } \Sigma_\beta \text{ mit } \beta < \alpha \end{array} \right\}$$

$$\Sigma_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \text{abzählbare Vereinigungen von Mengen} \\ \text{aus irgendwelchen } \Pi_\beta \text{ mit } \beta < \alpha \end{array} \right\}$$

Sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit dieser Abbildungen folgt leicht durch „transfinite Induktion“, d.h. man betrachtet das kleinste α, für das Π_α oder Σ_α nicht mehr mit diesen Eigenschaften definiert werden kann oder für das es verschiedene Möglichkeiten gibt und kommt sofort zu einem Widerspruch. Wir behaupten nun $\Pi_\omega = \Sigma_\omega = \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Hier folgt offensichtlich die zweite Gleichung aus der ersten, denn alle unsere Π_α sind stabil unter abzählbaren Schnitten und alle unsere Σ_α sind stabil unter abzählbaren Vereinigungen. Nun haben wir aber $\Pi_\alpha \subset \Sigma_{\alpha+1}$ und $\Sigma_\alpha \subset \Pi_{\alpha+1}$ per definitionem. Ein $M \in \Pi_\omega$ alias eine abzählbare Vereinigung

$$M_1 \cup M_2 \cup \ldots$$

mit $M_i \in \Pi_{\alpha(i)}$ und $\alpha(i) < \omega$ gehört also wegen $\alpha(i) + 1 < \omega$ auch zu Σ_ω und die umgekehrte Inklusion $\Sigma_\omega \subset \Pi_\omega$ zeigt man ähnlich. Geht man speziell von

einem Mengensystem der Kardinalität $|\mathcal{E}| \leq |\mathbb{R}|$ aus, so haben alle unsere Π_α und Σ_α auch höchstens die Kardinalität $|\mathbb{R}|$ und es folgt $|\mathcal{M}(\mathcal{E})| \leq |\mathbb{R}|$. Geht man dahingegen von einem Mengensystem der Kardinalität $|\mathcal{E}| \geq |\mathbb{R}|$ aus, so haben alle unsere Π_α und Σ_α dieselbe Kardinalität wie $\mathcal{E}$ und es folgt $|\mathcal{M}(\mathcal{E})| = |\mathcal{E}|$. $\square$

Übungen

Ergänzende Übung 5.4.7. Die Alexandroff'sche Halbgerade ist folgenkompakt, aber nicht überdeckungskompakt.

Übung 5.4.8. Sei $\Omega = \Omega_\alpha$ die kleinste wohlgeordnete Menge einer vorgegebenen unendlichen Kardinalität α und $X \subset \Omega$ eine Teilmenge einer echt kleineren Kardinalität. So gibt es $\omega \in \Omega$ mit $X \subset \Omega_{<\omega}$. Hinweis: Eine Vereinigung einer Familie von höchstens α Mengen einer Kardinalität höchstens α hat auch selbst nur höchstens die Kardinalität α nach dem Multiplikationssatz der Mengenlehre 5.3.9.

6 Ergänzungen zur Körpertheorie*

6.1 Tensorprodukte von Körpern

6.1.1 (**Beispiele für Tensorprodukte von Körpern**). Gegeben Körpererweiterungen L/K und M/K muß $L \otimes_K M$ keineswegs wieder ein Körper sein, wie bereits das Beispiel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ zeigt. Solch ein Tensorprodukt kann sogar von Null verschiedene nilpotente Elemente enthalten: Für ein Beispiel sei k ein Körper positiver Charakteristik $\operatorname{char} k = p > 0$. Betrachten wir nun den Funktionenkörper $K = k(T)$ und seine Erweiterung $L = k(\sqrt[p]{T}) = K[X]/\langle X^p - T\rangle$, so ergibt sich $L \otimes_K L \cong L[X]/\langle X^p - T\rangle$ und in diesem Ring ist $X - \sqrt[p]{T}$ nilpotent und von Null verschieden.

6.1.2 (**Tensorprodukt mit endlicher separabler Körpererweiterung**). Ist L/K eine endliche separable Körpererweiterung und M/K eine beliebige Körpererweiterung, so ist $L \otimes_K M$ stets ein Produkt von Körpern, die ihrerseits endlich separabel sind über M. Ist genauer $\alpha \in L$ ein primitives Element und $P \in K[X]$ sein Minimalpolynom, so entsprechen die Faktoren von $L \otimes_K M$ den irreduziblen Faktoren $P = Q_1 \dots Q_r$ von P in $M[X]$, denn wir haben Isomorphismen

$$L \otimes_K M \xrightarrow{\sim} (K[X]/PK[X]) \otimes_K M \xrightarrow{\sim} M[X]/PM[X] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} M[X]/Q_i M[X]$$

Für den letzten Schritt verwenden wird den chinesischen Restsatz und brauchen dazu, daß die Q_i paarweise teilerfremd sind. Das hinwiederum folgt aus der Separabilität von P.

6.1.3 (**Endomorphismenring einer endlichen Galoiserweiterung**). Gegeben eine Körpererweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ liefert der Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren 3.8.15 eine L-lineare Einbettung

$$L\Gamma \hookrightarrow \operatorname{Hom}_K(L, L)$$

Hierbei soll die Operation von L auf dem Hom-Raum durch Nachschalten geschehen, also $(lf)(x) = lf(x)$. Verstehen wir genauer $L\Gamma$ als getwisteten Gruppenring $L\Gamma = L^{\rtimes}\langle\Gamma\rangle$ im Sinne von [NAS] 3.9.4 mit der Multiplikation charakterisiert durch $\gamma \cdot l = \gamma(l) \cdot \gamma$, so wird unsere Einbettung ein Ringhomomorphismus $L^{\rtimes}\langle\Gamma\rangle \hookrightarrow \operatorname{End}_K(L)$. Ist schließlich unsere Körpererweiterung auch noch endlich und Galois, so ist unsere Einbettung wegen der Gleichheit der Dimensionen sogar ein Ringisomorphismus

$$L^{\rtimes}\langle\Gamma\rangle \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_K L$$

6.1.4 (**Tensorquadrat einer endlichen Galoiserweiterung**). Für jede Körpererweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ haben wir einen Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_K L & \to & \mathrm{Ens}(\Gamma, L) \\ x \otimes y & \mapsto & (\sigma \mapsto x\sigma(y)) \end{array}$$

Der Ring der Abbildungen von Γ nach L ist hierbei schlicht mit der punktweisen Multiplikation zu verstehen. Im Fall einer Galoiserweiterung ist unser Ringhomomorphismus injektiv, wie wir aus der linearen Unabhängigkeit von Charakteren folgern werden. Sind genauer $x_1, \ldots, x_r \in L$ linear unabhängig über K, so können wir sie zu einer K-Basis einer endlichen Galoiserweiterung $E \subset L$ von K ergänzen durch geeignete $x_{r+1}, \ldots, x_s$. Bilden dann $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \Gamma$ ein Repräsentantensystem von $G := \mathrm{Gal}(E/K)$, so hat die Matrix der $(\sigma_i(x_j))$ vollen Rang wegen der linearen Unabhängigkeit von Charakteren. Für $y_j \in L$ folgt aus $\sum_j y_j \sigma_i(x_j) = 0$ für alle i also $y_1 = \ldots = y_s = 0$. Im Fall einer endlichen Galoiserweiterung $\dim_K L < \infty$ entlarvt damit ein Dimensionsvergleich unseren Homomorphismus sogar als Isomorphismus

$$L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\Gamma, L)$$

Ergänzung 6.1.5. Gegeben eine endliche Galoiserweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ kann man zeigen, daß unsere Isomorphismen $L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(\Gamma, L)$ und $L^\times\langle\Gamma\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_K L$ einander entsprechen unter dem von der sogenannten „Spurform“ induzierten Isomorphismus $L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(L, K)$ und dem davon abgeleiteten Isomorphismus $L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_K(L)$. Ich führe das hier nicht weiter aus.

Satz 6.1.6 (über die Normalbasis). *Gegeben eine endliche Galoiserweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ ist L ein freier $K\langle\Gamma\rangle$-Modul vom Rang Eins.*

Beweis. Nach 6.1.4 ist $L \otimes_K L$ für die Operation von Γ auf dem zweiten Tensorfaktor ein freier $K\langle\Gamma\rangle$-Modul vom Rang $[L : K]$. Der Satz von Krull-Schmid [NAS] 7.2.15 zeigt jedoch, daß zwei endlichdimensionale $K\langle\Gamma\rangle$-Moduln, die nach endlicher Erweiterung der Skalare isomorph werden, schon von Anfang an isomorph gewesen sein müssen, denn die Erweiterung der Skalare gefolgt von der Restriktion bedeutet schlicht, eine direkte Summe von $[L : K]$ Kopien des Moduls zu nehmen. □

Ergänzung 6.1.7. Gegeben eine Erweiterung endlicher Körper kann man zeigen, daß jeder Erzeuger der multiplikativen Gruppe des großen Körpers zusammen mit seinen Bildern unter der Galoisgruppe eine Basis des großen Körpers über dem kleinen Körper bildet. Der Beweis soll hier nicht gegeben werden.

Vorschau 6.1.8. Weiteres zu Körpererwiterungen, insbesondere Norm und Spur, diskutieren wir in [KAG] 8.3.1.

6.2 Allgemeiner Translationssatz

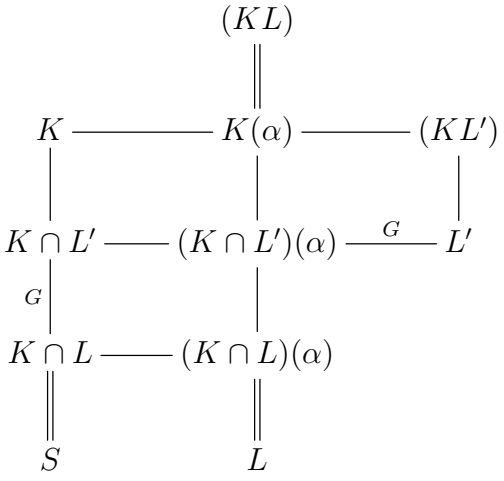
Satz 6.2.1 (Kompositum als Tensorprodukt). *Gegeben Unterkörper K, L eines gemeinsamen Körpers mit K normal über $K \cap L$ liefert die Multiplikation stets einen Isomorphismus mit dem Kompositum*

$$K \otimes_{K\cap L} L \xrightarrow{\sim} (KL)$$

Beweis. Da K algebraisch ist über $S := K \cap L$, fällt das Erzeugnis als Ring mit dem Erzeugnis als Körper zusammen, in Formeln $[KL] = (KL)$, und unser Homomorphismus ist schon mal surjektiv. Es reicht also, die Injektivität zu zeigen, und dazu können wir uns auf den Fall beschränken, daß L/S als Körpererweiterung endlich erzeugt ist. Mit einer offensichtlichen Induktion können wir uns weiter beschränken auf den Fall, daß L/S eine primitive Körpererweiterung ist, etwa $L = S(\alpha)$. Wir dürfen uns sogar auf drei Fälle beschränken: Erstens α transzendent über S, zweitens α eine p-te Wurzel eines Elements aus S für p die Charakteristik, und drittens α separabel über S. Diese drei Fälle gehen wir nun der Reihe nach durch. Ist α transzendent über S, so auch über K, und die Multiplikation liefert schon mal einen Ringisomorphismus

$$K \otimes_S S[\alpha] \xrightarrow{\sim} K[\alpha]$$

Damit erhalten wir für jedes von Null verschiedene Polynom $P \in S[\alpha]\backslash 0$ auch einen Isomorphismus $K \otimes_S P^{-1}S[\alpha] \xrightarrow{\sim} P^{-1}K[\alpha]$, und das zeigt die Injektivität der durch Multiplikation gegebenen Abbildung $K \otimes_S S(\alpha) \to K(\alpha)$ für den Fall, daß α transzendent ist über S. Ist α algebraisch über S mit $\alpha \notin S$, aber $\alpha^p \in S$ für $p > 0$ die Charakteristik, so folgt $[S(\alpha) : S] = p$ und $[K(\alpha) : K] = p$ und die Injektivität folgt durch Dimensionsvergleich. Ist schließlich α algebraisch und separabel über S, so können wir, indem wir notfalls unseren großen Körper noch weiter vergrößern, auch einen Unterkörper L' finden, der Zerfällungskörper über S des Minimalpolynoms von α über S ist. Betrachten wir nun das Diagramm



von Teilkörpern unseres großen Körpers. Für jedes in unserem Diagramm enthaltene Rechteck steht in der Ecke oben rechts das Kompositum der Körper an den beiden benachbarten Ecken. Zusätzlich zu den beiden mit G bezeichneten Körpererweiterungen ist auch noch die ganze mittlere Horizontale $L'/(K \cap L')$ offensichtlich Galois. In den drei Rechtecken über diesen Galois-Erweiterungen sind nach dem bereits bewiesenen Translationssatz für endliche Galoiserweiterungen [AL] 4.6.10 also gegenüberliegende Kanten jeweils Körpererweiterungen vom selben Grad, in Formeln

$$\begin{aligned} [(KL') : K(\alpha)] &= [L' : (K \cap L')(\alpha)] \\ [(K \cap L')(\alpha) : K \cap L'] &= [(K \cap L)(\alpha) : K \cap L] \\ [(KL') : K] &= [L' : K \cap L'] \end{aligned}$$

Aus der ersten und der letzten Gleichung für das obere große Rechteck und sein rechtes Quadrat folgt aber sofort die Identität

$$[K(\alpha) : K] = [(K \cap L')(\alpha) : K \cap L']$$

in seinem linken Quadrat, und zusammen mit der mittleren unserer drei Gleichungen aus dem unteren Quadrat ergibt sich schließlich

$$[K(\alpha) : K] = [(K \cap L)(\alpha) : K \cap L]$$

Mithilfe dieser Identität erhalten wir dann die Injektivität der Multiplikationsabbildung

$$K \otimes_{K \cap L} L \to (KL)$$

aus der Gleichheit der Dimensionen besagter K-Vektorräume. □

Satz 6.2.2 (**Translationssatz der Galoistheorie**). *Seien in einem großen Körper zwei Teilkörper K, L gegeben. Ist $K \supset (K \cap L)$ eine Galoiserweiterung, so ist auch $(KL) \supset L$ eine Galoiserweiterung. Ist $K \supset (K \cap L)$ eine normale Erweiterung, so ist auch $(KL) \supset L$ eine normale Erweiterung. In beiden Fällen liefert die Restriktion einen Isomorphismus von Galoisgruppen*

$$\mathrm{Gal}((KL)/L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K/K \cap L)$$

Beweis. Ist K Zerfällungskörper einer Familie separabler Polynome über $K \cap L$, so ist auch (KL) Zerfällungskörper derselben Familie separabler Polynome über L. Ist K Zerfällungskörper einer Familie von Polynomen über $K \cap L$, so ist auch (KL) Zerfällungskörper derselben Familie von Polynomen über L. Das zeigt die ersten Aussagen. Daß der von der Restriktion induzierte Homomorphismus auf

den Galoisgruppen injektiv ist, scheint mir offensichtlich. Daß er auch surjektiv ist erkennt man, indem man den Isomorphismus

$$K \otimes_{K\cap L} L \xrightarrow{\sim} (KL)$$

aus 6.2.1 beachtet: Wir können mit seiner Hilfe nämlich eine Spaltung unseres Homomorphismus explizit angeben durch die Vorschrift $\sigma \mapsto \sigma \otimes \mathrm{id}$. □

Korollar 6.2.3. *Sind $k \subset K \subset M$ Körper und ist K/k normal und $\alpha \in M$ algebraisch über k, so gilt für die Minimalpolynome von α die Identität*

$$\mathrm{Irr}(\alpha; k(\alpha) \cap K) = \mathrm{Irr}(\alpha; K)$$

Beweis. Man wende 6.2.1 an auf $L = k(\alpha)$. □

6.3 Krull-Topologie

Definition 6.3.1. Gegeben eine algebraische Körpererweiterung L/K erklärt man auf der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ die **Krull-Topologie** als die gröbste Topologie mit der Eigenschaft, daß für jedes Element $a \in L$ die durch das Anwenden auf a gegebene Abbildung $\mathrm{Gal}(L/K) \to L$ nach L mit seiner diskreten Topologie stetig ist.

6.3.2. Mit ihrer KrullTopologie wird die Galoisgruppe jeder algebraischen Körpererweiterung L/K eine kompakte Hausdorff'sche topologische Gruppe, und ist L/K Galois, so liefern die Abbildungen der Galoiskorrespondenz eine eineindeutige Entsprechung zwischen abgeschlossenen Untergruppen und Zwischenkörpern.

6.3.3 (**Nichtoffene Untergruppen von endlichem Index**). Untergruppen von endlichem Index in einer Galoisgruppe müssen für die Krulltopologie nicht abgeschlossen oder gleichbedeutend offen sein. Das folgende Beispiel habe ich von Franziska Jahnke gelernt: Man betrachtet die Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$, bei der man die Quadratwurzeln aller Primzahlen adjungiert, in Formeln die Erweiterung

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p} \mid p \text{ prim})/\mathbb{Q}$$

Die Galoisgruppe dieser Erweiterung ist ein abzählbares Produkt von Kopien von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Diese Gruppe hat nur abzählbar viele offene Untergruppen, aber überabzählbar viele Untergruppen von endlichem Index. Da die Restriktionsabbildung ein offener Epimorphismus ist, gilt das auch für $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Ergänzung 6.3.4. Eine Vermutung von Serre, nach der in jeder endlich erzeugten profiniten Gruppe jede Untergruppe von endlichem Index offen sein sollte, wurde 2007 von Segal und Nikolov gezeigt.

6.3.5. Gegeben eine Galoiserweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ erhalten wir eine Bijektion

$$L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Top}(\Gamma, L)$$

durch die Vorschrift $p \otimes q \mapsto (\sigma \mapsto p\sigma(q))$. Hierbei ist die Galoisgruppe mit ihrer Krulltopologie zu verstehen und L mit der diskreten Topologie. Das folgt aus dem Fall 6.1.4 einer endlichen Galoiserweiterung durch Übergang zum Kolimes.

6.4 Formen von Vektorräumen und Algebren

Definition 6.4.1. Seien K/k eine Galoiserweiterung und $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)$ ihre Galoisgruppe. Unter einer **abstrakten galoislinearen Operation** von Γ auf einem K-Vektorraum V verstehen wir eine Operation $\Gamma \times V \to V, (\gamma, v) \mapsto \gamma(v)$ auf der Menge V derart, daß für alle $v \in V$, $\lambda \in K$ gilt

$$\gamma(\lambda \cdot v) = \gamma(\lambda) \cdot \gamma(v)$$

Von einer **stetigen galoislinearen Operation** fordern wir zusätzlich die Stetigkeit der zugehörigen Abbildung $\Gamma \times V \to V$ für die Krull-Topologie auf Γ und die diskrete Topologie auf V. Wenn wir ohne weitere Spezifikationen von einer **galoislinearen Operation** reden, meinen wir eine stetige galoislineare Operation.

6.4.2. Oft ist für solch eine Operation auch die exponentielle Schreibweise $a^\gamma := \gamma^{-1}(a)$ praktisch. Das Invertieren sorgt dabei für die Identität $a^{(\gamma\sigma)} = (a^\gamma)^\sigma$.

Definition 6.4.3. Sei K/k eine Körpererweiterung. Eine **k-Form eines K-Vektorraums** V ist ein k-Untervektorraum $V_k \subset V$ derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $K \otimes_k V_k \xrightarrow{\sim} V$ liefert. Gleichbedeutend ist die Forderung, daß V_k ganz V als K-Vektorraum erzeugt und daß jede über k linear unabhängige Teilmenge unseres Untervektorraums V_k auch über K linear unabhängig ist in V.

Satz 6.4.4 (Formen und galoislineare Operationen bei Vektorräumen). *Seien K/k eine Galoiserweiterung und $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)$ ihre Galoisgruppe. Gegeben ein K-Vektorraum V mit einer galoislinearen Operation von Γ induziert die Multiplikation einen Isomorphismus*

$$K \otimes_k V^\Gamma \xrightarrow{\sim} V$$

6.4.5. Gegeben eine Galois-Erweiterung K/k mit Galoisgruppe Γ und ein K-Vektorraum V erhalten wir nach diesem Satz zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} k\text{-Formen} \\ V_k \subset V \end{array} \right\} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{galoislineare Operationen} \\ \Gamma \times V \to V \end{array} \right\}$$

durch die Vorschriften, daß wir jeder k-Form $V_k \subset V$ wir die galoislineare Operation von Γ zuordnen, die durch $\gamma : a \otimes v \mapsto \gamma(a) \otimes v \; \forall a \in K, v \in V_k$ gegeben ist, und umgekehrt jeder galoislinearen Operation $\Gamma \times V \to V$ ihre Fixpunktmenge $V_k = V^\Gamma$.

Beweis. Wir beginnen mit der Surjektivität. Gegeben $v \in V$ finden wir nach Annahme und der Definition der Krull-Topologie eine endliche Galois'sche Untererweiterung K_0/k derart, daß die Operation von Γ auf v über $\Gamma_0 := \mathrm{Gal}(K_0/k)$ faktorisiert. Sind $\sigma, \tau, \ldots, \rho$ die Elemente von Γ_0 und ist $a_\sigma, a_\tau, \ldots, a_\rho$ eine Basis von K_0 über k, so ist nach dem Satz über die lineare Unabhängigkeit von Charakteren 3.8.15 die Matrix $(a_\tau^\sigma)_{\tau,\sigma\in\Gamma_0}$ invertierbar, deren Einträge wie angedeutet durch das Anwenden der Elemente $\sigma, \tau, \ldots, \rho$ der Galoisgruppe Γ_0 auf die Elemente $a_\sigma, a_\tau, \ldots, a_\rho$ des Körpers K_0 entstehen. Es gibt also Elemente $b_{\rho,\sigma} \in K$ mit $\sum_\sigma b_{\rho,\sigma} a_\sigma^\tau = \delta_{\rho\tau}$ für alle ρ, τ. Bilden wir nun die Vektoren

$$v_\sigma := \sum_{\tau\in\Gamma_0} (a_\sigma v)^\tau = \sum_{\tau\in\Gamma_0} a_\sigma^\tau v^\tau \in V^\Gamma, \quad \text{so erkennen wir} \quad \sum_\sigma b_{1,\sigma} v_\sigma = v$$

für $1 \in \Gamma_0$ das neutrale Element. Das zeigt die Surjektivität. Nun erfüllt der Kern $\ker$ unserer Abbildung auch die Bedingung des Satzes, aus $\ker \neq 0$ folgt demnach mit dem, was wir schon wissen, sofort $\ker^\Gamma \neq 0$. Es bleibt also nur zu zeigen, daß die Γ-Invarianten in $K \otimes_k V^\Gamma$ mit dem Bild von $k \otimes_k V^\Gamma$ zusammenfallen. Dabei können wir uns leicht auf den Fall $V^\Gamma = k$ einschränken, und in diesem Fall ist es offensichtlich. □

Definition 6.4.6. Gegeben ein K-Vektorraum mit einer k-Form $V \supset V_k$ heißt ein K-Untervektorraum $W \subset V$ **definiert über** k, wenn es einen k-Untervektorraum $W_k \subset V_k$ gibt derart, daß die Multiplikation einen Isomorphismus $K \otimes_k W_k \xrightarrow{\sim} W$ liefert.

6.4.7. Seien K/k eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ und $V \supset V_k$ ein K-Vektorraum mit einer k-Form. Sei $\Gamma \times V \to V$ die zugehörige galoislineare Operation. Offensichtlich ist ein K-Untervektorraum $W \subset V$ genau dann definiert über k, wenn er unter Γ stabil ist, wenn also in Formeln gilt $\gamma(W) \subset W$ oder gleichbedeutend $\gamma(W) = W$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

6.4.8 (**Formen und bepunktete Torsoren**). Seien K/k eine Galoiserweiterung, $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)$ ihre Galoisgruppe und V ein K-Vektorraum. Für jede k-Form $\hat{V} \subset V$ erhalten wir eine Rechtsoperation von Γ durch Konjugation auf der Gruppe $\mathrm{Mod}_K^\times(V)$ der Automorphismen des K-Vektorraums V, in Formeln gegeben durch

$$p^\gamma := \hat{\gamma}^{-1} \circ p \circ \hat{\gamma}$$

für $\hat\gamma : V \to V$ unsere galoislineare Operation. Ich notiere unsere Automorphismengruppe dann $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat V)$, um anzudeuten, daß die Γ-Operation von der Form $\hat V$ abhängt. Versehen wir $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat V)$ mit der Topologie, in der die Fixatoren endlicher Teilmengen von V eine Umgebungsbasis des neutralen Elements bilden, und versehen unsere Galoisgruppe Γ mit der Krull-Topologie, so ist unsere Rechtsoperation von Γ stetig. Gegeben eine weitere k-Form $\tilde V \subset V$ liefert die offensichtliche Identifikation

$$\mathrm{Mod}_K^\times(\tilde V \otimes_k K, \hat V \otimes_k K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_K^\times(V)$$

eine Rechtsoperation der Galoisgruppe Γ auf dieser Menge durch die Vorschrift $q^{(\gamma)} := \hat\gamma^{-1} \circ q \circ \tilde\gamma$. Mit ihrer $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat V)$-Linksoperation durch Nachschalten wird unsere Menge dann ein topologischer Γ-äquivarianter $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat V)$-Torsor im Sinne von [TG] 3.8.10, in Formeln gilt insbesondere

$$(pq)^{(\gamma)} = p^\gamma q^{(\gamma)}$$

Unser Torsor besitzt auch einen ausgezeichneten Punkt, die Identität auf V. Diese Konstruktion liefert sogar für jede feste k-Form $\hat V \subset V$ eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} k\text{-Formen } \tilde V \subset V \\ \text{des } K\text{-Vektorraums } V \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Bepunktete topologische} \\ \Gamma\text{-äquivariante } \mathrm{Mod}_K^\times(\hat V)\text{-Torsoren,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

Gemeint sind rechts Isomorphismen bepunkteter Torsoren, die also den ausgezeichneten Punkt in den ausgezeichneten Punkt überführen. Die Umkehrabbildung kann wie folgt beschrieben werden: Gegeben ein bepunkteter topologischer Γ-äquivarianter $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat V)$-Torsor (X, x) erhalten wir die zugehörige galoislineare Γ-Operation auf V mit Fixpunktmenge $\tilde V$, indem wir eine Abbildung $z : \Gamma \to \mathrm{Mod}_K^\times(\hat V)$ erklären durch die Identität $x^{(\gamma)} = z(\gamma)x$ und daraus eine galoislineare Γ-Wirkung auf V machen vermittels der Vorschrift $\tilde\gamma := \hat\gamma \circ z(\gamma)$ und eben $\tilde V \subset V$ definieren als deren Fixpunktmenge. Gegeben $\varphi \in \mathrm{Mod}_K^\times(\hat V)$ entspricht nun der umbepunktete äquivariante Torsor $(X, \varphi x)$ der k-Form $\varphi(\tilde V) \subset V$. Da aber je zwei k-Formen eines K-Vektorraums V durch einen Automorphismus von V auseinander hervorgehen, gibt es insbesondere, wenn wir keinen Basispunkt auszeichnen, bis auf Isomorphismus nur einen einzigen topologischen Γ-äquivarianten $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat V)$-Torsor. In der Sprache der Gruppenkohomologie [TG] 3.8.10 gilt also $\mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Mod}_K^\times(\hat V)) = 0$ und insbesondere

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{GL}(n; K)) = 0$$

für die Gruppe $\mathrm{GL}(n; K)$ mit ihrer offensichtlichen Γ-Operation. Diese Aussage wird meist zitiert als **Hilbert's Satz 90**. Hilbert selbst formuliert sie allerdings nur im Fall $n = 1$.

Korollar 6.4.9 (Pythagoreische Zahlen). *Gegeben $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ ist entweder a oder b gerade. Nehmen wir zusätzlich an, b sei gerade, so gibt es $r, s, t \in \mathbb{Z}$ mit $a = (r^2 - s^2)t$ und $b = 2rst$ und $c = (r^2 + s^2)t$.*

Beweis. Modulo Vier sind Null und Eins die einzigen Quadrate. Das zeigt bereits die erste Aussage. Im Fall der quadratischen Erweiterung $\mathbb{Q}(\mathrm{i})/\mathbb{Q}$ liefert die Beschreibung [TG] 3.8.6 der nichtabelschen Gruppenkohomologie durch Zykel zusammen mit Hilbert's Satz 90, daß jedes von Null verschiedene Element $p + q\mathrm{i} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$ mit $(p + q\mathrm{i})(p - q\mathrm{i}) = 1$ von der Gestalt $p + q\mathrm{i} = (r + s\mathrm{i})(r - s\mathrm{i})^{-1}$ ist für ein von Null verschiedenes Element $r + s\mathrm{i} \in \mathbb{Q}(\mathrm{i})$. Sicher dürfen wir dabei annehmen, daß gilt $r, s \in \mathbb{Z}$ und $\langle r, s\rangle = 1$. Gegeben $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nicht alle Null mit

$$a^2 + b^2 = c^2$$

finden wir also $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $\langle r, s\rangle = 1$ und

$$a + b\mathrm{i} = (r^2 - s^2 + 2rs\mathrm{i})c^2/(r^2 + s^2)$$

Aus $b = 2rsc^2/(r^2 + s^2) \in 2\mathbb{Z}$ folgt dann $t := c^2/(r^2 + s^2) \in \mathbb{Z}$. Auf diese Weise finden wir $r, s, t \in \mathbb{Z}$ mit $a = (r^2 - s^2)t$ und $b = 2rst$ und $c = (r^2 + s^2)t$, wenn a, b, c nicht alle Null sind. Im Fall $a = b = c = 0$ können wir schlicht $t = 0$ und r, s beliebig nehmen. □

Definition 6.4.10. Sei K/k eine Körpererweiterung. Eine **k-Form einer K-Algebra** A ist eine k-Form $\hat{A} \subset A$ des Vektorraums A, die gleichzeitig eine k-Unteralgebra von A ist.

6.4.11 (**Formen von Algebren und galoislineare Operationen**). Gegeben eine Galoiserweiterung K/k mit Galoisgruppe Γ und eine K-Algebra A liefern die Bijektionen aus 6.4.5 auch zueinander inverse Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} k\text{-Formen} \\ \hat{A} \subset A \\ \text{der } K\text{-Algebra } A \end{array} \right\} \tilde{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{galoislineare Operationen} \\ \Gamma \times A \to A \\ \text{auf der } K\text{-Algebra } A \end{array} \right\}$$

Hier fordern wir von einer Operation auf einer Algebra zusätzlich, daß sie mit der Verknüpfung in unserer Algebra verträglich sein soll, in Formeln $\hat{\gamma}(a \cdot b) = \hat{\gamma}(a) \cdot \hat{\gamma}(b)$ für alle $a, b \in A$ und $\gamma \in \Gamma$.

6.4.12 (**Formen von Algebren und Torsoren**). Gegeben eine Galoiserweiterung K/k mit Galoisgruppe Γ und eine K-Algebra A mit einer ausgezeichneten k-Form $\hat{A} \subset A$ stabilisiert unsere Γ-Operation auf $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat{A})$ aus 6.4.8 die Untergruppe $\mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})$ der Automorphismen von K-Algebren und unsere Bijektion aus

6.4.8 induziert eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} k\text{-Formen } \tilde{A} \subset A \\ \text{der } K\text{-Algebra } A \end{array} \right\} & \tilde{\to} & \left\{ \begin{array}{c} \text{bepunktete topologische} \\ \Gamma\text{-äquivariante } \mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})\text{-Torsoren,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \\ \tilde{A} & \mapsto & \mathrm{Alg}_K^\times(\tilde{A}, \hat{A}) \end{array}$$

Hier ist rechts zu verstehen, daß wir beim Übergang vom Fall der Vektorräume zum Fall der Algebren jedem bepunkteten $\mathrm{Mod}_K^\times(\hat{A})$-Torsor die $\mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})$-Bahn des ausgezeichneten Punktes zuordnen. Entspricht die k-Form $\tilde{A} \subset A$ dem bepunkteten Torsor (X, x) und ist $\varphi \in \mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})$ ein Automorphismus von K-Algebren, so entspricht nun der bepunktete Torsor $(X, \varphi x)$ der k-Form $\varphi(\tilde{A}) \subset A$. Insbesondere induziert unsere Bijektion eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} k\text{-Formen } \tilde{A} \subset A \\ \text{der } K\text{-Algebra } A, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \\ k\text{-Algebren} \end{array} \right\} \tilde{\to} \left\{ \begin{array}{c} \text{topologische} \\ \Gamma\text{-äquivariante} \\ \mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})\text{-Torsoren,} \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

Vorschau 6.4.13. In der Sprache der Gruppenkohomologie **??** lesen sich die obigen Bijektionen als Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} \{k\text{-Formen der } K\text{-Algebra } A\} & \tilde{\to} & \mathrm{Z}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})) \\ \{k\text{-Formen der } K\text{-Algebra } A\}_{/\cong_k} & \tilde{\to} & \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Alg}_K^\times(\hat{A})) \end{array}$$

Hier meint $\cong_k$, daß wir in der zweiten Zeile nur k-Formen bis auf Isomorphismus von k-Algebren betrachten, und der untere Index st erinnert jeweils daran, daß nur stetige Einskozykel zu betrachten sind.

6.4.14. Gegeben ein Körper k und eine k-Ringalgebra $\hat{A}$ und eine Galoiserweiterung K/k mit Galoisgruppe Γ und $A := \hat{A} \otimes_k K$ erhält man wie in [AL] 6.4.12 eine Bijektion

$$\{k\text{-Formen der } K\text{-Ringalgebra } A\}_{/\cong_k} \tilde{\to} \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Ralg}_K^\times(\hat{A}))$$

Rechts steht hier die Gruppe der K-Ringalgebrenautomorphismen von A mit ihrer von $\hat{A}$ herrührenden Γ-Operation. Ist $\hat{J} \subset \hat{A}$ ein Ideal derart, daß $J := \hat{J} \otimes_k K$ stabil ist unter allen Automorphismen der K-Ringalgebra A, so erhalten wir mit $\hat{B} := \hat{A}/\hat{J}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{k\text{-Formen der } K\text{-Ringalgebra } A\}_{/\cong_k} & \tilde{\to} & \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Ralg}_K^\times(\hat{A})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{k\text{-Formen der } K\text{-Ringalgebra } B\}_{/\cong_k} & \tilde{\to} & \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{Ralg}_K^\times(\hat{B})) \end{array}$$

Das alles sollte direkt aus der Konstruktion dieser Bijektionen folgen.

6.4.15 (**Innere Formen algebraischer Gruppen**). Analoges gilt für Koalgebren und Bialgebren und überhaupt sehr allgemein für Vektorräume A mit einer Familie ausgezeichneter Homomorphismen zwischen Tensorpotenzen von A, etwa einem Homomorphismus $A \otimes A \to A$ und einem weiteren Homomorphismus $A \to A \otimes A$. Insbesondere gilt es für affine algebraische Gruppen G. In diesem Fall induziert die Operation der Gruppe $G(K)$ durch Konjugation einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{int} : G(K) \to \mathrm{GrpVar}_K^\times(G)$. Ist $\hat{G}$ eine k-Form von G, so trägt $\hat{G}(K) := \mathrm{Ralg}_k(\mathcal{O}(\hat{G}), K)$ eine stetige Γ-Wirkung durch Nachschalten, die wir durch Invertieren zu einer Rechtsoperation machen können. Der Homomorphismus $\mathrm{int} : \hat{G}(K) \to \mathrm{GrpVar}_K^\times(\hat{G})$ ist verträglich mit der Rechtsoperation von Γ. Die k-Formen von G, die Kohomologieklassen im Bild der von int induzierten Abbildung

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \hat{G}(K)) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{st}}(\Gamma; \mathrm{GrpVar}_K^\times(\hat{G}))$$

entsprechen, heißen dann die **zu $\hat{G}$ inneren k-Formen von G**. Gegeben ein Einskozykel alias eine stetige Abbildung $z : \Gamma \to \hat{G}(K)$ mit $z(\gamma\beta) = z(\gamma)^\beta z(\beta)$ wie in [TG] 3.8.4 wird die Galoisoperation zur neuen Form also gegeben durch $\tilde{\gamma} := \hat{\gamma} \circ \mathrm{int}(z(\gamma))$.

Ergänzung 6.4.16. Ich wollte mir überlegen, daß gegeben zwei Bilinearformen auf einem endlichdimensionalen k-Vektorraum, die über K isomorph werden, die zugehörigen Automorphismengruppen innere Formen voneinander sind. Ich wollte mir ferner überlegen, daß zueinander innere Formen isomorphe k-lineare Tensorkategorien endlichdimensionaler Darstellungen besitzen.

6.5 Kummer-Theorie

Definition 6.5.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Eine Körpererweiterung L/K heißt eine **Kummer-Erweiterung durch n-te Wurzeln** oder kurz eine **n-Kummererweiterung**, wenn (1) unser n kein Vielfaches der Charakteristik unserer Körper ist, (2) der Körper K alle n-ten Einheitswurzeln enthält und (3) der Körper L über K erzeugt wird von n-ten Wurzeln von Elementen aus K, in Formeln

$$L = K(\alpha \mid \alpha \in L,\ \alpha^n \in K)$$

Nennen wir L/K eine **Kummererweiterung**, so ist gemeint, daß es ein n gibt derart, daß L/K eine Kummererweiterung durch n-te Wurzeln ist.

6.5.2. Für jedes multiplikativ notierte Monoid M vereinbaren wir die Notation $M^{\cdot n} := \{\alpha^n \mid \alpha \in M\}$. Der kleine Punkt vor dem n soll klar machen, daß nicht das kartesische Produkt von n Kopien der Menge M gemeint ist.

Satz 6.5.3 (Kummertheorie). *Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches der Charakteristik von K und K enthalte alle n-ten Einheitswurzeln. So gilt:*

1. *Genau dann ist eine Körpererweiterung L/K eine n-Kummererweiterung, wenn L/K eine Galois-Erweiterung ist mit abelscher Galois-Gruppe von endlichem n teilenden Exponenten, also mit $g^n = 1$ für alle $g \in \mathrm{Gal}(L/K)$;*

2. *Die Abbildungsvorschrift $L \mapsto \Delta(L) := ((L^\times)^{\cdot n} \cap K^\times)/(K^\times)^{\cdot n}$ liefert eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} n\text{-Kummererweiterungen von } K \text{ in einem} \\ \text{festen algebraischen Abschluß } \bar{K} \text{ von } K \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Untergruppen von} \\ K^\times/(K^\times)^{\cdot n} \end{array} \right\}$$

   Wir nennen $\Delta(L)$ die **Kummergruppe** *unserer Kummererweiterung. Gegeben eine Untergruppe $\Delta \subset K^\times/(K^\times)^{\cdot n}$ wird die zugehörige Kummererweiterung $E(\Delta)$ erzeugt von den n-ten Wurzeln der Repräsentanten der Elemente von Δ;*

3. *Ist L/K eine n-Kummererweiterung mit Kummergruppe $\Delta = \Delta(L)$ und Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ und bezeichnet μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln von K, so erhalten wir eine wohldefinierte bilineare Abbildung, die* **Kummerpaarung**

$$\begin{array}{rcl} G \times \Delta & \to & \mu_n \\ (g\ ,\ a) & \mapsto & g(\sqrt[n]{a})/\sqrt[n]{a} \end{array}$$

4. *Ist L/K eine n-Kummererweiterung, so liefert die Kummerpaarung einen Isomorphismus*

$$G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Delta, \mu_n)$$

   Insbesondere haben wir für jede endliche Kummererweiterung einen unkanonischen Isomorphismus $G \cong \Delta$ zwischen ihrer Galoisgruppe und ihrer Kummergruppe;

5. *Ist L/K eine n-Kummererweiterung, so liefert unsere Kummerpaarung einen Isomorphismus*

$$\Delta \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{st}}(G, \mu_n)$$

   Hierbei sind rechts stetige Gruppenhomomorphismen gemeint für die Krull-Topologie auf der Galoisgruppe und die diskrete Topologie auf μ_n.

6.5.4. Wir könnten im Satz statt μ_n ebensogut an jeder Stelle $K^\times$ schreiben, alle Abbildungen landen automatisch in $\mu_n \subset K^\times$.

6.5.5. Seien K ein Körper und $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K. Da Kummererweiterungen per definitionem Galois sind, ist jede Kummererweiterung von K isomorph über K zu genau einem Unterkörper von $\bar{K}$, der K umfaßt.

Beispiel 6.5.6. Unsere Bestimmung der Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$ über $\mathbb{Q}$ in 4.1.35 mag eine erste Anschauung für 2-Kummererweiterungen liefern.

Beweis. 3. Das ist klar.

1. Per definitionem ist jede Kummererweiterung ein Zerfällungskörper separabler Polynome und mithin nach 3.11.20 Galois. Die in Teil 3 angegebene Paarung $G \times \Delta \to \mu_n$ liefert offensichtlich einen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \hookrightarrow \mathrm{Ens}(\Delta, \mu_n)$ und zeigt so, daß für jede n-Kummererweiterung die Galoisgruppe G abelsch ist mit $g^n = 1\ \forall g \in G$. Sei andererseits L/K eine Erweiterung mit abelscher Galoisgruppe von endlichem n teilenden Exponenten. Jedes Element von L liegt schon in einem Zwischenkörper, der Galois und endlich ist über K. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also L/K endlich annehmen. Dann finden wir etwa nach [LA2] 6.5.9 Untergruppen $H_1, \ldots, H_r \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ mit trivialem Schnitt $H_1 \cap \ldots \cap H_r = 1$ und zyklischen Quotienten G/H_i. Die zugehörigen Unterkörper $L_1, \ldots, L_r$ erzeugen L und entstehen nach 4.6.3 jeweils durch Adjunktion einer n-ten Wurzel zu K. Damit ist auch 1 bewiesen.

4&5. Gegeben eine abelsche Gruppe G definieren wir ihre duale Gruppe oder Charaktergruppe als $\mathfrak{X}(G) := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Die offensichtliche Paarung $G \times \mathfrak{X}(G) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ liefert eine natürliche Abbildung von G in sein Biduales. Für $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ prüft man $\mathfrak{X}(G) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und prüft sogar, daß die natürliche Abbildung von G in sein Biduales eine Bijektion ist. Dieselben Aussagen $\mathfrak{X}(G) \cong G$ und $\mathrm{ev} : G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}(\mathfrak{X}(G))$ folgen dann für alle endlichen abelschen Gruppen G. Betrachten wir nur Gruppen vom Exponenten n, so kann hier auch μ_n den Part von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ übernehmen. Nun wissen wir bereits, daß unsere Paarung $G \times \Delta \to \mu_n$ eine Injektion

$$G \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\Delta, \mu_n)$$

induziert. Ebenso ist umgekehrt klar, daß sie eine Injektion

$$\Delta \hookrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mu_n)$$

induziert, denn für $a \in \Delta$ und $\alpha \in L^\times$ mit $\alpha^n = a$ folgt aus $g(\alpha) = \alpha\ \forall g \in G$ schon $\alpha \in K^\times$, also $a \in (K^\times)^{\cdot n}$. Im Fall einer endlichen n-Kummererweiterung zeigt die zweite Injektion, daß Δ endlich ist, und mit unserer Dualität folgt dann, daß unsere Injektionen beide Isomorphismen sein müssen. So erhalten wir 4 und 5 im Fall einer endlichen Kummererweiterung. Im allgemeinen folgt dann 4 durch Übergang zum Limes über alle endlichen Teilerweiterungen und 5 durch Übergang zum Kolimes über alle endlichen Teilerweiterungen.

2. Sei $\bar{K}$ ein fester algebraischer Abschluß von K. Für eine beliebige Teilmenge $D \subset K^\times/(K^\times)^{\cdot n}$ können wir eine n-Kummererweiterung $E(D) \subset \bar{K}$ von K bilden, indem wir zu K alle n-ten Wurzeln von Repräsentanten in $K^\times$ der Elemente

aus D in $\bar{K}$ adjungieren. Sicher erhalten wir dann für eine n-Kummererweiterung $L \subset \bar{K}$ von K unser L aus seiner Kummergruppe $\Delta(L)$ zurück als $L = E(\Delta(L))$. Es gilt nur noch umgekehrt zu zeigen, daß für jede Untergruppe $D \subset K^\times/(K^\times)^{\cdot n}$ auch gilt $D = \Delta(E(D))$. Offensichtlich ist hier $D \subset \Delta(E(D))$. Um Gleichheit zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit D endlich annehmen. Dann ist auch $E(D)/K$ endlich. Nun bezeichne man mit G die Galoisgruppe dieser Körpererweiterung und betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \tilde{\to} & \mathrm{Hom}(\Delta(E(D)), \mu_n) \\ \| & & \downarrow \\ G & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(D, \mu_n) \end{array}$$

Die obere Horizontale ist bijektiv aufgrund der bereits bewiesenen Teile. Die untere Horizontale ist injektiv, da die n-ten Wurzeln der Repräsentanten der Elemente von D bereits $E(D)$ erzeugen. Die rechte Vertikale ist surjektiv als duale Abbildung zu einer Injektion. Es folgt, daß die rechte Vertikale ein Isomorphismus sein muß. Dualisieren liefert schließlich $D = \Delta(E(D))$ wie gewünscht. □

Ergänzung 6.5.7 (**Isotypische Zerlegung von Kummererweiterungen**). Gegeben $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und eine n-Kummererweiterung L/K mit Galoisgruppe G ist für jeden stetigen Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to K^\times$ die χ-isotypische Komponente

$$L_\chi := \{l \in L \mid gl = \chi(g)l \ \forall g \in G\}$$

der Darstellung L von G über K eindimensional, in Formeln $\dim_K L_\chi = 1$, und sie werden erzeugt von einer beliebigen n-ten Wurzel eines beliebigen Repräsentanten des Urbilds von χ unter der im letzten Teil unseres Satzes 6.5.3 zur Kummertheorie gegebenen Bijektion. Daß die eben beschriebenen Elemente in $L_\chi \backslash 0$ liegen, folgt direkt aus den Definitionen. Daß kein L_χ eine Dimension echt größer als Eins haben kann, folgt im Fall einer endlichen Kummererweiterung aus der Identität $|\mathfrak{X}(G)| = |G| = [L : K]$ zusammen mit der Zerlegung in isotypischen Komponenten $L = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} L_\chi$ aus der Darstellungstheorie. Alternativ kann man die Aussage aus dem Satz über die Normalbasis 6.1.6 folgern. Im Fall beliebiger Kummererweiterungen leitet man die Aussage leicht aus dem endlichen Fall ab.

7 Danksagung

Als Quellen habe ich besonders [Lor96] und [Lan74] genutzt. Auch [E+92] war hilfreich. Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Anna Breucker, Katharina Wendler, René Recktenwald, Meinolf Geck, Theo Grundhöfer, Christina Pflanz, . . .

8 Vorlesung Algebra und Zahlentheorie WS 24/25

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen. Die Planung geht aus vom Tagebuch aus dem Wintersemester 19/20, umgeschrieben auf die neuen Termine, und wird dann nach und nach das Tagebuch der aktuellen Vorlesung.

15.10 Magmas und ihre Homomorphismen [GR] 2.2.3.2. Monoide und ihre Homomorphismen. Gruppen [GR] 2.2.2 und Gruppenhomomorphismen [GR] 2.2.3. Klassifikation der Gruppen mit höchstens vier Elementen [AL] 1.1 zu Fuß. Klassifikation der Gruppen F mit fünf Elementen durch Theorie: Untergruppen „richtige“ Definition. Untergruppen von $\mathbb{Z}$ nach [LA1] 4.3.4, Satz über den größten gemeinsamen Teiler nach [LA1] 4.4.13.

17.10 Primfaktorzerlegung nach [LA1] 4.4. Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung [LA1] 4.4.8. Euklidischer Algorithmus. Erzeugung von Untergruppen. Nebenklassen [LA2] 6.1 und Lagrange [LA2] 6.1.5: Eine fünfelementige Gruppe F hat nur die beiden Untergruppen 1 und F. Bijektion $\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ nach [GR] 2.2.3.31 für jede Gruppe G. Also für $|G| = 5$ Surjektion $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow G$ durch $1 \mapsto g$ mit $g \neq e$.

22.10 Universelle Eigenschaft surjektiver Gruppenhomomorphismen [LA2] 6.2.1. Normalteiler [LA2] 6.2 und Quotient danach. Isomorphiesätze. Ordnung von Gruppenelementen, Struktur zyklischer Gruppen. Gruppen von Primzahlordnung sind zyklisch. Kleiner Fermat für Kongruenzen von Potenzen modulo Primzahl.

24.10 Chinesischer Restsatz [LA2] 6.3.14. RSA-Verschlüsselung [LA2] 6.3.15. Zerlegung des Torsionsanteils einer abelschen Gruppe nach Primtorsion. Zerlegung endlicher abelscher Gruppen nach Primtorsion [LA2] 6.4.4. Cauchy für abelsche Gruppen [LA2] 6.4.5. Noch nicht: Nichtzyklische abelsche Gruppen [LA2] 6.4.7, Gruppen von Einheitswurzeln [LA2] 6.4.8. auch Klassifikationen endlich erzeugter abelscher Gruppen [LA2] 6.5.4 und [LA2] 6.5.5 sowie Elementarteilersatz erst mal weggelassen.

29.10 Operationen von Gruppen auf Mengen aber nur das Nötigste: Definition, Bahnen, Bahnzerlegung, Bahnenraum, Isotropiegruppe, Bahnen als Nebenklassenmengen [LA2] 7.2.1. Bahnformel [LA2] 7.2.2. Endliche Untergruppen der Drehgruppe [LA2] 7.4.2: Mögliche Bahnpolordnungen bestimmt. Nicht genau ausgeführt, wie der Beweis dann zu Ende gebracht wird.

31.10 Operation durch Konjugation [LA2] 7.3.1. Nocheinmal Rückschau auf endliche Untergruppen der Drehgruppe. Einfache Gruppen [AL] 1.2.2. Klas-

sengleichung. Konjugationsklassen in der Ikosaedergruppe. Die Ikosaedergruppe ist einfach 1.2.5. Kompositionsreihen und Satz von Jordan-Hölder. Nichttriviale p-Gruppen haben nichttriviales Zentrum.

5.11 Struktur von p-Gruppen, insbesondere nilpotente Gruppen 1.3.8. Sylowsätze. Gruppen mit 6 Elementen.

7.11 Nachklapp: Gruppen mit 15 Elementen. Die natürlichen Zahlen axiomatisch, [LA1] 4.1.2 bis [LA1] 4.1.18, nicht Kürzungsregel [LA1] 4.1.19, nicht Anordnung [LA1] 4.1.20, aber noch [LA1] 4.1.22 und Definition der Multiplikation.

12.11 Ringe [LA1] 5.1.1. Ringhomomorphismen. $|\operatorname{Ring}(\mathbb{Z}, R)| = 1$. Charakteristik. Frobenius-Homomorphismus. Universelle Eigenschaft surjektiver Ringhomomorphismen. Ideale. Faktorring eines Rings nach einem Ideal 2.1.13. Teilbarkeitskriterium nach 3 oder 9 über die Quersumme.

14.11 Restklassenringe von $\mathbb{Z}$ [LA1] 5.2.4. Teilen, Einheiten, kürzbare und nichtkürzbare Elemente, Integritätsbereich. Endlicher Integritätsbereich ist Körper. Noation für Erzeugung von Idealen. Polynome, Einsetzen in Polynome. Polynomdivision mit Rest. Abspalten von Linearfaktoren für Nullstellen. Endliche Gruppen von Einheitswurzeln [LA2] 6.4.8.

19.11 Teilringe und Notationen für ihre Erzeugung. Euklidische Ringe 2.4.1, Faktorielle Ringe, Hauptidealringe, Beispiele, deren Beziehung untereinander. Insbesondere Faktorialiät von Polynomringen.

21.11 Faktorringe von Hauptidealringen. Abstrakter chinesischer Restsatz und Bezug zur Interpolation. Beispiele für Faktorringe, insbesondere $\mathbb{R}[X]/\langle P\rangle$ für Polynome vom Grad zwei und allgemeinere Polynome. Der Ring der Gauß'schen Zahlen ist euklidisch, mithin faktoriell. Gauß'sche Zahlen und Summen von zwei Quadraten. Noch nicht gezeigt, welche Primzahlen genau zerfallen. Noch nicht Satz über Summen von zwei Quadraten bewiesen.

26.11 Beweis 2.6.6, welche Primzahlen in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ genau zerfallen. Beweis Satz 2.6.10 über Summen von zwei Quadraten. Quotientenkörper eines kommutativen Integritätsbereichs [LA1] 5.5 und seine universelle Eigenschaft. Damit $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ konstruieren. Partialbruchzerlegung [LA1] 5.5.12.

28.11 Polynomringe über faktoriellen Ringen 2.7.1. Gemeinsame Nullstellen von zwei teilerfremden Polynomen in zwei Variablen. Kreisteilungspolynome, Eisensteinkriterium, Irreduzibilität des p-ten Kreisteilungspolynoms für p prim.

3.12 Symmetrische Polynome, Hauptsatz. Diskriminante eines Polynoms vom Grad Drei. Nicht allgemeine Diskriminante. Nicht Schranke von Bézout mit Beweisskizze.

5.12 Körpererweiterungen [AL] 3.1.1 folgende. Algebraische und transzendente Elemente. Minimalpolynom. Endliche Körpererweiterungen, Grad einer Körpererweiterung. Elemente von endlicher Körpererweiterung sind algebraisch. Quadratische Körpererweiterungen. Multiplikativität des Grades [AL] 3.4.11. Noch nicht [AL] 3.4.12.

10.12 Noch ab [AL] 3.4.12 fertig argumentieren. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal [AL] 3.6.2.

12.12 Endliche Körper [AL] 3.7.1 und deren Unterkörper [AL] 3.7.12. Zerfällungskörper definiert, Satz über Eindeutigkeit [AL] 3.8.2 formuliert, aber noch nicht bewiesen.

17.12 Satz über Ausdehnung von Körperhomomorphismen auf primitive algebraische Erweiterungen bewiesen. Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers. Obere Schranke für die Zahl der Ausdehnungen von Körperhomomorphismen. Satz von Artin über die Unabhängigkeit von Charakteren. Normale Erweiterungen, Satz noch nicht bewiesen.

19.12 Beweis des Satzes über normale Erweiterungen. Mehrfache Nullstellen und Separabilität. Noch nicht ab 3.9.15.

7.1 Ab 3.9.15 weiter mit Separabilität. Nicht Diskriminante als Determinante 3.9.30. Satz vom primitiven Element 3.10.1 folgende, bis zur Überdeckung durch Teilkörper 3.10.5 einschließlich. Aber 3.10.2 Überdeckung durch Untervektorräume noch nicht gemacht.

9.1 Lemma 3.10.2 bewiesen. Satz vom primitiven Element 3.10.8. Galoiserweiterungen 4 bis zum Satz 4.1.12 über die Charakterisierung von Galoiserweiterungen.

14.1 Anschauung. Operation der Galoisgruppe auf Nullstellen. Beispiele für Polynome vom Grad drei.

16.1 Galoisgruppe der allgemeinen Gleichung. Galoiskorrespondenz. Biquadratische Erweiterungen. Fundamentalsatz der Algebra mit Galoistheorie.

21.1 Galoisgruppen der Kreisteilungskörper und Konstruktion regelmäßiger n-Ecke mit Zirkel und Lineal. Euler'sche φ-Funktion und Fermat'sche Primzahlen. Erster Teil des Satzes 4.6.3 über zyklische Erweiterungen gezeigt.

23.1 Zweiter Teil des Satzes 4.6.3 über zyklische Erweiterungen gezeigt. Translationssatz. Radikalerweiterungen. Noch nicht Satz 4.6.23 über Radikalerweiterungen und Galoiserweiterungen.

28.1 Radikalerweiterungen und Galoiserweiterungen. Auflösbareit durch Radikale. Eine nicht durch Radikale auflösbare Gleichung fünften Grades. Algebraischer Abschluß. Eindeutigkeit bewiesen, Existenz nur vage erläutert.

30.1 Cardano'sche Formeln. Herleitung aus der Galoistheorie.

4.2 Quadratisches Reziprozitätsgesetz. Quadratwurzeln in primen Kreisteilungskörpern. Noch nicht Ergänzungssatz.

6.2 Ergänzungssatz, gleichzeitig nochmal Beweis des Reziprozitätsgesetzes wiederholen. Ausblick? Notwendigkeit des Ausgreifens in die komplexen Zahlen? Quaternionen?

9 Vorlesung Algebra und Zahlentheorie WS 19/20

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

22.10 Gruppen [GR] 2.2.2 und Gruppenhomomorphismen [GR] 2.2.3. Monoide, Magmas [GR] 2.2.3.2. Klassifikation der Gruppen mit höchstens vier Elementen [AL] 1.1 zu Fuß. Klassifikation der Gruppen F mit fünf Elementen durch Theorie: Untergruppen „richtige“ Definition. Untergruppen von $\mathbb{Z}$ nach [LA1] 4.3.4, Nebenklassen [LA2] 6.1 und Lagrange [LA2] 6.1.5: F hat nur die beiden Untergruppen 1 und F.

24.10 Bijektion $\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ nach [GR] 2.2.3.31 für jede Gruppe G. Also für $|G| = 5$ Surjektion $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow G$ durch $1 \mapsto g$ mit $g \neq e$. Universelle Eigenschaft surjektiver Gruppenhomomorphismen [LA2] 6.2.1. Normalteiler [LA2] 6.2 und Quotient danach. Isomorphiesätze. Ordnung von Gruppenelementen, Struktur zyklischer Gruppen. Gruppen von Primzahlordnung sind zyklisch. Kleiner Fermat für Kongruenzen von Potenzen modulo Primzahl.

29.10 Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung [LA1] 4.4.8. Satz über den größten gemeinsamen Teiler. Euklidischer Algorithmus. Chinesischer Restsatz mit zwei Resten. Beide Klassifikationen endlich erzeugter abelscher Gruppen angegeben. Elementarteilersatz bewiesen.

31.10 Beide Klassifikationen endlich erzeugter abelscher Gruppen bewiesen. Endliche Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers sind zyklisch. Operationen von Gruppen und Monoiden auf Mengen. Bahnen als homogene Räume. Bahnformel.

5.11 Operation durch Konjugation. Endliche Untergruppen der Drehgruppe bis auf Konjugation. Einfache Gruppen. Klassengleichung. Konjugationsklassen in der Ikosaedergruppe. Die Ikosaedergruppe ist einfach 1.2.5. Kompositionsreihen und Satz von Jordan-Hölder, noch ohne Beweis.

7.11 Beweis Jordan-Hölder. Struktur von p-Gruppen. Sylowsätze. Gruppen mit 6 und 15 Elementen. Gruppen mit 8 Elementen ohne Beweis.

12.11 Die natürlichen Zahlen axiomatisch, [LA1] 4.1.2 bis [LA1] 4.1.18, nicht Kürzungsregel [LA1] 4.1.19, nicht Anordnung [LA1] 4.1.20, aber noch [LA1] 4.1.22 und Definition der Multiplikation.

14.11 Leonardo vertritt mich. Ringe und Restklassenringe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ohne Diffie-Hellmann. Quotient eines Rings nach einem Ideal 2.1.13.

19.11 Teilringe und Notationen für ihre Erzeugung. Notationen für Erzeugung von Idealen. Beispiele für Restklassenringe, insbesondere $\mathbb{R}[X]/\langle P\rangle$ für Polynome vom Grad zwei und allgemeinere Polynome. Abstrakter chinesischer Restsatz und Bezug zur Interpolation. Quotientenkörper eines kommutativen Integritätsbereichs und seine universelle Eigenschaft. Damit $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ konstruiert.

21.11 Euklidische Ringe, Faktorielle Ringe, Hauptidealringe, Beispiele, deren Beziehung untereinander. Quotienten von Hauptidealringen. Der Ring der Gauß'schen Zahlen ist euklidisch.

26.11 Gauß'sche Zahlen und Summen von zwei Quadraten. Polynomringe über faktoriellen Ringen noch ohne Beweis.

28.11 Polynomringe über faktoriellen Ringen. Gemeinsame Nullstellen von zwei teilerfremden Polynomen in zwei Variablen. Kreisteilungspolynome, Eisensteinkriterium, Irreduzibilität des p-ten Kreisteilungspolynoms für p prim.

3.12 Symmetrische Polynome, Hauptsatz. Diskriminante eines Polynoms vom Grad Drei. Nicht allgemeine Diskriminante. Schranke von Bézout mit Beweisskizze.

5.12 Körpererweiterungen. Algebraische und transzendente Elemente. Minimalpolynom. Endliche Körpererweiterungen, Grad einer Körpererweiterung. Elemente von endlicher Körpererweiterung sind algebraisch.

10.12 Quadratische Körpererweiterungen. Multiplikativität des Grades. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

12.12 Endliche Körper und deren Unterkörper. Zerfällungskörper definiert, Satz über Eindeutigkeit formuliert, aber noch nicht bewiesen. Satz über Ausdehnung von Körperhomomorphismen auf primitive algebraische Erweiterungen bewiesen, aber kurz. Beweis nochmal!

17.12 Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers. Normale Erweiterungen. Angekündigt: Algebraischer Abschluß.

19.12 Algebraischer Abschluß.

7.1 Separable Polynome. Definition separabler Körpererweiterungen. Noch nicht, daß von separablen Elementen erzeugte Körpererweiterungen separabel sind.

9.1 Charakterisierung separabler Körpererweiterungen. Unmöglichkeit einer Überdeckung eines Körpers durch endlich viele echte Teilkörper. Satz vom primitiven Element, Körpererweiterungen mit nur endlich vielen Zwischenkörpern, Unterscheidung von Körperhomomorphismen an einem einzigen Element.

14.1 Galoiserweiterungen und ihre Beschreibung als Erweiterungen über dem Fixkörper. Beispiele für Galoisgruppen.

16.1 Galoisgruppe der allgemeinen Gleichung. Anschauung. Galois-Korrespondenz.

21.1 Biquadratische Erweiterungen. Beweis mit Galoistheorie, daß $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Irreduzibilität von Kreisteilungspolynomen. Galoisgruppen von Kreisteilungskörpern.

23.1 Hinreichendes Kriterium für die Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke mit Zirkel und Lineal. Euler'sche φ-Funktion. Reziprozitätsgesetz. Beweis bis zu $\alpha^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$ für ein gewisses explizites α im p-ten Kreisteilungskörper. Legendre-Symbole bereits eingeführt.

28.1 Beweis von Reziprozitätsgesetz und Ergänzungssatz. Jacobi-Symbole, ihre Eigenschaften und ihr Nutzen. Zyklische Erweiterungen, der Beweis eines Lemmas aus der linearen Algebra steht aber noch aus, ebenso das Korollar über Erweiterungen von Primzahlordnung.

30.1 Lemma aus der linearen Algebra. Erweiterungen von Primzahlordnung. Translationssatz. Radikalerweiterungen. Hauptsatz noch nicht bewiesen über auflösbare Galoisgruppen und auflösbare Gleichungen.

4.2 Hauptsatz über auflösbare Galoisgruppen und auflösbare Gleichungen. Beispiel einer Gleichung fünften Grades, die sich nicht durch Radikale lösen läßt. Cardano'sche Formeln. Begonnen mit deren Herleitung aus der Galoistheorie.

6.2 Herleitung der Cardano'schen Formeln aus der Galoistheorie. Notwendigkeit des Ausgreifens in die komplexen Zahlen.

11.2 Ansage: Tutoren werden gesucht. Mehr zu Zahlbereichen: Konstruktion $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.

13.2 Quaternionen?

10 Vorlesung Algebra und Zahlentheorie WS 16/17

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

19.10 Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Klassifikation der Gruppen mit höchstens vier Elementen 1.1 zu Fuß. Klassifikation der Gruppen F mit fünf Elementen durch Theorie: Untergruppen, Untergruppen von $\mathbb{Z}$ nach **??**, Nebenklassen **??** und Lagrange: F hat nur die beiden Untergruppen 1 und F. Bijektion $\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$ für jede Gruppe G. Also für $|G| = 5$ Surjektion $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow G$ durch $1 \mapsto g$ mit $g \neq e$. Universelle Eigenschaft surjektiver Gruppenhomomorphismen.

21.10 Normalteiler **??** und Quotient danach. Isomorphiesätze. Ordnung von Gruppenelementen, Struktur zyklischer Gruppen. Gruppen von Primzahlordnung sind zyklisch. Kleiner Fermat für Kongruenzen von Potenzen modulo Primzahl. Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Satz über den größten gemeinsamen Teiler.

26.10 Chinesischer Restsatz mit zwei Resten. RSA-Verschlüsselung. Einfache Gruppen, Satz von Jordan-Hölder. Operationen von Gruppen und Monoiden auf Mengen. Operation durch Konjugation ganz kurz. Noch nicht Bahnformel.

28.10 Bahnen als homogene Räume. Bahnformel. Operation durch Konjugation. Konjugationsklassen in der Würfelgruppe und der Ikosaedergruppe. Die Ikosaedergruppe ist einfach 1.2.5.

2.11 Struktur von p-Gruppen. Gruppen mit p^2 Elementen sind abelsch. Sylow-Sätze bewiesen. Noch nachholen: Jeder Primteiler der Ordnung einer abelschen Gruppe ist die Ordnung eines Elements **??**, **??**.

4.11 Jeder Primteiler der Ordnung einer abelschen Gruppe ist die Ordnung eines Elements **??**, **??**. Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen durch Multimengen von Primpotenzen, ohne Beweis. Gruppen mit 6 Elementen mit Beweis. Gruppen mit 8 Elementen ohne Beweis. Dann Konstruktion der natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre. Konstruktion der Addition, noch ohne Beweis der Eigenschaften.

9.11 Konstruktion und Eigenschaften der Addition. Ringe, Ringhomomorphismen. Universelle Eigenschaft surjektiver Ringhomomorphismen. Ideale. Konstruktion von Restklassenringen, noch nicht ganz fertig.

11.11 Konstruktion von Restklassenringen. Von Teilmengen erzeugte Ideale. Quotientenringe von Polynomringen nach von normierten Polynomen erzeugten

Hauptidealen. Konstruktion von $\mathbb{C}$ als Quotient $\mathbb{R}[X]/\langle X^2+1\rangle$. Teilringe. Von Teilmengen erzeugte Teilringe. Algebraische Unabhängigkeit. Produkte von Ringen. Abstrakter chinesischer Restsatz. Interpolation als Beispiel.

16.11 Euklidische Ringe, Faktorielle Ringe, Hauptidealringe, Beispiele, deren Beziehung untereinander. Quotienten von Hauptidealringen. Noch nicht der Ring der Gauß'schen Zahlen.

18.11 Gauß'sche Zahlen und Summen von zwei Quadraten. Endliche Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers sind zyklisch. Konstruktion des Quotientenkörpers. Bewertung auf dem Quotientenkörper eines faktoriellen Rings an einem irreduziblen Element.

23.11 Polynomringe über faktoriellen Ringen, Bewertung von Polynomen, Lemma von Gauß. Zwei teilerfremde Polynome in zwei Variablen haben höchstens endlich viele gemeinsame Nullstellen. Kreisteilungspolynome haben ganze Zahlen als Koeffizienten. Noch nicht Irreduzibilität von Kreisteilungspolynomen.

25.11 Irreduzibilität von Kreisteilungspolynomen. Eisensteinkriterium. Symmetrische Polynome, Hauptsatz.

30.11 Diskriminante eines Polynoms vom Grad Drei. Allgemeine Diskriminante. Schranke von Bézout mit Beweis.

2.12 Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen. Konstruktion der reellen Zahlen.

7.12 Körpererweiterungen. Algebraische und transzendente Elemente. Minimalpolynom.

9.12 Endliche und algebraische Körpererweiterungen. Quadratische Körpererweiterungen.

14.12 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Angefangen mit endlichen Körpern. Gezeigt, daß deren Kardinalität stets Charakteristik hoch Grad über dem Primkörper ist.

16.12 Endliche Körper und deren Unterkörper. Zerfällungskörper definiert, Satz über Eindeutigkeit formuliert, aber noch nicht bewiesen. Satz über Ausdehnung von Körperhomomorphismen auf primitive algebraische Erweiterungen bewiesen, aber kurz. Beweis nochmal!

21.12 Ausdehnungen von Körperhomomorphismen. Maximalzahl, Existenz. Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers. Normale Erweiterungen, Definition und Anschauung. Formuliert, aber nicht bewiesen, daß Zerfällungskörper normal sind.

23.12 Ich will nur die Ableitung einführen mit Summen- und Produktregel und zeigen, daß mehrfache Nullstellen Nullstellen der Ableitung sind. Dann habe über den Koordinatisierungssatz geredet und gezeigt, wie man in jeder Desargues-Ebene Richtungsvektoren einführt. Nicht gezeigt, daß diese eine kommutative Gruppe bilden.

11.1 Ableitung von Polynomen und Separabilität von Polynomen und Körpererweiterungen. Noch nicht den Satz über die Zahl von Ausdehnungen von Körperhomomorphismen auf separable Erweiterungen fertig bewiesen.

13.1 Satz über separable Körpererweiterungen fertig bewiesen. Satz vom primitiven Element, Charakterisierung endlicher primitiver Körpererweiterungen. Konstruktion und Eindeutigkeit des algebraischen Abschlusses.

18.1 Galoisgruppe, Galois-Erweiterungen. Galois-Erweiterungen über Fixkörper. Transitive treue Operation der Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers eines irreduziblen Polynoms auf den Nullstellen. Noch nicht: Invarianten eines Quotientenkörpers.

20.1 Galoisgruppe der allgemeinen Gleichung. Anschauung für die Galoisgruppe. Galois-Korrespondenz, aber noch keine Anwendungen dazu.

25.1 Biquadratische Erweiterungen. Beweis mit Galoistheorie, daß $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Irreduzibilität von Kreisteilungspolynomen.

27.1 Galoisgruppen von Kreisteilungskörpern und hinreichendes Kriterium für die Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke mit Zirkel und Lineal. Euler'sche φ-Funktion.

1.2 Erweiterungen durch Radikale: Zyklische Erweiterungen, Translationssatz, Zusammenhang zwischen Radikalerweiterungen und endlichen Galoiserweiterungen mit auflösbarer Galoisgruppe. Noch nicht Auflösbarkeit von Gleichungen gleichbedeutend zur Auflösbarkeit ihrer Galoisgruppe.

3.2 Auflösbarkeit von Gleichungen gleichbedeutend zur Auflösbarkeit ihrer Galoisgruppe. Unmöglichkeit der Auflösung kubischer Gleichungen nur durch reelle Wurzeln aus positiven reellen Zahlen selbst im Fall von drei reellen Lösungen.

8.2 Herleitung der Cardano'schen Formeln aus der Galoistheorie. Quadratisches Reziprozitätsgesetz, Legendre-Symbol, Beispiele. Quadratische Erweiterungen in Kreisteilungskörpern zu Einheitswurzeln von ungerader Primzahlordnung. Beides noch ohne Beweis.

10.2 Beweis quadratisches Reziprozitätsgesetz. Beweis quadratische Erweiterungen in Kreisteilungskörpern zu Einheitswurzeln von ungerader Primzahlordnung.

Literatur

[AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.

[AN1] Skriptum Analysis 1. Wolfgang Soergel.

[AN2] Skriptum Analysis 2. Wolfgang Soergel.

[AN3] Skriptum Analysis 3. Wolfgang Soergel.

[Art] Emil Artin. *Galois Theory*.

[Bes40] A. S. Besicovitch. On the linear independence of fractional powers of integers. *J. London Math. Soc.*, 15:3–6, 1940.

[E+92] Ebbinghaus et al. *Zahlen*. Springer, 1992.

[EIN] Skriptum Einstimmung. Wolfgang Soergel.

[GR] Skriptum Grundlagen. Wolfgang Soergel.

[Gro71] Alexander Grothendieck. *SGA 1*, volume 224 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1971. auch verfügbar unter http://arxiv.org/.

[KAG] Skriptum Kommutative Algebra und Geometrie. Wolfgang Soergel.

[LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.

[LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.

[Lan74] Serge Lang. *Algebra*. Addison-Wesley, 1974.

[Lor96] Falko Lorenz. *Einführung in die Algebra I*. Spektrum, 1996.

[NAS] Skriptum Nichtkommutative Algebra und Symmetrie. Wolfgang Soergel.

[Rom06] Steven Roman. *Field theory*, volume 158 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.

[Rus05] Lucio Russo. *Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens*. Springer, 2005. Übersetzung aus dem Italienischen.

[SDAT00] S. A. Katre S. D. Adhikari and Dinesh Thakur. *Cyclotomic fields and related topics*. Bhaskaracharya Pratishthana, Pune, 2000.

[Suz87] Jiro Suzuki. On coefficients of cyclotomic polynomials. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 63*, 63(7):279–280, 1987.

[TG] Skriptum Garbenkohomologie. Wolfgang Soergel.

[TS] Skriptum Singuläre Homologie. Wolfgang Soergel.

[Wei74] André Weil. *Basic Number Theory*. Springer, 1974.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das $\cup$ dem Buchstaben u oder das $\subset$ dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index