

ANALYSIS 2

Wolfgang Soergel

26. November 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Stetigkeit in abstrakten Räumen	5
1.1	Metrische Räume	5
1.2	Normierte Vektorräume	8
1.3	Topologische Räume	11
1.4	Grenzwerte in topologischen Räumen	15
1.5	Abgeschlossene Teilmengen	17
1.6	Vollständige metrische Räume	21
2	Ableitungen in mehreren Veränderlichen	24
2.1	Partielle Ableitungen und Gradient	24
2.2	Affine Räume	26
2.3	Differential	29
2.4	Kettenregel in mehreren Veränderlichen	38
2.5	Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen	42
2.6	Weitere Ableitungsregeln*	43
3	Mehrfache Integrale und Ableitungen	49
3.1	Integration über Quader	49
3.2	Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen	55
3.3	Rechnen mit Approximationen	58
3.4	Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen	60
4	Umkehrsatz und Anwendungen	66
4.1	Umkehrsatz	66
4.2	Mannigfaltigkeiten in reellen Räumen	73
4.3	Implizite Funktionen	80
4.4	Karten und Koordinatensysteme	85
4.5	Extrema auf Mannigfaltigkeiten	90
4.6	Markov-Ketten*	94
5	Oberfläche und Volumen	97
5.1	Überdeckungen kompakter metrischer Räume	97
5.2	Transformationsformel	100
5.3	Integration über Mannigfaltigkeiten	111
5.4	Minkowskidimension	116
5.5	Integration über Fastfaltigkeiten	117
5.6	Explizite Berechnung einiger Integrale	124

6	Gewöhnliche Differentialgleichungen	127
6.1	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften	127
6.2	Beispiele und Gegenbeispiele	131
6.3	Integration von vektorwertigen Funktionen	142
6.4	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	145
6.5	Lineare Differentialgleichungen	151
6.6	Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts*	155
6.7	Ergänzung zu differentiellen Ungleichungen*	159
7	Grundlegendes zu Fourierreihen	161
7.1	Eindeutigkeit der Fourierreihe	161
7.2	Approximationssatz von Stone-Weierstraß	163
7.3	Konvergenz der Fourierreihe	168
8	Wegintegrale und Potentiale	172
8.1	Vektorfelder und Kovektorfelder	172
8.2	Verwandschaft	181
8.3	Gradienten in krummlinigen Koordinaten*	188
8.4	Wegintegrale	194
8.5	Wegzusammenhang	203
8.6	Felder mit Potential	207
8.7	Homotopie von Wegen	210
8.8	Wegintegrale über geschlossene Felder	213
9	Integralsatz von Stokes	225
9.1	Alternierende Formen und Dachprodukt	225
9.2	Differentialformen höheren Grades	230
9.3	Orientierung von Mannigfaltigkeiten	237
9.4	Integration von Differentialformen	239
9.5	Äußere Ableitung von Differentialformen	248
9.6	Randfaltungen	255
9.7	Integralsatz von Stokes	260
9.8	Der Hodge-Operator mit Anwendungen	273
10	Erste Schritte in klassischer Mechanik	281
10.1	Newton'sche Bewegungsgleichungen	281
10.2	Potential und Energieerhaltung	287
10.3	Planetenbewegung	288
10.4	Systeme mit Zwangsbedingungen	292
10.5	Prinzip der stationären Wirkung	296
10.6	Euler-Lagrange-Gleichungen	300

10.7 Euler-Lagrange-Gleichungen direkt	307
10.8 Hamilton-Gleichungen	313
10.9 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten	317
10.10 Das Kotangentialbündel	319
10.11 Hamilton-Formalismus und Kotangentialbündel	322
10.12 Lie-Ableitung	323
10.13 Symplektische Geometrie	327
10.14 Hamilton'sche Gleichungen ÄLTER	329
10.15 Geometrie der Hamilton'schen Gleichungen	331
11 Ältere Entwürfe und Versuche	338
11.1 Euler-Lagrange-Gleichungen ALT	338
12 Danksagung	344
13 Tagebuch Mathematische Physik WS 24/25	345
14 Tagebuch Analysis 2 SS 23	346
15 Tagebuch Analysis 3 WS 23/24	349
16 Die Vorlesung Analysis 3 im WS 15/16	353
Literaturverzeichnis	357
Indexvorwort	358
Index	359

1 Stetigkeit in abstrakten Räumen

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1.1. Unter einer **Metrik** d auf einer Menge X versteht man eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ derart, daß für alle $x, y, z \in X$ gilt:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar $X = (X, d)$ bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X .

Beispiel 1.1.2. Der Buchstabe d steht in diesem Zusammenhang für „Distanz“. Auf \mathbb{R}^n liefert der übliche **Skalarproduktabstand**

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

eine Metrik. Die Ungleichung aus der Definition einer Metrik wird in diesem Beispiel in [LA2] 2.1.24 formal bewiesen und bedeutet anschaulich, daß in einem Dreieck mit Seitenlängen a, b, c stets gilt $a \leq b + c$. Sie heißt deshalb auch im allgemeinen die **Dreiecksungleichung**.

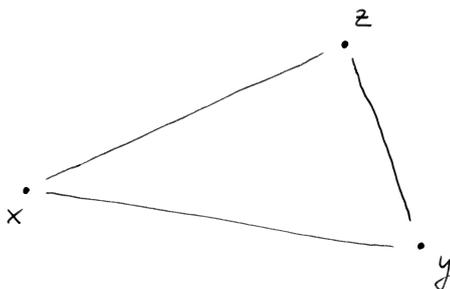


Illustration zur Dreiecksungleichung

Beispiel 1.1.3. Auf dem \mathbb{R}^n ist auch der **Betragsabstand**

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

eine Metrik. Wenn nichts anderes gesagt ist, fassen wir den \mathbb{R}^n stets auf als einen metrischen Raum mit dem Betragsabstand als Metrik. Diese Metrik ist zwar weniger anschaulich als der Skalarproduktabstand, läßt sich aber einfacher handhaben.

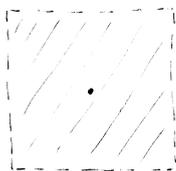
Beispiel 1.1.4. Jede Teilmenge eines metrischen Raums ist mit der **induzierten Metrik** selbst ein metrischer Raum.

Definition 1.1.5. Sei X ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$B(x; \varepsilon) := \{z \in X \mid d(x, z) < \varepsilon\}$$

Diese Menge heißt der ε -**Ball** um x oder auch die ε -**Kugel** um x oder auch die ε -**Umgebung** von x .

Beispiel 1.1.6. Für den Skalarproduktabstand im \mathbb{R}^3 ist der Ball um x mit Radius ε anschaulich tatsächlich ein Ball. Für den Betragsabstand ist $B(x; \varepsilon)$ dahingegen der ε -Quader mit Mittelpunkt x und Seitenlänge 2ε aus [AN1] 12.3.2.19.



Bälle in der Ebene für den
Betragsabstand und den
Skalarproduktabstand

Definition 1.1.7 (Stetigkeit bei metrischen Räumen). Eine Abbildung von metrischen Räumen $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig im Punkt** $p \in X$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ gibt mit $f(B(p; \delta)) \subset B(f(p); \varepsilon)$.

Beispiel 1.1.8. Erste Beispiele für stetige Abbildungen sind Einbettungen von einem Teilraum oder konstante Abbildungen. In diesen Fällen tut es $\delta = \varepsilon$.

Beispiel 1.1.9 (Rückwärtskompatibilität der metrischen Stetigkeit). Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist nach dem ε - δ -Kriterium [AN1] 12.3.2.21 stetig im hier gegebenen Sinne in Bezug auf den Betragsabstand 1.1.3 genau dann, wenn sie stetig ist im Sinne unserer bisherigen Definition [AN1] 12.3.2.14.

Lemma 1.1.10 (Verknüpfung stetiger Abbildungen). Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen metrischer Räume und ist f stetig bei $p \in X$ und g stetig bei $f(p)$, so ist $g \circ f$ stetig bei p .

Beweis. Gegeben $\varepsilon > 0$ finden wir $\eta > 0$ mit $g(B(f(p); \eta)) \subset B(g(f(p)); \varepsilon)$. Für dieses η finden wir $\delta > 0$ mit $f(B(p; \delta)) \subset B(f(p); \eta)$ und für dieses δ gilt dann auch $g(f(B(p; \delta))) \subset B(g(f(p)); \varepsilon)$. \square

Definition 1.1.11. Gegeben metrische Räume (X_i, d_i) für $1 \leq i \leq n$ machen wir ihr Produkt $X = X_1 \times \dots \times X_n$ zu einem metrischen Raum durch die **Produktmetrik**

$$d(x, y) := \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$$

für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Beispiel 1.1.12. Der Betragsabstand auf \mathbb{R}^{n+m} ist die Produktmetrik zu den Betragsabständen auf \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m .

Proposition 1.1.13 (Komponentenregel). *Seien Z und X_1, \dots, X_n metrische Räume und $f_i : Z \rightarrow X_i$ Abbildungen. Genau dann ist die Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n) : Z \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ stetig bei $p \in Z$, wenn alle f_i dort stetig sind.*

1.1.14. Wenden wir diese Proposition auf $\text{id} : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ an, so ergibt sich, daß alle Projektionsabbildungen $\text{pr}_i : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_i$ stetig sein müssen.

Beweis. Da die Projektionen pr_i Abstände zwischen Punkten nie vergrößern, können wir ihre Stetigkeit direkt zeigen, indem „wir jeweils $\delta = \varepsilon$ nehmen“. Ist f stetig, so sind folglich auch die $f_i = \text{pr}_i \circ f$ stetig als Verknüpfungen stetiger Abbildungen. Sind umgekehrt alle f_i stetig in p , so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ gewisse δ_i mit $d(p, z) < \delta_i \Rightarrow d_i(f_i(p), f_i(z)) < \varepsilon$. Nehmen wir $\delta = \inf \delta_i$, so gilt

$$d(p, z) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(z)) < \varepsilon$$

und das ist gleichbedeutend zu $f(B(p; \delta)) \subset B(f(p); \varepsilon)$. □

Beispiel 1.1.15. Eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ von einem metrischen Raum X in den \mathbb{R}^n ist genau dann stetig, wenn alle ihre Komponenten $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Korollar 1.1.16 (Summen und Produkte stetiger Abbildungen sind stetig). *Ist X ein metrischer Raum und sind f, g stetige Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{R}$, so sind auch $f + g$ und fg stetige Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir schreiben $f + g$ beziehungsweise fg als die Verknüpfung der nach der Komponentenregel 1.1.13 stetigen Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x))$ mit der nach [AN1] 12.3.2.27 beziehungsweise [AN1] 12.3.2.28 stetigen Addition beziehungsweise Multiplikation $\text{add}, \text{mult} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. □

Definition 1.1.17. Ein metrischer Raum heißt **beschränkt**, wenn es für die möglichen Abstände zwischen Punkten unseres Raums eine reelle obere Schranke gibt. Eine Abbildung in einen metrischen Raum heißt **beschränkt**, wenn ihr Bild beschränkt ist.

Übungen

Übung 1.1.18. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist die Metrik stetig als Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge eines metrischen Raums, so ist auch die Abbildung $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $d_A(x) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ stetig. Alternativ verwenden wir für diese Abbildung auch die Notation $d(x, A) = d_A(x)$.

Übung 1.1.19. Wir versehen den Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} mit der Metrik $d(z, w) = |z - w|$. Man zeige, daß das in der Tat eine Metrik ist. Man zeige weiter, daß die Addition und die Multiplikation stetige Abbildungen $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind und das Bilden des Inversen eine stetige Abbildung $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$.

Ergänzende Übung 1.1.20. Man zeige, daß das Invertieren von Matrizen eine stetige Abbildung $GL(n; \mathbb{C}) \rightarrow GL(n; \mathbb{C})$ ist. Hinweis: Cramer'sche Regel [LA1] 6.4.6.

Übung 1.1.21. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von metrischen Räumen, die Abstände nicht verkleinert, in Formeln $d(f(x), f(z)) \geq d(x, z) \forall x, z \in X$. Man zeige, daß f injektiv ist und $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ stetig.

Übung 1.1.22. Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig. Jede multilineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{k(1)} \times \dots \times \mathbb{R}^{k(r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig.

1.2 Normierte Vektorräume

Definition 1.2.1. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine **Norm auf V** ist eine Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, v \mapsto \|v\|$ derart, daß gilt:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$

Unter einem **normierten Vektorraum** versteht man ein Paar $(V, \| \cdot \|)$ bestehend aus einem Vektorraum V und einer Norm $\| \cdot \|$ auf V .

Beispiel 1.2.2. Mit $v \mapsto \|v\|$ ist für jedes $\alpha > 0$ auch $v \mapsto \alpha \|v\|$ eine Norm. Auf dem Nullraum gibt es nur eine Norm, die eben den Nullvektor auf Null wirft.

Beispiel 1.2.3. Auf dem \mathbb{R}^n definiert man die **Skalarproduktnorm** eines Vektors $v = (v_1, \dots, v_n)$ durch $\|v\| = \|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$. Wie man formal zeigt, daß das tatsächlich eine Norm ist, wird in [LA2] 2.1.24 diskutiert.

Beispiel 1.2.4. Auf dem \mathbb{R}^n für $n > 0$ definiert man die **Maximumsnorm** von $v = (v_1, \dots, v_n)$ durch $|v| = \|v\|_\infty = \max(|v_1|, \dots, |v_n|)$.

Beispiel 1.2.5. Auf dem Raum $V = \text{Ens}^b(D, \mathbb{R})$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf einer Menge D erklären wir die **Supremumsnorm**, gegeben für $D \neq \emptyset$ durch

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$$

und im Fall $D = \emptyset$ als die einzig mögliche Norm auf dem Nullraum. Im Fall einer endlichen Menge D mit n Punkten erhalten wir unsere Maximumsnorm auf dem \mathbb{R}^n als Spezialfall der Supremumsnorm.

1.2.6. Jeder normierte Vektorraum wird ein metrischer Raum vermittelt der durch die Norm induzierten Metrik

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

Zum Beispiel gehört unser Betragsabstand auf dem \mathbb{R}^n zur Maximumsnorm.

Satz 1.2.7 (Stetigkeit linearer Abbildungen). *Eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen $f : V \rightarrow W$ ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt mit*

$$\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$$

Vorschau 1.2.8. Wir werden in 1.2.11 sehen, daß lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen stets stetig sind. Daraus wird folgen, daß lineare Abbildungen von einem endlichdimensionalen normierten reellen Vektorraum in einen beliebigen weiteren normierten reellen Vektorraum stets stetig sind, da sie ja endlichdimensionales Bild haben.

Beweis. Ist f stetig, so gibt es $\delta > 0$ mit $\|v - 0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(v) - f(0)\| \leq 1$. Setzen wir $C = 1/\delta$, so folgt $\|f(v)\| \leq C\|v\|$ zunächst für alle Vektoren v der Norm $\|v\| = \delta$ und dann durch Multiplikation mit Skalaren für alle $v \in V$. Gibt es umgekehrt ein $C > 0$ mit $\|f(v)\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V$, so finden wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta := \varepsilon/C > 0$ so daß gilt

$$\|v - w\| \leq \delta \Rightarrow \|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| \leq C\delta = \varepsilon \quad \square$$

Definition 1.2.9. Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf einem reellen Vektorraum V heißen **äquivalent**, wenn es positive Konstanten $c, C > 0$ gibt mit

$$\|v\|_1 \leq C\|v\|_2 \quad \text{und} \quad \|v\|_2 \leq c\|v\|_1 \quad \forall v \in V.$$

Satz 1.2.10 (Äquivalenz von Normen). *Auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.*

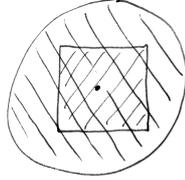
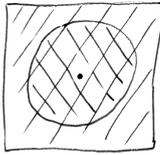


Illustration zur Äquivalenz von Normen am Beispiel der Betragsnorm und der Skalarproduktnorm auf dem \mathbb{R}^2 .

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß V der \mathbb{R}^n ist mit $n \geq 1$ und daß eine unserer Normen die Maximumsnorm $\|v\|_\infty$ ist. Sei $\|\cdot\|$ eine zweite Norm. Bezeichnet e_1, \dots, e_n die Standardbasis des \mathbb{R}^n und ist $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$, so haben wir

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|v_1 e_1 + \dots + v_n e_n\| \\ &\leq |v_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |v_n| \cdot \|e_n\| \\ &\leq \|v\|_\infty \cdot C \end{aligned}$$

mit $C = \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$ und damit die eine Ungleichung. Wir folgern, daß $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist im in [AN1] 12.3.2.14 erklärten Sinne nach dem ε - δ -Kriterium [AN1] 12.3.2.21, denn für alle $\varepsilon > 0$ folgt aus $\|x - y\|_\infty < \varepsilon/C$ bereits $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \varepsilon$. Nun ist aber die Oberfläche

$$F := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_\infty = 1\}$$

des Hyperkubus kompakt im Sinne von [AN1] 12.5.1.1, etwa als endliche Vereinigung [AN1] 12.5.1.17 kompakter Quader [AN1] 12.5.1.16. Wegen $n \geq 1$ gilt auch $F \neq \emptyset$. Nach [AN1] 12.5.1.5 nimmt folglich die Funktion $\|\cdot\|$ auf F ein Minimum a an. Da die Oberfläche F unseres Hyperkubus nicht den Nullvektor enthält, ist dies Minimum notwendig positiv, in Formeln $a > 0$. Wir folgern zunächst $\|v\|_\infty = 1 \leq a^{-1} \|v\|$ für alle $v \in F$. Dann gilt aber natürlich auch $|\lambda v|_\infty \leq a^{-1} \|\lambda v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in F$, also $|w|_\infty \leq a^{-1} \|w\| \forall w \in \mathbb{R}^n$ und erhalten die andere Ungleichung mit $c := a^{-1}$. \square

Korollar 1.2.11. *Jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen ist stetig.*

Beweis. Jeder Isomorphismus zwischen endlichdimensionalen normierten reellen Vektorräumen ist stetig nach dem Satz über die Äquivalenz von Normen 1.2.10 und dem Kriterium für die Stetigkeit linearer Abbildungen 1.2.7. So können wir uns beim Beweis des Korollars auf den Fall linearer Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zurückziehen, in dem die Stetigkeit mühelos aus Analysis 1 folgt. \square

Definition 1.2.12. Ist $f : V \rightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung normierter Vektorräume, so heißt die kleinstmögliche Konstante $C \geq 0$ wie in 1.2.7 auch die **Operatornorm** $\|f\|$ von f , in Formeln

$$\|f\| := \sup\{\|f(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$$

Übungen

Übung 1.2.13. Gegeben ein normierter Vektorraum V sind die Addition $V \times V \rightarrow V$ und die Multiplikation mit Skalaren $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ stetig. Außerdem ist auch die Norm $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Übung 1.2.14. Man zeige: Der Raum $\mathcal{B}(V, W)$ aller stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen V, W ist ein Untervektorraum im Raum $\text{Hom}(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W und die in 1.2.12 eingeführte Abbildung $f \mapsto \|f\|$ ist eine Norm auf $\mathcal{B}(V, W)$. Gegeben ein weiterer normierter Vektorraum U und stetige lineare Abbildungen $g : U \rightarrow V$ und $f : V \rightarrow W$ gilt $\|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|$.

Übung 1.2.15. Man zeige: Für je zwei Vektoren v, w eines normierten Vektorraums gilt $\|v + w\| \geq \|v\| - \|w\|$.

Übung 1.2.16. Man zeige: Gegeben ein normierter Vektorraum V ist jeder Ball in V konvex, als da heißt, mit je zwei Punkten gehört auch das ganze sie verbindende Geradensegment zu unserem Ball.

Übung 1.2.17. Seien U, V, W normierte Vektorräume. Eine bilineare Abbildung $F : U \times V \rightarrow W$ ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $\|F(u, v)\| \leq C \|u\| \|v\|$. Man formuliere und beweise die analoge Aussage auch für multilineare Abbildungen.

1.3 Topologische Räume

1.3.1 (**Motivation**). Die Begrifflichkeit der topologischen Räume bildet einen geschickten Rahmen für die Untersuchung von Stetigkeit und Grenzwerten sowohl für Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ als auch für unsere Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Diese Begrifflichkeit erweist sich auch in vielen weiteren Kontexten als geschickter Rahmen und durchdringt die gesamte Mathematik.

1.3.2. Gegeben eine Menge X bilden wir die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X , die **Potenzmenge von X** . Weil es mich verwirrt, über Mengen von Mengen zu reden, nenne ich wie in [LA1] 1.5.13 Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$ lieber **Systeme von Teilmengen von X** und spreche im folgenden von **Teilsystemen**, wenn ich Teilmengen solcher Mengensysteme meine.

Definition 1.3.3. Gegeben eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Teilmengen einer Menge X im Sinne von [AN1] 12.3.5.16 erklärt man ihren **Schnitt** und ihre **Vereinigung** durch die Vorschriften

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I}^X X_i := \{x \in X \mid \text{Für alle } i \in I \text{ gilt } x \in X_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I}^X X_i := \{x \in X \mid \text{Es existiert ein } i \in I \text{ mit } x \in X_i\}$$

Der obere Index X wird meist weggelassen. Er ist nur relevant, wenn wir den Schnitt über die leere Familie von Teilmengen von X betrachten, der X selber ist.

Definition 1.3.4. Eine **Topologie \mathcal{T} auf einer Menge X** ist ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, das stabil ist unter dem Bilden von endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{T}) bestehend aus einer Menge mit einer Topologie. Statt $V \in \mathcal{T}$ schreiben wir meist

$$V \Subset X$$

und nennen V eine **offene Teilmenge von X** . Die Notation \Subset ist in der Literatur unüblich.

1.3.5. In Formeln ausgedrückt fordern wir von einer Topologie \mathcal{T} also:

1. $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{T} \Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{T}$ für $n \geq 0$ und insbesondere auch $X \in \mathcal{T}$ als der Spezialfall $n = 0$. Gleichbedeutend dazu sind die beiden Forderungen $X \in \mathcal{T}$ sowie $V, W \in \mathcal{T} \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{T}$;
2. $\mathcal{V} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \in \mathcal{T}$ und damit insbesondere auch $\emptyset \in \mathcal{T}$, da ja das leere Mengensystem $\mathcal{V} = \emptyset$ in jedem Mengensystem enthalten ist.

Beispiel 1.3.6. Auf $\bar{\mathbb{R}}^n$ erklären wir die **natürliche Topologie** durch die Vorschrift, daß genau die Mengen offen sein sollen, die für jeden ihrer Punkte einen Quader um diesen Punkt im Sinne von [AN1] 12.3.2.11 umfassen. In diesen Topologien ist $(a, \infty]$ offen in $\bar{\mathbb{R}}$ und $(a, \infty] \times (b, \infty]$ offen in $\bar{\mathbb{R}}^2$ für alle $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

Beispiel 1.3.7. Auf einem metrischen Raum X wird die **metrische Topologie** erklärt durch die Vorschrift, daß genau die Mengen offen sein sollen, die mit jedem ihrer Punkte auch einen ganzen Ball um diesen Punkt umfassen. In Formeln haben wir also $U \Subset X$ genau dann, wenn gilt $(\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B(x; \varepsilon) \subset U)$.

1.3.8 (**Bälle sind offen**). In der metrischen Topologie ist jeder Ball eine offene Teilmenge

$$B(p; r) \Subset X$$

In der Tat gibt es für jedes $x \in B(p; r)$ ein $\varepsilon > 0$ mit $d(p, x) + \varepsilon \leq r$ und dann folgt $B(x; \varepsilon) \subset B(p; r)$ aus der Dreiecksungleichung.

Beispiel 1.3.9. Auf jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V erklären wir die **natürliche Topologie** als die metrische Topologie der zu einer Norm gebildeten Metrik. Aus dem Satz über die Äquivalenz von Normen 1.2.10 folgt, daß diese Topologie von der gewählten Norm gar nicht abhängt.

Definition 1.3.10. Seien X ein topologischer Raum und $p \in X$ ein Punkt. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine **Umgebung von p in X** , wenn es eine offene Menge $V \Subset X$ gibt mit $p \in V \subset U$.

1.3.11 (**Rückwärtskompatibilität des Umgebungsbegriffs**). Die Umgebungen von Punkten $p \in \bar{\mathbb{R}}^n$ in Bezug auf die natürliche Topologie sind dieselben wie unsere Umgebungen aus [AN1] 12.3.2.11. In der Tat umfaßt jede „topologische“ Umgebung von p eine offene Menge um p und damit eine Quaderumgebung von p . Also ist jede „topologische“ Umgebung von p auch eine „Analysis-1-Umgebung“ von p . Umgekehrt umfaßt jede „Analysis-1-Umgebung“ von p per definitionem eine Quaderumgebung von p und diese kann offensichtlich verkleinert werden zu einer offenen Quaderumgebung von p . Also ist jede „Analysis-1-Umgebung“ von p auch eine „topologische“ Umgebung von p .

Definition 1.3.12. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig im Punkt** $p \in X$, wenn es für jede Umgebung U von $f(p)$ eine Umgebung U' von p gibt mit $f(U') \subset U$. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn sie stetig ist in jedem Punkt.

1.3.13 (**Rückwärtskompatibilität zur Stetigkeit im Fall von $\bar{\mathbb{R}}^n$**). Eine Abbildung $\bar{\mathbb{R}}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ ist topologisch stetig für die natürlichen Topologien im Sinne der obigen Definition 1.3.12 genau dann, wenn sie stetig ist im Sinne unserer Definition [AN1] 12.3.2.14. Das folgt unmittelbar aus der Rückwärtskompatibilität des Umgebungsbegriffs 1.3.11.

Lemma 1.3.14 (Rückwärtskompatibilität zur metrischen Stetigkeit). *Eine Abbildung von metrischen Räumen $f : X \rightarrow Y$ ist metrisch stetig bei $p \in X$ genau dann, wenn sie bei p topologisch stetig ist für die metrische Topologie.*

Beweis. Weil in der metrischen Topologie alle Bälle offen sind nach 1.3.8, ist eine Umgebung eines Punktes p in der metrischen Topologie dasselbe wie eine Teilmenge, die für ein $\varepsilon > 0$ den Ball $B(p; \varepsilon)$ umfaßt. Das Lemma folgt. \square

Satz 1.3.15 (Verknüpfung stetiger Abbildungen). *Jede Verknüpfung von stetigen Abbildungen ist stetig. Sind genauer $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen zwischen topologischen Räumen und ist $p \in X$ ein Punkt und f stetig bei p und g stetig bei $f(p)$, so ist $(g \circ f)$ stetig bei p .*

Beweis. Ist g stetig bei $f(p)$, so finden wir für jede Umgebung U von $g(f(p))$ eine Umgebung U' von $f(p)$ mit $g(U') \subset U$. Ist zusätzlich f stetig bei p , finden wir für diese Umgebung U' von $f(p)$ weiter eine Umgebung U'' von p mit $f(U'') \subset U'$. Damit haben wir aber auch eine Umgebung U'' von p gefunden mit $(g \circ f)(U'') \subset U$. \square

Definition 1.3.16. Gegeben eine Teilmenge $D \subset X$ eines topologischen Raums X erklärt man die **auf D induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** durch die Vorschrift

$$W \text{ @ } D \Leftrightarrow \exists V \text{ @ } X \text{ mit } W = V \cap D.$$

In Worten ist also eine Teilmenge von D offen für die induzierte Topologie genau dann, wenn sie der Schnitt von D mit einer offenen Teilmenge von X ist. Ab jetzt fassen wir stillschweigend jede Teilmenge D eines topologischen Raums X als topologischen Raum mit der induzierten Topologie auf.

1.3.17. Es ist klar, daß das in 1.3.16 beschriebene Mengensystem auf einer Teilmenge eines topologischen Raums in der Tat eine Topologie auf besagter Teilmenge liefert und daß die Einbettungsabbildung stetig ist.

1.3.18. Wenn wir eine Menge einfach nur „offen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „offen“ gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset D \subset X$ Teilmengen, so meint $M \Subset D$, daß M offen ist als Teilmenge des Raums D mit seiner induzierten Topologie.

Beispiel 1.3.19 (Rückwärtskompatibilität zur Stetigkeit im Fall von $\bar{\mathbb{R}}^m \supset D$). Eine Abbildung $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ ist stetig im Sinne unserer Definition [AN1] 12.3.2.14 genau dann, wenn die Abbildung $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig ist für die auf D induzierte Topologie. Das folgt direkt aus den Definitionen.

Lemma 1.3.20 (Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie). Seien $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, $Z \subset Y$ eine Teilmenge mit $f(X) \subset Z$ und $p \in X$ ein Punkt. Genau dann ist $f : X \rightarrow Y$ stetig bei p , wenn die induzierte Abbildung $f : X \rightarrow Z$ stetig ist bei p für die auf Z induzierte Topologie.

Beweis. Es ist klar, daß die Umgebungen $U_Z \subset Z$ eines Punktes $q \in Z$ in Bezug auf die induzierte Topologie genau die Schnitte $U_Y \cap Z$ mit Z von Umgebungen $U_Y \subset Y$ von $q \in Y$ sind. Genau dann gibt es also für jede Umgebung U_Y von $f(p) \in Y$ eine Umgebung $U' \subset X$ von p mit $f(U') \subset U_Y$, wenn es für jede Umgebung U_Z von $f(p) \in Z$ eine Umgebung $U' \subset X$ von p gibt mit $f(U') \subset U_Z$. \square

1.3.21. Wir leiten unsere Aussage [AN1] 12.3.2.30 über die Stetigkeit der Verknüpfung auch noch aus den obigen Aussagen ab. Gegeben $f : \bar{\mathbb{R}}^m \supset D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ stetig bei $p \in D$ und $g : \bar{\mathbb{R}}^n \supset E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^l$ mit $f(D) \subset E$ stetig bei $f(p)$ ist ja nach der universellen Eigenschaft der induzierten Topologie auch $f : D \rightarrow E$ stetig bei p . Da nach Annahme $g : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^l$ stetig ist bei $f(p)$, folgt die Stetigkeit der Verknüpfung nach [AN1] 12.3.2.30 aus der Stetigkeit der Verknüpfung nach 1.3.15.

Übungen

Übung 1.3.22. In einem normierten reellen Vektorraum ist jede nichtleere offene Teilmenge bereits ein Erzeugendensystem im Sinne der linearen Algebra.

Übung 1.3.23 (Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft). Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von topologischen Räumen ist stetig bei $p \in X$ genau dann, wenn es eine Umgebung $V \subset X$ von p gibt mit $f|_V : V \rightarrow Y$ stetig bei p .

Übung 1.3.24. Gegeben ein topologischer Raum X und $B \subset D \subseteq X$ zeige man $B \subseteq D \Leftrightarrow B \subseteq X$.

Übung 1.3.25 (Summen und Produkte stetiger Abbildungen sind stetig). Ist X ein topologischer Raum und sind f, g stetige Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{R}$, so sind auch $f + g$ und fg stetige Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{R}$. Hinweis: Man mag sich am Fall metrischer Räume 1.1.16 orientieren.

Übung 1.3.26 (De Morgan'sche Regeln für Mengenfamilien). Gegeben eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Teilmengen einer Menge X gilt

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus X_i) \qquad X \setminus \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus X_i)$$

1.4 Grenzwerte in topologischen Räumen

1.4.1. Ein Punkt eines topologischen Raums X heißt ein **Häufungspunkt von X** , wenn jede seiner Umgebungen auch noch andere Punkte unseres Raums enthält. Das ist gleichbedeutend dazu, daß die nur aus unserem Punkt bestehende Teilmenge nicht offen ist. Man mag gleichbedeutend von einem **nichtoffenen Punkt** reden.

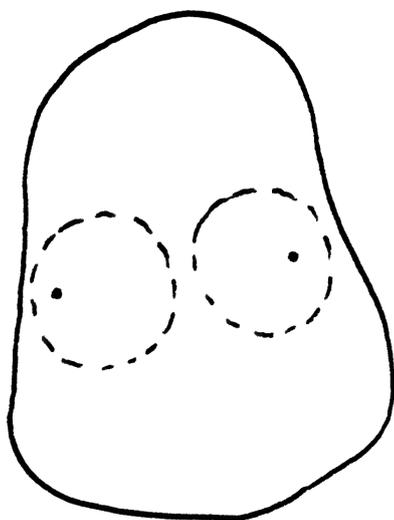
1.4.2. Gegeben ein topologischer Raum T mit einer Teilmenge $X \subset T$ nennen wir ein Element $t \in T$ einen **Häufungspunkt zu X** oder ausführlicher einen **Häufungspunkt zu X in T** , wenn er im Sinne unserer Definition 1.4.1 ein Häufungspunkt des Raums $X \cup \{t\}$ mit seiner induzierten Topologie ist.

1.4.3. Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff** oder ein **Hausdorff-Raum**, wenn in ihm je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen. Zum Beispiel ist jeder metrische Raum mit seiner metrischen Topologie offensichtlich ein Hausdorffraum.

Satz 1.4.4 (Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen in Häufungspunkten). Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f : X \setminus p \rightarrow Y$ eine Abbildung. Ist Y Hausdorff, so gibt es höchstens eine Fortsetzung von f zu einer Abbildung $\hat{f} : X \rightarrow Y$, die stetig ist bei p .

Beweis. Wäre sonst \hat{f} eine weitere bei p stetige Fortsetzung mit $\hat{f}(p) \neq \tilde{f}(p)$, so fänden wir disjunkte Umgebungen \hat{V} und \tilde{V} dieser beiden Bildpunkte und dazu Umgebungen \hat{U} und \tilde{U} von p mit $\hat{f}(\hat{U}) \subset \hat{V}$ und $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$. Daraus folgte aber

$$f(\hat{U} \cap \tilde{U} \setminus p) \subset \hat{V} \cap \tilde{V} = \emptyset$$



In einem Hausdorffraum haben je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen.

im Widerspruch dazu, daß die Umgebung $\hat{U} \cap \tilde{U}$ von p nicht nur aus unserem Häufungspunkt p selbst bestehen darf. \square

Definition 1.4.5. Seien X, Y topologische Räume mit Y Hausdorff. Seien weiter $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f : X \setminus p \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei schließlich $b \in Y$ ein Punkt. Wir sagen, $f(x)$ **strebt gegen b für $x \rightarrow p$** und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$$

als Abkürzung für die Aussage, daß die Fortsetzung von f zu $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ durch $\tilde{f}(p) := b$ stetig ist bei p . In diesem Fall nennen wir b den **Grenzwert** oder lateinisch **Limes** der Funktion f für $x \rightarrow p$. Nach der Eindeutigkeit stetiger Fortsetzungen 1.4.4 ist dieser Grenzwert eindeutig bestimmt, wenn er existiert.

1.4.6. Salopp gesprochen verhält es sich demnach so, daß eine Abbildung in einen Hausdorffraum mit einer einpunktigen Definitionslücke an einem Häufungspunkt ihres Definitionsbereichs auf höchstens eine Weise stetig in diese Definitionslücke hinein fortgesetzt werden kann. Der Wert dieser an besagter Stelle stetigen Fortsetzung heißt dann der Grenzwert unserer Abbildung an besagter Stelle.

1.4.7. Insbesondere gilt für eine Folge $\mathbb{N} \rightarrow Y, n \mapsto y_n$ in einem Hausdorffraum Y und einen Punkt $b \in Y$ in unserer neuen Notation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

genau dann, wenn jede Umgebung von b fast alle Glieder unserer Folge enthält. Wir sagen dann auch, die Folge y_n **strebt gegen b** oder **konvergiert gegen b** und

nennen b einen **Grenzwert der Folge**. Gleichbedeutend können wir ebensogut fordern, daß jede offene Menge, die b enthält, auch fast alle Glieder unserer Folge enthält.

1.4.8 (**Grenzwerte von Verknüpfungen**). Wie in [AN1] 12.3.5.27 ausgeführt vertauschen Limites mit dem Nachschalten stetiger Funktionen, ändern sich nicht beim Vorschalten einer stetigen Funktion und lassen sich iterieren. Das folgt genau wie in [AN1] 12.3.5.27 direkt aus der hinreichenden Bedingung 1.3.15 für die Stetigkeit einer Verknüpfung an einem vorgegebenen Punkt.

Vorschau 1.4.9. Um von hier an durchgehend mit topologischen Räumen arbeiten zu können, müßten wir erklären, wie das Produkt zweier topologischer Räume mit einer Topologie zu verstehen ist, und allerhand Eigenschaften wie etwa das Analogon der Komponentenregel prüfen. Das vermeide ich vorerst und diskutiere es erst in [AN3] 1.4.17.

Übungen

Übung 1.4.10. Konvergiert eine Folge von stetigen Funktionen von einem topologischen Raum in einen metrischen Raum gleichmäßig, so ist auch die Grenzfunktion stetig. Hinweis: Man kopiere den Beweis von [AN1] 12.6.1.10.

Übung 1.4.11. Genau dann ist p Häufungspunkt des metrischen Raums X , wenn es eine Folge x_n in $X \setminus p$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$.

Übung 1.4.12. Seien X ein topologischer Raum, $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f_i : X \setminus p \rightarrow Y_i$ Abbildungen in metrische Räume für $1 \leq i \leq n$. Sei $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$ das Produkt und $f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow Y$. So ist $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$ für $b = (b_1, \dots, b_n)$ gleichbedeutend zu $\lim_{x \rightarrow p} f_i(x) = b_i \forall i$.

Übung 1.4.13 (**Grenzwert durch Einquetschen**). Gegeben X ein topologischer Raum, $p \in X$ ein Häufungspunkt und $f, g, h : X \setminus p \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit der Eigenschaft $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in X \setminus p$ folgt aus $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$ bereits $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$.

Übung 1.4.14 (**Abstandskriterium für Grenzwerte in metrischen Räumen**). Gegeben eine Abbildung f in einen metrischen Raum mit Metrik d gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} d(f(x), y) = 0$$

Man muß für einen Beweis der Rückrichtung auf die Definitionen zurückgehen.

1.5 Abgeschlossene Teilmengen

Satz 1.5.1 (Stetigkeit und Urbilder offener Mengen). *Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.*

1.5.2. In diesem Beweis verwenden wir zum ersten Mal unsere von einem topologischen Raum geforderte Eigenschaft, daß eine beliebige Vereinigung offener Mengen wieder offen sein soll.

Beweis. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig an jeder Stelle $p \in X$. Gegeben $U \subseteq Y$ offen ist U Umgebung eines jeden seiner Punkte. Folglich gibt es für jede Stelle $p \in f^{-1}(U)$ eine Umgebung U'_p mit $f(U'_p) \subset U$. Diese U'_p können sogar offen gewählt werden und damit ist $f^{-1}(U)$ offen als die Vereinigung aller U'_p mit $p \in f^{-1}(U)$. Sei umgekehrt das Urbild jeder offenen Menge offen und sei $p \in X$ gegeben und U eine Umgebung von $f(p)$. So gibt es $V \subseteq Y$ mit $f(p) \in V \subset U$ und dann ist $U' := f^{-1}(V)$ eine Umgebung von p mit $f(U') \subset U$. Ist also das Urbild jeder offenen Menge offen, so ist unsere Abbildung auch stetig an jeder Stelle p . \square

Ergänzung 1.5.3. Entwickelt man die Theorie der topologischen Räume ab initio, so wird man in der Regel die im vorhergehenden Satz enthaltene Charakterisierung wegen ihrer großen Eleganz gleich als Definition der Stetigkeit nehmen. Daß die Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig ist, kann man von dieser Definition ausgehend sehr leicht und direkt einsehen, indem man beachtet, daß aus $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig folgt $V \subseteq Z \Rightarrow g^{-1}(V) \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \subseteq X$. Da nun gilt $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$, ist damit auch $(g \circ f)$ stetig.

Korollar 1.5.4 (Stetigkeit von Umkehrabbildungen). *Eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von topologischen Räumen hat eine stetige Umkehrabbildung genau dann, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Satz 1.5.1 über Stetigkeit und Urbilder offener Mengen. \square

Definition 1.5.5. Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X heißt **abgeschlossen** oder präziser **abgeschlossen in X** und wir schreiben in Formeln $M \subseteq X$, wenn ihr Komplement $X \setminus M$ offen ist.

1.5.6. Wenn wir eine Menge einfach nur „abgeschlossen“ nennen, so in der Hoffnung, dem Leser sei klar, in Bezug auf welchen größeren Raum X dies „abgeschlossen“ gemeint ist. Ist X ein topologischer Raum und sind $M \subset D \subset X$ Teilmengen, so meint $M \subseteq D$, daß M abgeschlossen ist als Teilmenge des Raums D mit seiner induzierten Topologie 1.3.16.

Satz 1.5.7 (Abgeschlossene Teilmengen metrischer Räume). *Eine Teilmenge M eines metrischen Raums X ist abgeschlossen genau dann, wenn jeder Punkt $x \in X$, der Grenzwert einer Folge aus M ist, bereits selbst zu M gehört.*

1.5.8. Wir nennen die zweite Bedingung in unserem Satz **folgenabgeschlossen** und nennen die Bedingung, daß das Komplement offen sein soll, ausführlicher **topologisch abgeschlossen**.

Beweis. Ist M nicht topologisch abgeschlossen, so ist $X \setminus M$ nicht offen und es gibt einen Punkt $x \in X \setminus M$ derart, daß für alle $n \geq 1$ der Ball $B(x; 1/n)$ nicht in $X \setminus M$ enthalten ist. Wählen wir jeweils $a_n \in B(x; 1/n) \cap M$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ und $x \notin M$ und damit ist M auch nicht folgenabgeschlossen. Ist umgekehrt M nicht folgenabgeschlossen, so gibt es eine Folge a_n in M und $x \in X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \notin M$. Dann kann es aber kein $\varepsilon > 0$ geben mit $B(x; \varepsilon) \subset X \setminus M$, da jeder dieser Bälle fast alle a_n enthält. Also ist $X \setminus M$ auch nicht offen und M nicht topologisch abgeschlossen. \square

Lemma 1.5.9. *Jede endliche Vereinigung und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

Beweis. Das folgt mit der Definition einer Topologie sofort aus der in Übung 1.3.26 behandelten de Morgan'schen Regel

$$X \setminus \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} (X \setminus M) \quad \square$$

1.5.10. Für jede Teilmenge $M \subset X$ eines topologischen Raums gibt es eine kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die M umfaßt, nämlich den Schnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X , die M umfassen. Diese Teilmenge heißt der **Abschluß von M in X** . Man verwendet dafür die beiden Notationen $\bar{M} = \text{Cl}_X(M)$ mit Cl für „closure“.

Satz 1.5.11 (Stetigkeit und Urbilder abgeschlossener Mengen). *Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist.*

Beweis. Das folgt sofort aus der entsprechenden Aussage 1.5.1 für offene Mengen und der Gleichheit $X \setminus f^{-1}(M) = f^{-1}(Y \setminus M)$ für jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und jede Teilmenge $M \subset Y$. \square

Proposition 1.5.12 (Verkleben stetiger Abbildungen). *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung topologischer Räume und sei X überdeckt von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$. Sind die Einschränkungen $f|_{A_i}$ stetig für alle i , so ist f stetig.*

1.5.13. Die analoge Aussage gilt auch für offene Teilmengen und sogar im Fall einer beliebigen Überdeckung durch offene Teilmengen, denn Stetigkeit ist nach 1.3.23 eine lokale Eigenschaft.

Beweis. Nach 1.5.11 muß nur gezeigt werden, daß für jede abgeschlossene Teilmenge $B \subset Y$ von Y ihr Urbild $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist in X . Nun gilt aber $f^{-1}(B) = f_1^{-1}(B) \cup \dots \cup f_n^{-1}(B)$ und $f_i^{-1}(B) \subset A_i$ nach Annahme und wegen

$A_i \subset X$ folgt mit Übung 1.5.20 bereits $f_i^{-1}(B) \subset X$. Damit schließlich folgt $f^{-1}(B) \subset X$, da jede endlich Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. \square

Definition 1.5.14. Ein metrischer Raum K heißt **kompakt** oder ausführlicher **folgenkompakt** und als Substantiv ein **Kompaktum**, wenn jede Folge in K eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus K konvergiert.

Vorschau 1.5.15. Der Begriff der „Kompaktheit“ ist für weite Teile der Mathematik grundlegend. Sie werden in 5.1.3 sehen, wie er im Fall allgemeiner „topologischer Räume“ in die beiden Begriffe „folgenkompakt“ und „überdeckungskompakt“ aufspaltet. Sie werden auch sehen, daß es letzterer Begriff ist, der weiter trägt und zu „kompakt“ abgekürzt wird, obwohl ersterer Begriff die natürlichere Verallgemeinerung unserer obigen Definition scheint. Aber alles zu seiner Zeit!

Satz 1.5.16 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Wir wissen bereits aus [AN1] 12.5.1.16, daß $[-M, M]^n$ kompakt ist. Eine abgeschlossene Teilmenge $K \subset [-M, M]^n$ muß dann auch kompakt sein, denn jede Folge in K muß eine in $[-M, M]^n$ konvergierende Teilfolge haben, da diese Menge bereits als kompakt bekannt ist, und der Grenzwert dieser Teilfolge muß dann sogar in K liegen, weil wir K als abgeschlossen angenommen hatten. Also ist jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge kompakt. Ist umgekehrt $K \subset \mathbb{R}^n$ nicht beschränkt, so nimmt die stetige Funktion $x \mapsto |x|$ darauf kein Maximum an und K kann nicht kompakt sein nach [AN1] 12.5.1.5. Ist schließlich K nicht abgeschlossen in \mathbb{R}^n , so gibt es eine Folge in K , die gegen einen Punkt von $\mathbb{R}^n \setminus K$ konvergiert, und jede ihrer Teilfolgen muß gegen denselben Punkt konvergieren und keine gegen einen Punkt von K . Also kann K auch nicht kompakt sein. \square

Korollar 1.5.17. *Eine Teilmenge $K \subset X$ eines endlichdimensionalen normierten reellen Raums ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Das folgt aus Heine-Borel 1.5.16 mit dem Satz über die Äquivalenz von Normen 1.2.10. \square

Übungen

Übung 1.5.18 (Abschlüsse in metrischen Räumen). Gegeben $A \subset X$ eine Teilmenge in einem metrischen Raum besteht ihr Abschluß $\bar{A} = \text{Cl}_X(A)$ genau aus allen Punkten von X , die Grenzwerte von Folgen in A sind. Hinweis: Gilt $x^i = \lim a_n^i$ und $x = \lim x^i$, so gilt auch $x = \lim a_n^i$.

Übung 1.5.19 (Extremwerte auf Kompakta). Jede stetige Funktion $f : K \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ auf einem nichtleeren folgenkompakten metrischen Raum K nimmt das Supremum und das Infimum der Menge ihrer Funktionswerte als Funktionswert an. Hinweis: Man kopiere [AN1] 12.5.1.5.

Übung 1.5.20. Gegeben ein topologischer Raum X und $B \subset D \subset X$ haben wir $B \not\subset D \Leftrightarrow \exists A \not\subset X$ mit $B = A \cap D$. Gegeben ein topologischer Raum X und $B \subset D \not\subset X$ haben wir $B \not\subset D \Leftrightarrow B \not\subset X$.

Ergänzende Übung 1.5.21. Man zeige, daß man auf dem Raum $\text{Ens}(\mathbb{N}, \{W, Z\})$ aller Folgen in der zweielementigen Menge $\{W, Z\}$ eine Metrik erklären kann durch die Vorschrift $d(\omega, \eta) = 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $\omega(n) \neq \eta(n)$, beziehungsweise $d(\omega, \eta) = 0$ falls $\omega = \eta$. Man zeige weiter, daß der so gebildete metrische Raum kompakt ist. Nebenbei bemerkt denke ich bei W an „Wappen“ und bei Z an „Zahl“ und bei der Übung an Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Ergänzende Übung 1.5.22. Seien (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$ kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap K = \emptyset$. So gibt es $\delta > 0$ mit $d(x, y) \geq \delta$ für alle $x \in A, y \in K$. Hinweis: 1.1.18.

1.6 Vollständige metrische Räume

1.6.1. Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum heißt eine **Cauchy-Folge**, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon$ gibt mit $n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, wenn darin jede Cauchy-Folge einen Grenzwert hat.

Beispiel 1.6.2. Die Zahlengerade \mathbb{R} ist vollständig nach [AN1] 12.3.6.8.

Beispiel 1.6.3. Gegeben vollständige metrische Räume X, Y ist auch ihr Produkt $X \times Y$ vollständig. Das sollen Sie zur Übung selbst zeigen.

Beispiel 1.6.4. Der \mathbb{R}^n ist vollständig. Jeder endlichdimensionale normierte Vektorraum ist vollständig nach dem Satz 1.2.10 über die Äquivalenz von Normen.

1.6.5. Da jede abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raums folgenabgeschlossen ist, ist jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums auch selbst ein vollständiger metrischer Raum.

1.6.6. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt ein **Banach-Raum**.

Übungen

Übung 1.6.7. Gegeben vollständige metrische Räume X, Y ist auch ihr Produkt $X \times Y$ vollständig.

Übung 1.6.8. Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig. Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen.

Übung 1.6.9. Seien V, W normierte Vektorräume. Ist W vollständig, so ist auch der Raum $\mathcal{B}(V, W)$ der stetigen linearen Abbildungen von V nach W aus 1.2.14 vollständig.

Übung 1.6.10. Ist V ein Banachraum und D eine Menge, so ist auch der Vektorraum $\text{Ens}^b(D, V)$ aus 1.2.5 aller beschränkten Abbildungen von D nach V mit seiner Supremumsnorm $\| \cdot \|_\infty$ vollständig. Das brauchen wir beim Beweis von Picard-Lindelöf.

Übung 1.6.11. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von metrischen Räumen heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $d(x, x_1) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_1)) < \varepsilon$. Man zeige, daß jede gleichmäßig stetige Abbildung $f : A \rightarrow Y$ von einer Teilmenge A eines metrischen Raums X in einen vollständigen metrischen Raum Y auf genau eine Weise zu einer stetigen Abbildung $\bar{A} \rightarrow Y$ auf den Abschluß von A in X fortgesetzt werden kann.

Scholium 1.6.12. Wir werden die Aussage der vorhergehenden Übung in dieser Vorlesung erst bei der Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen verwenden. Sie ist bei der Diskussion von Hilberträumen wesentlich.

Übung 1.6.13 (Invertieren stetiger Endomorphismen). Für V einen normierten Vektorraum setzen wir

$$\mathcal{B}(V) := \mathcal{B}(V, V)$$

Man zeige: Gegeben ein Banachraum V und $h \in \mathcal{B}(V)$ ein stetiger Endomorphismus von V einer Operatornorm $\|h\| < 1$ konvergiert die Folge der Partialsummen der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} h^n$ und der Grenzwert ist invers zu $\text{id}_V - h$. Insbesondere sind alle $f \in \mathcal{B}(V)$ mit $\|f - \text{id}_V\| < 1$ stetig invertierbar. Man zeige weiter, daß die Menge $\mathcal{B}(V)^\times \subset \mathcal{B}(V)$ der stetig invertierbaren stetigen Endomorphismen offen ist und das Invertieren eine stetige Abbildung

$$\text{inv} : \mathcal{B}(V)^\times \rightarrow \mathcal{B}(V)^\times$$

Scholium 1.6.14. Die Aussage der vorhergehenden Übung brauchen wir in dieser Vorlesung nur, um beim Umkehrsatz im Fall von Banachräumen unendlicher Dimension zu zeigen, daß die Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

Ergänzende Übung 1.6.15 (Exponential von Endomorphismen). Man zeige: Gegeben ein Banachraum V und $f \in \mathcal{B}(V)$ ein stetiger Endomorphismus von V konvergiert die Folge der Partialsummen der Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f^k$ und liefert eine stetige Abbildung

$$\text{exp} : \mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{B}(V)$$

Wir haben $\text{exp}(0) = \text{id}_V$ und gegeben f, g mit $fg = gf$ gilt $\text{exp}(f + g) = (\text{exp } f)(\text{exp } g)$. Gegeben ein weiterer Banachraum W und $\varphi : V \rightarrow W$ stetig und

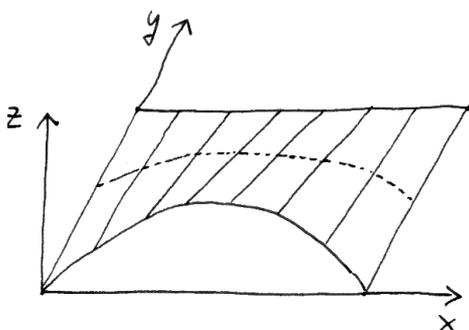
$h \in \mathcal{B}(W)$ mit $h\varphi = \varphi f$ gilt $(\exp h)\varphi = \varphi(\exp f)$. Die Exponentialfunktion von Matrizen aus [AN1] 12.7.2.3 ist ein Spezialfall, aber ich finde die Darstellung im Rahmen von Banachräumen viel transparenter als dieses Koordinatengekruschtel aus Analysis 1.

2 Ableitungen in mehreren Veränderlichen

2.1 Partielle Ableitungen und Gradient

Definition 2.1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **partiell differenzierbar nach der i -ten Variablen** an einer Stelle $p = (p_1, \dots, p_n) \in A$, wenn die Funktion $x \mapsto f(p_1, \dots, p_{i-1}, x, p_{i+1}, \dots, p_n)$ differenzierbar ist bei $x = p_i$. Die Ableitung dieser Funktion heißt die **i -te partielle Ableitung** von f und wird notiert als

$$(D_i f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + h, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{h}$$



Veranschaulichen wir uns eine reellwertige Funktion von zwei reellen Veränderlichen durch die Hügellandschaft ihres Graphen, so beschreibt die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ die Steigung bei p derjenigen Straße durch p , die besagte Hügellandschaft in Richtung der x -Achse durchquert.

2.1.2. Unsere partiellen Ableitungen sind, soweit sie existieren, wieder reellwertige Funktionen. Um $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ zu berechnen denkt man sich alle x_j mit $j \neq i$ als Konstanten. Zum Beispiel berechnen wir die partiellen Ableitungen von $f(x, y) = x \sin(xy)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sin(xy) + xy \cos(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \cos(xy) \end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt auch die Vorteile der Notation $\frac{\partial}{\partial x}$ gegenüber der formal exakteren Notation D_i , bei der man stets eine Reihenfolge der Variablen festlegen muß und schneller in Indizes ertrinkt. Wenn die sonstige Notation es erlaubt, benutzt man auch die sehr konzisen Schreibweisen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x$$

2.1.3 (**Diskussion der Notation**). Ich will an einem Beispiel erläutern, aus welchem Grund es sinnvoll ist, im Fall mehrerer Veränderlichen unsere bisherige Notation $\frac{d}{dx}$ zu $\frac{\partial}{\partial x}$ abzuändern. Denken wir uns einen Wanderer auf einer Wanderung

durch die Alpen, bei der schlechtes Wetter aufkommt. Der Luftdruck $D = D(t, h)$ hängt dann sowohl von der Zeit als auch von der Höhe ab. Macht unser Wanderer zum Zeitpunkt $t = t_0$ in der Höhe $h = h_0$ eine Pause, so ändert sich der Luftdruck, den sein Barometer mißt, mit der Rate $\frac{\partial D}{\partial t}(t_0, h_0)$. Geht er jedoch zum Zeitpunkt $t = t_0$ bergab oder bergauf und gibt die Funktion $h(t)$ seine Höhe zum Zeitpunkt t an, so ändert sich der Luftdruck, den sein Barometer mißt, mit der Rate $\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(D(t, h(t)))$. Wir werden zeigen, daß sich diese Rate auch ausdrücken läßt in der Gestalt $\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(D(t, h(t))) = \frac{\partial D}{\partial t}(t_0, h(t_0)) + h'(t_0)\frac{\partial D}{\partial h}(t_0, h(t_0))$ oder in Kurzschreibweise

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{dh}{dt} \frac{\partial D}{\partial h}$$

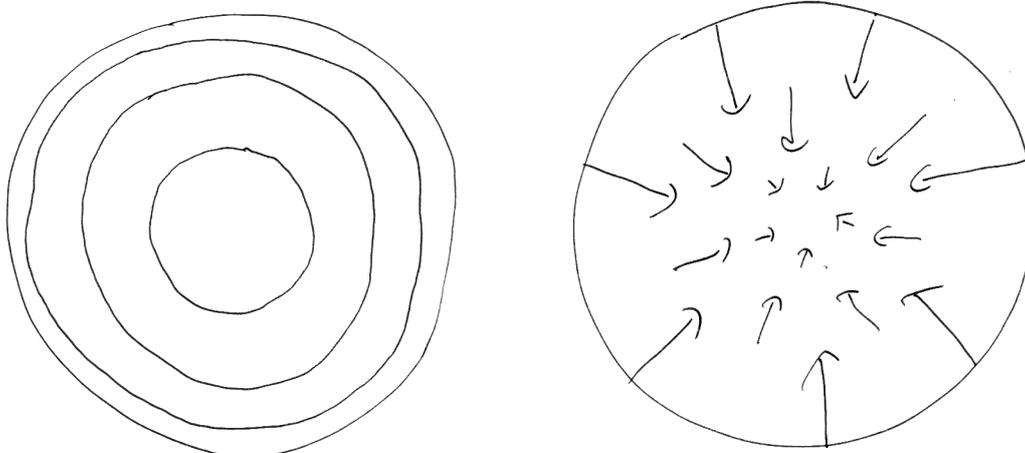
Der Zweck der Variation unserer Notation liegt nun eben darin, daß mit ihr solche Verkürzungen verständlich bleiben. Um die behauptete Formel zu beweisen, führen wir den Begriff des Differentials ein, studieren seinen Zusammenhang mit den partiellen Ableitungen und erhalten unsere Formel als Korollar 2.4.8 der Kettenregel für Differentiale.

Definition 2.1.4. Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz A nach jeder der n Variablen partiell differenzierbar, so erklären wir den **Gradienten von f** als die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{grad } f : A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^\top \end{aligned}$$

2.1.5. Man beachte, daß in dieser Definition das Symbol x für ein Element des \mathbb{R}^n steht und nicht wie zuvor für eine reelle Zahl. Ich stelle mir $\text{grad } f$ meist vor als ein Vektorfeld, das also jedem Punkt aus A einen Vektor aus dem \mathbb{R}^n zuordnet. Das ist auch der Grund dafür, daß ich in obiger Definition den Zeilenvektor in einen Spaltenvektor transponiert habe. Denken wir uns im Fall $n = 2$ den Graphen von f als eine Hügelandschaft, so zeigt $\text{grad } f$ stets in die Richtung, in der es am steilsten den Berg hinaufgeht, und $\text{grad } f$ ist desto länger, je steiler es hinaufgeht. Diese Anschauung wird durch Bemerkung 2.3.12 formal gerechtfertigt.

2.1.6. Der Begriff des Gradienten ist nur für reellwertige Funktionen auf dem \mathbb{R}^n sinnvoll. Reellwertigen Funktionen auf abstrakten endlichdimensionalen reellen Vektorräumen kann nicht mehr sinnvoll ein Gradient in Gestalt eines Vektorfeldes zugeordnet werden. Ich vermeide deshalb im folgenden nach Möglichkeit den Begriff des Gradienten und arbeite stattdessen mit den sogenannten „Differentialen“, die in sehr viel größerer Allgemeinheit definiert sind. Die Beziehung zwischen Differentialen und Gradienten wird in 2.3.9 und 8.3.8 besprochen.



Einige Niveaulinien und das Gradientenfeld eines Hügels, hier möglicherweise der Funktion $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2-y^2}$ auf der Kreisscheibe $x^2+y^2 < \frac{1}{2}$.

Übungen

Übung 2.1.7. Sei $R(x, y) = \sum_{i,j} c_{ij}x^i y^j$ ein Polynom in zwei Variablen mit reellen Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{R}$. Man zeige: Gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ derart, daß gilt $R(p) = 0 \forall p \in A$, so ist R das Nullpolynom, in Formeln $c_{ij} = 0 \forall i, j$.

2.2 Affine Räume

2.2.1. Dieser Abschnitt ist ein Auszug aus Abschnitt [LA1] 3.1.1 einer Vorlesung zur linearen Algebra. Ich habe ihn hier eingefügt, um Unklarheiten zu vermeiden was die im weiteren verwendeten Notationen und Begriffsbildungen angeht. Meine Hoffnung ist, durch eine begriffliche Trennung von Punkten und Richtungsvektoren das Verständnis des Differentials zu erleichtern.

Definition 2.2.2. Ein **affiner Raum** oder kurz **Raum** über einem Körper k ist ein Tripel

$$E = (E, \vec{E}, a)$$

bestehend aus einer nichtleeren Menge E , einer abelschen Gruppe $\vec{E} \subset \text{Ens}^\times E$ von Permutationen von E und einer Abbildung $a : k \times \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ derart, daß gilt:

1. Für alle $p, q \in E$ gibt es genau ein $\vec{v} \in \vec{E}$ mit $\vec{v}(p) = q$;
2. Die Abbildung $a : k \times \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ ist die Multiplikation mit Skalaren einer Struktur als k -Vektorraum auf \vec{E} .

Die Elemente von \vec{E} heißen die **Translationen** oder **Richtungsvektoren** unseres affinen Raums und den Vektorraum \vec{E} selbst nennen wir den **Richtungsraum** unseres affinen Raums E . Die Operation von k auf \vec{E} mag man die **Reskalierung von Translationen** nennen. Unter der **Dimension** unseres affinen Raums verstehen wir die Dimension seines Richtungsraums. Das Resultat der Operation von $\vec{v} \in \vec{E}$ auf $p \in E$ notieren wir $\vec{v} + p := \vec{v}(p)$ oder manchmal auch $p + \vec{v}$.

2.2.3 (Diskussion der Notation). Die eben eingeführte Notation für den Richtungsraum eines affinen Raums steht in Konflikt mit der Notation aus 9.3.6, nach der mit Pfeilen versehene Mannigfaltigkeiten orientierte Mannigfaltigkeiten andeuten sollen. Was jeweils gemeint ist, muß man aus dem Kontext erschließen.

2.2.4. Ist E ein affiner Raum, so liefert nach Annahme für jedes $p \in E$ die Operation eine Bijektion $\vec{E} \xrightarrow{\sim} E$, $\vec{u} \mapsto \vec{u} + p$ und es gilt $\vec{0} + p = p$ sowie $\vec{u} + (\vec{v} + p) = (\vec{u} + \vec{v}) + p$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ und $p \in E$. Flapsig gesprochen ist also ein affiner Raum ein „Vektorraum, bei dem man den Ursprung vergessen hat“. Gegeben $p, q \in E$ notieren wir

$$\vec{u} = p - q$$

den Richtungsvektor $\vec{u} \in \vec{E}$ mit $p = \vec{u} + q$.

Beispiel 2.2.5 (Modellierung von Raum und Zeit). Es scheint mir besonders sinnfällig, den uns umgebenden Raum mathematisch als einen dreidimensionalen reellen affinen Raum \mathbb{E} zu modellieren. Hierbei denkt man sich $\vec{\mathbb{E}}$ als die Gruppe aller „räumlichen Parallelverschiebungen“. Ähnlich mag man die Zeit modellieren als einen eindimensionalen reellen affinen Raum \mathbb{T} . Hierbei denkt man sich $\vec{\mathbb{T}}$ als die Gruppe aller „Zeitspannen“ und erlaubt auch „negative Zeitspannen“. Die Sekunde ist damit ein von Null verschiedener Vektor $s \in \vec{\mathbb{T}}$.

2.2.6. Unter einem **normierten Raum** verstehen wir im folgenden einen reellen affinen Raum X , dessen Richtungsraum \vec{X} mit einer Norm versehen ist. Jeden normierten Raum fassen wir als metrischen Raum auf mit der Norm $d(x, y) := \|x - y\|$ des Richtungsvektors von y nach x als Metrik und versehen ihn mit der zugehörigen metrischen Topologie. Äquivalente Normen liefern dieselbe Topologie. Insbesondere liefern auf einem endlichdimensionalen reellen Raum X nach dem Satz 1.2.10 über die Äquivalenz von Normen je zwei Normen dieselbe Topologie. Sie heißt die **natürliche Topologie auf X** .

2.2.7. Gegeben ein normierter Raum X ist das Verschieben $\vec{X} \times X \rightarrow X$, $(v, p) \mapsto v + p$ eine stetige Abbildung. Um das einzusehen, wiederholt man den Beweis zur Stetigkeit der Addition in normierten Vektorräumen aus Übung 1.2.13.

2.2.8 (Vom Nutzen allgemeiner normierter Räume). Wir werden es vorerst nur mit endlichdimensionalen normierten Räumen zu tun haben. Ich arbeite dennoch

hier und im folgenden mit beliebigen normierten Räumen, weil das zum Ersten in keiner Weise schwieriger ist, weil es zum Zweiten einen größeren Abstand zum unübersichtlichen Gestrüpp der Koordinaten schafft, und weil es zum Dritten bei der Behandlung von Differentialgleichungen 6.6.2 in dieser Allgemeinheit gebraucht wird.

2.2.9 (Vektorräume als affine Räume). Jeder Vektorraum V kann als ein affiner Raum aufgefaßt werden, indem wir als Translationen die durch die Addition von festen Vektoren gegebenen Abbildungen nehmen. Als Gruppe von Translationen nehmen wir also das Bild des injektiven Gruppenhomomorphismus $V \rightarrow \text{Ens}^\times(V), v \mapsto (v+)$. Die Reskalierung von Translationen erklären wir dann dadurch, daß dieser Gruppenhomomorphismus einen Vektorraumisomorphismus auf sein Bild liefern soll. Insbesondere erhalten wir damit einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$\text{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$$

zwischen unserem Vektorraum und dem Richtungsraum des zugehörigen affinen Raums. Diese Identifikation scheint mir derart kanonisch, daß ich sie von nun an in Sprache und Notation oft so behandeln werde, als seien diese beiden Vektorräume schlicht gleich. Manchmal versuche ich den Unterschied durch die Notation $\text{trans}(v) = \vec{v}$ anzudeuten. In dieser Notation bedeutet etwa $\vec{1} \in \vec{\mathbb{R}} \subset \text{Ens}^\times(\mathbb{R})$ die Verschiebung $(1+) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 2.2.10. Eine Abbildung $\varphi : E \rightarrow E'$ zwischen affinen Räumen heißt eine **affine Abbildung**, wenn es eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Richtungsräumen $\vec{\varphi} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}'$ gibt mit

$$\varphi(p) - \varphi(q) = \vec{\varphi}(p - q) \quad \forall p, q \in E$$

Diese lineare Abbildung $\vec{\varphi}$ ist dann durch φ eindeutig bestimmt und heißt der **lineare Anteil** unserer affinen Abbildung.

Übungen

Übung 2.2.11 (Produkt affiner Räume). Gegeben affine Räume X, Y über einem Körper k gibt es genau eine Struktur als affiner Raum über k auf ihrem Produkt $X \times Y$ derart, daß die Projektionen auf X und Y affine Abbildungen werden. Die linearen Anteile der Projektionen induzieren dann einen Isomorphismus

$$(\vec{\text{pr}}_X, \vec{\text{pr}}_Y) : \overrightarrow{X \times Y} \xrightarrow{\sim} \vec{X} \times \vec{Y}$$

Wir verwenden das Produkt affiner Räume bei unserer Diskussion des Satzes über implizite Funktionen.

2.3 Differential

Definition 2.3.1. Seien X, Y normierte Räume. Eine Abbildung $f : X \ni A \rightarrow Y$ heißt **differenzierbar an einer Stelle** $p \in A$, wenn es eine stetige lineare Abbildung $L : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ gibt mit

$$f(p + \vec{v}) = f(p) + L\vec{v} + \|\vec{v}\|\varepsilon(\vec{v})$$

für ε stetig bei $\vec{v} = \vec{0}$ mit Funktionswert $\vec{0}$, in Formeln $\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} \varepsilon(\vec{v}) = \varepsilon(\vec{0}) = \vec{0}$. Hier ist implizit zu verstehen, daß die Abbildung ε definiert sein soll auf der Menge aller $\vec{v} \in \vec{X}$ mit $p + \vec{v} \in A$. Ausführlicher sagt man **total differenzierbar** oder **Fréchet-differenzierbar**. Wir zeigen gleich in 2.3.2, daß die lineare Abbildung L eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert. Sie heißt dann das **Differential von f bei p** und wird notiert als

$$d_p f := L$$

2.3.2 (Eindeutigkeit des Differentials). Gegeben zwei Differentiale L, M derselben Abbildung am selben Punkt haben wir $\lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} (L - M)\vec{v} / \|\vec{v}\| = \vec{0}$. Es folgt für jeden Vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ insbesondere $\lim_{t \searrow 0} (L - M)t\vec{w} / \|t\vec{w}\| = \vec{0}$ durch Einsetzen von $\vec{v} = t\vec{w}$. Das hinwiederum zeigt $(L - M)\vec{w} = \vec{0} \forall \vec{w}$ und insgesamt $L = M$.

2.3.3 (Richtungsableitungen und Differential). Gegeben X, Y normierte Räume und $f : X \ni A \rightarrow Y$ differenzierbar bei $p \in A$ gilt

$$(d_p f)(\vec{w}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\vec{w}) - f(p)}{t}$$

In der Tat folgt das direkt durch Einsetzen von $\vec{v} = t\vec{w}$ in der Definition des Differentials. Diesen Grenzwert in \vec{Y} hinwiederum nennt man, wann immer er existiert, die **Richtungsableitung von f bei p in Richtung \vec{w}** und kürzt ihn ab mit

$$(D_{\vec{w}} f)(p)$$

für englisch **directional derivative**. Anschaulich mißt die Richtungsableitung im Fall $Y = \mathbb{R}$, wie schnell unsere Funktion wächst beziehungsweise abnimmt, wenn wir von p aus „mit der durch die Länge von \vec{w} gegebenen Geschwindigkeit in der Richtung \vec{w} gehen“. Unsere Richtungsableitung hängt insbesondere nicht nur von der Richtung des Vektors \vec{w} ab, sondern auch von seiner Länge. Existiert das Differential von f an einer Stelle $p \in A$, so existieren insbesondere auch alle Richtungsableitungen und für alle Richtungsvektoren $\vec{w} \in \vec{X}$ gilt

$$(D_{\vec{w}} f)(p) = (d_p f)(\vec{w})$$

Vorschau 2.3.4. Im folgenden diskutieren wir die Bedeutung dieser Definitionen zunächst für Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, dann für Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann für

Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und schließlich für Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Anschließend diskutieren wir Anschauungen im abstrakten Kontext, etwa für bewegte Teilchen alias Abbildungen $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ von der Zeit in den Raum.

Beispiel 2.3.5 (Partielle Ableitungen als Richtungsableitungen). Für eine total differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \ni A \rightarrow \mathbb{R}$ existieren unsere partiellen Ableitungen und sind gerade die Richtungsableitungen in Richtung der Einheitsvektoren e_i , in Formeln

$$(D_{e_i} f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Hier haben wir in der Notation keinen Unterschied gemacht zwischen \mathbb{R}^m beziehungsweise \mathbb{R} als affinen Räumen und den zugehörigen Richtungsräumen, sonst hätten wir ausführlicher $(D_{\vec{e}_i} f)(p) = \text{trans} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right)$ schreiben müssen, wobei trans der reellen Zahl $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ die durch Addition mit dieser Zahl gegebene Translation $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnet und wir $\vec{e}_i := \text{trans}(e_i)$ verstehen. Wir werden es auch zukünftig meist nicht ganz so genau nehmen.

Beispiel 2.3.6 (Partielle Ableitungen als Richtungsableitungen, Variante). Für $f = (f_1, \dots, f_n)^\top : \mathbb{R}^m \ni A \rightarrow \mathbb{R}^n$ total differenzierbar finden wir allgemeiner

$$(D_{e_i} f)(p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(p) \right)^\top = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

mit einer durch die zweite Gleichung erklärten vereinfachten Notation ganz rechts.

Beispiel 2.3.7 (Differential und Jacobimatrix). Gegeben eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ihre darstellende Matrix nach [LA1] 2.4.1 die Matrix $[L]$ mit den Spaltenvektoren $L(e_i)$. Ist speziell eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^m \ni A \rightarrow \mathbb{R}^n$$

differenzierbar bei p , so ist die darstellende Matrix ihres Differentials $d_p f$ folglich die Matrix mit den Spaltenvektoren $(d_p f)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ in der in 2.3.6 eingeführten Notation. Hat unsere Abbildung also die Gestalt $f = (f_1, \dots, f_n)^\top$ mit Funktionen $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, so hat die darstellende Matrix ihres Differentials $d_p f$ die Gestalt

$$[d_p f] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt die **Jacobi-Matrix** unserer Abbildung. Wir denken uns in diesem Zusammenhang Vektoren stets als Spaltenvektoren und haben unsere Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n)^\top$ geschrieben, um das zu betonen. Für die Jacobimatrix

findet man häufig die Notation

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(p)$$

Wenn Ihnen die Identifikation von Matrizen mit linearen Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ aus [LA1] 2.4.1 und [LA1] 2.4.7 einmal richtig in Fleisch und Blut übergegangen ist, werden Sie sich auch nicht mehr daran stören, wenn wir später einmal mit $d_p f$ sowohl das Differential als auch die Jacobimatrix bezeichnen sollten.

Vorschau 2.3.8 (Differenzierbarkeit bei stetigen partiellen Ableitungen). In 2.5.1 werden wir umgekehrt für $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ zeigen, daß wenn alle $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ auf ganz A existieren und stetig sind, daß dann f differenzierbar ist.

Beispiel 2.3.9 (Differential und Gradient). Gegeben eine reellwertige Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Jacobimatrix die Zeilenmatrix

$$[d_p f] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \right)$$

und stimmt überein mit dem Transponierten des Gradienten, der ja als Vektor in unseren Konventionen a priori als eine Spaltenmatrix aufzufassen ist, in Formeln

$$[d_p f] = ((\text{grad } f)(p))^T$$

2.3.10 (Gradient in Bezug auf ein Skalarprodukt). Gegeben allgemeiner ein endlichdimensionaler Raum X liefert jedes Skalarprodukt s auf seinem Richtungsraum \vec{X} einen Isomorphismus $\hat{s} : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{X}^\top$ vom Richtungsraum zu seinem Dualraum durch $\hat{s}(v)(w) := s(v, w)$ und wir können für eine Abbildung $f : X \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ ihren **s -Gradienten bei $p \in A$** erklären durch die Vorschrift $(d_p f)(w) = s((\text{grad}_s f)(p), w)$ alias $d_p f = \hat{s}((\text{grad}_s f)(p))$ alias

$$(\text{grad}_s f)(p) := \hat{s}^{-1}(d_p f)$$

Im Fall des Standardskalarprodukts auf \mathbb{R}^n erhalten wir so den üblichen Gradienten aus 2.1.4 zurück.

2.3.11 (Gradient und Richtungsableitung). Für die Richtungsableitung einer differenzierbaren reellwertigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ am Punkt p in Richtung w erhalten wir speziell

$$(D_w f)(p) = (d_p f)(w) = \langle (\text{grad } f)(p), w \rangle$$

Insbesondere wird die Richtungsableitung bei p in Richtung eines Vektors w der Länge Eins maximal genau dann, wenn der Gradient von f ein nichtnegatives Vielfaches von w ist.

2.3.12 (Gradient und Richtungsableitung, Variante). Für die Richtungsableitung $(D_w f)(p)$ einer differenzierbaren reellwertigen Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem endlichdimensionalen normierten Raum am Punkt $p \in X$ in Richtung $w \in \vec{X}$ und ein Skalarprodukt s auf \vec{X} erhalten wir allgemeiner

$$(D_w f)(p) = (d_p f)(w) = s((\text{grad}_s f)(p), w)$$

In dieser Allgemeinheit wird also die Richtungsableitung bei p in Richtung eines Vektors w der s -Länge Eins maximal genau dann, wenn der s -Gradient von f ein nichtnegatives Vielfaches von w ist.

Beispiel 2.3.13 (Differential als physikalischer Geschwindigkeitsvektor). Gegeben eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \ni A \rightarrow \mathbb{E}$ von der Zeit in den Raum ist ihr Differential $d_t \gamma : \vec{\mathbb{T}} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}$ zu einem Zeitpunkt $t \in A$ ein Element

$$d_t \gamma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$$

Die Elemente dieses Vektorraums heißen **vektorielle Geschwindigkeiten**. Man verwendet in diesem Fall meist die alternative Notation $d_t \gamma = \dot{\gamma}(t)$.

Beispiel 2.3.14 (Differential als mathematischer Geschwindigkeitsvektor). Gegeben eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \ni A \rightarrow E$ von einem Teil der Zahlengerade in einen normierten Raum E ist ihr Differential $d_t \gamma : \vec{\mathbb{R}} \rightarrow \vec{E}$ bei $t \in A$ ein Element

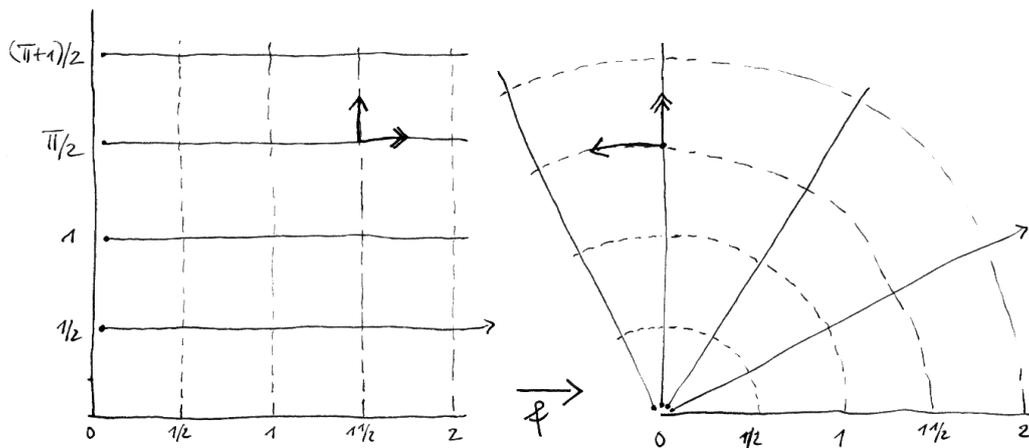
$$d_t \gamma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{R}}, \vec{E})$$

Man schreibt dann meist $\gamma'(t) := (d_t \gamma)(\vec{1}) \in \vec{E}$ mit $\vec{1} \in \vec{\mathbb{R}}$ wie in 2.2.9 und nennt diesen Vektor manchmal auch den **Geschwindigkeitsvektor**. Für $E = \mathbb{R}^n$ spezialisiert unser Geschwindigkeitsvektor zu dem bereits in [AN1] 12.7.1.4 eingeführten Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$.

Beispiel 2.3.15 (Differential und Ableitung). Gegeben eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist insbesondere ihr Differential $d_p f : \vec{\mathbb{R}} \rightarrow \vec{\mathbb{R}}$ bei $p \in \mathbb{R}$ die lineare Abbildung $d_p f = (f'(p) \cdot)$ der Multiplikation mit der Ableitung. Ihre Jacobimatrix ist also die (1×1) -Matrix $[d_p f] = (f'(p))$.

2.3.16 (Diskussion der Notation). Für das Differential, das wir hier mit $d_p f$ bezeichnen, findet man in der Literatur auch die alternativen Notationen $(Df)(p)$ und $f'(p)$. Ich ziehe die Notation $d_p f$ vor, weil sie kohärent ist mit unserer Notation $\frac{dy}{dx}$ für Differenzenquotienten und der Notation dx , mit der wir beim Integral die Integrationsvariable auszeichnen. Das wird in 8.4.9 ausgeführt.

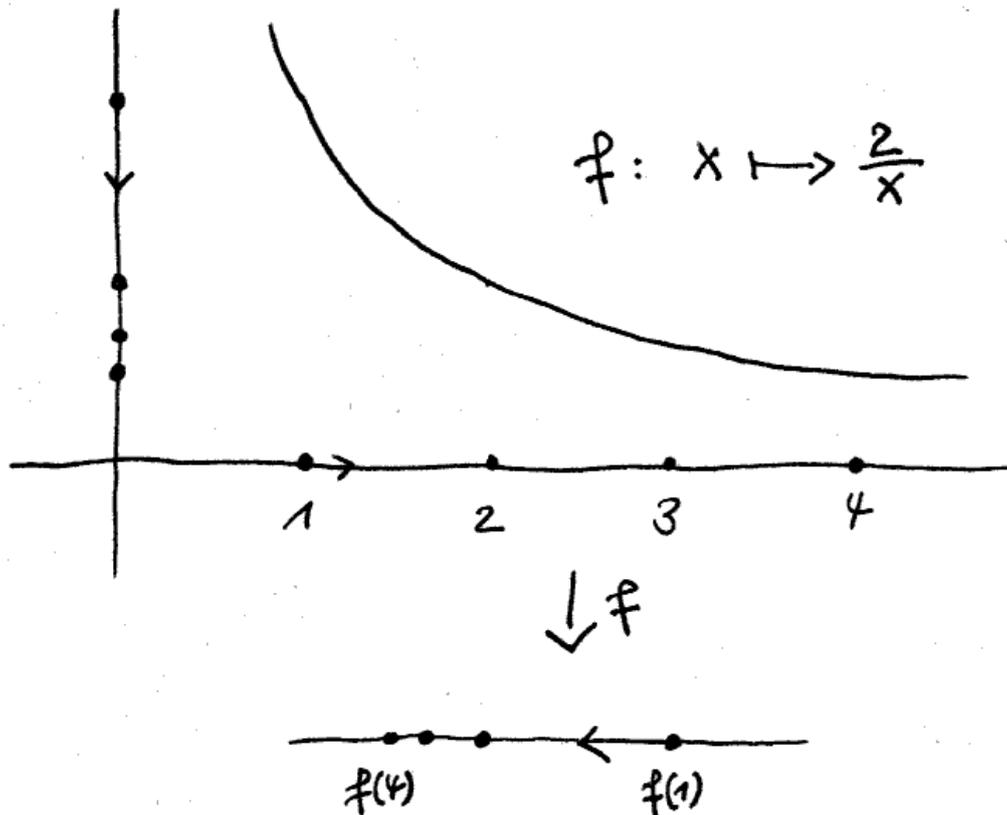
2.3.17 (Äquivalente Normen liefern dasselbe Differential). Unser Differenzierbarkeitsbegriff und das Differential ändern sich nicht, wenn wir die Normen auf den beteiligten Richtungsräumen durch äquivalente Normen ersetzen. Das sieht



Dies Bild soll die Bedeutung des Differential in der Anschauung einer Abbildung „als Abbildung“ verdeutlichen. Wir betrachten die **Polarkoordinatenabbildung** $f : \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \vartheta) \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$. Ihr Differential an der Stelle $p = (r, \vartheta) = (1\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ wird beschrieben durch die Jacobi-Matrix

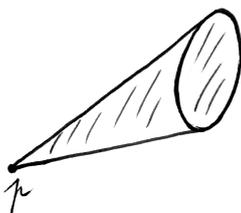
$$[d_p f] = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Pfeile im Bild sollen zeigen, daß das in der Tat diejenige lineare Abbildung L ist, für die für kleines h die Abbildung $p + h \mapsto f(p) + Lh$ unsere Abbildung $p + h \mapsto f(p + h)$ am besten approximiert.



Dieses Bild soll das Differential einer Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ veranschaulichen, genauer der Abbildung $f: \mathbb{R}^{\times} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto 2/x$ an der Stelle $x = 1$. Nach der allgemeinen Theorie wird in diesem Fall das Differential gegeben durch die (1×1) -Matrix $[d_p f] = (f'(p))$ mit dem einzigen Eintrag $f'(p)$. In unserem Fall hätten wir etwa $[d_1 f] = (-2)$. Im Bild habe ich versucht, unsere Abbildung sowohl durch ihren Graphen als auch durch eine echte Abbildung, in unserem Fall einem „Umdrehen und Verzerren der Zahlengeraden“, zu veranschaulichen. Ein kleiner von 1 ausgehender Richtungsvektor wird dann in etwa und im Grenzübergang ganz genau auf das Doppelte seines Negativen abgebildet. Das will unser Bild anschaulich machen.

man direkt, es wird aber auch formal aus der Kettenregel 2.4.2 folgen. Sind insbesondere X und Y endlichdimensional, so ist unser Differenzierbarkeitsbegriff nach dem Satz über die Äquivalenz von Normen 1.2.10 unabhängig von der Wahl der Normen.



Ein Kegelchen der Gestalt $p + [0, 1]C$ in der Papierebene, für C die Menge aller Richtungsvektoren, die von p ins Innere der ellipsenförmigen Menge zeigen.

Definition 2.3.18. Eine Teilmenge A eines normierten Raums X nennen wir **halboffen**, wenn es für jeden Punkt $p \in A$ eine nichtleere offene Teilmenge $C \Subset \vec{X}$ gibt mit $p + [0, 1]C \subset A$.

2.3.19. Anschaulich gesprochen ist eine Teilmenge eines normierten Raums halboffen, wenn es für jeden Punkt $p \in A$ ein kleines Kegelchen mit Spitze in p gibt, das auch noch ganz in A liegt.

2.3.20 (**Rückwärtskompatibilität**). Offensichtlich ist eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ genau dann halboffen im Sinne von [AN1] 12.5.3.1, wenn sie halboffen ist im hier erklärten Sinne.

2.3.21 (**Differential bei halboffenem Definitionsbereich**). Gegeben normierte Räume X, Y und eine Abbildung $f : X \supset A \rightarrow Y$ mit $A \subset X$ halboffen ist das Differential

$$d_p f : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$$

offensichtlich immer noch wohldefiniert an jeder Stelle $p \in A$, wenn es denn existiert. Formal folgt das zum Beispiel aus Übung 1.3.22, nach der ein normierter reeller Vektorraum von jeder nichtleeren offenen Teilmenge erzeugt wird.

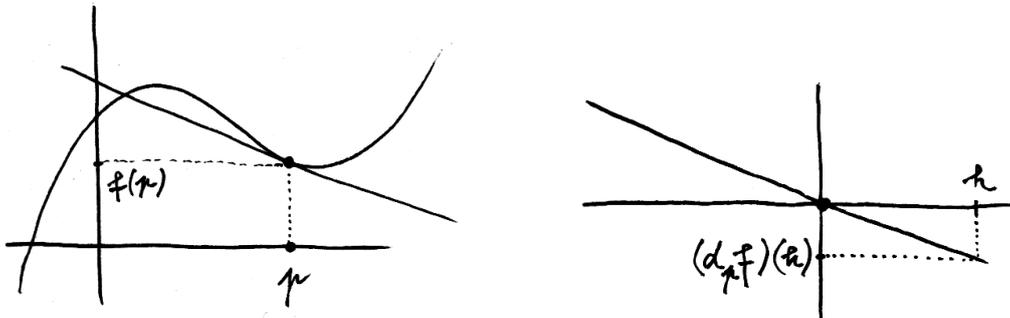
2.3.22 (**Diskussion der Terminologie**). Der Begriff „halboffen“ kommt in der Literatur sonst nicht vor. Er scheint mir jedoch nützlich, da er hilft, Verkrampfungen bei der Definition der Differenzierbarkeit auf abgeschlossenen Halbräumen und dergleichen zu vermeiden. Eine Definition in dieser Allgemeinheit hinwiederum benötigen wir bei der Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf höhere Dimensionen.

Ergänzung 2.3.23 (Virtuelle partielle Ableitung). Gegeben $A \subset \mathbb{R}^n$ eine halboffene Teilmenge und $f : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar bei $p \in A$ setzen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := (d_p f)(e_i)$$

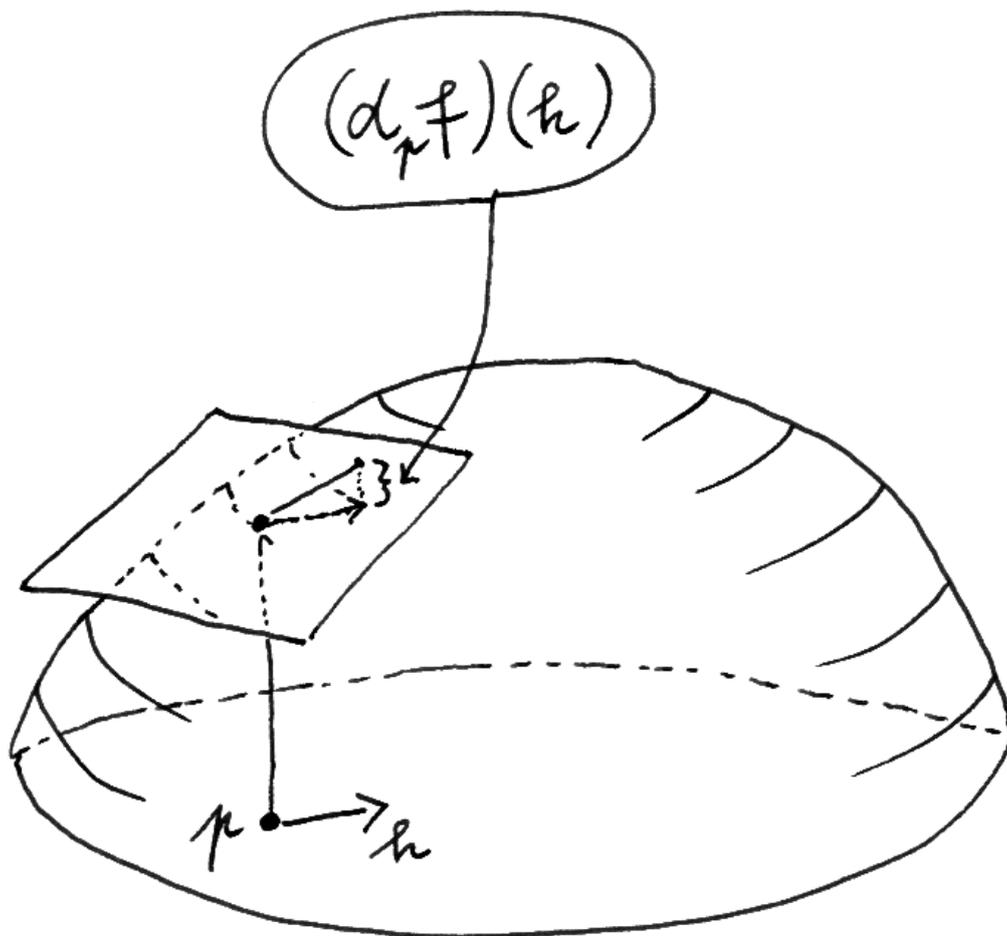
auch dann, wenn der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0}$ in unserer ursprünglichen Definition einer partiellen Ableitung gar nicht gebildet werden kann, weil in $\{t \mid p + te_i \in A\}$ die Null ein isolierter Punkt ist.

Beispiel 2.3.24 (Differential affiner und linearer Abbildungen). Das Differential einer stetigen affinen Abbildung ist an jeder Stelle ihr linearer Anteil. Sind also X, Y normierte Räume und ist $\varphi : X \rightarrow Y$ stetig und affin, so gilt $d_p \varphi = \vec{\varphi}$ für alle $p \in X$. Insbesondere ist das Differential einer konstanten Abbildung an jedem Punkt die Nullabbildung. Sind X, Y bereits selbst normierte Vektorräume und ist $\varphi : X \rightarrow Y$ stetig linear, so haben wir $\vec{\varphi} \circ \text{trans} = \text{trans} \circ \varphi : X \rightarrow \vec{Y}$. In diesem Fall macht man die Unterscheidung zwischen X und \vec{X} beziehungsweise φ und $\vec{\varphi}$ meist nicht explizit und schreibt etwa $d_p \varphi = \varphi$ und sagt, jede lineare Abbildung sei „ihr eigenes Differential“.



Anschauliche Bedeutung des Differentials einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen in der Veranschaulichung der Funktion durch ihren Graphen nach 2.3.25. Der Graph des Differentials ist bis auf eine Verschiebung gerade die Tangente.

2.3.25 (Graph des Differentials einer reellen Funktion auf der Ebene). Im allgemeinen kann man sich $d_p f$ vorstellen als „den linearen Anteil der affinen Abbildung, die unsere Funktion in der Nähe der vorgegebenen Stelle bestmöglich approximiert“ oder in anderen Worten als „diejenige lineare Abbildung L , für die $x \mapsto f(p) + L(x - p)$ unsere Funktion $x \mapsto f(x)$ in der Nähe von p am besten approximiert“. Veranschaulichen wir uns zum Beispiel eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch ihren Graphen, eine hügelige Landschaft, so ist die schmutzige anschauliche Tangentialebene an unsere hügelige Landschaft im Punkt $(p, f(p))$ im verschobenen Koordinatensystem mit Ursprung $(p, f(p))$ der Graph des Differentials $d_p f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.



Anschauliche Bedeutung des Differentials einer reellwertigen Funktion von zwei reellen Variablen in der Veranschaulichung der Funktion durch ihren Graphen nach 2.3.25. Der Graph des Differentials ist bis auf eine Verschiebung gerade die Tangentialebene. Der Wert des Differentials auf dem Vektor h ist etwa der im Bild durch eine geschweifte Klammer angedeutete Abstand oder noch genauer die zugehörige positive reelle Zahl.

Übungen

Übung 2.3.26 (Schrankensatz, Variante). Seien X ein normierter Raum und $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ eine differenzierbare Abbildung und $C \Subset \vec{X}$ eine offene konvexe Teilmenge. Gilt $\gamma'(t) \in C \forall t \in [a, b]$, so folgt $\gamma(b) - \gamma(a) \in (b - a)C$. Hinweis: Man kopiere mutatis mutandis den Beweis des Schrankensatzes [AN1] 12.7.1.10. Unser Satz gilt genauso für C konvex und abgeschlossen in \vec{X} , da wir so ein C schreiben können als den Schnitt der offenen konvexen Mengen $C = \bigcap_{\eta > 0} (C + B(0; \eta))$.

Übung 2.3.27 (Bogenlänge als Integral, Variante). Gegeben $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ eine stetig differenzierbare Abbildung in einen normierten Raum zeige man

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| \mid a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b \right\}$$

Hinweis: Man orientiere sich am Spezialfall [AN1] 12.7.1.14.

Ergänzende Übung 2.3.28. Das Differential bei der Nullmatrix der Exponentialabbildung $\exp : \text{Mat}(n; \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{C})$ ist die Identität, in Formeln gilt also $d_0 \exp = \text{id} : \text{Mat}(n; \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{C})$. Man zeige das und zeige es allgemeiner auch für die Exponentialabbildung auf dem Raum der stetigen Endomorphismen eines beliebigen Banachraums aus 1.6.15.

Ergänzende Übung 2.3.29. Man erinnere die Polarzerlegung [LA2] 2.6.23 einer invertierbaren Matrix $A = UP$ mit $U = U(A)$ orthogonal und $P = P(A)$ symmetrisch positiv definit. Man zeige für das Differential bei der Einheitsmatrix der Abbildungen, die jeder invertierbaren Matrix ihre orthogonalen beziehungsweise positiv definiten symmetrischen Anteil zuordnen, die Formeln $d_1 U : D \mapsto (D - D^\top)/2$ und $d_1 P : D \mapsto (D + D^\top)/2$. Im allgemeineren Fall der Polarzerlegung von Automorphismen eines Skalarproduktraums zeige man dieselbe Formel, wo D^\top den zu D adjungierten Endomorphismus meint.

2.4 Kettenregel in mehreren Veränderlichen

2.4.1 (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit). Weil wir in der Definition fordern, daß das Differential eine stetige lineare Abbildung sein soll, ist jede bei p differenzierbare Abbildung bei p auch stetig. Genauer verwenden wir dazu die Stetigkeit der Addition, der Multiplikation mit Skalaren und der Norm nach 1.2.13, die Stetigkeit des Verschiebens mit Richtungsvektoren 2.2.7, die Stetigkeit von Verknüpfungen 1.3.15 und die Komponentenregel 1.1.13. Die Stetigkeit des Differentials $d_p f : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ wird auch benötigt für die Gültigkeit der Kettenregel 2.4.2.

Satz 2.4.2 (Kettenregel). Seien A, B, C halboffene Teilmengen normierter Räume X, Y, Z . Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Abbildungen und $p \in A$ ein Punkt derart, daß f differenzierbar ist bei p und g differenzierbar bei $f(p)$. So ist auch $g \circ f$ differenzierbar bei p und es gilt

$$d_p(g \circ f) = (d_{f(p)}g) \circ (d_p f)$$

2.4.3. Es ist anschaulich klar, daß die bestmögliche affine Approximation an die Verknüpfung $g \circ f$ zweier Abbildungen f und g bei einer vorgegebenen Stelle p gerade die Verknüpfung der bestmöglichen affinen Approximation an f bei p mit der bestmöglichen affinen Approximation an g bei $f(p)$ sein muß. Die Kettenregel formalisiert diese Anschauung für die linearen Anteile unserer bestmöglichen affinen Approximationen.

Beispiel 2.4.4. Sind unsere drei normierten Räume $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$, so bedeutet die Kettenregel die Identität von Jacobi-Matrizen

$$[d_p(g \circ f)] = [d_{f(p)}g] \circ [d_p f]$$

oder ausgeschrieben die Identität

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(g \circ f)_l}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial(g \circ f)_l}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(p)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(p)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial y_1}(f(p)) & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial y_m}(f(p)) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beweis. Zur Vereinfachung setzen wir $q = f(p)$, $L = d_p f$ und $M = d_q g$ und haben

$$f(p+h) = f(p) + Lh + \|h\|\varepsilon(h)$$

$$g(q+j) = g(q) + Mj + \|j\|\eta(j)$$

für Abbildungen ε und η , die stetig sind bei Null und die dort verschwinden. Wir schreiben

$$f(p+h) = q + j(h)$$

mit $j(h) = Lh + \|h\|\varepsilon(h)$ und erhalten durch Einsetzen

$$\begin{aligned} (g \circ f)(p+h) &= g(q + j(h)) \\ &= g(q) + Mj(h) + \|j(h)\|\eta(j(h)) \\ &= (g \circ f)(p) + MLh + M\|h\|\varepsilon(h) + \|j(h)\|\eta(j(h)) \end{aligned}$$

Wir sind fertig, sobald wir zeigen

$$\lim_{h \rightarrow 0} M\varepsilon(h) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|j(h)\|}{\|h\|} \eta(j(h)) = 0$$

Der erste Grenzwert ergibt sich mühelos, $h \mapsto M\varepsilon(h)$ ist eben auch stetig bei $h = 0$ und nimmt dort den Wert Null an. Um den zweiten Grenzwert zu berechnen, schätzen wir erst ab $\|j(h)\| \leq \|h\|(\|L\| + \|\varepsilon(h)\|)$ und dann

$$\frac{\|j(h)\|}{\|h\|} \|\eta(j(h))\| \leq (\|L\| + \|\varepsilon(h)\|) \|\eta(j(h))\|$$

Die rechte Seite ist wieder stetig bei $h = 0$ und nimmt dort den Wert Null an, gleichbedeutend strebt sie also für $h \rightarrow 0$ gegen Null, und durch Einquetschen 1.4.13 strebt die linke Seite dann erst gegen Null. \square

Beispiel 2.4.5 (Kettenregel beim Nachschalten affiner Abbildungen). Gegeben normierte Räume X, Y, Z und $f : X \rightarrow Y$ differenzierbar und $\varphi : Y \rightarrow Z$ stetig affin liefert die Kettenregel $d_p(\varphi \circ f) = \vec{\varphi} \circ d_p f$ nach 2.3.24.

Beispiel 2.4.6 (Kettenregel beim Nachschalten linearer Abbildungen). Gegeben normierte Vektorräume X, Y, Z und $f : X \rightarrow Y$ differenzierbar und $\varphi : Y \rightarrow Z$ stetig linear liefert die Kettenregel unter den in diesem Fall üblichen Identifikationen $d_p(\varphi \circ f) = \varphi \circ d_p f$ nach 2.3.24 und noch spezieller folgt $d_p(\lambda f) = \lambda(d_p f)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.4.7 (Kettenregel für Geschwindigkeiten). Gegeben normierte Räume Y, Z und $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow Y$ sowie $g : Y \rightarrow Z$ differenzierbar liefert die Kettenregel $d_t(g \circ \gamma) = d_{\gamma(t)} g \circ d_t \gamma$. Mit der Beziehung 2.3.14 zwischen Differential und Geschwindigkeit erhalten wir daraus durch Auswerten auf $\vec{1} \in \vec{\mathbb{R}}$ sofort

$$(g \circ \gamma)'(t) = d_{\gamma(t)} g (\gamma'(t))$$

Korollar 2.4.8 (Spezialfall der Kettenregel für Geschwindigkeiten). Gegeben seien differenzierbare Abbildungen $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. So ist die durch die Vorschrift $t \mapsto F(x_1(t), \dots, x_n(t))$ gegebene Abbildung differenzierbar und ihre Ableitung an der Stelle $t = a$ wird unter Verwendung der Abkürzung $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ gegeben durch die Formel

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} F(x(t)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x(a)) \frac{dx_1}{dt}(a) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x(a)) \frac{dx_n}{dt}(a)$$

2.4.9. Natürlich gilt die Aussage auch dann noch, wenn unsere Funktionen x_i auf einer halboffenen Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind und F auf einer halboffenen

Teilmenge von \mathbb{R}^n , solange nur $x(t)$ stets im Definitionsbereich von F liegt. Man schreibt diese Formel meist etwas salopp in der Form

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

Beweis. Das ist die Kettenregel für Geschwindigkeiten 2.4.7 ausgeschrieben für $Y = \mathbb{R}^n$ und $Z = \mathbb{R}$ in anderen Buchstaben. Wir betrachten x als eine Abbildung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nach Definition ist $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a} F(x(t))$ der einzige Eintrag in der Matrix $[d_a(F \circ x)]$ der linearen Abbildung $d_a(F \circ x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Mit der Kettenregel finden wir nun

$$\begin{aligned} [d_a(F \circ x)] &= [d_{x(a)}F \circ d_a x] \\ &= [d_{x(a)}F] \circ [d_a x] \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x(a)), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x(a)) \right) \left(\frac{dx_1}{dt}(a), \dots, \frac{dx_n}{dt}(a) \right)^\top \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x(a)) \frac{dx_1}{dt}(a) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x(a)) \frac{dx_n}{dt}(a) \right) \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile das Produkt einer Zeilenmatrix mit einer Spaltenmatrix zu verstehen ist, wie der obere Index \top andeutet. \square

Ergänzung 2.4.10 (Partielle Ableitungen mit Einheiten). Oft werden auch partielle Ableitungen in größerer Allgemeinheit verwendet als in unserer Definition 2.1.1. Sind genauer X_1, \dots, X_n eindimensionale reelle Räume und ist Y ein normierter reeller Raum und $U \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$ eine offene Teilmenge und $x_i : U \rightarrow X_i$ die i -te Projektion und $f : U \rightarrow Y$ eine Abbildung, so bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

auch das „Differential der Restriktion auf X_i bei festen anderen Variablen“, eine Abbildung $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}_i, \vec{Y})$. Unter der Identifikation des Richtungsraums unseres Produkts $X_1 \times \dots \times X_n$ mit dem Produkt der Richtungsräume und des Raums Homomorphismen von dort nach \vec{Y} mit dem Produkt der Homomorphismenräume haben wir dann

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \mid \dots \mid \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Im Fall $Y = \mathbb{R}^m$ erhalten wir speziell wieder unsere Jacobimatrix als eine Zeilenmatrix von Spaltenvektoren.

Übungen

Übung 2.4.11. Seien X, Y normierte reelle Räume. Sei $A \subset X$ halboffen und $f : A \rightarrow Y$ differenzierbar. Liegt für zwei Punkte $p, q \in A$ das ganze verbindende Geradensegment $[p, q]$ in A und ist die Operatornorm des Differentials von f auf $[p, q]$ beschränkt durch eine Konstante K , in Formeln $\|d_x f\| \leq K \forall x \in A$, so gilt $\|f(p) - f(q)\| \leq K\|p - q\|$. Hinweis: Schrankensatz 2.3.26.

2.5 Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen

Proposition 2.5.1 (Differenzierbarkeit bei stetigen partiellen Ableitungen).

Sei $f : \mathbb{R}^m \ni U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Existieren alle partiellen Ableitungen von f und sind stetig als Abbildungen $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$, so ist die Abbildung f total differenzierbar.

2.5.2. Es folgt unmittelbar, daß $f : \mathbb{R}^m \ni U \rightarrow \mathbb{R}^n$ total differenzierbar ist, wenn alle $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ stetig sind auf U .

Beispiel 2.5.3. Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, deren sämtliche Richtungsableitungen an jeder Stelle existieren, die jedoch im Ursprung nicht total differenzierbar ist, kann man wie folgt erhalten: Man wählt eine stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $g(x + \pi) = -g(x)$, die nicht identisch Null ist, und setzt $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = rg(\theta)$ für $r > 0$ und $f(0, 0) = 0$. Ist g nicht die Nullfunktion und hat mehr als zwei Nullstellen auf $[0, 2\pi)$, so hängen die Richtungsableitungen am Ursprung unserer Funktion f nicht linear vom Richtungsvektor ab und sie kann folglich beim Ursprung nicht total differenzierbar sein.

Beweis. Es gilt, an jeder Stelle $p \in U$ die totale Differenzierbarkeit zu zeigen. Indem wir vor f eine geeignete Verschiebung davorschalten, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$ annehmen. Indem wir zu f eine geeignete Konstante sowie eine geeignete lineare Abbildung addieren, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiter annehmen, daß gilt $f(p) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = 0 \forall j$. Unter diesen zusätzlichen Annahmen müssen wir nun zeigen, daß f total differenzierbar ist bei $p = 0$ mit Differential Null, in Formeln $d_p f = 0$. Gegeben $\varepsilon > 0$ finden wir nun sicher $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ derart, daß gilt $B(0; \delta) \subset U$ und daß alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ auf diesem Ball nur Werte in $C := (-\varepsilon, \varepsilon)$ annehmen. Aus dem Mittelwertsatz folgt für $|h| < \delta$ schon $f(h_1, \dots, h_{j-1}, h_j, 0, \dots, 0) - f(h_1, \dots, h_{j-1}, 0, 0, \dots, 0) \in h_j C$ und insgesamt

$$f(h) = f(h) - f(0) \in (h_1 + \dots + h_m)C$$

Für $0 < |h| < \delta_\varepsilon$ gilt also $|f(h)|/|h| \leq m\varepsilon$. Da wir für alle $\varepsilon > 0$ so ein δ_ε finden können, folgt $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)/|h| = 0$ wie gewünscht. \square

Übungen

Ergänzende Übung 2.5.4. Man zeige, daß die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar ist mit Differential

$$d_z \exp = (\exp z) \cdot : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Ergänzende Übung 2.5.5. Jede stetig differenzierbare reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge der Hyperebene $0 \times \mathbb{R}^n$ oder einer offenen Teilmenge des Halbraums $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^n$ läßt sich zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^{n+1} fortsetzen.

2.6 Weitere Ableitungsregeln*

Proposition 2.6.1 (Komponentenregel). *Seien X, Y_1, Y_2 normierte Räume und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge und $f = (f_1, f_2) : A \rightarrow Y_1 \times Y_2$ eine Abbildung. Genau dann ist f differenzierbar bei $p \in A$, wenn f_1 und f_2 es sind, und dann gilt für die Differentiale die Formel*

$$d_p f = (d_p f_1, d_p f_2) : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}_1 \times \vec{Y}_2$$

2.6.2. Man beachte, daß $(d_p f_1, d_p f_2)$ in Matrixschreibweise unter unseren Konventionen [LA1] 2.4.13, anders als die Schreibweise suggerieren mag, als Spaltenmatrix von Homomorphismen aufzufassen wäre.

Beweis. Die Projektionen $\text{pr}_i : X \rightarrow Y_i$ sind stetig und linear. Ist f differenzierbar bei p , so sind damit nach der Kettenregel auch die $f_i = \text{pr}_i \circ f$ differenzierbar bei p und die Kettenregel liefert zusätzlich $d_p f_i = d_{f(p)} \text{pr}_i \circ d_p f = \text{pr}_i \circ d_p f$, also $d_p f = (d_p f_1, d_p f_2)$. Sind umgekehrt f_1 und f_2 differenzierbar bei p mit Differentialen L_1 und L_2 , so können wir nach Definition schreiben

$$f_i(p+h) = f_i(p) + L_i h + \|h\| \varepsilon_i(h)$$

für geeignete Abbildungen ε_i , die stetig sind bei Null und die dort den Wert $\varepsilon_i(0) = 0$ annehmen. Setzen wir $L = (L_1, L_2)$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, so ist L stetig linear und ε stetig bei 0 mit Funktionswert $\varepsilon(0) = 0$ und es gilt

$$f(p+h) = f(p) + Lh + \|h\| \varepsilon(h)$$

Das bedeutet aber, daß f differenzierbar ist bei p mit Differential $d_p f = L$. \square

2.6.3. Mit Induktion folgt die analoge Aussage für eine Abbildung $f : A \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_m$ in ein längeres kartesisches Produkt normierter Räume. Insbesondere

ist eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar bei $p \in A$ genau dann, wenn alle f_j es sind, und in diesem Fall gilt für die Differentiale die Formel

$$d_p f = (d_p f_1, \dots, d_p f_m) : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Wieder ist hier $(d_p f_1, \dots, d_p f_m)$ gemäß unseren Konventionen, anders als die Schreibweise suggerieren mag, als Spaltenmatrix von Homomorphismen aufzufassen.

Korollar 2.6.4 (Summenregel). *Seien X ein normierter Raum, \vec{Y} ein normierter Vektorraum und $A \subseteq X$ eine halboffene Teilmenge. Sind $f, g : A \rightarrow \vec{Y}$ differenzierbar bei $p \in A$, so ist auch $f + g : A \rightarrow \vec{Y}$ differenzierbar bei p und es gilt*

$$d_p(f + g) = d_p f + d_p g$$

Beweis. Die Addition $+$: $\vec{Y} \times \vec{Y} \rightarrow \vec{Y}$, $(w, w') \mapsto w + w'$ ist linear und stetig, und wir können $f + g$ schreiben als die Verknüpfung $f + g = + \circ (f, g)$. Das Differential von $f + g$ an der Stelle p ergibt sich also mit der Kettenregel zu $d_p(f + g) = + \circ (d_p f, d_p g) = d_p f + d_p g$. \square

Proposition 2.6.5 (Differential bilinearer Abbildungen). *Seien $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ normierte Vektorräume und sei $\varphi : \vec{X} \times \vec{Y} \rightarrow \vec{Z}$, $(v, w) \mapsto \varphi(v, w)$ eine stetige bilineare Abbildung. So ist φ differenzierbar und das Differential von φ im Punkt (p, q) ist die lineare Abbildung*

$$d_{(p,q)}\varphi : \vec{X} \times \vec{Y} \rightarrow \vec{Z} \\ (h, k) \mapsto \varphi(h, q) + \varphi(p, k)$$

Beweis. Wir rechnen

$$\varphi(p + h, q + k) = \varphi(p, q) + \varphi(h, q) + \varphi(p, k) + \varphi(h, k)$$

und müssen nur noch $\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \varphi(h, k) / \|(h, k)\| = 0$ zeigen. Das folgt aber mit 1.2.17 aus der Stetigkeit von φ . \square

Beispiel 2.6.6. Die Leibnizregel [AN1] 12.5.4.1 können wir aus der Kettenregel für Differentiale herleiten wie folgt: Gegeben $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir das Produkt fg als die Verknüpfung $fg = \text{mult} \circ (f, g)$ der Funktion $(f, g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Multiplikation $\text{mult} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sind f und g differenzierbar bei $t \in \mathbb{R}$, so nach der Komponentenregel auch ihre Zusammenfassung (f, g) , und deren Jacobi-Matrix ist die Spaltenmatrix $[d_t(f, g)] = (f'(t), g'(t))^T$. Andererseits ist die Multiplikation differenzierbar als stetige bilineare Abbildung oder auch nach

2.5.1 wegen der Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen und ihr Differential bei (x, y) hat als Jacobi-Matrix die Zeilenmatrix $[d_{(x,y)} \text{mult}] = (y, x)$. Mit der Kettenregel in mehreren Veränderlichen folgt dann

$$\begin{aligned} (fg)'(t) &= [d_t(f \circ g)] \\ &= [d_{(f(t), g(t))} \text{mult}] \circ [d_t(f, g)] \\ &= (g(t), f(t)) \circ (f'(t), g'(t))^\top \\ &= g(t)f'(t) + f(t)g'(t) \end{aligned}$$

Korollar 2.6.7. Seien $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ und $B : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(m \times k; \mathbb{R})$ differenzierbare matrixwertige Funktionen. So ist auch das Produkt $AB : t \mapsto A(t)B(t)$ differenzierbar und die Geschwindigkeit $(AB)'$ der Produktfunktion $AB : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ wird gegeben durch die Formel

$$(AB)' = A'B + AB'$$

2.6.8. Das sollten Sie zur Übung schon in Koordinaten nachgerechnet haben. Der hier gegebene Beweis ist komplizierter und dient in erster Linie nicht der Herleitung des Resultats, sondern vielmehr der Illustration unserer allgemeinen Regeln durch ein übersichtliches Beispiel. Man beachte jedoch auch, wie unübersichtlich dieses Beispiel wird, sobald wir versuchen, statt mit abstrakten Differentialen mit Jacobi-Matrizen zu arbeiten.

Beweis. Die Matrixmultiplikation ist eine stetige bilineare Abbildung

$$\text{Mult} : \text{Mat}(n \times m; \mathbb{R}) \times \text{Mat}(m \times k; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$$

und wir können AB schreiben als die Verknüpfung $AB = \text{Mult} \circ (A, B)$. Mit der Kettenregel und der Komponentenregel ergibt sich

$$d_t(AB) = (d_{(A(t), B(t))} \text{Mult}) \circ (d_t A, d_t B)$$

Wenden wir diese lineare Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ an auf $\partial \in \vec{\mathbb{R}}$, so erhalten wir mit 2.6.5 wie gewünscht

$$\begin{aligned} (AB)'(t) &= d_t(AB)(\partial) \\ &= (d_{(A(t), B(t))} \text{Mult})(A'(t), B'(t)) \\ &= A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \quad \square \end{aligned}$$

2.6.9. Gegeben Y ein normierter Raum und $f : \mathbb{R}^n \ni U \rightarrow Y$ eine Abbildung erklären wir die partiellen Ableitungen weiter als die Richtungsableitungen nach den Vektoren der Standardbasis, in Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := (D_{e_i} f)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t}$$

2.6.10. Seien X, Y normierte Räume und $A \subset X$ halboffen. Eine Abbildung $f : A \rightarrow Y$ heißt **differenzierbar**, wenn sie differenzierbar ist bei jedem Punkt $p \in A$. Sie heißt **stetig differenzierbar**, wenn sie differenzierbar ist und wenn zusätzlich die Abbildung $A \rightarrow \mathcal{B}(\vec{X}, \vec{Y})$ gegeben durch $p \mapsto d_p f$ stetig ist in Bezug auf die Operatornorm 1.2.14 auf dem Raum $\mathcal{B}(\vec{X}, \vec{Y})$ der stetigen linearen Abbildungen.

Proposition 2.6.11 (Differenzierbarkeit über partielle Ableitungen, Variante). *Seien Y ein normierter Raum und $f : \mathbb{R}^m \ni U \rightarrow Y$ eine Abbildung. Existieren alle partiellen Ableitungen von f und sind stetig als Abbildungen $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \rightarrow \vec{Y}$, so ist die Abbildung f stetig differenzierbar.*

Beweis. Es gilt, an jeder Stelle $p \in U$ die totale Differenzierbarkeit zu zeigen. Indem wir zu f eine geeignete Konstante sowie eine geeignete lineare Abbildung addieren, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt $f(p) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = 0 \forall j$. Unter diesen zusätzlichen Annahmen müssen wir nun zeigen, daß f total differenzierbar ist bei p mit Differential Null. Indem wir vor f eine geeignete Verschiebung davorschalten, dürfen wir zusätzlich auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$ annehmen. Gegeben eine punktsymmetrische offene konvexe Umgebung $C \ni \vec{0}$ des Nullvektors von \vec{Y} finden wir nun sicher $\delta = \delta_C > 0$ derart, daß alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ auf dem Ball $B(0; \delta)$ nur Werte in C annehmen und daß dieser Ball ganz in U enthalten ist. Aus dem Schrankensatz 2.3.26 folgt für $|h| < \delta$ schon $f(h_1, \dots, h_{j-1}, h_j, 0, \dots, 0) - f(h_1, \dots, h_{j-1}, 0, 0, \dots, 0) \in h_j C = |h_j| C$ und insgesamt

$$f(h) = f(h) - f(0) \in (|h_1| + \dots + |h_m|)C$$

Für $h \neq 0$ und $|h| < \delta_C$ gilt also $f(h)/|h| \in mC$. Da wir für alle C so ein δ_C finden können, folgt $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)/|h| = 0$ wie gewünscht. \square

Übungen

Ergänzende Übung 2.6.12. Man zeige, daß auch im Kontext normierter Vektorräume stetige multilineare Abbildungen differenzierbar sind, und gebe eine zur Produktregel 2.6.5 analoge Formel für deren Differential. Hinweis: 1.2.17.

Ergänzende Übung 2.6.13. Gegeben ein eindimensionaler Vektorraum V hat die Abbildung $f : v \mapsto v^{\otimes n}$ bei $w \in V$ das Differential $d_w f : v \mapsto n w^{\otimes n-1} \otimes v$. Hinweis: Differential multilinearer Abbildungen 2.6.12 und Kettenregel.

Ergänzende Übung 2.6.14. Man zeige, daß $\det : \text{Mat}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und daß das Differential der Abbildung \det an der Einheitsmatrix I die Spur tr ist, in Formeln

$$d_I \det = \text{tr} : \text{Mat}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Für das Differential von \det an einer beliebigen Stelle P zeige man die Formel $(d_P \det)(H) = \text{tr}((\det P)P^{-1}H)$. Hier meint $(\det P)P^{-1}$ den Wert bei P der stetigen Fortsetzung der Abbildung $P \mapsto (\det P)P^{-1}$ vom Raum der invertierbaren Matrizen auf den Raum aller Matrizen alias die „adjungierte Matrix“ P^\sharp aus [LA1] 6.4.6. Hinweis: Man mag mit 2.6.12 arbeiten, oder auch mit partiellen Ableitungen. Erinnerung: Die Spur einer Matrix ist die Summe der Einträge auf der Diagonalen.

Übung 2.6.15. Sei $\text{inv} : \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ das Invertieren von Matrizen, $\text{inv}(X) = X^{-1}$. Man zeige für das Differential des Invertierens bei der Einheitsmatrix I die Formel $d_I \text{inv} : H \mapsto -H$. Man zeige allgemeiner, daß das Differential dieser Abbildung am Punkt P in Verallgemeinerung der Ableitungsregel für $x \mapsto 1/x$ gegeben wird durch

$$\begin{aligned} d_P \text{inv} : \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) &\rightarrow \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \\ H &\mapsto -P^{-1}HP^{-1} \end{aligned}$$

Hinweis: Man zeige erst, daß inv differenzierbar ist. Dann nehme man in der Gleichung $\text{inv}(X)X = I$ auf beiden Seiten das Differential an der Stelle P . Alternativer Hinweis: Man erinnere die Darstellung des Inversen durch eine Reihe 1.6.13 und die Identität $(\cdot P^{-1}) \circ \text{inv} \circ (P^{-1} \cdot) = \text{inv}$.

Übung 2.6.16. Gegeben ein Banachraum V ist das Invertieren $\text{inv} : \mathcal{B}(V)^\times \rightarrow \mathcal{B}(V)$ differenzierbar mit dem Differential $d_p \text{inv} : h \mapsto -p^{-1}hp^{-1}$ an einer Stelle p . Hinweis: Übung 1.6.13.

Ergänzende Übung 2.6.17. Sei $B \in \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ fest. Das Differential der Abbildung $\psi : \text{GL}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n; \mathbb{R})$ gegeben durch $A \mapsto ABA^{-1}$ bei der Einheitsmatrix ist die lineare Abbildung $H \mapsto HB - BH$.

Ergänzende Übung 2.6.18 (Inversionen sind konforme Abbildungen). Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die auf dem Komplement des Nullkegels $\{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0\}$ erklärte Abbildung $\text{inv} : v \mapsto v/\langle v, v \rangle$ heißt dann in Verallgemeinerung von [EL] 5.2.5.1 eine **Inversion**. Die Fixpunktmenge unserer Inversion ist $\{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 1\}$. Man zeige für das Differential von inv bei v die Formel

$$(d_v \text{inv})(h) = \frac{h}{\langle v, v \rangle} - \frac{2\langle h, v \rangle v}{\langle v, v \rangle^2}$$

und folgere $\langle (d_v \text{inv})(h), (d_v \text{inv})(k) \rangle = \langle h, k \rangle / \langle v, v \rangle^2$ für alle h, k . In Worten erhält $d_v \text{inv}$ also für alle v unsere Bilinearform bis auf einen von Null verschiedenen skalaren Faktor. Abbildungen inv mit dieser Eigenschaft heißen **konforme Abbildungen**, deshalb die Überschrift.

Ergänzende Übung 2.6.19 (Differential über partielle Ableitungen, Zugabe).
 Seien X, Y, Z normierte Räume, $U \subseteq X$ sowie $V \subseteq Y$ offene Teilmengen und $f : U \times V \rightarrow Z$ eine Abbildung. Wir betrachten für alle $x \in U$ die „vertikale“ Einbettung $j_x : V \rightarrow U \times V, y \mapsto (x, y)$ und für alle $y \in V$ die „horizontale“ Einbettung $i_y : U \rightarrow U \times V, x \mapsto (x, y)$. Existieren für alle $(x, y) \in U \times V$ die Differentiale $d_x(fi_y) : \vec{X} \rightarrow \vec{Z}$ und $d_y(fj_x) : \vec{Y} \rightarrow \vec{Z}$ und sind stetig als Funktionen $U \times V \rightarrow \mathcal{B}(\vec{X}, \vec{Z})$ beziehungsweise $U \times V \rightarrow \mathcal{B}(\vec{Y}, \vec{Z})$, so ist die Abbildung f differenzierbar mit Differential

$$d_{(x,y)}f : (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto d_x(fi_y)(\vec{v}) + d_y(fj_x)(\vec{w})$$

Die offensichtliche Identifikation von $\vec{X} \times \vec{Y}$ mit dem Richtungsraum des Produkts $X \times Y$ haben wir hier der Übersichtlichkeit halber nicht explizit notiert. Hinweis: Man kopiere mutatis mutandis den Beweis von 2.5.1. Mutige mögen umgekehrt 2.5.1 aus dem Ergebnis dieser Übung ableiten durch Induktion über n .

3 Mehrfache Integrale und Ableitungen

3.1 Integration über Quader

Satz 3.1.1 (über Integrale mit Parametern). Gegeben ein Kompaktum $X \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ stetig.

3.1.2. Der Satz gilt allgemeiner für einen beliebigen metrischen Raum X , ja sogar in noch größerer Allgemeinheit, aber die Formulierung und der Beweis in dieser Allgemeinheit brauchen Begriffe und Hilfsmittel, die uns noch nicht zur Verfügung stehen.

Beweis. Mit X ist auch $X \times [a, b]$ kompakt nach [AN1] 12.5.1.20 und nach [AN1] 12.5.1.15 ist f dort gleichmäßig stetig. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es insbesondere $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(y, t)| < \varepsilon \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Aus $|x - y| < \delta$ folgt mithin

$$\left| \int_a^b f(x, t) dt - \int_a^b f(y, t) dt \right| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(y, t)| dt \leq (b - a)\varepsilon$$

und das zeigt die Behauptung. □

3.1.3. Ein Produkt von n Intervallen in \mathbb{R}^n nennen wir einen **Quader**. Ein kompakter Quader in \mathbb{R}^2 ist eine Rechtecksfläche der Gestalt $[a, b] \times [c, d]$. Beispiele für nichtkompakte Quader $H \subset \mathbb{R}^n$ sind etwa ganz \mathbb{R}^n oder im Fall $n > 0$ der Halbraum $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

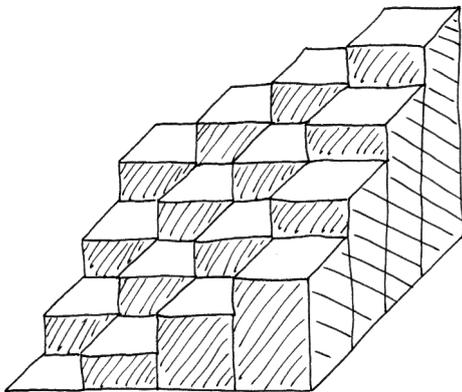
Definition 3.1.4. Gegeben $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader in \mathbb{R}^n und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig erklären wir das **Integral von f über Q** , eine reelle Zahl $\int_Q f \in \mathbb{R}$, durch die Formel

$$\int f = \int_Q f := \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n$$

im Fall $Q \neq \emptyset$ und durch $\int_Q f = 0$ im Fall $Q = \emptyset$. Im Fall $n = 0$ interpretieren wir unsere Definition dahingehend, daß das Integral der Funktionswert am einzigen Punkt des leeren Produkts sein soll.

3.1.5. Satz 3.1.1 zeigt, daß in dieser Definition alle Integranden stetig vom Integrationsparameter abhängen, so daß alle unsere Integrale definiert sind. Aus den

Eigenschaften des Integrals von Funktionen einer reellen Veränderlichen folgt sofort die Linearität $\int(f + g) = \int f + \int g$, $\int(\lambda f) = \lambda \int f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie die Monotonie $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ und insbesondere auch $|\int f| \leq \int |f|$. Für das Integral der konstanten Funktion 1 über einen nichtleeren kompakten Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ erhalten wir $\int_Q 1 = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$. Wir nennen diese Zahl das **Volumen** des Quaders Q und notieren sie $\text{vol } Q$. Anschaulich bedeutet $\text{vol } Q$ ein Volumen im Fall $n = 3$, eine Fläche im Fall $n = 2$, eine Länge im Fall $n = 1$ und die Zahl 1 im Fall $n = 0$.



Die vierte Riemannsumme der Funktion $f(x, y) = (x + y)/2$ auf dem Einheitsquadrat mag man sich als das Volumen des hier gezeichneten räumlichen Gebildes denken.

3.1.6. Für $n = 2$ bedeutet $\int_Q f$ anschaulich den Rauminhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ und der xy -Ebene, wobei Rauminhalte unterhalb der xy -Ebene negativ zu zählen sind. Diese Anschauung wird im folgenden formal gerechtfertigt.

Definition 3.1.7. Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein nichtleerer kompakter zweidimensionaler Quader alias ein **Rechteck** und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bezeichne $\text{vol } Q = (b - a)(d - c)$ die Fläche von Q . Für $r \geq 1$ definieren wir die r -te **Riemannsumme** $S^r(f)$ von f wie folgt: Wir betrachten die äquidistanten Unterteilungen

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$$

$$c = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_r = d$$

der Kanten unseres Rechtecks, erhalten eine Unterteilung unseres Rechtecks in r^2 kleine Rechtecke $Q_{i,j} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ mit Flächeninhalt $(\text{vol } Q)/r^2$, und setzen

$$S^r(f) := \sum_{i,j=0}^{r-1} f(a_i, c_j) \frac{\text{vol } Q}{r^2}$$

Proposition 3.1.8 (Integral durch Riemannsummen). Gegeben $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist das Integral von f über Q der Grenzwert unserer Riemannsummen, in Formeln

$$\int_Q f = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$$

Beweis. Wir definieren Unter- und Obersummen durch

$$\underline{S}^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \inf f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2} \quad \text{und} \quad \bar{S}^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \sup f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2}$$

Bei den Untersummen lassen wir etwa auf unseren kleinen Quadern $Q_{i,j}$ Türmchen hochwachsen, bis sie am Graphen unserer Funktion anstoßen, und bilden die Summe der Volumina aller dieser Türmchen. Bei den Obersummen nehmen wir entsprechend die kleinstmöglichen Türmchen, aus denen unsere Funktion nicht mehr oben herausguckt. Nun behaupten wir die Ungleichungen

$$\underline{S}^r(f) \leq S^r(f) \leq \bar{S}^r(f)$$

$$\underline{S}^r(f) \leq \int_Q f \leq \bar{S}^r(f)$$

Die Ungleichungen der ersten Zeile sind offensichtlich. Um die Ungleichungen der zweiten Zeile einzusehen, benutzen wir zunächst die Regeln für Integrale einer Veränderlichen und erkennen

$$\inf f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2} \leq \int_{Q_{i,j}} f \leq \sup f(Q_{i,j}) \frac{\text{vol } Q}{r^2}$$

Aus unseren Regeln für Integrale einer Veränderlichen folgt zusätzlich auch noch $\int_Q f = \sum_{i,j} \int_{Q_{i,j}} f$. Summieren wir dann für $0 \leq i, j \leq r-1$ alle unsere Ungleichungen auf, so ergibt sich die zweite Zeile oben. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es nun wegen der gleichmäßigen Stetigkeit unserer Funktion auf unserem kompakten Rechteck ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ mit

$$|(x_1, y_1) - (x, y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1, y_1) - f(x, y)| < \varepsilon$$

Ist $R = R_\varepsilon$ so groß, daß alle Kantenlängen unserer kleinen Rechtecke $Q_{i,j}$ bei äquidanter Unterteilung in R Stücke unter δ sinken, so folgt aus $r \geq R$ damit $|\bar{S}^r(f) - \underline{S}^r(f)| < (\text{vol } Q)\varepsilon$ und mit unseren beiden Zeilen von Ungleichungen ergibt sich $|\int_Q f - S^r(f)| < (\text{vol } Q)\varepsilon$. Das zeigt $\int_Q f = \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$ wie behauptet. \square

Korollar 3.1.9 (Vertauschen partieller Integrationen). Gegeben ein Rechteck $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

Beweis. Beide Seiten sind der Grenzwert derselben Folge von Riemannsummen. □

3.1.10. Den gemeinsamen Wert dieses Integrals notieren wir dann kürzer auch $\int_Q f(x, y) \, d(x, y)$ und benutzen analoge Notationen im Fall von noch mehr Veränderlichen. Steht dahingegen x für eine Veränderliche des \mathbb{R}^k , so benutzen wir die Notation $\int f(x) \, d^k x$.

3.1.11. Da das Differenzieren so in etwa der inverse Prozess zum Integrieren ist, müssen mit den partiellen Integralen auch die partiellen Ableitungen sowie partielle Ableitung und partielles Integral vertauschen. Diese Idee wird im Folgenden ausgeführt.

Korollar 3.1.12 (Vertauschen partieller Ableitungen). Seien $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck mit beiden Seiten von positiver Länge und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Existiert die gemischte partielle Ableitung $\partial_y \partial_x f$ auf Q und ist dort stetig und existiert darüber hinaus die partielle Ableitung $\partial_y f$ auf Q , so existiert sogar die umgekehrte gemischte partielle Ableitung $\partial_x \partial_y f$ auf Q und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Vorschau 3.1.13. Eine anschauliche Interpretation dieses Korollars wird der Satz über die Taylorentwicklung 3.2.1 geben: Geeignet differenzierbare reelle Funktionen von zwei Variablen besitzen lokal an jeder Stelle eine „beste“ Approximation durch ein Polynom vom Grad höchstens zwei, in Formeln ausgedrückt $f(p+x, q+y) \sim f(p, q) + \alpha x + \beta y + \gamma x^2 + \delta xy + \theta y^2$, und die gemischte partielle Ableitung unserer Funktion an besagter Stelle ist dann genau der Koeffizient δ des „gemischten Terms“.

Beispiel 3.1.14. Die Funktion $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ kann durch $f(0, 0) = 0$ stetig auf ganz \mathbb{R}^2 fortgesetzt werden und ist überall zweimal partiell differenzierbar, aber ihre beiden gemischten partiellen Ableitungen stimmen im Ursprung nicht überein. Das zeigt, daß unsere Forderung der Stetigkeit an eine gemischte partielle Ableitung im vorhergehenden Korollar 3.1.12 notwendig ist.

Beweis. Wir verwenden für die partiellen Ableitungen nach der ersten beziehungsweise zweiten Variablen die Abkürzungen f_1 und f_2 und schreiben $f_{12} =$

$(f_1)_2$ für die gemischte partielle Ableitung „erst nach x , dann nach y “. Für (a, c) die untere linke Ecke unseres Rechtecks und $(x, y) \in Q$ beliebig finden wir

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_c^y f_{12}(s, t) \, dt \, ds &= \int_a^x f_1(s, y) - f_1(s, c) \, ds \\ &= f(x, y) - f(x, c) - f(a, y) + f(a, c) \end{aligned}$$

Jetzt vertauschen wir vorne die Integrationsreihenfolge, bringen hinten die drei letzten Summanden auf die andere Seite und erhalten

$$\left(\int_c^y \int_a^x f_{12}(s, t) \, ds \, dt \right) + f(x, c) + f(a, y) - f(a, c) = f(x, y)$$

Die linke Seite ist hier ganz offensichtlich partiell differenzierbar erst nach y und dann nach x und ihre gemischte partielle Ableitung ergibt sich zu f_{12} wie gewünscht. \square

Korollar 3.1.15 (Differenzieren unter dem Integral). Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig mit stetiger partieller Ableitung nach der zweiten Variablen. So ist die Funktion $y \mapsto \int_a^b f(x, y) \, dx$ differenzierbar und man darf die Integration über die erste Variable mit der partiellen Ableitung nach der zweiten Variablen vertauschen, in Formeln

$$\frac{d}{dy} \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, dx$$

Vorschau 3.1.16. Einen allgemeineren Satz zum Differenzieren unter dem Integral werden Sie in Übung [AN3] 1.6.17 im Rahmen der Lebesgue'schen Integrationstheorie herleiten.

Beweis. Wir kürzen wieder die partielle Ableitung von f nach der zweiten Variablen mit f_2 ab. Dann wählen wir $c \in I$ beliebig und finden

$$\int_a^b \int_c^y f_2(x, t) \, dt \, dx = \int_a^b f(x, y) - f(x, c) \, dx$$

Vertauschen wir vorne die Integrationsreihenfolge und bringen den letzten Summanden auf die andere Seite, so ergibt sich

$$\int_c^y \int_a^b f_2(x, t) \, dx \, dt - \int_a^b f(x, c) \, dx = \int_a^b f(x, y) \, dx$$

Die linke Seite ist aber offensichtlich partiell differenzierbar nach y mit Ableitung $\int_a^b f_2(x, t) \, dx$. \square

Übungen

Übung 3.1.17 (Lösungen der linearen Wellengleichung). Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion, es sollen also $\partial_x^2 f, \partial_x \partial_t f, \partial_t \partial_x f$ und $\partial_t^2 f$ alle auf ganz \mathbb{R}^2 existieren und stetig sein. Es gelte weiter

$$\partial_x^2 f(x, t) = \partial_t^2 f(x, t)$$

Man zeige, daß es dann zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x, t) = u(x - t) + v(x + t)$$

und daß diese Funktionen u, v durch f eindeutig bestimmt sind bis auf den Übergang zu $u + c, v - c$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$. Hinweis: Man untersuche zunächst zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\partial_y \partial_z g(y, z) = 0$ und zeige, daß es zweimal stetig differenzierbare Funktionen $h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $g(y, z) = h(y) + k(z)$.

Ergänzung 3.1.18 (Motivation für die lineare Wellengleichung). Wir denken uns eine waagerechte Kette von reibungslos rutschenden Würfeln der Masse M , die durch Federn verbunden sind und einen Abstand von jeweils einem Meter

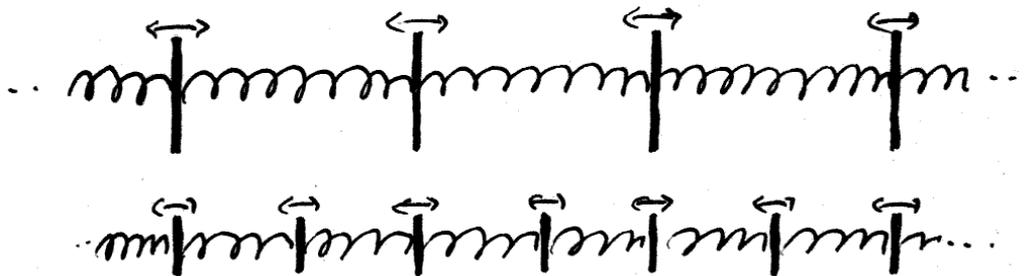


Illustration zur Motivation der linearen Wellengleichung mit Platten statt Würfeln.

haben. Stören wir dieses System und bezeichnet $f(n, t)$ die Auslenkung der n -ten Kugel zum Zeitpunkt t , so erfüllen die Funktionen $f(n, t)$ nach den Newton'schen Bewegungsgleichungen ein System von Differentialgleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} M \partial_t^2 f(n, t) &= C((f(n+1, t) - f(n, t)) - (f(n, t) - f(n-1, t))) \\ &= C(f(n+1, t) + f(n-1, t) - 2f(n, t)) \end{aligned}$$

mit einer Konstante C , die von der Federkonstante abhängt. Teilen wir die Abstände zwischen unseren Würfeln und die Masse unserer Würfel durch N , so werden die Federn entsprechend kürzer und die entsprechende Gleichung lautet

$$\frac{M}{N} \partial_t^2 f(x, t) = NC(f(x + \frac{1}{N}, t) + f(x - \frac{1}{N}, t) - 2f(x, t))$$

für $x \in (1/N)\mathbb{Z}$. Setzen wir stattdessen $h = 1/N$, so ergibt sich

$$M\partial_t^2 f(x, t) = C \frac{f(x+h, t) + f(x-h, t) - 2f(x, t)}{h^2}$$

für alle $x \in h\mathbb{Z}$. Gehen wir schließlich zum Grenzwert für $N \rightarrow \infty$ alias $h \rightarrow 0$ über, so erhalten wir nach [AN1] 12.6.2.8 die Wellengleichung

$$M\partial_t^2 f(x, t) = C\partial_x^2 f(x, t)$$

Ergänzende Übung 3.1.19. Gegeben ein Vektorraum V und $A \in \text{End } V$ erklärt man die lineare Abbildung $\text{ad } A : \text{End } V \rightarrow \text{End } V$ durch die Vorschrift $\text{ad } A : B \mapsto (AB - BA)$. Man zeige, daß für V endlichdimensional und reell das Differential von $\exp : \text{End } V \rightarrow \text{End } V$ bei $A \in \text{End } V$ gegeben wird durch die Formel

$$d_A \exp = (\cdot \exp A) \circ \left(\frac{\exp(\text{ad } A) - 1}{\text{ad } A} \right)$$

Beim letzten Faktor ist gemeint, daß $\text{ad } A$ in die Potenzreihe $\sum_{\nu \geq 0} z^\nu / (\nu + 1)!$ der Funktion $(\exp(z) - 1)/z$ eingesetzt werden soll. Hinweis: Man wende $\partial^2 / \partial s \partial t = \partial^2 / \partial t \partial s$ an auf $\exp(s(A + tB)) \exp(-sA)$, setze $t = 0$ und integriere über s .

3.2 Taylorentwicklung in mehreren Veränderlichen

Satz 3.2.1 (Taylorentwicklung in zwei Veränderlichen). Gegeben eine d -mal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \ni A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(0, 0) \in A$ gibt es genau ein Polynom in zwei Veränderlichen $T(x, y) = \sum_{i+j \leq d} c_{i,j} x^i y^j$ vom Grad $\leq d$ mit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - T(x, y)}{|(x, y)|^d} = 0$$

und die Koeffizienten $c_{i,j}$ dieses Polynoms T werden gegeben durch die Formel

$$c_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0)$$

Beweis. Wir zeigen das gleich in mehreren Veränderlichen. □

3.2.2. Ist $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ selbst eine Polynomfunktion, so erkennt man leicht, daß gilt

$$a_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0)$$

In diesem Fall liefert unsere Formel also $T(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} x^i y^j$ und man sieht sofort, daß dieses T die geforderte Eigenschaft hat.

3.2.3. Um unseren Satz auch in mehr als zwei Veränderlichen übersichtlich formulieren zu können, führen wir geeignete Notationen ein. Gegeben ein **Multiindex** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ setzen wir

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_m \\ \alpha! &:= \alpha_1! \dots \alpha_m! \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} \\ \partial^\alpha f &:= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \end{aligned}$$

Für die letzte Notation nehmen wir dabei an, daß $f : \mathbb{R}^m \ni A \rightarrow \mathbb{R}$ eine $|\alpha|$ -mal stetig partiell differenzierbare Funktion ist, so daß es beim partiellen Ableiten nicht auf die Reihenfolge ankommt.

3.2.4. Unter einem **Polynom in mehreren Veränderlichen** x_1, x_2, \dots, x_m mit reellen Koeffizienten versteht man eine „endliche formale Summe“ der Gestalt

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$$

Dabei läuft die Summe über Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^m$ und alle Koeffizienten c_{α} sind reelle Zahlen, die darüber hinaus fast alle verschwinden müssen, wir lassen also nur endliche formale Summen zu. Mit dem **Grad** oder genauer dem **Totalgrad** eines Polynoms in mehreren Veränderlichen meint man $\sup\{|\alpha| \mid c_{\alpha} \neq 0\}$. Das Nullpolynom hat also den Grad $-\infty$, konstante Polynome haben den Grad 0 und

$$x^4 y^3 - z^5 y + 3z^2 x^2 y^2$$

ist ein Polynom in den drei Veränderlichen x, y, z vom Grad 7. Wir werden in 3.2.7 zeigen, daß verschiedene polynomiale Ausdrücke auch verschiedene Funktionen liefern, so daß wir im Fall reeller Koeffizienten nicht so genau zu hinterfragen brauchen, was wir unter solch einem „formalen Ausdruck“ genau verstehen wollen. Den Fall beliebiger Koeffizienten diskutieren wir in [LA1] 5.3.2 im Fall einer Variablen und in [LA1] 5.3.32 im allgemeinen.

Satz 3.2.5 (Taylorentwicklung). Gegeben $f : \mathbb{R}^m \ni A \rightarrow \mathbb{R}$ eine d -mal stetig partiell differenzierbare Funktion und $p \in A$ ein Punkt gibt es genau ein Polynom T vom Grad $\leq d$ mit

$$f(p+h) = T(h) + |h|^d \varepsilon(h)$$

für eine Funktion ε mit $\varepsilon(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ und dieses Polynom wird gegeben durch die Formel

$$T(h) = \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{(\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha$$

3.2.6. Dieser Satz ist schwächer als unsere verschiedenen Versionen im Fall einer Variablen in [AN1] 12.6.2.2 folgende. Ich denke jedoch, daß es an dieser Stelle den Aufwand nicht wert ist, entsprechend stärkere Versionen zu zeigen. Ich habe in einer Variablen den Aufwand auch nur getrieben, um den Aspekt der „Verallgemeinerung der Ableitung durch die Taylorentwicklung“ herauszuarbeiten. In ?? deute ich an, wie der vorhergehende Satz koordinatenfrei formuliert werden kann. Ich schicke dem Beweis ein Lemma voraus.

Lemma 3.2.7. *Sei R ein Polynom in m Veränderlichen mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq d$. Gilt $\lim_{h \rightarrow 0} R(h)/|h|^d = 0$, so folgt $R = 0$.*

Beweis. Wir zeigen das durch Widerspruch. Wäre $R \neq 0$, so gäbe es $v \neq 0$ mit $R(v) \neq 0$, und $t \mapsto R(tv)$ wäre ein von Null verschiedenes Polynom in einer Veränderlichen $t \in \mathbb{R}$ vom Grad $\leq d$ mit $\lim_{t \rightarrow 0} R(tv)/|t|^d = 0$. Wir wissen aber aus [AN1] 12.3.5.53, daß es solch ein Polynom in einer Variablen nicht gibt. \square

Beweis des Satzes. Aus unserem Lemma folgt sofort die Eindeutigkeit von T , denn ist \hat{T} ein anderes mögliches Approximationspolynom, so können wir das Lemma auf $R = T - \hat{T}$ anwenden. Um die Existenz der Taylorentwicklung nachzuweisen, nehmen wir ein $h \in \mathbb{R}^m$, das so klein ist, daß sogar das ganze Geradensegment $[p, p + h] = \{p + th \mid t \in [0, 1]\}$ in A enthalten ist, und betrachten die Taylorentwicklung der Funktion $g = g_h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(p + th)$. Wir behaupten zunächst, daß die höheren Ableitungen von g gegeben werden durch

$$g^{(\nu)}(t) = \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{\nu!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(p + th) h^\alpha$$

In der Tat gilt nach der Kettenregel in mehreren Veränderlichen 2.4.8 schon mal

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p + th) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(p + th) \cdot h_m$$

und wir folgern induktiv

$$g^{(\nu)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_\nu} \frac{\partial^\nu f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\nu}}(p + th) \cdot h_{i_1} \dots h_{i_\nu}$$

wobei die Summe über alle möglichen ν -Tupel aus $\{1, \dots, m\}$ laufen soll. Nach dem anschließenden Lemma 3.2.8 gibt es aber genau $\nu!/\alpha!$ Möglichkeiten, ein ν -Tupel $(i_1, \dots, i_\nu) \in \{1, \dots, m\}^\nu$ so zu wählen, daß unter den i_1, \dots, i_ν jedes j genau α_j -mal vorkommt. Fassen wir also gleiche Summanden zusammen, so ergibt sich die behauptete Formel für die ν -te Ableitung $g^{(\nu)}$ von g . Jetzt schreiben wir zur Funktion $g(t)$ die Taylorreihe mit der Lagrange'schen Form des Restglieds

[AN1] 12.6.2.5 um den Entwicklungspunkt $t = 0$ hin und erhalten an der Stelle $t = 1$ mit einer kleinen Umformulierung die Gleichung

$$f(p+h) = \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{(\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=d} \frac{(\partial^\alpha f)(p+\xi_h h) - (\partial^\alpha f)(p)}{\alpha!} h^\alpha$$

für geeignetes $\xi_h \in (0, 1)$. Es reicht also, wenn wir für $|\alpha| = d$ zeigen, daß gilt $\lim_{h \rightarrow 0} (\partial^\alpha f)(p+\xi_h h) - (\partial^\alpha f)(p) = 0$, und das folgt sofort aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen. \square

Lemma 3.2.8. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ gegeben und sei $\nu = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ ihre Summe. So gibt es genau $\nu!/\alpha_1! \dots \alpha_m!$ Abbildungen von einer Menge X mit ν Elementen nach $\{1, \dots, m\}$ derart, daß der Wert j jeweils genau α_j -mal angenommen wird.

Beispiel 3.2.9. Wollen wir 10 nummerierte Bälle so anmalen, daß 5 Bälle blau, 3 Bälle rot und 2 Bälle gelb werden, so gibt es dafür also $10!/(5!3!2!) = 2520$ Möglichkeiten.

Beweis. Es gibt genau $\nu!$ Möglichkeiten, unsere Menge X anzuordnen. Jede dieser Möglichkeiten liefert eine Abbildung i wie folgt: Wir bilden die ersten α_1 Zahlen auf 1 ab, die nächsten α_2 Zahlen auf 2, und so weiter, bis wir zum Schluß die letzten α_m Zahlen auf m abbilden. So erhalten wir nur Abbildungen der gewünschten Form, genauer erhalten wir so jede der gewünschten Abbildungen genau $(\alpha_1! \dots \alpha_m!)$ -mal. Das Lemma ist bewiesen. \square

3.3 Rechnen mit Approximationen

Definition 3.3.1. Eine Abbildung $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **polynomial** oder auch **regulär**, wenn sie die Gestalt $P = (P_1, \dots, P_n)$ hat für Polynome P_1, \dots, P_n in m Veränderlichen. Haben alle unsere P_j Grad $\leq d$, so sagen wir, die polynomiale Abbildung P habe **Grad** $\leq d$.

Definition 3.3.2. Seien $f, g : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildungen, $p \in D$ ein Punkt und $d \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir sagen, f und g **stimmen bei p überein bis zur Ordnung d** und schreiben

$$f \underset{p}{\sim}^d g$$

als Abkürzung dafür, daß gilt $f(p+h) - g(p+h) = |h|^d \varepsilon(h)$ für eine Funktion ε , die stetig ist bei $h = 0$ mit Funktionswert $\varepsilon(0) = 0$.

3.3.3. Ist $p \in D$ ein Häufungspunkt von D , so ist das gleichbedeutend zur Forderung, daß gilt $f(p) = g(p)$ und

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - g(x)}{|x - p|^d} = 0$$

3.3.4. Natürlich stimmen zwei \mathbb{R}^n -wertige Funktionen bis zu einer gewissen Ordnung überein genau dann, wenn alle ihre Komponenten bis zu der entsprechenden Ordnung übereinstimmen. Schreiben wir also $f = (f_1, \dots, f_n)$ und $g = (g_1, \dots, g_n)$, so gilt

$$f \sim_p^d g \Leftrightarrow (f_i \sim_p^d g_i \quad \forall i)$$

Offensichtlich folgt auch aus $f \sim_p^d g$ und $g \sim_p^d h$ schon $f \sim_p^d h$. Sind weiter $P, Q : \mathbb{R}^m \ni D \rightarrow \mathbb{R}^n$ polynomiale Abbildungen vom Grad $\leq d$, so folgt nach 3.2.7 aus $P \sim_p^d Q$ schon $P = Q$.

3.3.5 (**Approximation und Taylorentwicklung**). Der Satz über die Taylorentwicklung 3.2.5 liefert uns für d -mal stetig partiell differenzierbares f die eindeutig bestimmte polynomiale Abbildung P vom Grad $\leq d$ mit $P \sim_p^d f$. Genauer besagt unser Satz, daß diese polynomiale Abbildung $P = (P_1, \dots, P_n)$ dadurch charakterisiert wird, daß die partiellen Ableitungen der Polynome P_i bis zur Ordnung d bei p denselben Wert annehmen wie die entsprechenden partiellen Ableitungen der Funktionen f_i . Im Fall $n = 1$ würde in den dortigen Notationen unser Polynom $P = P_1$ gegeben durch $P(p+h) = T(h)$ alias $P(x) = T(x-p)$.

Satz 3.3.6 (Rechnen mit Approximationen). Seien $f : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \supset E \rightarrow \mathbb{R}^l$ Abbildungen mit $f(D) \subset E$. Gegeben $p \in D$ und polynomiale Abbildungen P, Q mit $f \sim_p^d P$ und $g \sim_{f(p)}^d Q$ folgt

$$g \circ f \sim_p^d Q \circ P$$

3.3.7. Im Fall $d = 0$ bedeutet die Aussage schlicht die Stetigkeit der Verknüpfung bei p von punktweise stetigen Abbildungen. Es reicht also, den Satz für $d \geq 1$ zu beweisen. Im Fall $d = 1$ ist die Aussage des Satzes im übrigen äquivalent zur Kettenregel in mehreren Veränderlichen. Dem eigentlichen Beweis schicken wir ein Lemma voraus.

Lemma 3.3.8. Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Gegeben $p \in D$ und Polynome P_1, P_2 mit $f_i \sim_p^d P_i$ folgt

$$f_1 + f_2 \sim_p^d P_1 + P_2 \quad \text{und} \quad f_1 f_2 \sim_p^d P_1 P_2$$

3.3.9. Dies Lemma besteht in der Tat aus zwei Spezialfällen des Satzes, man kann nämlich die Addition $(+) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten und rechnen $f_1 + f_2 = (+) \circ (f_1, f_2) \sim_p^d (+) \circ (P_1, P_2) = P_1 + P_2$ und ähnlich für die Multiplikation. Wir brauchen jedoch einen unabhängigen Beweis, damit wir das Lemma beim Beweis des Satzes verwenden dürfen.

Beweis des Lemmas. Dem Leser überlassen. Statt P_i polynomial reicht es auch, P_i stetig bei p anzunehmen. □

Beweis des Satzes. Wir zeigen nun zunächst $g \circ f \sim_p^d Q \circ f$ und dann $Q \circ f \sim_p^d Q \circ P$. Für die erste Aussage schreiben wir $g(y) = Q(y) + |y - f(p)|^d \varepsilon(y - f(p))$ und erhalten durch Einsetzen von $y = f(x)$ und Erweitern des rechtesten Terms

$$(g \circ f)(x) = (Q \circ f)(x) + |x - p|^d \left[\left(\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} \right)^d \varepsilon(f(x) - f(p)) \right]$$

für alle $x \neq p$. Wir hatten uns ja bereits in 3.3.7 auf den Fall $d \geq 1$ zurückgezogen. In diesem Fall stimmt f bei p bis mindestens zur Ordnung 1 überein mit der polynomialen Abbildung P , folglich ist f differenzierbar bei p , die vordere Klammer in den eckigen Klammern bleibt mithin beschränkt für $x \rightarrow p$ und der Ausdruck in eckigen Klammern strebt für $x \rightarrow p$ gegen Null. Wir müssen also nur noch für jede polynomiale Abbildung Q zeigen

$$Q \circ f \sim_p^d Q \circ P$$

Es reicht sicher, das im Fall $l = 1$ zu zeigen, also für Q ein Polynom. In diesem Fall folgt es aber sofort aus dem vorhergehenden Lemma 3.3.8. \square

Beispiel 3.3.10. Wollen wir für die Funktion $f(x, y) = \sin(x e^y)$ die partielle Ableitung $\frac{\partial^3 f}{\partial x (\partial y)^2}$ im Nullpunkt bestimmen, so benutzen wir unseren Satz 3.3.6 und rechnen

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \dots \\ x e^y &= x + xy + \frac{xy^2}{2} + \dots \\ \sin(x e^y) &= x + xy + \frac{xy^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

und die gesuchte partielle Ableitung bei $x = y = 0$ ergibt sich mit der Taylorreihe zu 1.

Übungen

Übung 3.3.11. Eine Potenzreihe in mehreren Veränderlichen, die an allen Stellen einer offenen Menge punktweise absolut konvergiert, stellt auf dieser offenen Menge eine beliebig oft partiell differenzierbare Funktion dar.

Übung 3.3.12. Man zeige die Identität $\log((1-u)(1-v)) = \log(1-u) + \log(1-v)$ im Ring der formalen Potenzreihen in zwei kommutierenden Variablen u, v mit rationalen Koeffizienten.

3.4 Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen

Definition 3.4.1. Seien A ein topologischer Raum, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in A$ ein Punkt.

1. Wir sagen, f hat bei p ein **lokales Minimum**, wenn es eine Umgebung U von p gibt mit $f(x) \geq f(p) \forall x \in U$;
2. Wir sagen, f hat bei p ein **isoliertes lokales Minimum**, wenn es stärker eine Umgebung U von p gibt mit $f(x) > f(p) \forall x \in U \setminus p$;

Analog erklären wir **lokale Maxima** und **isolierte lokale Maxima**.

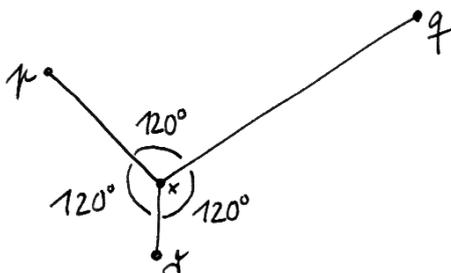
Proposition 3.4.2. Sei $f : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in A$ ein Punkt. Besitzt f bei p ein lokales Minimum oder Maximum, so gilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ für alle i .

3.4.3. Die Bedingung, A sei offen, ist in diesem Zusammenhang wesentlich, wie wir bereits im Fall einer Veränderlichen in [AN1] 12.5.5.4 diskutiert hatten.

Beweis. Für beliebiges i und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ betrachten wir das parametrisierte Geradensegment $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow A, t \mapsto p + t e_i$. Natürlich muß auch $f \circ g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Minimum oder Maximum bei $t = 0$ haben, also gilt $(f \circ g)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$. \square

Definition 3.4.4. Sei $f : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Verschwinden alle ersten partiellen Ableitungen unserer Funktion an einer Stelle $p \in A$, so sagt man, die Funktion habe bei p eine **kritische Stelle**.

Ergänzung 3.4.5. Ist allgemeiner A eine halboffene Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion und verschwindet ihr Differential an einem Punkt $p \in A$, in Formeln $d_p f = 0$, so sagt man auch, die Funktion habe bei p eine **kritische Stelle**.



Die Summe der Abstände zu drei vorgegebenen Punkten, die nicht auf einer Gerade liegen und ein Dreieck bilden, in dem kein Winkel größergleich 120° ist, wird minimal an der Stelle, an der die Halbgeraden zu den Ecken jeweils den Winkel 120° einschließen. Ist dahingegen ein Winkel größergleich 120° , so liegt das Minimum bei der fraglichen Ecke selbst.

Beispiel 3.4.6. Gegeben drei Punkte $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ suchen wir die Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, für die die Summe der Abstände

$$S(x) = \|x - p\| + \|x - q\| + \|x - r\|$$

kleinstmöglich wird. Sicher gilt $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} S(x) = \infty$, folglich existiert ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^2} S(x) = \inf_{x \in K} S(x)$$

und damit nimmt unsere Funktion nach [AN1] 12.5.1.5 ihr Infimum auch wirklich als Funktionswert an. Unsere Funktion ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q, r\}$ stetig differenzierbar und ihr Gradient bei x ergibt sich nach kurzer Rechnung zu

$$(\text{grad } S)(x) = \frac{x - p}{\|x - p\|} + \frac{x - q}{\|x - q\|} + \frac{x - r}{\|x - r\|}$$

Für das Minimum kommen nach unseren Erkenntnissen nur unsere drei Punkte p, q, r sowie die Nullstellen des Gradienten in Frage. Die weiteren Überlegungen führen wir nicht mehr in formaler Strenge durch, da das von unseren formalen Kenntnissen ausgehend einen unangemessenen Aufwand bedeuten würde. Anschaulich scheint es mir klar, daß unser Gradient nur dann verschwinden kann, wenn nicht alle drei Punkte p, q, r auf einer Geraden liegen und x im Inneren der zugehörigen Dreiecksfläche alias ihrer konvexen Hülle liegt und wenn die drei Vektoren $x - p, x - q$ und $x - r$ jeweils einen Winkel von 120° alias $2\pi/3$ einschließen. Das ist für einen Punkt im Innern der Dreiecksfläche jedoch nur dann möglich, wenn jeder der Winkel unseres Ausgangsdreiecks kleiner ist als 120° . Nur unter den Voraussetzungen, daß unsere drei Punkte p, q, r nicht auf einer Geraden liegen und jeder der Winkel des Dreiecks mit den Ecken p, q, r kleiner ist als 120° , kann also das Minimum außerhalb der drei Punkte $\{p, q, r\}$ angenommen werden. Sind sie erfüllt, so kann das Minimum hinwiederum nicht an einem dieser Punkte angenommen werden, da der Wert von $S(x)$ dann abnimmt, wenn wir auf einer Winkelhalbierenden ins Dreieck hineinlaufen, wie man etwa an unserer Beschreibung des Gradienten sehen kann. Folglich muß dann das Minimum bei der kritischen Stelle angenommen werden, die eben dadurch charakterisiert ist, daß die Vektoren $x - p, x - q$ und $x - r$ jeweils einen Winkel von $120^\circ = 2\pi/3$ einschließen.

3.4.7. Um eine hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum oder Maximum zu erhalten, müssen wir wie im Fall einer Veränderlichen die zweiten Ableitungen untersuchen. Am Beispiel der Funktionen $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ beziehungsweise x^2 beziehungsweise $x^2 - y^2$ kann man sehen, was lokal um $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ so alles passieren kann. Wir betrachten nun allgemeiner eine beliebige **quadratische Form** $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{ij}x_i x_j$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ wie in [LA2] 4.2.1.

Definition 3.4.8. Eine quadratische Form $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

positiv definit,	wenn gilt	$Q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0;$
positiv semidefinit,	wenn gilt	$Q(x) \geq 0 \quad \forall x;$
negativ definit,	wenn gilt	$Q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0;$
negativ semidefinit,	wenn gilt	$Q(x) \leq 0 \quad \forall x;$
indefinit,	wenn gilt	es gibt $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $Q(x) > 0, Q(y) < 0.$

3.4.9. Wir werden nachher erklären, wie man für eine gegebene quadratische Form entscheiden kann, welche Definitheitseigenschaften sie hat. Zunächst diskutieren wir jedoch, inwieweit diese Eigenschaften für den quadratischen Approximationsterm das lokale Verhalten einer Funktion an einer kritischen Stelle bestimmen.

Satz 3.4.10 (Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen). Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $p \in A$ eine kritische Stelle. Wir bilden zu unserer Funktion eine quadratische Form $d_p^{(2)}f$ als das Doppelte der quadratischen Terme der Taylorreihe, in Formeln

$$(d_p^{(2)}f)(h) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) h_i h_j$$

1. Ist unsere quadratische Form $d_p^{(2)}f$ positiv definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Minimum;
2. Ist unsere quadratische Form $d_p^{(2)}f$ negativ definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Maximum;
3. Ist unsere quadratische Form $d_p^{(2)}f$ indefinit, so hat f bei p weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

3.4.11. Die Notation $d_p^{(2)}f$ wird in ?? auf Ableitungen beliebigen Grades verallgemeinert. Man beachte, daß der Satz keine Aussage für die semidefiniten Fälle macht, in Verallgemeinerung der Tatsache, daß man auch für Funktionen einer Veränderlichen bei Verschwinden der ersten und zweiten Ableitung an einer vorgegebenen Stelle ohne weitere Informationen noch nichts über Maxima oder Minima aussagen kann.

Beweis. Wir verwenden für das folgende die Abkürzung $Q := \frac{1}{2}(d_p^{(2)}f)$. Aus unseren Annahmen folgt mit der Taylor-Formel

$$f(p+h) = f(p) + Q(h) + \varepsilon(h)|h|^2$$

für eine Funktion ε mit $\varepsilon(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Wir behandeln nun als erstes den Fall Q positiv definit. Sei a das Minimum nach [AN1] 12.5.1.5 von Q auf der Oberfläche des Einheitswürfels, $a = \inf\{Q(h) \mid |h| = 1\}$. Aus unserer Annahme folgt $a > 0$. Offensichtlich gilt $Q(h) \geq a|h|^2$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$. Wegen $\varepsilon(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ finden wir $\delta > 0$ derart, daß aus $|h| < \delta$ folgt $|\varepsilon(h)| \leq a/2$. Damit ergibt sich für $|h| < \delta$ aber

$$f(p+h) \geq f(p) + (a/2)|h|^2$$

und f hat in der Tat ein isoliertes lokales Minimum. Ist Q negativ definit, so argumentieren wir entsprechend. Ist Q indefinit, so finden wir zwei Geraden durch Null derart, daß die Einschränkung von Q auf diese Geraden außerhalb des Nullpunkts positiv beziehungsweise negativ ist. Dann muß aber die Restriktion von f auf die erste Gerade ein isoliertes lokales Minimum haben bei p , und auf der zweiten Geraden ein isoliertes lokales Maximum. Folglich hat f bei p weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum. \square

3.4.12. Jeder reellen quadratischen Form $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ ordnen wir die symmetrische Matrix S mit Einträgen $(a_{ij} + a_{ji})/2$ zu, so daß gilt $Q(x) = x^\top Sx$. Nach den Definitionen hat die quadratische Form Q eine gewisse Definitheit im Sinne von 3.4.8 genau dann, wenn ihre Matrix S die entsprechende Definitheit hat im Sinne der linearen Algebra.

Definition 3.4.13. Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen, die zur quadratischen Form $d_p^{(2)}f$ aus unserem Satz gehört, heißt die **Hesse-Matrix** von f bei p , in Formeln

$$\text{Hesse}(f) := [d_p^{(2)}f] := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Korollar 3.4.14 (Maxima, Minima und Hessematrix). Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $p \in A$ ein kritischer Punkt.

1. Ist die Hessematrix von f bei p positiv definit, so hat f bei p ein isoliertes lokales Minimum;
2. Ist die Hessematrix von f bei p negativ definit, ein isoliertes lokales Maximum;
3. Ist die Hessematrix von f bei p indefinit, so hat f bei p weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

Beweis. Das ist nur eine offensichtliche Umformulierung von Satz 3.4.10. \square

3.4.15. Um die Definitheitseigenschaften einer symmetrischen quadratischen Matrix zu bestimmen, bringt man sie am einfachsten durch Basiswechsel in Diagonalgestalt, wie im Beweis von [LA2] 4.3.11 erklärt. Bei kleineren Matrizen kann auch das Hauptminoren-Kriterium [LA2] 4.3.25 ein guter Trick sein: Danach ist eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix positiv definit genau dann, wenn für alle $k < n$ die quadratische Untermatrix, die man erhält durch Wegstreichen der letzten k Spalten und der untersten k Zeilen, eine positive Determinante hat.

Übungen

Übung 3.4.16. Sei V ein normierter Raum, $f : V \ni A \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in A$ ein Punkt. Besitzt f bei p ein lokales Minimum oder Maximum, so folgt $d_p f = 0$.

Übung 3.4.17. Man zeige in der Situation von Satz 3.4.10: Ist $d_p^{(2)} f$ positiv semi-definit und verschieden von Null, so kann f bei p kein lokales Maximum haben.

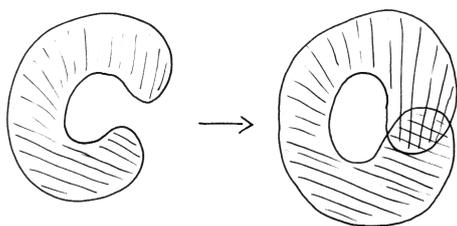
4 Umkehrsatz und Anwendungen

4.1 Umkehrsatz

Definition 4.1.1. Eine im Sinne von 2.6.10 stetig differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen normierter Räume heißt auch eine \mathcal{C}^1 -**Abbildung**. Der Buchstabe \mathcal{C} steht hier für englisch „continuous“ oder französisch „continu“, zu deutsch stetig, und die hochgestellte 1 deutet an, daß nur die Existenz und Stetigkeit der *ersten* Ableitung gefordert wird. Eine bijektive \mathcal{C}^1 -Abbildung, deren Umkehrung auch eine \mathcal{C}^1 -Abbildung ist, heißt ein \mathcal{C}^1 -**Diffeomorphismus**.

Satz 4.1.2 (Umkehrsatz). Seien X, Y endlichdimensionale reelle affine Räume und $f : X \supset U \rightarrow Y$ stetig differenzierbar. Ist an einer Stelle $p \in U$ das Differential ein Isomorphismus $d_p f : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$, so induziert f einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus zwischen einer offenen Umgebung von p in U und einer offenen Umgebung von $f(p)$ in Y .

4.1.3. In Formeln gibt es für unser p also V mit $U \supset V \ni p$ und $Y \supset f(V)$ derart, daß die induzierte Abbildung $f : V \xrightarrow{\sim} f(V)$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus ist.



Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit überall injektivem Differential ist im allgemeinen nur „lokal injektiv“ selbst dann, wenn U „wegzusammenhängend“ ist.

4.1.4. Wir zeigen diesen Satz nach einigen Vorbereitungen zu Ende dieses Abschnitts. Als erste Prüfung für unseren Umkehrsatz überlege man sich die Gültigkeit der Behauptung im Spezialfall $X = Y = \mathbb{R}$. Die Kettenregel liefert im übrigen für das Differential des Inversen eines \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus sofort die Formel

$$d_{f(p)}(f^{-1}) = (d_p f)^{-1}$$

4.1.5. Unser Umkehrsatz gilt auch für unendlichdimensionale normierte Räume X und Y , wenn wir zusätzlich annehmen, daß sie vollständig sind. Der Beweis bleibt derselbe, wenn wir zusätzlich voraussetzen, daß das Inverse des Vektorraumisomorphismus $d_p f$ stetig ist. Der Satz vom offenen Bild [AN3] 4.2.19 wird später einmal zeigen, daß jeder stetige Vektorraumisomorphismus von vollständigen normierten Vektorräumen eine stetige Umkehrabbildung hat, aber das soll vorerst weder bewiesen noch verwendet werden. Die Allgemeinheit unendlichdimensionaler Räume ist durchaus von Interesse, eröffnet sie doch einen direkten

Zugang zum Studium von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Das wird in 6.6.2 ausgeführt.

4.1.6 (Polarkoordinaten). Wir betrachten die durch $P(r, \vartheta) := (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ gegebene Polarkoordinatenabbildung $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Sie ist eine \mathcal{C}^1 -Abbildung und ihr Differential ist ein Isomorphismus an jeder Stelle (r, ϑ) mit $r \neq 0$. Gegeben $p := (r, \vartheta)$ mit $r > 0$ ist etwa $V := (0, \infty) \times (\vartheta - \pi, \vartheta + \pi)$ eine offene Umgebung mit $P(V) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $P : V \xrightarrow{\sim} P(V)$ ein Diffeomorphismus. Haben wir noch spezieller $p := (0, 1)$ und nehmen wir $V := (0, \infty) \times (0, \pi)$, so ist $P(V) = \{(x, y) \mid y > 0\}$ eine offene Halbebene und wir können die Umkehrabbildung zu

$$P : (0, \infty) \times (0, \pi) \xrightarrow{\sim} P(V)$$

explizit angeben durch die Vorschrift $(x, y) \mapsto (r(x, y), \vartheta(x, y))$ mit $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\vartheta(x, y) = \operatorname{arccot}(x/y)$. Die Funktionen r und θ heißen **Radius** und **Winkel** und geben den Abstand von (x, y) zum Ursprung an sowie den orientierten Winkel von der x -Achse zur Ursprungsgerade durch (x, y) . Die Komponenten dieser Umkehrabbildung alias die Funktionen Radius und Winkel nennen wir **Polarkoordinaten**.

Definition 4.1.7. Ein Punkt, der unter einer Abbildung auf sich selbst abgebildet wird, heißt ein **Fixpunkt** besagter Abbildung.

Definition 4.1.8. Eine Abbildung f von metrischen Räumen heißt **Lipschitzstetig**, wenn es eine Konstante $\lambda > 0$ gibt mit

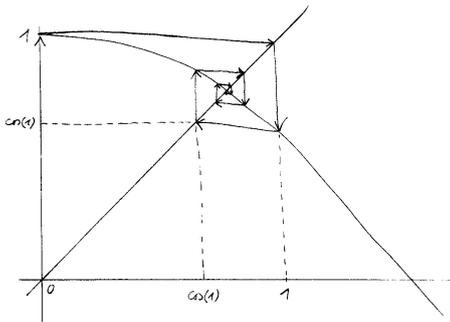
$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

für alle x, y im Ausgangsraum. Wir sagen dann auch, f sei **lipschitzstetig zur Lipschitz-Konstante** λ . Eine Abbildung f zwischen metrischen Räumen heißt **kontrahierend**, wenn sie lipschitzstetig ist zu einer Lipschitzkonstante $\lambda < 1$, wenn es also $\lambda < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \forall x, y$$

Beispiel 4.1.9. Natürlich ist jede lipschitzstetige Abbildung stetig. Eine Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist lipschitzstetig zu einer Lipschitzkonstante λ genau dann, wenn alle ihre Sekantensteigungen betragsmäßig beschränkt sind durch λ . Es ist hoffentlich anschaulich klar, daß im Fall $\lambda < 1$ der Graph einer derart „flachen“ Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} oder auch von einem nichtleeren reellen Kompaktum K in sich selber $f : K \rightarrow K$ an genau einer Stelle die Hauptdiagonale alias den Graphen der Identität kreuzen muß. Der Cosinus ist als Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht kontrahierend, das Supremum seiner Sekantensteigungen ist ja Eins. Allerdings

ist $x \mapsto \lambda \cos(x)$ für $|\lambda| < 1$ kontrahierend und auch die Einschränkung des Cosinus zu einer Abbildung $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist kontrahierend. Den im Banach'schen Fixpunktsatz versteckten Algorithmus zur Bestimmung des Fixpunktes illustriert nebenstehende Abbildung.



Stellt man den Taschenrechner auf Bogenmaß und drückt wiederholt die Taste „cos“, so wird die Anzeige schnell stabil. Der Cosinus liefert nämlich eine kontrahierende Selbstabbildung des Intervalls $[0, 1]$ und was wir sehen ist ein Illustration für den Beweis des Fixpunktsatzes 4.1.10.

Satz 4.1.10 (Banach'scher Fixpunktsatz). *Jede kontrahierende Selbstabbildung eines vollständigen nichtleeren metrischen Raums besitzt genau einen Fixpunkt.*

Beweis. Seien $f : M \rightarrow M$ unsere kontrahierende Selbstabbildung und $\lambda < 1$ eine Lipschitzkonstante. Wir wählen $x_0 \in M$ und betrachten die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = f(x_n)$. Mit Induktion folgt $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$ und mit der Dreiecksungleichung folgt für $n \leq m$

$$d(x_n, x_{m+1}) \leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \dots + \lambda^m) d(x_0, x_1) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1)$$

Also ist unsere Folge x_n eine Cauchy-Folge und konvergiert aufgrund der Vollständigkeit 1.6.1 gegen einen Punkt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \in M$. Da nun eine kontrahierende Abbildung notwendig stetig ist, folgt aus der Vertauschbarkeit 1.4.8 von Grenzwerten mit dem Anwenden stetiger Abbildungen

$$f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p$$

und wir haben einen Fixpunkt gefunden. Ist q ein zweiter Fixpunkt, so folgt $d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq \lambda d(p, q)$ für $\lambda < 1$, also $d(p, q) = 0$, also $p = q$. \square

Ergänzung 4.1.11. Lassen wir in der Ungleichungskette aus obigem Beweis m nach Unendlich streben, so erhalten wir für den Abstand der n -ten Approximation x_n zum Fixpunkt p zusätzlich die Abschätzung

$$d(x_n, p) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1)$$

Satz 4.1.12 (Umkehrsatz für stetige Abbildungen). Seien X ein vollständiger normierter Raum und $f : X \supseteq V \rightarrow X$ eine Abbildung, deren Differenz zur Identität

$$(f - \text{id}) : V \rightarrow \vec{X}$$

kontrahierend ist alias Lipschitzstetig zu einer Lipschitzkonstante $\lambda < 1$. So ist unsere Abbildung injektiv mit offenem Bild $f(V) \subseteq X$ und ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$ ist Lipschitzstetig zur Lipschitzkonstante $1/(1 - \lambda)$.

Beispiel 4.1.13. In Fall einer differenzierbaren Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $V \subseteq \mathbb{R}$ ist unsere Annahme gleichbedeutend zur Bedingung $1 - \lambda \leq f'(x) \leq 1 + \lambda \forall x \in V$ und die Folgerung ist klar aus Analysis 1. Anhand dieses Falls kann ich selber den Beweis am besten nachvollziehen. Ganz konkret mag man $f(x) := \sin(x)$ auf dem Intervall $V := (0, 1)$ nehmen.

Ergänzung 4.1.14. Unter einer **Norm** auf einer abelschen Gruppe X verstehen wir eine Abbildung von unserer Gruppe in die nichtnegativen reellen Zahlen mit $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ und $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$ und $\|-v\| = \|v\|$ für alle $v, w \in X$. Der Umkehrsatz für stetige Abbildungen 4.1.12 gilt mit demselben Beweis für jede vollständige normierte abelsche Gruppe.

Vorschau 4.1.15. Man kann sogar zeigen, daß jede stetige injektive Abbildung von einer offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^n offene Teilmengen auf offene Teilmengen abbildet und folglich eine stetige Umkehrabbildung hat. Dieser „Satz über die Invarianz von Gebieten“ gilt jedoch nur im endlichdimensionalen Kontext und sein Beweis benötigt stärkere Hilfsmittel, vergleiche etwa [TS] 3.3.14.

Ergänzung 4.1.16. Der Leser mag zur Übung aus den Argumenten des anschließenden Beweises folgern, daß unter den Annahmen des Umkehrsatzes für stetige Abbildungen 4.1.12 genauer gilt

$$B(p; R) \subset V \Rightarrow B(f(p); (1 - \lambda)R) \subset f(V)$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, X sei ein vollständiger normierter Vektorraum. Die Injektivität von f ergibt sich, da aus unserer Annahme $\|(f - \text{id})(x) - (f - \text{id})(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$ sofort folgt $\|y - x\| - \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$ alias

$$(1 - \lambda)\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|$$

Durch Einsetzen von $x = f^{-1}(p)$ und $y = f^{-1}(q)$ folgt weiter ohne Schwierigkeiten $(1 - \lambda)\|f^{-1}(p) - f^{-1}(q)\| \leq \|p - q\|$ und damit sogar die Lipschitzstetigkeit der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$. Bis hierher brauchten wir weder V offen noch X vollständig anzunehmen und unsere Aussagen sind wenig mehr als

ein Spezialfall der allgemeinen Resultate für „nicht abstandsverkleinernde“ Abbildungen metrischer Räume aus Übung 1.1.21. Der wesentliche Punkt besteht darin, zu zeigen, daß f offenes Bild hat. Dazu betrachten wir für alle $y \in X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} k_y : V &\rightarrow X \\ x &\mapsto x - f(x) + y \end{aligned}$$

Offensichtlich sind die Fixpunkte von k_y die Urbilder von y unter f . Offensichtlich ist k_y kontrahierend, genauer gilt

$$\|k_y(x) - k_y(z)\| \leq \lambda \|x - z\| \quad \forall x, z \in V$$

Gegeben $p \in V$ finden wir nun einen Radius $R > 0$ derart, daß der „abgeschlossene Ball“

$$A(p; R) := \{x \in X \mid \|p - x\| \leq R\}$$

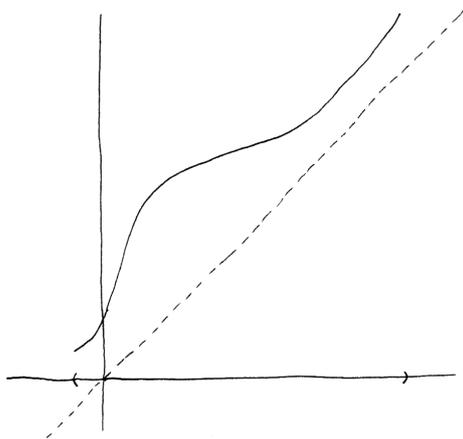
ganz in V enthalten ist. Für $y \in B(f(p); (1 - \lambda)R)$ bildet dann k_y unseren abgeschlossenen Ball $A(p; R)$ in sich ab, denn für diese y gilt $\|p - k_y(p)\| = \|f(p) - y\| < (1 - \lambda)R$ und damit erhalten wir für $x \in A(p; R)$ sogar

$$\|p - k_y(x)\| \leq \|p - k_y(p)\| + \|k_y(p) - k_y(x)\| < (1 - \lambda)R + \lambda R = R$$

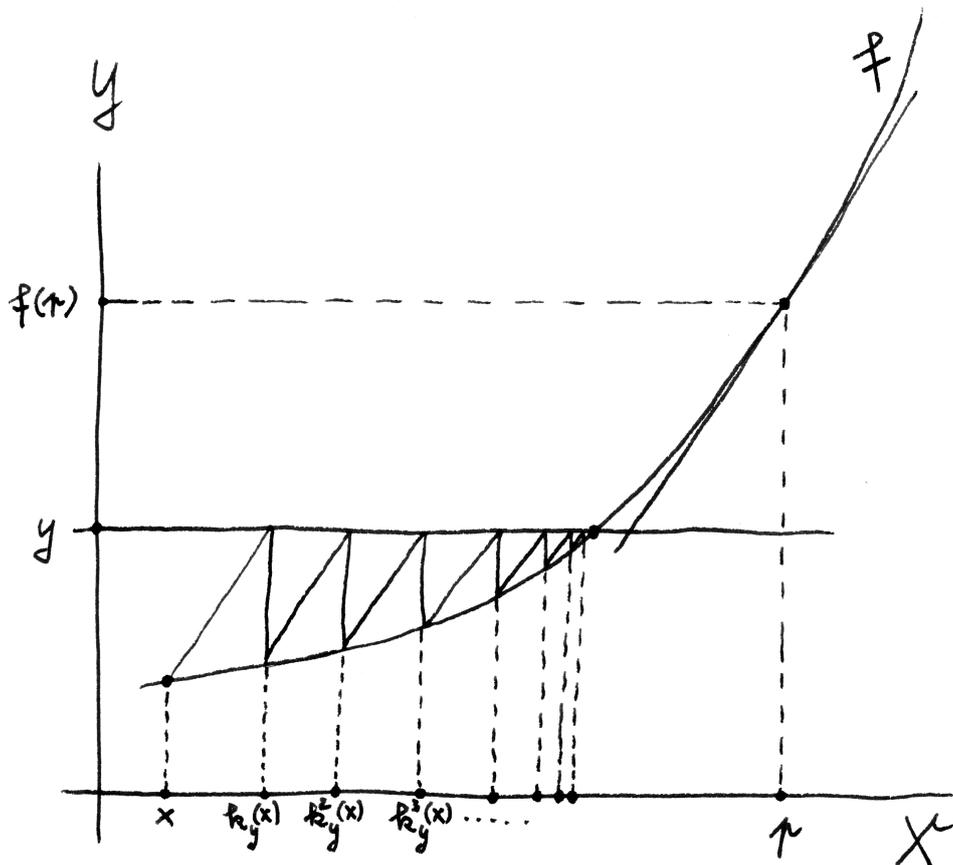
Wenden wir den Banach'schen Fixpunktsatz 4.1.10 auf die Selbstabbildung k_y von $A(p; R)$ an, das nach 1.6.5 als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums vollständig ist, so finden wir, daß k_y einen Fixpunkt in $A(p; R)$ haben muß. Es folgt $f(A(p; R)) \supset B(f(p); (1 - \lambda)R)$ und das zeigt, daß das Bild von f offen sein muß, in Formeln $f(V) \circledast X$. \square

4.1.17 (Anschauung im Fall einer Veränderlichen). Im Fall einer Veränderlichen kann man sich den Beweis auch anschaulich gut klarmachen. Die Annahmen bedeuten dann, daß die Sekantensteigungen von f alle im Intervall $[1 - \lambda, 1 + \lambda]$ liegen. Die Abbildung $(x, y) \mapsto (k_y(x), y)$ bedeutet anschaulich, daß wir von (x, y) senkrecht auf den Graph der Funktion f gehen und von dort parallel zur Hauptdiagonale wieder auf die Horizontale in der vorgegebenen Höhe y .

Beweis des Umkehrsatzes für C^1 -Abbildungen 4.1.2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien X, Y Vektorräume. Sicher reicht es, wenn wir den Satz für $(d_p f)^{-1} \circ f$ statt für f zeigen. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = Y$ und $d_p f = \text{id}$ annehmen. Es folgt $d_p(f - \text{id}) = 0$. Wählen wir eine Norm auf X und beachten, daß f stetig differenzierbar angenommen war, so folgt leicht die Existenz eines offenen Balls B um p mit $\|d_x(f - \text{id})\| \leq 1/2 \forall x \in B$. Nach der Variante zum Schrankensatz aus Übung 2.4.11 ist dann jedoch $(f - \text{id}) : B \rightarrow X$ kontrahierend mit Lipschitzkonstante $\leq 1/2$. Mit unserem Umkehrsatz



Für eine Abbildung f von einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}$ nach \mathbb{R} ist $(f - \text{id})$ kontrahierend mit Kontraktionsfaktor λ genau dann, wenn alle Sekantensteigungen von f im Intervall $[1 - \lambda, 1 + \lambda]$ liegen. In diesem Fall sollte es anschaulich klar sein, daß f injektiv und offen ist und daß die Sekantensteigungen der Umkehrfunktion betragsmäßig beschränkt sind durch $(1 - \lambda)^{-1}$. In diesem Fall liegen alle Sekantensteigungen der Umkehrfunktion sogar im Intervall $[(1 + \lambda)^{-1}, (1 - \lambda)^{-1}]$.



Das Verfahren aus dem Beweis von 4.1.2 ist auch durchaus von praktischer Bedeutung: Ausgeschrieben besagt es, daß wir eine Lösung x der Gleichung $f(x) = y$ unter geeigneten Annahmen finden können als den Fixpunkt der kontrahierenden Abbildung

$$k_y : V \rightarrow X$$

$$x \mapsto x + (d_p f)^{-1}(y - f(x))$$

für p mit $f(p)$ hinreichend nah bei y . Es ist dem Newtonverfahren aus [AN1] 12.3.7.2 eng verwandt, stimmt jedoch nicht damit überein: Beim Newtonverfahren etwa im Fall einer Veränderlichen „gehen wir ja immer auf der Tangente bei $(x, f(x))$ wieder herunter zur x -Achse“, wohingegen wir bei unserer Korrektur k_y aus besagtem Beweis stattdessen auf der Parallelen durch $(x, f(x))$ zur Tangente bei $(p, f(p))$ heruntergehen, wie im Bild dargestellt.

für stetige Abbildungen 4.1.12 angewandt auf $V := B$ folgt, daß f eine Injektion mit offenem Bild $f : B \hookrightarrow X$ liefert, deren Umkehrung lipschitzstetig ist zur Lipschitzkonstante Zwei. Um die Differenzierbarkeit von $f^{-1} : f(B) \rightarrow B$ an der Stelle $f(p)$ zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß gilt $p = 0$ und $f(p) = 0$. Da wir f differenzierbar bei p mit Differential id angenommen hatten, können wir dann schreiben

$$f(x) = x + \|x\|\varepsilon(x)$$

für eine Abbildung $\varepsilon : B \rightarrow X$, die stetig ist bei 0 und die dort den Wert Null annimmt. Setzen wir hier $x = f^{-1}(y)$ ein mit $y \in f(B)$, so ergibt sich

$$y = f^{-1}(y) + \|f^{-1}(y)\| \varepsilon(f^{-1}(y))$$

Nun liefert die Lipschitzstetigkeit der Umkehrfunktion für unseren eben gewählten offenen Ball B nach dem Umkehrsatz für stetige Funktionen 4.1.12 aber auch für alle $y \in f(B)$ die Abschätzung $\|f^{-1}(y)\| \leq 2\|y\|$. Zusammen ergibt sich dann leicht

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y) - y}{\|y\|} = 0$$

Das aber besagt gerade, daß die Umkehrabbildung f^{-1} bei $y = 0$ differenzierbar ist mit Differential id . Verkleinern wir unsere offene Umgebung von p noch so weit, daß df dort überall invertierbar ist, so folgt die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung an jeder Stelle des Bildes unserer verkleinerten offenen Umgebung. Die Stetigkeit des Differentials der Umkehrabbildung folgt dann leicht aus der Stetigkeit des Differentials der ursprünglichen Abbildung und der Stetigkeit des Invertierens linearer Abbildungen. Im Fall von Banachräumen verwende man dazu Übung 2.6.16. \square

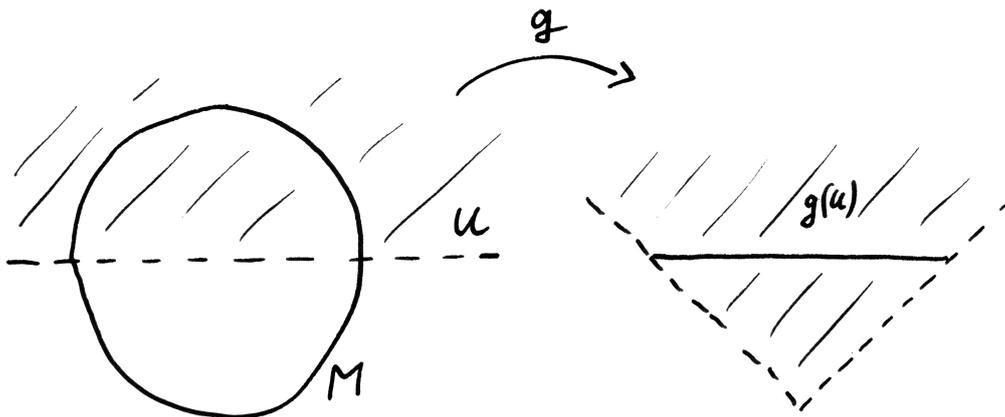
Übungen

Übung 4.1.18. Im reellen Vektorraum $\text{Mat}(n \times m; \mathbb{R})$ aller reellen Matrizen bilden die Matrizen von vollem Rang eine offene Teilmenge. Hinweis: Man betrachte Determinanten von quadratischen Untermatrizen. Diese Übung gehört zur Hälfte in die lineare Algebra und steht nur an dieser Stelle, weil wir die Aussage demnächst brauchen.

4.2 Mannigfaltigkeiten in reellen Räumen

4.2.1. Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir Maxima und Minima von Funktionen auf einer Kugel, einem Ellipsoid oder einem Torus alias Schwimmring im \mathbb{R}^3 untersuchen. Später werden wir darüber hinaus Formeln für die Oberfläche

derartiger Gebilde herleiten und Funktionen über derartige Gebilde integrieren. Um all diese Formeln in angemessener Allgemeinheit diskutieren zu können, führen wir hier den Begriff einer Mannigfaltigkeit in einem endlichdimensionalen reellen Raum ein und erklären, wie man mit diesem Begriff umgeht. Anschließend diskutieren wir dann die entsprechenden Extremwertaufgaben.



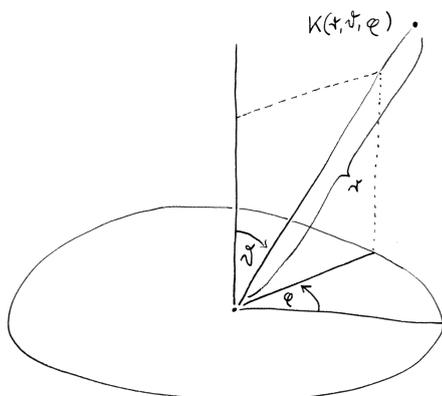
Der Einheitskreis ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit der Ebene $M \subset \mathbb{R}^2$. Eine Plättung um beliebige Punkte aus der oberen Halbebene U wird etwa gegeben durch $g(x, y) = (x, \sqrt{x^2 + y^2} - 1)$. In diesem Fall besteht $g(U)$ aus dem schraffierten Bereich, also aus allen Punkten oberhalb des Graphen der Funktion $x \mapsto |x| - 1$.

4.2.2. Sei X ein n -dimensionaler reeller Raum. Ein C^1 -Diffeomorphismus g von einer offenen Umgebung $U \Subset X$ eines Punktes $p \in X$ zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n heißt ein **lokales C^1 -Koordinatensystem von X um den Punkt p** und die Komponenten $g_1, \dots, g_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ von g heißen die **Koordinaten** unseres lokalen Koordinatensystems. Typische Beispiele sind die Polarkoordinaten auf geeigneten offenen Teilmengen von $X = \mathbb{R}^2$, bei denen man statt (g_1, g_2) meist (r, ϑ) schreibt, oder die sogenannten Kugelkoordinaten auf geeigneten offenen Teilmengen des \mathbb{R}^3 , wie wir sie gleich in 4.2.3 einführen.

Beispiel 4.2.3. Die **Kugelkoordinaten** im Raum werden beschrieben durch eine geeignete Einschränkung der Abbildung

$$K : \quad \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$$

Deren anschauliche Bedeutung wird im Anschluß erläutert.



Kugelkoordinaten

4.2.4 (Anschauliche Bedeutung der Kugelkoordinaten). Stellen wir uns ein Teleskop vor, das im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems auf einem waagerechten, als da heißt, in der xy -Ebene liegenden Drehteller steht und senkrecht nach oben in Richtung der z -Achse zeigt. Um einen Stern zu betrachten, schwenken wir zunächst das Teleskop zur Seite in Richtung der positiven x -Achse um einen Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$ und drehen dann den Drehteller um einen geeigneten Winkel, sagen wir um den „Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ gegen den Uhrzeigersinn“, so daß etwa die Drehung um $\pi/2$ die positive x -Achse in die positive y -Achse überführt. Ist schließlich r die Entfernung unseres Sterns, so gibt $K(r, \vartheta, \varphi)$ seine kartesischen Koordinaten an. Im Fall eines senkrecht über oder unter dem Teleskop befindlichen Sterns ist der Drehwinkel φ für unseren Drehteller nicht eindeutig bestimmt, und befindet sich das gedachte Teleskop bereits im Stern, so sind beide Winkel nicht eindeutig bestimmt. Die Einschränkung unserer Abbildung auf $r > 0$, $\vartheta \in (0, \pi)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ hinwiederum ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv. Oft findet man auch eine Variante, bei der wir uns das Teleskop zu Beginn horizontal in Richtung der positiven x -Achse ausgerichtet denken und wo die zweite Koordinate $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ den Winkel bezeichnet, um den das Teleskop nach oben beziehungsweise bei negativem Winkel nach unten geschwenkt werden muß. Die Formeln lauten dann abweichend $(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta)$.

4.2.5. Wenn wir besonders betonen wollen, daß unsere Koordinatensysteme nicht im Sinne der linearen Algebra [LA1] 2.9.5 gemeint sind, sprechen wir von einem **lokalen System von krummlinigen Koordinaten**.

Definition 4.2.6. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $k \geq 0$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt eine **k -Mannigfaltigkeit**, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem (U, g) von X gibt mit

$$M \cap U = \{q \in U \mid g_{k+1}(q) = \dots = g_n(q) = 0\}$$

In Worten fordern wir also, daß es für alle $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem (U, g) von X um p gibt, in dessen Definitionsbereich U die Punkte von M gerade diejenigen Punkte sind, auf denen die letzten $n - k$ lokalen Koordinaten verschwinden. Wir nennen dann (U, g) ein **an M angepaßtes lokales Koordinatensystem**.

Definition 4.2.7. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge und $i : M \hookrightarrow X$ die Einbettung. Gegeben ein Punkt $p \in M$ erklären wir den **Tangentialkegel**

$$K_p M \subset \vec{X}$$

an die Menge M als die Menge $K_p M$ aller Richtungsvektoren $v \in \vec{X}$ derart, daß es $\varepsilon > 0$ und $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ gibt mit $\gamma(0) = p$ und $i \circ \gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow X$ differenzierbar und $(i \circ \gamma)'(0) = v$.

Lemma 4.2.8 (Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit). Gegeben X ein endlichdimensionaler Raum und $M \subset X$ eine k -Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt und (U, g) ein an M angepaßtes lokales Koordinatensystem um p gilt

$$K_p M = \ker(d_p g_{k+1}) \cap \dots \cap \ker(d_p g_n)$$

4.2.9. Insbesondere ist der Tangentialkegel $K_p M \subset \vec{X}$ an eine k -Mannigfaltigkeit in einem Punkt $p \in M$ stets ein k -dimensionaler Untervektorraum des Richtungsraums. Wir nennen ihn den **Tangentialraum bei p** an unsere Mannigfaltigkeit und notieren ihn statt $K_p M$ in dieser Situation üblicherweise

$$T_p M := K_p M \subset \vec{X}$$

Die Elemente des Tangentialraums heißen **Tangentialvektoren**. Wenn wir später einmal abstrakte Mannigfaltigkeiten betrachten und besonders betonen wollen, daß wir den hier erklärten Begriff für eingebettete Mannigfaltigkeiten meinen, schreiben wir ausführlicher $T_p^{\subset} M$.

Beweis. In der Tat können wir bei einem Weg $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ unser ε so verkleinern, daß er in U landet. Dann ist nach Annahme $g_j \circ \gamma$ konstant und folglich $(g_j \circ \gamma)'(0) = (d_p g_j)(\gamma'(0)) = 0$ für $j = k + 1, \dots, n$. Das zeigt \subset . Umgekehrt folgt \supset , indem man die Wege $\gamma_\lambda(t) := g^{-1}(t\lambda_1, \dots, t\lambda_k, 0, \dots, 0)$ betrachtet für $\lambda \in \mathbb{R}^k$. \square

4.2.10 (**Anschauung für den Tangentialraum**). Gegeben X ein endlichdimensionaler Raum und $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit in X und $p \in M$ ein Punkt ist $p + T_p M$ in der schmutzigen Anschauung derjenige affine Teilraum von X , der M bei p am besten approximiert.

4.2.11. Wir nennen eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums eine **Mannigfaltigkeit**, wenn es ein k gibt derart, daß sie eine k -Mannigfaltigkeit ist. Ist unsere Mannigfaltigkeit nicht leer, so ist dieses k wohlbestimmt als die Dimension des Tangentialraums in einem und jedem Punkt. Es heißt die **Dimension** unserer Mannigfaltigkeit.

Beispiel 4.2.12 (Kreislinie als Einsmannigfaltigkeit). Die Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist eine 1-Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^2 . In der Tat bilden auf der Halbebene $U := \{(x, y) \mid x > 0\}$ unsere Polarkoordinaten Radius $r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ und Winkel $\vartheta(x, y) := \arctan(x/y)$ ein lokales Koordinatensystem und die Funktionen $g_1 := \vartheta$ und $g_2 := r - 1$ desgleichen und wir haben

$$S^1 \cap U = \{(x, y) \in U \mid g_2(x, y) = 0\}$$

In derselben Weise finden wir auch an die Kreislinie angepaßte lokale Koordinatensysteme auf den anderen drei Halbebenen zu den Koordinatenachsen. Diese vier offenen Halbebenen überdecken aber unsere Kreislinie. Mithin ist die Kreislinie in der Tat eine Einsmannigfaltigkeit in der Ebene. Für ihre Tangentialräume finden wir $T_{(x,y)}S^1 = \langle (y, -x) \rangle$.

Beispiel 4.2.13 (Kreislinie als Einsmannigfaltigkeit, Variante). Ein weiteres an die Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ angepaßtes lokales Koordinatensystem wäre der Streifen $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, y > 0\}$ mit den beiden Koordinaten $g_1(x, y) := x$ und $g_2(x, y) := y - \sqrt{1 - x^2}$.

Beispiele 4.2.14 (Graph als Mannigfaltigkeit). Der Graph jeder \mathcal{C}^1 -Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine 2-Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 . Als lokales Koordinatensystem mag man in diesem Fall das globale Koordinatensystem $g : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit $g(x, y, z) = (x, y, z - f(x, y))$ nehmen. Ähnlich ist der Graph $\Gamma(f)$ jeder \mathcal{C}^1 -Abbildung $f : \mathbb{R}^k \supset W \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine k -Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^{k+n} . Die Einheitskugel $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine n -Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^{n+1} , weil sie „lokal als Graph einer Funktion beschrieben werden kann“. Eine alternative Begründung geben wir in 4.2.21. Für die Tangentialräume unserer Graphen finden wir

$$T_{(x,f(x))}\Gamma(f) = \Gamma(d_x f)$$

In Worten ist also der Tangentialraum eines Graphen der Graph des Differentials, jeweils am entsprechenden Punkt.

Beispiele 4.2.15 (Affiner Teilraum als Mannigfaltigkeit). Jeder k -dimensionale affine Teilraum $Y \subset X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums X ist eine k -Mannigfaltigkeit. Für seinen Tangentialraum gilt

$$T_y Y = \vec{Y}$$

an jede Stelle $y \in Y$. Eine 0-Mannigfaltigkeit in X ist dasselbe wie eine Teilmenge $M \subset X$, die keine Häufungspunkte in M hat. So eine Teilmenge werden wir in 8.5.7 eine „diskrete Teilmenge“ nennen. Jeder Schnitt einer k -Mannigfaltigkeit in X mit einer offenen Teilmenge $W \Subset X$ ist auch selbst eine k -Mannigfaltigkeit in X .

Beispiele 4.2.16 (Offene Teilmenge als Mannigfaltigkeit). Eine n -Mannigfaltigkeit in einem n -dimensionalen Raum X ist dasselbe wie eine offene Teilmenge. In der Tat ist für $p \in M \Subset X$ jeder Isomorphismus $g : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ von affinen Räumen bereits eine angepaßtes Koordinatensystem für jeden Punkt von M und andererseits folgt aus der Existenz eines an M angepaßten lokalen Koordinatensystems (U, g) um $p \in M$ bereits $g(U \cap M) = g(U)$, also $U \cap M = U$, also $U \subset M$, also $M \Subset X$. So eine offene Teilmenge $M \Subset X$ hat an jeder Stelle $p \in M$ den Tangentialraum

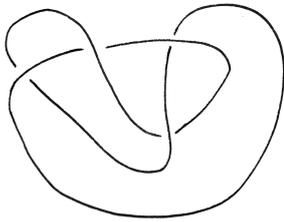
$$T_p M = \vec{X}$$

4.2.17 (Diskussion der Terminologie). Wir werden im weiteren Verlauf noch weitere Varianten des Begriffs einer Mannigfaltigkeit kennenlernen. Das hier eingeführte Konzept heißt genauer eine **in den affinen Raum X eingebettete Mannigfaltigkeit** oder ganz ausführlich eine **k -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit von X ohne Rand**. Jenseits der Grundvorlesungen versteht man unter einer Mannigfaltigkeit meist abweichend eine „abstrakte Mannigfaltigkeit“, wie wir sie in [ML] 28.3.2.1 einführen werden, aber alles zu seiner Zeit. In [ML] 28.3.3.3 werden wir auch allgemeiner den Tangentialraum $T_p M$ für abstrakte Mannigfaltigkeiten M erklären. Er ist im Fall der hier betrachteten eingebetteten Mannigfaltigkeiten „kanonisch isomorph“ zu dem oben erklärten Konzept. Wenn wir besonders betonen wollen, daß wir die obige Definition für eingebettete Mannigfaltigkeiten meinen, schreiben wir genauer

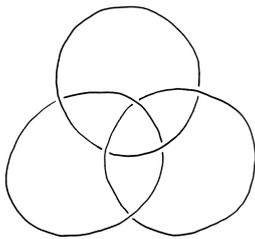
$$T_p^c M$$

Vorschau 4.2.18. Eine kompakte 1-Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 heißt eine **Verschlingung** und, wenn sie zusätzlich wegzusammenhängend ist, ein **Knoten**. Zwei Verschlingungen heißen **isotop**, wenn sie durch einen C^1 -Diffeomorphismus $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ mit überall positiver Funktionaldeterminante ineinander überführt werden können. Die „Knotentheorie“ versucht, Kriterien dafür zu entwickeln, wann zwei gegebene Verschlingungen isotop sind.

4.2.19. Eine 1-Mannigfaltigkeit heißt eine **Kurve** und eine 2-Mannigfaltigkeit eine **Fläche**. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und $c \leq \dim X$ versteht man unter einer **Mannigfaltigkeit der Kodimension c** in X eine k -Mannigfaltigkeit mit $k = (\dim X) - c$. Eine Mannigfaltigkeit in X der Kodimension Eins heißt eine **Hyperfläche in X** .



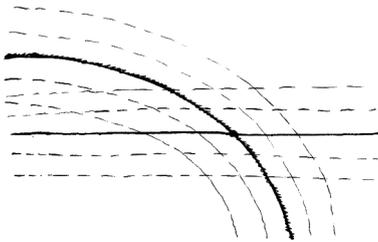
Ein Beispiel für einen Knoten.



Diese Verschlingung ist besonders bemerkenswert dadurch, daß je zwei der Ringe getrennt werden könnten, wenn eben der Dritte nicht wäre. Sie heißt die Verschlingung der **Borromäischen Ringe** nach einer italienischen Familie, die sie in ihrem Wappen führte.

Proposition 4.2.20 (Mannigfaltigkeiten als Urbilder). *Seien X und Y endlichdimensionale reelle Räume und $h : X \supseteq A \rightarrow Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung, deren Differential $d_p h$ an jeder Stelle $p \in A$ surjektiv ist. So ist für alle $c \in Y$ das Urbild $M = h^{-1}(c)$ eine Mannigfaltigkeit mit den Tangentialräumen*

$$T_p M = \ker(d_p h)$$



Dick gezackelt die Niveaulinie einer Funktion $h : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ durch $p \in U$. Ist $d_p h$ surjektiv, so läßt sich h wie beim Beweis von 4.2.20 durch eine lineare Abbildung, etwa $l(x, y) = y$, zu einem lokalen Koordinatensystem ergänzen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ annehmen und haben $h = (h_1, \dots, h_m)$. Für jedes $p \in M$ finden wir sicher lineare Abbildungen $l_1, \dots, l_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß das Differential von $g = (l_1, \dots, l_k, h_1, \dots, h_m)$ in p bijektiv ist. Nach dem Umkehrsatz 4.1.2 erhalten wir so ein lokales Koordinatensystem auf einer Menge U mit $p \in U \subseteq A$. Das Tupel von Funktionen $(l_1, \dots, l_k, h_1 - c_1, \dots, h_m - c_m)$ ist dann ein an M angepaßtes lokales Koordinatensystem in X . Die Beschreibung der Tangentialräume folgt unmittelbar. \square

Beispiel 4.2.21. Die **Sphären** $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ sind n -Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^{n+1} , denn das Differential von $h : x \mapsto x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ ist surjektiv an jeder Stelle von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$. An einer Stelle $p \in S^n$ ist $[d_p h] = (2p_1, \dots, 2p_{n+1})$ und der Kern der durch diese Zeilenmatrix gegebene Linearform ist das orthogonale Komplement zum Ortsvektor p unter dem Standardskalarprodukt, in Formeln

$$T_p S^n = \{p\}^\perp$$

Übungen

Übung 4.2.22. Eine stetig differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Raum hat offenes Bild, wenn ihr Differential an jeder Stelle surjektiv ist. Ist unsere stetig differenzierbare Abbildung zusätzlich injektiv, so ist ihre Umkehrabbildung stetig und sogar stetig differenzierbar.

Übung 4.2.23. In der Situation von 4.2.20 ist allgemeiner auch für jede Mannigfaltigkeit $C \subset Y$ ihr Urbild $M = h^{-1}(C)$ eine Mannigfaltigkeit in X der Dimension $\dim X - \dim Y + \dim C$.

Übung 4.2.24. Man zeige: Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine von Null verschiedene symmetrische Bilinearform auf V und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so ist $M := \{v \in V \setminus 0 \mid \langle v, v \rangle = c\}$ eine Hyperfläche in V mit Tangentialraum $T_v M = \text{trans}\{w \in V \mid \langle v, w \rangle = 0\}$ unter der üblichen Identifikation $\text{trans} : V \xrightarrow{\sim} \vec{V}$ oder abkürzend geschrieben

$$T_v M = v^\perp$$

Hinweis: Man erinnere das Differential bilinearer Abbildungen 2.6.5.

Übung 4.2.25. Sind X, Y endlichdimensionale reelle Räume und $M \subset X$ sowie $N \subset Y$ Mannigfaltigkeiten, so ist auch $M \times N \subset X \times Y$ eine Mannigfaltigkeit und die linearen Anteile der Projektionen liefern einen Vektorraumisomorphismus

$$T_{(p,q)}(M \times N) \xrightarrow{\sim} T_p M \times T_q N$$

4.3 Implizite Funktionen

Satz 4.3.1 (über implizite Funktionen, geometrische Fassung). *Seien X, Y endlichdimensionale Räume und $M \subset X \times Y$ eine Mannigfaltigkeit. Liefert der lineare Anteil der Projektion auf X an einer Stelle $(p, q) \in M$ einen Isomorphismus*

$$T_{(p,q)} M \xrightarrow{\sim} \vec{X}$$

zwischen dem Tangentialraum an M und dem Richtungsraum von X , so gibt es P, Q mit $p \in P \subseteq X$ und $q \in Q \subseteq Y$ derart, daß $M \cap (P \times Q)$ der Graph einer \mathcal{C}^1 -Abbildung $\varphi : P \rightarrow Q$ ist.

4.3.2. Diese Funktion φ heißt dann die „durch M implizit gegebene Funktion“. Sobald Sie einmal den Zusammenhangsbegriff kennengelernt haben, mögen Sie zur Übung zusätzlich zeigen, daß im Fall von festem zusammenhängenden P alle möglichen Wahlen für Q dieselbe implizite Funktion $\varphi : P \rightarrow Y$ liefern.

Beweis. Seien k die Dimension von M und (U, g) ein System von an M angepaßten lokalen Koordinaten um (p, q) und $g^{-1} : g(U) \xrightarrow{\sim} U$ die Umkehrabbildung, ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus von $g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ nach $U \subseteq (X \times Y)$. Offensichtlich induziert das Differential von g^{-1} bei $g(p, q)$ einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathbb{R}^k \times 0 \xrightarrow{\sim} T_{(p,q)}M$$

Nach Annahme induziert also das Differential von $\text{pr}_X \circ g^{-1}$ bei $g(p, q)$ einen Vektorraumisomorphismus $\mathbb{R}^k \times 0 \xrightarrow{\sim} \vec{X}$. Nach dem Umkehrsatz 4.1.2 induziert $\text{pr}_X \circ g^{-1}$ mithin einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $\psi : A \xrightarrow{\sim} B$ zwischen einer offenen Umgebung $A \subseteq g(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$ von $g(p, q)$ und einer offenen Umgebung $B \subseteq X$ von p . Indem wir sonst U geeignet verkleinern, dürfen wir sogar $A = g(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$ annehmen. Für alle $x \in B$ ist dann $\varphi(x) := \text{pr}_Y(g^{-1}(\psi^{-1}(x)))$ das einzige $y \in Y$ mit $(x, y) \in M \cap U$. Wählen wir nun offene Umgebungen $P_1 \subseteq X$ von p und $Q \subseteq Y$ von q mit $P_1 \times Q \subset U$ und dann eine offene Umgebung $P \subseteq P_1$ von p mit $x \in P \Rightarrow \varphi(x) \in Q$, so ist $M \cap (P \times Q)$ der Graph der \mathcal{C}^1 -Abbildung $\varphi : P \rightarrow Q$. \square

Satz 4.3.3 (über implizite Funktionen in Koordinaten). Gegeben sei eine stetig differenzierbare Abbildung $f : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m) \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wir vereinbaren die Notation $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m$ für die Variablen. Ist in diesen Notationen die Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^m$$

nicht ausgeartet an einer Stelle $(p, q) \in D$, so gibt es P, Q mit $p \in P \subseteq \mathbb{R}^k$ und $q \in Q \subseteq \mathbb{R}^m$ und $P \times Q \subset D$ derart, daß

$$\{(x, y) \in P \times Q \mid f(x, y) = f(p, q)\}$$

der Graph einer \mathcal{C}^1 -Funktion $\varphi : P \rightarrow Q$ ist. Die partiellen Ableitungen der Komponenten von φ werden dann gegeben durch die Matrix-Gleichung

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \Big|_x \right) = - \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \Big|_{(x, \varphi(x))} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Big|_{(x, \varphi(x))} \right)$$

4.3.4. In dieser Sprache ausgedrückt kann also ein System von m Gleichungen in $m + k$ Unbekannten „im allgemeinen“ und „lokal“ in der Weise aufgelöst werden, daß wir k der Unbekannten frei wählen und die restlichen m Unbekannten dadurch im wesentlichen eindeutig festgelegt werden.

Beweis. Indem wir D verkleinern, dürfen wir annehmen, daß f nicht nur bei (p, q) , sondern an jeder Stelle von D surjektives Differential hat. Damit ist

$$M := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = f(p, q)\}$$

nach 4.2.20 eine k -Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum an M in (p, q) ist nach 4.2.9 der Schnitt der Kerne der $d_{(p,q)}f_j$ und trifft nach Annahme den Teilraum $0 \times \mathbb{R}^m$ nur in Null. Da er die Dimension k hat, muß die Projektion auf \mathbb{R}^k folglich einen Isomorphismus $T_{(p,q)}M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$ induzieren und die erste Aussage folgt unmittelbar aus der geometrischen Fassung des Satzes über implizite Funktionen 4.3.1. Mit der Kettenregel folgt nun

$$d_{(x,\varphi(x))}f \circ \begin{pmatrix} \text{id} \\ d_x\varphi \end{pmatrix} = 0$$

Schreiben wir darin $d_{(x,\varphi(x))}f$ als Zeilen-Blockmatrix, so ergibt sich sofort die behauptete Formel für das Differential. \square

Beispiel 4.3.5. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $(p, q) = (0, 1)$. Da $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht verschwindet bei $(0, 1)$, sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Ein mögliches Paar (U, V) bestünde aus $U = (-1, 1)$, $V = (0, \infty)$ und die zugehörige implizite Funktion ist $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Unsere implizite Funktion sucht sich in diesem Fall für jedes $x \in (-1, 1)$ dasjenige positive $y = \varphi(x)$ aus, für das der Punkt (x, y) auf dem Einheitskreis liegt. Die Ableitung dieser impliziten Funktion ergibt sich mit unserer Regel richtig zu

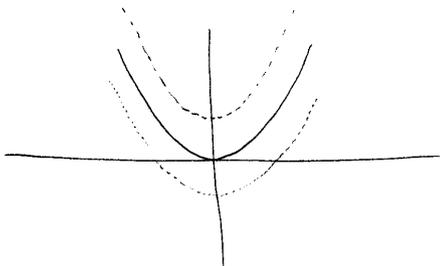
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = - \frac{2x}{2y} = - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Beispiel 4.3.6. Wir betrachten $f(x, y) = y^3 + xy^2 - 3$ als eine Schar von Polynomen in y mit Parameter x . Für den Parameter $x = 2$ ist $y = 1$ eine Nullstelle, $f(2, 1) = 0$. Wir wollen nun untersuchen, wie diese Nullstelle „mit dem Parameter x wackelt“, und wenden dazu den Satz über implizite Funktionen an. Die partielle Ableitung nach y ist $f_y = 3y^2 + 2xy$, insbesondere haben wir $f_y(2, 1) = 7 \neq 0$ und nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es folglich $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ das Polynom $f(x, \cdot)$ genau eine Nullstelle $y = \varphi(x) \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ hat. Diese Funktion φ ist zwar schwer explizit anzugeben, aber der Satz sagt uns, daß sie in einer Umgebung von $x = 2$ differenzierbar

ist, und ihre Ableitung bei $x = 2$ kennen wir auch: Wir haben nämlich $f_x = y^2$, $f_x(2, 1) = 1$ und folglich

$$\varphi'(2) = -f_y(2, 1)^{-1} f_x(2, 1) = -\frac{1}{7}$$

Betrachten wir stattdessen $h(x, y) = y^2 - x$, so ist für $x = 0$ natürlich $y = 0$ eine Nullstelle, aber Entsprechendes gilt keineswegs: Schieben wir x etwas ins Negative, so hat $h(x, \cdot)$ überhaupt keine reelle Nullstelle mehr, schieben wir x



Die Graphen von $h(0, \cdot)$, $h(-1/2, \cdot)$ und $h(1/2, \cdot)$ für die Funktion $h(x, y) = y^2 - x$ vom Ende des Beispiels 4.3.6. Hier ist y die horizontale Koordinate. Dies Bild interpretiert dieselbe Formeln wie das vorige in der alternativen Anschauung der „Abhängigkeit der Nullstellen von den Parametern“.

dahingegen etwas ins Positive, so werden aus unserer Nullstelle plötzlich zwei Nullstellen, wie das nebenstehende Bild illustriert. Das zeigt, daß die Bedingung an die Ableitung auch wirklich notwendig ist.

Satz 4.3.7 (über implizite Funktionen in vollständigen Räumen). *Gegeben seien vollständige normierte Räume X, Y und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : (X \times Y) \supseteq D \rightarrow Y$. An einer Stelle $(p, q) \in D$ induziere das Differential einen stetigen Isomorphismus mit stetiger Umkehrabbildung*

$$d_{(p,q)} f \circ \text{in}_{\vec{Y}} : \vec{Y} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$$

So gibt es P, Q mit $p \in P \subseteq X$ und $q \in Q \subseteq Y$ von q mit $P \times Q \subset D$ derart, daß $\{(x, y) \in P \times Q \mid f(x, y) = f(p, q)\}$ der Graph einer C^1 -Funktion $\varphi : P \rightarrow Q$ ist. Diese Funktion hat dann bei $x \in P$ das Differential

$$d_x \varphi = - (d_{(x, \varphi(x))} f \circ \text{in}_{\vec{Y}})^{-1} \circ (d_{(x, \varphi(x))} f \circ \text{in}_{\vec{X}})$$

4.3.8. Hier können wir uns nicht mehr auf den Beweis der geometrischen Fassung stützen, ja der Satz in seiner geometrischen Fassung 4.3.1 gilt gar nicht mehr in dieser Allgemeinheit. Umgekehrt können wir aus dieser Fassung leicht die beiden anderen Fassungen folgern. Sie ist also stärker, ist jedoch meiner Anschauung schlechter zugänglich.

Beweis. Wir setzen $b := f(p, q)$ und betrachten die Abbildung

$$F := (\text{pr}_X, f) : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & X \times Y \\ (x, y) & \mapsto & (x, f(x, y)) \end{array}$$

Ihr Differential bei (p, q) hat im Sinne von [LA1] 2.4.13 Block-Gestalt

$$\begin{pmatrix} \text{id}_{\bar{X}} & 0 \\ d_{(p,q)}f \circ \text{in}_{\bar{X}} & d_{(p,q)}f \circ \text{in}_{\bar{Y}} \end{pmatrix}$$

und ist insbesondere invertierbar mit stetiger Umkehrabbildung. Nach der entsprechend allgemeinen Fassung des Umkehrsatzes gibt es also P, Q, W mit $p \in P \Subset X$ und $q \in Q \Subset Y$ und $F(p, q) \in W \Subset X \times Y$ derart, daß gilt $P \times Q \subset D$ und daß F einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus

$$F : P \times Q \xrightarrow{\sim} W$$

liefert. Die Umkehrabbildung $G := F^{-1} : W \xrightarrow{\sim} P \times Q$ hat dann offensichtlich die Gestalt $(x, y) \mapsto (x, g(x, y))$ für geeignetes $g : W \rightarrow X$. Nun ist $f(x, y) = b$ gleichbedeutend zu $F(x, y) = (x, b)$ und unter den Zusatzannahmen $(x, y) \in P \times Q$ und $(x, b) \in W$ ist das weiter gleichbedeutend zu $(x, y) = G(x, b)$ alias $x = g(x, b)$. Verkleinern wir falls nötig P derart, daß zusätzlich gilt $P \times \{b\} \subset W$, so gibt es zu jedem $x \in P$ genau ein $y = \varphi(x) \in Q$ mit $f(x, y) = b$, nämlich $\varphi(x) = g(x, b)$. Die so definierte Funktion φ ist stetig differenzierbar nach dem Umkehrsatz. Ihre Ableitung bei $x \in U$ ergibt sich leicht, wenn man die Definitionsgleichung $f(x, \varphi(x)) = b$ als Abbildung $U \rightarrow Y$ auffaßt und auf beiden Seiten das Differential an der Stelle x nimmt. Mit der Kettenregel folgt nämlich

$$d_{(x, \varphi(x))}f \circ \begin{pmatrix} \text{id} \\ d_x \varphi \end{pmatrix} = 0$$

Zerlegen wir darin $d_{(x, \varphi(x))}f = (d_{(x, \varphi(x))}f \circ \text{in}_{\bar{X}}, d_{(x, \varphi(x))}f \circ \text{in}_{\bar{Y}})$ als Zeilen-Blockmatrix im Sinne von [LA1] 2.4.13, so ergibt sich sofort die behauptete Formel für das Differential. \square

Übungen

Übung 4.3.9 (Mannigfaltigkeiten als lokale Graphen in Koordinaten). Gegeben eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \Subset \mathbb{R}^n$ und eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ derart, daß $M \cap U$ unter der entsprechenden Permutation der Koordinaten dem Graph einer \mathcal{C}^1 -Abbildung $\mathbb{R}^k \Subset W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ entspricht. Zum Beispiel ist jede Einsmannigfaltigkeit der Ebene \mathbb{R}^2 lokal entweder Graph einer reellwertigen \mathcal{C}^1 -Funktion der

x -Koordinate oder der an der Hauptdiagonalen gespiegelte Graph einer reellwertigen C^1 -Funktion der y -Koordinate.

Übung 4.3.10. Man zeige, daß das Kreuz aus den beiden Koordinatenachsen in \mathbb{R}^2 keine Mannigfaltigkeit ist.

Übung 4.3.11. Wir betrachten das Polynom $f(x, y, z) = x^7y^2z + xyz^5$ und finden $f(1, 1, 1) = 2$. Man zeige, daß es auf einem hinreichend kleinen Ball $B \subset \mathbb{R}^3$ um $(1, 1, 1)$ genau eine stetige Funktion $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(1, 1, 1) = 1$ und $f(x, y, \varphi(x, y, z)) = 2$ und bestimme bei $(1, 1, 1)$ deren partielle Ableitungen φ_x, φ_y .

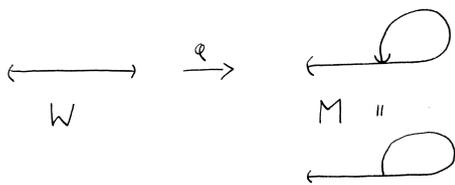
Übung 4.3.12 (Schnitt von Mannigfaltigkeiten). Man zeige: Gegeben in einem endlichdimensionalen reellen Raum X zwei Mannigfaltigkeiten $M, N \subset X$ und ein Punkt $p \in M \cap N$ mit $T_pM + T_pN = \vec{X}$ gibt es U mit $p \in U \subseteq X$ derart, daß $U \cap M \cap N$ eine Mannigfaltigkeit ist und es gilt

$$T_p(M \cap N) = T_pM \cap T_pN$$

4.4 Karten und Koordinatensysteme

Proposition 4.4.1 (Mannigfaltigkeiten als Bilder). Seien X ein n -dimensionaler reeller Raum und $k \geq 0$. Eine Teilmenge $M \subset X$ ist eine k -Mannigfaltigkeit genau dann, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^k \supseteq W \rightarrow X$ gibt derart, daß gilt:

1. $p \in \varphi(W) \subseteq M$;
2. $d_x\varphi$ ist injektiv für alle $x \in W$;
3. φ ist injektiv und $\varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow W$ ist stetig.



Ein Beispiel einer Teilmenge M der Papierebene, die keine Untermannigfaltigkeit ist und für die die Bedingung aus 4.4.1 erfüllt wäre, wenn wir von unseren Karten nicht auch noch fordern würden, daß ihre Umkehrabbildungen stetig sind.

4.4.2. Ein Paar (W, φ) wie in der Proposition nenne ich eine **Karte** der Mannigfaltigkeit M . Eine Karte der Stadt Freiburg kann als eine Variante dieses Begriffs verstanden werden, bei der W ein Blatt Papier ist und bei der das Bild einiger Punkte unseres Blatts unter der Abbildung φ in das wirkliche Freiburg durch bildliche Symbole auf besagtem Blatt angedeutet wird.

4.4.3. Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt ganz allgemein ein **Homöomorphismus**, wenn sie stetig und bijektiv ist und auch ihre Umkehrabbildung stetig ist. In dieser Terminologie fordert Bedingung 3 oben, daß φ einen Homöomorphismus $\varphi : W \xrightarrow{\sim} \varphi(W)$ induziert. Zwei topologische Räume heißen **homöomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Homöomorphismus gibt.

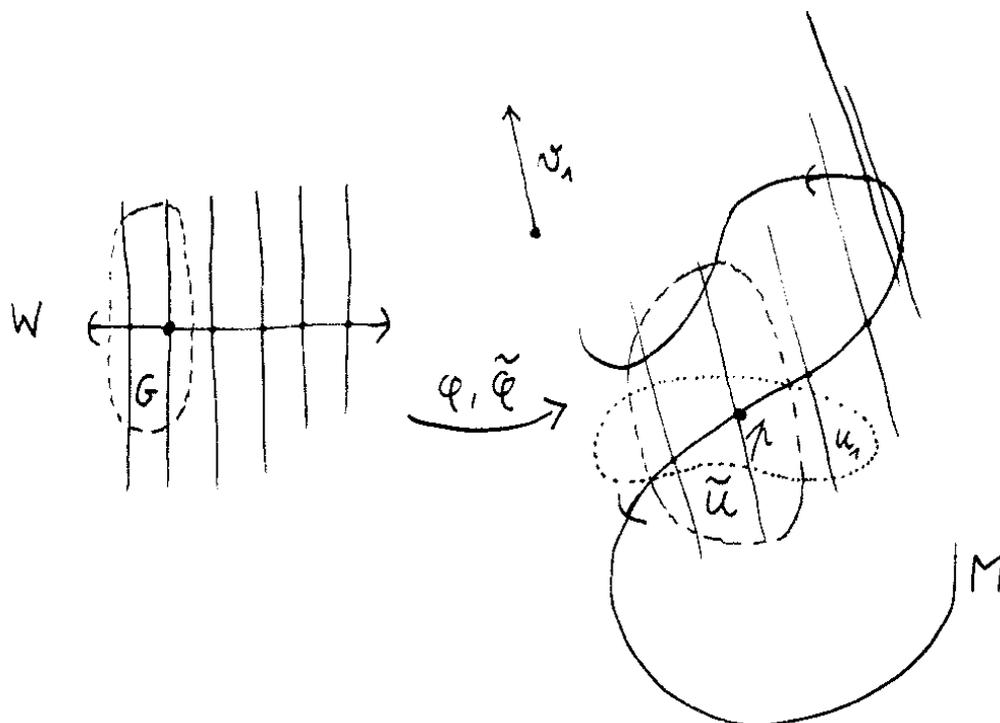
4.4.4. Im Fall $k = 0$ stellt bereits die erste Bedingung sicher, daß jeder Punkt von M offen ist in M , so daß M in der Tat eine nulldimensionale Untermannigfaltigkeit von X ist.

Beweis. Ist $M \subset X$ eine k -Mannigfaltigkeit und (U, g) ein an M angepaßtes lokales Koordinatensystem von X , sagen wir $g : U \xrightarrow{\sim} g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Bezeichne weiter $i : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Nullen anhängende Abbildung. So ist für $W := i^{-1}(g(U))$ die Komposition $g^{-1} \circ i : W \rightarrow M$ eine Karte von M . Folglich hat eine Mannigfaltigkeit um jeden Punkt mindestens eine Karte. Ist andererseits $\varphi : W \rightarrow M \subset X$ eine Karte von M um p mit $W \subseteq \mathbb{R}^k$, so können wir Vektoren $v_1, \dots, v_{n-k} \in \vec{X}$ finden derart, daß das Differential von

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \quad W \times \mathbb{R}^{n-k} &\rightarrow X \\ (w, t_1, \dots, t_{n-k}) &\mapsto \varphi(w) + t_1 v_1 + \dots + t_{n-k} v_{n-k} \end{aligned}$$

im Punkt $(\varphi^{-1}(p), 0^{n-k})$ bijektiv ist, mit 0^{n-k} als Abkürzung für die einelementige Menge $\{0\} \subset \mathbb{R}^{n-k}$. Nach dem Umkehrsatz 4.1.2 induziert $\tilde{\varphi}$ einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung $G \subseteq W \times \mathbb{R}^{n-k}$ des Punktes $(\varphi^{-1}(p), 0^{n-k})$ mit einer offenen Umgebung $\tilde{U} \subseteq X$ von p . Das lokale Koordinatensystem $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}^{-1})$ von X um p können wir nun zu einem an M angepaßten lokalen Koordinatensystem von X um p machen, indem wir seinen Definitionsbereich so verkleinern, daß er „ M nicht zu oft trifft“. Genauer ist $i^{-1}(G)$ offen in W und damit $\varphi(i^{-1}(G))$ offen in $\varphi(W)$ und damit offen in M , aufgrund der Stetigkeit von φ^{-1} und unserer Bedingung $\varphi(W) \subseteq M$. Also gibt es $U_1 \subseteq X$ mit $\varphi(i^{-1}(G)) = M \cap U_1$. Dann setzen wir $U = \tilde{U} \cap U_1$ und $g := \tilde{\varphi}^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist das gesuchte an M angepaßte lokale Koordinatensystem von X um p . \square

4.4.5. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine k -Mannigfaltigkeit. Unter einem **lokalen Koordinatensystem** von M verstehen wir ein Paar (V, r) bestehend aus einer offenen Teilmenge $V \subseteq M$ und einem Homöomorphismus $r : V \xrightarrow{\sim} W$ mit einer offenen Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^k$ derart, daß (W, r^{-1}) eine Karte von M ist. Die Komponenten $r_1, \dots, r_k : V \rightarrow \mathbb{R}$ von r nennen wir dann die **lokalen Koordinaten** unseres Koordinatensystems. Salopp gesprochen ist also ein lokales Koordinatensystem einer Mannigfaltigkeit schlicht die Umkehrabbildung zu einer Karte. Viele Autoren verwenden allerdings auch eine andere Terminologie und verstehen unter einer Karte das, was wir ein Koordinatensystem genannt haben.



Ein Bild zum Beweis von 4.4.1 im Fall $n = k = 1$

4.4.6 (Verschiedene Arten lokaler Koordinatensysteme). Sei X ein endlichdimensionaler Raum. Wir unterscheiden zwischen einem lokalen Koordinatensystem einer Mannigfaltigkeit $M \subset X$ und einem an eine Mannigfaltigkeit $M \subset X$ angepaßten lokalen Koordinatensystem von X . Im Fall der Mannigfaltigkeit $X \subset X$ fallen diese Begriffe zwar zusammen, im allgemeinen jedoch hat ein lokales Koordinatensystem einer Mannigfaltigkeit M nur $\dim M$ Koordinaten und diese sind nur Funktionen auf einer offenen Teilmenge von M .

Beispiel 4.4.7. Lokale Koordinaten um einen Punkt der Erdoberfläche, der nicht gerade auf dem sogenannten „Nullmeridian“ liegt, sind etwa die Längen- und Breitengrade.

Beispiel 4.4.8. Im Fall einer n -Mannigfaltigkeit M in einem n -dimensionalen Raum X alias einer offenen Teilmenge $M \subseteq X$ ist ein lokales Koordinatensystem von M dasselbe wie ein lokales Koordinatensystem von X im Sinne von 4.2.2 mit einem in M enthaltenen Definitionsbereich.

4.4.9 (Lokale Erweiterungen lokaler Koordinatensysteme). Seien X ein reeller Raum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X = n$ und $M \subset X$ eine k -Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Ist $(V, (r_1, \dots, r_k))$ ein lokales Koordinatensystem von M um p , so gibt es nach dem Beweis von 4.4.1 sogar ein an M angepaßtes lokales Koordinatensystem $(U, (g_1, \dots, g_n))$ von X um p mit $(U \cap M) \subset V$ und $g_i|_{U \cap M} = r_i|_{U \cap M}$ für $1 \leq i \leq k$. Wir sagen dann, das lokale Koordinatensystem (U, g) von X um p sei eine **lokale Erweiterung** unseres lokalen Koordinatensystems (V, r) von M um p und notieren so eine lokale Erweiterung statt (U, g) gerne

$$(\tilde{V}, \tilde{r})$$

Beispiel 4.4.10. Lokale Koordinaten um einen Punkt der Erdoberfläche, der nicht gerade auf dem sogenannten „Nullmeridian“ liegt, sind etwa die Längen- und Breitengrade. Wenn wir diese Funktionen in hoffentlich offensichtlicher Weise auf die Lufthülle und Punkte der Erdkruste nicht allzuweit unter der Erdoberfläche ausdehnen und die Höhe über dem Meeresspiegel als dritte Koordinate hinzunehmen erhalten wir eine lokale Erweiterung dieses lokalen Koordinatensystems der Erdoberfläche zu einem lokalen Koordinatensystem des Raums.

4.4.11 (Partielle Ableitungen in Bezug auf lokale Koordinaten). Ist M eine Mannigfaltigkeit und bilden Funktionen $r_1, \dots, r_k : M \supset V \rightarrow \mathbb{R}$ ein System von lokalen Koordinaten von M , also $r = (r_1, \dots, r_k) : M \supset V \xrightarrow{\sim} W \subseteq \mathbb{R}^k$, und ist $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion, so bezeichnen wir mit

$$\frac{\partial f}{\partial r_i} := \frac{\partial (f \circ r^{-1})}{\partial r_i} \circ r$$

die Funktion $V \rightarrow \mathbb{R}$, die unter der zugehörigen Karte $\varphi := r^{-1} : W \xrightarrow{\sim} V$ der partiellen Ableitung $\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial r_i}$ entspricht, wenn denn $f \circ \varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ partiell

differenzierbar ist nach der i -ten Variablen. Dabei gilt es zu beachten, daß die i -te partielle Ableitung, auch wenn das aus der Notation nicht direkt hervorgeht, von der Wahl aller lokalen Koordinaten abhängt und keineswegs nur von Wahl der i -ten Koordinate. Im Fall einer Einsmannigfaltigkeit M mit einem lokalen Koordinatensystem aus einer einzigen Koordinate $r : M \supseteq V \xrightarrow{\sim} W \subseteq \mathbb{R}$ schreibt man statt $\frac{\partial f}{\partial r}$ für gewöhnlich

$$\frac{df}{dr}$$

Definition 4.4.12. Sind $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (W_β, φ_β) zwei Karten einer Mannigfaltigkeit M , so setzen wir $W_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(W_\beta))$ und nennen die Abbildung

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : W_{\alpha\beta} \rightarrow W_{\beta\alpha}$$

den **Kartenwechsel** zwischen unseren beiden Karten.

Proposition 4.4.13. Seien X, Z endlichdimensionale reelle Räume und $M \subset X$ eine k -Mannigfaltigkeit und (V, r) ein System lokaler Koordinaten von M . Sei $\psi : Z \supset A \rightarrow V$ gegeben mit $A \subset Z$ halboffen und $i \circ \psi : Z \supset A \rightarrow X$ stetig differenzierbar. So ist die Verknüpfung von ψ mit unserer Koordinatenabbildung eine stetig differenzierbare Abbildung

$$r \circ \psi : Z \supset A \rightarrow \mathbb{R}^k$$

4.4.14 (**Kartenwechsel sind Diffeomorphismen**). Insbesondere sind in den Notationen von 4.4.12 unsere Kartenwechsel \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen, denn die Umkehrabbildung $\varphi_\beta^{-1} : M \supseteq \varphi_\beta(W_\beta) \xrightarrow{\sim} W_\beta$ unserer zweiten Karte ist per definitionem ein lokales Koordinatensystem (V, r) von M und $\psi := \varphi_\alpha : \mathbb{R}^k \supseteq W_\alpha \rightarrow M$ wird stetig differenzierbar beim Nachschalten der Einbettung $i : M \hookrightarrow X$.

Beweis. Die Hauptschwierigkeit beim Verfolgen dieses Beweis liegt darin, daß man sich einige Einbettungsabbildungen dazudenken muß. Notiert man diese alle, wird es aber auch schnell unübersichtlich. Gegeben $a \in A$ finden wir nach 4.4.9 eine lokale Erweiterung (\tilde{V}, \tilde{r}) von (V, r) zu einem lokalen Koordinatensystem von X um $\psi(a)$. Wir haben also

$$r \circ \psi = (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_k) \circ i \circ \psi$$

auf $\psi^{-1}(\tilde{V})$ und die rechte Seite ist eine Verknüpfung von \mathcal{C}^1 -Abbildungen zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler affiner Räume. Die Abbildung $r \circ \psi$ ist also \mathcal{C}^1 auf einer offenen Umgebung von a in A . Da das für alle $a \in A$ gilt, ist sie damit \mathcal{C}^1 auf ganz A . \square

Übungen

Übung 4.4.15. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Gegeben eine Karte (W, φ) einer Mannigfaltigkeit $M \subset X$ und ein Punkt $p \in W$ gibt es stets ein Paar (U, g) bestehend aus einer offenen Umgebung $U \subseteq X$ von $\varphi(p)$ und einer C^1 -Abbildung $g : U \rightarrow W$ derart, daß gilt $g(\varphi(y)) = y$ für alle $y \in \varphi^{-1}(U)$.

Übung 4.4.16. Der Doppelkegel $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ ist keine Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 . Auch die Teilmenge aller seiner Punkte mit nichtnegativer z -Koordinate ist keine Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 . Entfernen wir aus dem Doppelkegel jedoch den Ursprung, so erhalten wir eine Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 .

Übung 4.4.17. Gegeben $X \subset Y$ ein endlichdimensionaler reeller Raum mit einem affinen Teilraum ist eine Teilmenge $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit in X genau dann, wenn M eine Mannigfaltigkeit in Y ist.

Übung 4.4.18 (Tangentialräume durch Karten). Gegeben X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit und (W, φ) eine Karte von M gilt für alle $x \in W$ die Identität

$$T_{\varphi(x)}M = \text{im}(d_x\varphi)$$

Übung 4.4.19. Gegeben $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit in einem endlichdimensionalen reellen affinen Raum heiße eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ **differenzierbar**, wenn für jede Karte φ von M die Verknüpfung $f \circ \varphi$ differenzierbar ist. Man zeige: Gegeben eine differenzierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Punkt $p \in M$ und ein Tangentialvektor $v \in T_pM$ gibt es genau eine reelle Zahl

$$D_v f$$

mit der Eigenschaft, daß für jede Karte φ von M um p und q den Punkt mit $\varphi(q) = p$ und w den Vektor mit $d_q\varphi : w \mapsto v$ gilt $D_v f = (D_w(f \circ \varphi))(q)$. Diese reelle Zahl heißt die **Richtungsableitung von f in Richtung v** .

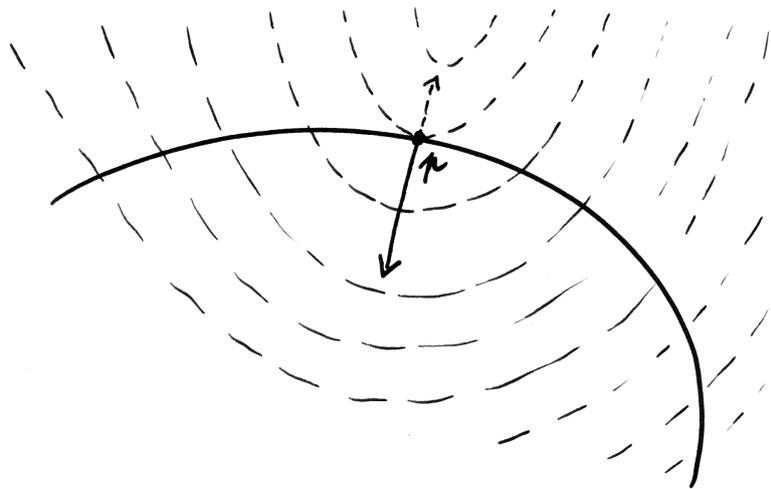
4.5 Extrema auf Mannigfaltigkeiten

Satz 4.5.1 (Extrema unter Nebenbedingungen). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $h : X \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $p \in U$ ein Punkt mit $d_p h$ surjektiv. Wir setzen

$$M := \{q \in U \mid h(q) = h(p)\}$$

Besitzt dann für eine differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ihre Einschränkung $f|_M$ ein lokales Extremum bei p , so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$d_p f = \lambda_1 d_p h_1 + \dots + \lambda_m d_p h_m$$



Dies Bild soll den Satz über Extrema mit Nebenbedingungen veranschaulichen für den Fall einer Funktion f auf der Papierebene, hier angedeutet durch einige gestrichelt eingezeichnete Niveaulinien, die maximiert werden soll unter einer Nebenbedingung h , hier angedeutet durch die fett eingezeichnete Kurve M der Punkte, bei denen sie erfüllt ist. Es scheint mir anschaulich recht offensichtlich, daß Extrema von f auf M nur an Stellen $p \in M$ zu erwarten sind, an denen der Gradient von f senkrecht steht auf M , also ein Vielfaches des Gradienten von h ist. Im Bild hätten wir etwa grob geschätzt $(\text{grad } f)(p) = -\frac{1}{2}(\text{grad } h)(p)$.

Allerdings ist es für reellwertige Funktionen auf der Papierebene streng genommen erst nach der Wahl eines Maßstabs sinnvoll, von Gradienten zu reden, und in allgemeineren Fällen erst nach Wahl eines Skalarprodukts auf dem Richtungsraum, weshalb ich im Satz die koordinatenfreie Formulierung mit Differentialen vorgezogen habe.

4.5.2. In der Situation des Satzes nennt man ein lokales Extremum der Restriktion $f|_M$ auch ein **lokales Extremum von f unter den Nebenbedingungen** $h_1(q) = c_1, \dots, h_m(q) = c_m$ für $c := h(p)$. Die λ_i heißen die **Lagrange'schen Multiplikatoren**. Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ kann man unsere Bedingung dahingehend interpretieren, daß der Gradient der Funktion f in p auf M senkrecht stehen muß, oder auch, daß der Gradient der Funktion f in p eine Linearkombination der Gradienten der Nebenbedingungen sein muß. Die Bedingung „ $d_p h$ surjektiv“ hinwiederum kann man dahingehend interpretieren, daß die Gradienten der h_i bei p linear unabhängig sein sollen.

Beweis. Indem wir U verkleinern, dürfen wir nach 4.1.18 ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $d_q h$ surjektiv ist für alle $q \in U$. Nach 4.2.20 ist dann $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit. Ist $\varphi : W \rightarrow M$ eine Karte von M um p mit $p = \varphi(w)$, so hat $f|_{M \cap U}$ ein lokales Extremum bei p genau dann, wenn $f \circ \varphi$ ein lokales Extremum bei w hat. Nach 3.4.16 ist eine notwendige Bedingung dafür $d_w(f \circ \varphi) = 0$, also da heißt $d_p f \circ d_w \varphi = 0$. Andererseits haben wir $h \circ \varphi = 0$, also $d_p h \circ d_w \varphi = 0$. Aus Dimensionsgründen bilden die $d_p h_i$ für $1 \leq i \leq m$ sogar eine Basis für den Untervektorraum von \vec{X}^* aller Linearformen, die auf dem Bild von $d_w \varphi$ verschwinden. Verschwindet auch $d_p f$ auf diesem Teilraum, so muß es folglich als Linearkombination der $d_p h_i$ geschrieben werden können. \square

Beispiel 4.5.3. Wir suchen lokale Extrema der Funktion $f : (x, y) \mapsto x + y$ auf dem Einheitskreis $M = S^1$ alias unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$. Diese Nebenbedingung bedeutet, daß die Funktion $h : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ den Wert 1 annehmen muß. Lokale Extrema können nach unserem Satz nur an Stellen $p \in M$ mit $d_p f = \lambda d_p h$ angenommen werden, also an Stellen $p = (x, y) \in S^1$ mit $(1, 1) = \lambda(2x, 2y)$. Damit kommen nur die beiden Stellen $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ und $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ in Frage. Hier ist offensichtlich die erste ein lokales Minimum und die zweite ein lokales Maximum.

Beispiel 4.5.4. Wir suchen lokale Extrema der Funktion $f : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ auf dem Einheitskreis $M = S^1 \times 0$ in der xy -Ebene, d.h. unter den beiden Nebenbedingungen $h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$ und $h_2(x, y, z) = z = 0$. Lokale Extrema können nach unserem Satz nur an Stellen $p \in M$ angenommen werden, für die es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $d_p f = \lambda_1 d_p h_1 + \lambda_2 d_p h_2$, also an Stellen $(x, y, z) \in M$ mit

$$(a, b, c) = \lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(0, 0, 1)$$

Daraus folgt jedoch schnell $\lambda_2 = c$, und unter der zusätzlichen Voraussetzung $(a, b) \neq (0, 0)$ kommen nur die beiden Stellen $\pm(a^2 + b^2)^{-1/2}(a, b, 0)$ in Frage. Wieder ist hier offensichtlich die eine ein lokales Minimum und die andere ein lokales Maximum.

Proposition* 4.5.5 (Hinreichende Bedingungen für Extrema). Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $p \in U$ gegeben mit $d_p h$ surjektiv und sei $M := \{q \in U \mid h(q) = h(p)\}$. Sei unsere notwendige Bedingung $d_p f = \lambda_1 d_p h_1 + \dots + \lambda_m d_p h_m$ für ein Extremum der Restriktion $f|_M$ bei p erfüllt und sei

$$Q := d_p^{(2)} f - \lambda_1 d_p^{(2)} h_1 - \dots - \lambda_m d_p^{(2)} h_m$$

die quadratische Form auf \mathbb{R}^n , die durch die angegebene Linearkombination von Hesse-Matrizen entsteht. So gilt:

1. Ist unsere quadratische Form Q positiv definit auf $\ker(d_p h)$, so hat $f|_M$ bei p ein isoliertes lokales Minimum;
2. Ist unsere quadratische Form Q negativ definit auf $\ker(d_p h)$, so hat $f|_M$ bei p ein isoliertes lokales Maximum;
3. Ist unsere quadratische Form Q indefinit auf $\ker(d_p h)$, so hat $f|_M$ bei p weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

Beweis. Wir beginnen wie beim Beweis des Satzes 4.5.1 über Extrema unter Nebenbedingungen. Indem wir U verkleinern, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $d_q h$ surjektiv ist für alle $q \in U$. Nach 4.2.20 ist dann $M \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit. Es sei erwähnt, daß $\ker(d_p h) = T_p M$ nach 4.2.20 der Tangentialraum an unsere Mannigfaltigkeit M im Punkt p ist. Ist $\varphi : W \rightarrow M$ eine Karte von M um p mit $p = \varphi(w)$, so hat $f|_{M \cap U}$ ein lokales Extremum bei p genau dann, wenn $f \circ \varphi$ ein lokales Extremum bei w hat. Nach 3.4.16 ist eine notwendige Bedingung dafür $d_w(f \circ \varphi) = 0$, als da heißt $d_p f \circ d_w \varphi = 0$, und wir hatten bereits gesehen, wie sich diese Bedingung übersetzt in die Bedingung der Existenz der Lagrange'schen Multiplikatoren. Nun approximiert die polynomiale Abbildung

$$p + \vec{v} \mapsto f(p) + (d_p f)(\vec{v}) + \frac{1}{2}(d_p^{(2)} f)(\vec{v})$$

unsere Funktion f bei p bis zu zweiter Ordnung im Sinne von 3.3.2. Ebenso approximiert die polynomiale Abbildung

$$w + k \mapsto \varphi(w) + (d_w \varphi)(k) + \frac{1}{2}(d_w^{(2)} \varphi)(k)$$

unsere Funktion φ bei w bis zu zweiter Ordnung. Nach 3.3.6 approximieren folglich die Anteile vom Grad höchstens Zwei von deren Komposition alias die polynomiale Abbildung

$$w + k \mapsto f(\varphi(w)) + \frac{1}{2}(d_p^{(2)} f)((d_w \varphi)(k)) + \frac{1}{2}(d_p f)((d_w^{(2)} \varphi)(k))$$

unsere Funktion $f \circ \varphi$ bei w bis zu zweiter Ordnung. Andererseits liefern die Bedingungen $h_i \circ \varphi = h_i(p)$ bei Übergang zu den Approximationen bis zum Grad Zwei bei w die Identitäten $(d_p^{(2)} h_i)((d_w \varphi)(k)) + (d_p h_i)((d_w^{(2)} \varphi)(k)) = 0$ und damit

$$(d_p f)((d_w^{(2)} \varphi)(k)) = - \sum_i \lambda_i (d_p^{(2)} h_i)((d_w \varphi)(k))$$

Auf diese Weise können wir die Approximation zur Ordnung Zwei von $f \circ \varphi$ bei w umschreiben zu

$$w + k \mapsto f(\varphi(w)) + \frac{1}{2} (d_p^{(2)} f)((d_w \varphi)(k)) - \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i (d_p^{(2)} h_i)((d_w \varphi)(k))$$

alias $w + k \mapsto f(\varphi(w)) + \frac{1}{2} Q((d_w \varphi)(k))$. Wegen unserer Erkenntnis $\text{im}(d_w \varphi) = \ker(d_p h)$ aus dem Beweis von 4.5.1 folgen unsere Behauptungen damit aus den Resultaten zu Extremwerten ohne Nebenbedingungen 3.4.10. \square

Übungen

Übung 4.5.6. Man bestimme die Extrema der Funktion $f(x, y) = x + y$ auf der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$. An welchen Stellen werden diese Extrema angenommen?

Übung 4.5.7. Man bestimme die Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ auf dem halben Ellipsoid $\{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1, z \geq 0\}$.

4.6 Markov-Ketten*

4.6.1. Hier bespreche ich eine Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes, die eigentlich eher in die lineare Algebra oder Wahrscheinlichkeitstheorie gehört.

4.6.2. Gegeben sei eine endliche Menge E , deren Elemente **Zustände** heißen mögen. Gegeben sei weiter eine $(E \times E)$ -Matrix Q mit Einträgen in $[0, 1]$ und Spaltensummen Eins, in Formeln eine Abbildung $Q : E^2 \rightarrow [0, 1], (i, j) \mapsto Q_{ij}$ mit $\sum_i Q_{ij} = 1$ für alle j . Wir nennen Q_{ij} die **Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand j in den Zustand i** und unsere Forderung $\sum_i Q_{ij} = 1$ für alle j bedeutet, daß „vom Zustand j aus im nächsten Schritt mit Wahrscheinlichkeit Eins wieder einer unserer Zustände erreicht werden soll“. Das Datum (E, Q) nennen wir eine **Markov-Kette**. Beginnen wir mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung p auf E , also einer Abbildung $p : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i \in E} p(i) = 1$, und fassen sie als einen Spaltenvektor auf, so stellt sich nach einem Schritt die Verteilung Qp ein und nach n Schritten die Verteilung $Q^n p$. Wir stellen uns nun die Frage, unter welchen Umständen die Folge der $Q^n p$ für alle p konvergiert, unter welchen Umständen ihr Grenzwert zusätzlich gar nicht von p abhängt, und wie schnell unsere Folge im Zweifelsfall konvergiert.

Beispiel 4.6.3. Zu einem endlichen Köcher im Sinne von [LA2] 9.6.2 mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß von jeder seiner Ecken mindestens ein Pfeil ausgeht, erhalten wir die Markov-Kette der „zufälligen Wanderungen in unserem Köcher“ wie folgt: Als Zustände nehmen wir die Ecken des Köchers und denken uns dabei, daß sich ein Wanderer an besagter Ecke befinden möge. In jedem Zeitschritt sucht sich unser Wanderer dann zufällig einen ausgehenden Pfeil aus und wandert auf diesem zur nächsten Ecke. Verfeinern wir unsere Regel dadurch, daß wir jedem Pfeil $i \leftarrow j$ noch eine Wahrscheinlichkeit Q_{ij} zuordnen, mit der er von unserem Wanderer ausgesucht wird, und fassen dafür alle mehrfachen Pfeile zwischen je zwei vorgegebenen Ecken zu einem einfachen Pfeil mit entsprechend höherer Wahrscheinlichkeit zusammen, so sind wir auch schon wieder beim allgemeinen Fall gelandet.

Beispiel 4.6.4 (Urnenmodell von Ehrenfest). In zwei durch ein Loch verbundenen Kammern befinden sich insgesamt $N \geq 1$ nicht unterscheidbare Teilchen. Wir betrachten den Raum $E = \{0, 1, \dots, N\}$ aller „Zustände“, wobei der Zustand i bedeuten möge, daß sich i Teilchen in der linken Kammer und die restlichen $N - i$ Teilchen in der rechten Kammer befinden. Als Übergangswahrscheinlichkeiten wählen wir

$$Q_{ij} = \begin{cases} j/N & i = j - 1; \\ (N - j)/N & i = j + 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In jedem Zeitschritt wechselt also genau ein Teilchen die Kammer, und die Wahrscheinlichkeit, daß das ein Teilchen aus einer Kammer mit j Teilchen ist, beträgt genau j/N . In diesem Fall konvergiert die Folge $Q^n p$ nicht für alle p , da sich ja in jeder Kammer immer abwechselnd erst eine gerade und dann wieder eine ungerade Anzahl von Teilchen befindet.

Satz 4.6.5 (Konvergenz endlicher Markov-Ketten). *Ist bei einer endlichen Markovkette (E, Q) die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen je zwei Zuständen positiv, in Formeln $Q_{ij} > 0 \forall i, j$, so gibt es genau eine stabile Verteilung s und für jede Anfangsverteilung p gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n p = s$$

Ergänzung 4.6.6 (Bewertung von Seiten im Netz). Die Bewertung von Seiten im Netz durch Suchmaschinen baut auf der Vorstellung auf, daß ein Surfer auf einer gegebenen Seite jeden der Verweise zu weiteren Seiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit anklickt. Damit er nicht bei einer Seite hängenbleiben kann, die auf gar keine weitere Seite verweist, denkt man sich dabei auf jeder Seite zusätzlich einen Verweis angebracht, der einen beim Daraufklicken zu einer zufällig ausgesuchten Seite schickt, und der mit derselben Wahrscheinlichkeit angeklickt wird wie alle

anderen. Die durch diese Markovkette bestimmte stabile Verteilung ist dann die gesuchte Bewertung von Seiten im Netz. Eine Seite ist damit desto höher bewertet, je mehr Seiten darauf verweisen, wobei Verweise von Seiten, die ihrerseits höher bewertet sind, entsprechend stärker gewichtet werden.

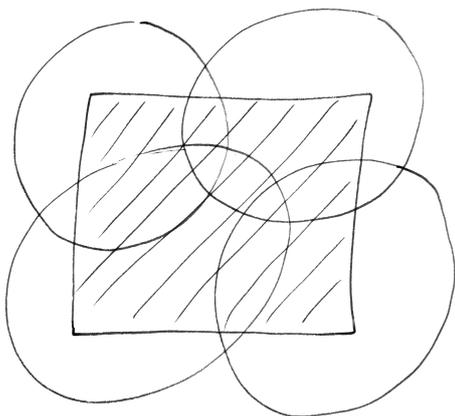
Beweis. Sicher beschreibt die Matrix Q einen Endomorphismus von $\text{Ens}(E, \mathbb{R})$, der jeden Vektor der Standardbasis ins Innere des positiven Quadranten kippt und der die affine Hyperebene $H = \{(x_i)_{i \in E} \mid \sum x_i = 1\}$ auf sich selbst abbildet. Es scheint mir damit anschaulich klar, daß Q eine Kontraktion $Q : H \rightarrow H$ liefert und daß der Fixpunkt dieser Kontraktion, dessen Existenz durch den Banach'schen Fixpunktsatz 4.1.10 gesichert ist, im Innern des positiven Quadranten $\text{Ens}(E, \mathbb{R}_{>0})$ liegen muß. Um das zu beweisen reicht es zu zeigen, daß Q bezüglich irgendeiner Norm kontrahierend wirkt auf der linearen Hyperebene L , die gegeben wird durch die Gleichung $\sum x_i = 0$. Wir zeigen das bezüglich der Norm $|x| = \sum |x_i|$. Sei δ der kleinste Eintrag von Q . Schreiben wir $Q = \delta U + R$ für U die Matrix mit einer Eins in jedem Eintrag, so hat R nur nichtnegative Einträge. Damit erhalten wir für $x \in L$ unschwer

$$|Qx| = |Rx| = \sum_i \left| \sum_j R_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i,j} R_{ij} |x_j| = \lambda |x|$$

für $\lambda = 1 - n\delta$ die Summe der Einträge von R in einer und jeder Spalte. Also ist $Q : H \rightarrow H$ kontrahierend und hat genau einen Fixvektor s , dessen Koordinaten alle positiv sein müssen. Alle anderen Eigenwerte von Q müssen auch Eigenwerte der Einschränkung auf die lineare Ebene L mit der Gleichung $\sum x_i = 0$ sein und sind folglich im Absolutbetrag beschränkt durch unsere Kontraktionskonstante $\lambda = 1 - n\delta$. \square

5 Oberfläche und Volumen

5.1 Überdeckungen kompakter metrischer Räume



Eine Überdeckung eines Quadrats durch vier Kreisscheiben

Definition 5.1.1. Eine **Überdeckung** einer Menge X ist ein System $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen mit Vereinigung $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Unter einer **Teilüberdeckung** einer Überdeckung \mathcal{U} versteht man ein Teilsystem $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, das auch selbst bereits eine Überdeckung ist.

Definition 5.1.2. Eine **offene Überdeckung** eines topologischen Raums ist eine Überdeckung, die aus offenen Teilmengen besteht.

Definition 5.1.3. Ein topologischer Raum heißt **kompakt** und manchmal ausführlicher **überdeckungskompakt**, wenn jede offene Überdeckung unseres Raums eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

5.1.4 (**Diskussion der Terminologie**). Nennen wir einen topologischen Raum kompakt, so meinen wir a priori überdeckungskompakt. Hausdorffräume mit der Eigenschaft, daß jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, heißen dahingegen **folgenkompakt**. In der französischen Literatur ist eine abweichende Terminologie üblich, in der unsere überdeckungskompakten topologischen Räume „quasikompakt“ genannt werden und in der diejenigen Räume „kompakt“ heißen, die wir „überdeckungskompakt und Hausdorff“ nennen.

Satz 5.1.5 (Kompaktheit und offene Mengen). *Ein metrischer Raum ist folgenkompakt genau dann, wenn er überdeckungskompakt ist.*

Vorschau 5.1.6. Beispiele für einen folgenkompakten aber nicht überdeckungskompakten Hausdorffraum finden Sie in [TM] 18.3.2.12 oder [AL] 5.4.7. Ein

Beispiel für einen überdeckungskompakten aber nicht folgenkompakten Hausdorffraum ist der „Einheitsball des topologischen Dualraums mit der schwach*-Topologie der stetigen beschränkten Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in Bezug auf die Norm der gleichmäßigen Konvergenz“. Besitzt in einem überdeckungskompakten topologischen Raum jeder Punkt eine „abzählbare Umgebungsbasis“, so ist er auch folgenkompakt mit demselben Argument, wie wir es im Beweis des Satzes verwenden.

Beweis von Satz 5.1.5. Sei X ein metrischer Raum. Ist X nicht folgenkompakt, so finden wir in X eine Folge ohne konvergente Teilfolge. Dann besitzt jeder Punkt von X eine offene Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, und diese offenen Umgebungen bilden eine offene Überdeckung von X ohne endliche Teilüberdeckung. Das zeigt die eine Richtung. Den Beweis der anderen Richtung beginnen wir mit einem Lemma, das auch für sich genommen oft hilfreich ist.

Lemma 5.1.7 (Überdeckungssatz von Lebesgue). *Ist X ein folgenkompakter metrischer Raum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X , so gibt es $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle Punkte $x \in X$ der ε -Ball $B(x; \varepsilon)$ ganz in einer der überdeckenden offenen Mengen $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.*

Erster Beweis. Gäbe es kein solches $\varepsilon > 0$, so könnten wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ einen Punkt $x_n \in X$ finden derart, daß $B(x_n; 1/n)$ in keinem $U \in \mathcal{U}$ enthalten wäre. Durch Übergang zu einer Teilfolge könnten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, daß die Folge der x_n konvergiert, etwa gegen $x \in X$. Nun finden wir jedoch ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ und dazu $\rho > 0$ mit $B(x; \rho) \subset U$ und dazu N mit $d(x_N, x) < \rho/2$ und $1/N < \rho/2$, und dann gälte $B(x_N; 1/N) \subset B(x_N; \rho/2) \subset B(x; \rho) \subset U$ im Widerspruch zur Wahl der x_n . \square

Zweiter Beweis. Man betrachte die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) := \sup\{r \leq 1 \mid \text{Es gibt } U \in \mathcal{U} \text{ mit } B(x; r) \subset U\}$$

Die Dreiecksungleichung liefert $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$, insbesondere ist f stetig. Sicher dürfen wir $X \neq \emptyset$ annehmen. Dann nimmt f nach 1.5.19 sein Minimum an und jede positive Zahl echt unterhalb dieses Minimums ist ein mögliches ε . \square

Um die andere Implikation im Satz zu zeigen, seien nun X folgenkompakt und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Es gilt zu zeigen, daß sie eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wählen wir zu unserer Überdeckung \mathcal{U} ein ε wie im Überdeckungssatz 5.1.7, so reicht es auch zu zeigen, daß es eine endliche Teilmenge $E \subset X$ gibt mit

$$X = \bigcup_{x \in E} B(x; \varepsilon)$$

In der Tat liegt ja der ε -Ball $B(x; \varepsilon)$ um ein beliebiges $x \in X$ nach Wahl von ε schon in einem der $U \in \mathcal{U}$. Gäbe es aber für ein $\varepsilon > 0$ keine endliche Überdeckung von X durch ε -Bälle, so könnten wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren mit $x_n \notin \bigcup_{0 \leq \nu < n} B(x_\nu; \varepsilon)$ für alle n , also $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für $n \neq m$, und diese Folge könnte keine konvergente Teilfolge haben im Widerspruch zur Annahme. \square

5.1.8. Sei X eine Menge. Unter einer **Überdeckung einer Teilmenge** $Y \subset X$ durch Teilmengen von X versteht man ein Mengensystem $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $Y \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Nach unseren Definitionen ist eine Teilmenge Y eines topologischen Raums X kompakt für die induzierte Topologie genau dann, wenn jede Überdeckung von Y durch offene Teilmengen von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Proposition 5.1.9. *In einem Hausdorffraum ist jedes Kompaktum abgeschlossen.*

5.1.10. Ausführlicher gesagt ist also eine Teilmenge eines Hausdorffraums, die mit der induzierten Topologie überdeckungskompakt ist, notwendig eine abgeschlossene Teilmenge.

Beweis. Sei $K \subset X$ unser Kompaktum in unserem Hausdorffraum. Es gilt zu zeigen, daß $X \setminus K$ offen ist in X . Gegeben $p \in X \setminus K$ gilt es also, eine Umgebung von p zu finden, die K nicht trifft. Für jedes $q \in K$ finden wir nach Annahme V_q offen um p und U_q offen um q mit $V_q \cap U_q = \emptyset$. Die U_q überdecken K , also gibt es $E \subset K$ endlich mit $K \subset \bigcup_{q \in E} U_q$. Dann ist $V := \bigcap_{q \in E} V_q$ die gesuchte Umgebung von p , die K nicht trifft. \square

Lemma 5.1.11. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist stets kompakt.*

Beweis. Sei X unser kompakter Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Ist \mathcal{U} ein System von offenen Teilmengen von X , deren Vereinigung A umfaßt, so schließen wir

$$\begin{aligned} A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U &\Rightarrow X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \\ &\Rightarrow X = (X \setminus A) \cup U_1 \cup \dots \cup U_k \\ &\Rightarrow A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \end{aligned}$$

für geeignete $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$. \square

Übungen

Übung 5.1.12 (Endliche Vereinigungen von Kompakta). Besitzt ein topologischer Raum eine endliche Überdeckung durch kompakte Teilmengen, so ist er bereits selbst kompakt.

Übung 5.1.13 (Nichtleere Schnitte in Kompakta). Man zeige: Ein topologischer Raum X ist kompakt genau dann, wenn für jedes System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit nichtleeren endlichen Schnitten auch der gesamte Schnitt nicht leer ist, in Formeln $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$.

Ergänzende Übung 5.1.14 (Satz von Dini). Eine monoton wachsende Folge stetiger reellwertiger Funktionen auf einem kompakten Raum, die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, konvergiert sogar gleichmäßig. Hinweis: 5.1.13.

Übung 5.1.15 (Bilder von Kompakta). Man zeige, daß das Bild eines kompakten topologischen Raums unter einer stetigen Abbildung kompakt ist für die Spurtopologie. Insbesondere ist jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum beschränkt.

Ergänzende Übung 5.1.16. Gegeben ein topologischer Raum X mit einer offenen Überdeckung \mathcal{U} zeige man: Eine Teilmenge Y unseres Raums ist genau dann abgeschlossen, wenn sie mit jeder Teilmenge unserer Überdeckung abgeschlossenen Schnitt hat, in Formeln

$$Y \text{ abgeschlossen in } X \Leftrightarrow (Y \cap U) \text{ abgeschlossen in } U \quad \forall U \in \mathcal{U}$$

Die fraglichen Schnitte sollen hierbei abgeschlossen sein in U , nicht in X .

5.2 Transformationsformel

Definition 5.2.1. Seien X ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow A$ eine Abbildung in eine Menge mit ausgezeichnetem Element $0 \in A$. Der **Träger von f** ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , außerhalb derer die Funktion den Wert 0 annimmt. Man notiert ihn

$$\text{supp } f := \overline{f^{-1}(A \setminus \{0\})}$$

für englisch und französisch **support**.

Definition 5.2.2. Sei X ein topologischer Raum. Die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger bezeichnet man mit $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ und wir in diesem Skript mit

$$\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$$

Ich ziehe letztere Notation vor, weil sie besser zur üblichen Notation des „eigentlichen Vorschubs“ paßt. Sie ist jedoch unüblich.

5.2.3. Gegeben ein topologischer Raum X ist die Menge $\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ein Untervektorraum des \mathbb{R} -Vektorraums aller reellwertigen Funktionen auf X . Das folgt unmittelbar aus Übung 5.1.12, nach

der endliche Vereinigungen von Kompakta wieder kompakt sind, und aus Übung 1.3.25, nach der Summen und Produkte stetiger reellwertiger Funktionen wieder stetig sind.

Lemma 5.2.4 (Fortsetzung durch Null). *Gegeben eine offene Teilmenge eines Hausdorffraums $U \Subset X$ und eine stetige Funktion auf U mit kompaktem Träger $f \in C_1(U, \mathbb{R})$ ist ihre Fortsetzung durch Null eine stetige Funktion $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

5.2.5. Natürlich hat \tilde{f} dann auch kompakten Träger. Bezeichnet $i : U \hookrightarrow X$ die Einbettung, so verwenden wir in der Situation des Lemmas für die Fortsetzung durch Null $f \mapsto \tilde{f}$ die Notation

$$i_! : C_1(U, \mathbb{R}) \rightarrow C_1(X, \mathbb{R})$$

Beweis. Nach 5.1.9 ist jedes Kompaktum in einem Hausdorffraum abgeschlossen. Bezeichnet $\text{supp}_U f$ den Träger von $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt also $\text{supp}_U f \Subset X$. Damit ist $X = U \cup (X \setminus \text{supp}_U f)$ eine offene Überdeckung von X . Da \tilde{f} auf beiden überdeckenden offenen Mengen stetig ist, ist es wegen der Lokalität der Stetigkeit 1.3.23 stetig auf ganz X . \square

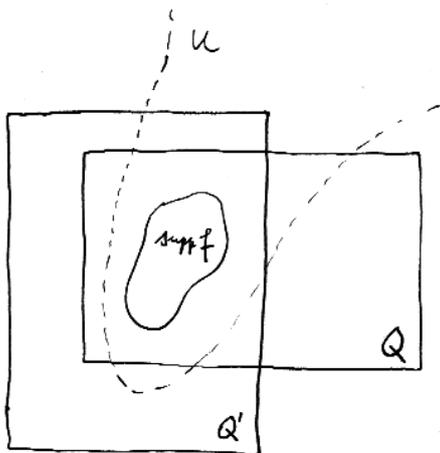


Illustration zur Definition des Integrals stetiger Funktionen mit kompaktem Träger 5.2.6. Man prüft ohne Schwierigkeiten, daß die Wahl des kompakten Quaders hier keine Rolle spielt, solange er nur den Träger unserer Funktion umfaßt. Im Bild kommen unter vielen anderen etwa die beiden Quader Q und Q' in Frage.

Definition 5.2.6. Gegeben $U \Subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f \in C_1(U; \mathbb{R})$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger auf U definieren wir das **Integral $\int_U f$ von f über U** , indem wir f durch Null zu einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger auf \mathbb{R}^n fortsetzen und diese Fortsetzung integrieren über irgendeinen kompakten Quader, der ihren Träger umfaßt. Für unser Integral vereinbaren wir die Notationen

$$\int_U f = \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_U f(x) d^n x$$

5.2.7. Das so definierte Integral ist offensichtlich linear, $\int f + g = \int f + \int g$ und $\int \lambda f = \lambda \int f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie monoton, als da heißt $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$. Insbesondere folgt wie im Fall einer Veränderlichen $|\int f| \leq \int |f|$.

Satz 5.2.8 (Transformationsformel). Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\phi : U \xrightarrow{\sim} V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Bezeichne $|\det d\phi|$ die Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto |\det d_p \phi|$. So gilt für jede stetige Funktion auf V mit kompaktem Träger $f \in C_1(V, \mathbb{R})$ die Identität

$$\int_V f = \int_U (f \circ \phi) |\det d\phi|$$

5.2.9. Es tut mir leid, daß f vorher immer eine Funktion auf U bezeichnet hat und in der Transformationsformel plötzlich eine Funktion auf V bezeichnet. Diese Inkonsistenz müssen wir in Kauf nehmen, um eine noch gravierendere Inkonsistenz mit unserer bisherigen Notation der Integration durch Substitution in einer Variablen zu vermeiden.

Vorschau 5.2.10. Im Rahmen der Lebesgue'schen Integrationstheorie folgern wir in [AN3] 1.8.1 eine weitgehende Verallgemeinerung dieses Satzes. Eine bescheidenere für viele Rechnungen ausreichende Verallgemeinerung liefern die Sätze des folgenden Abschnitts, insbesondere Satz 5.5.10 zur Integration mit Integrationskarten.

Beispiele 5.2.11. Ist $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine abstandserhaltende Abbildung, also nach [LA2] 2.3.6 die Verknüpfung einer orthogonalen Abbildung mit einer Translation, so liefert die Transformationsformel für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Identität $\int f = \int f \circ \phi$. Ist $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Streckung um den Faktor 2, so liefert die Transformationsformel die Identität $\int f = 4 \int f \circ \phi$. Beide Aussagen sollten auch anschaulich unmittelbar einleuchten.

Beispiel 5.2.12. Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$P : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \setminus (\text{abgeschlossene negative } x\text{-Achse})$$

$$(r, \vartheta)^\top \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)^\top$$

Hier lasse man sich nicht dadurch verwirren, daß die Klammern $(,)$ einmal ein offenes Intervall und dann wieder Elemente kartesischer Produkte andeuten, die wir anschließend noch zu Spaltenvektoren transponieren. Das Differential der Polarkoordinatenabbildung wird gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$dP = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

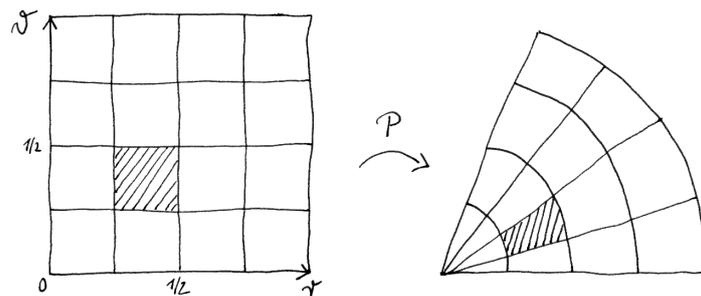


Illustration zur Transformationsformel, insbesondere zu Beispiel 5.2.12. Das Integral einer Funktion f über das rechte Kuchenstück kann angenähert werden, indem wir die angedeutete Unterteilung des Integrationsbereichs betrachten, in jedem der unterteilenden Stücke den Funktionswert an einer Stelle mit der Fläche des entsprechenden Stücks multiplizieren, und diese Produkte aufsummieren. Unter der Polarkoordinatenabbildung P entspricht nun die Unterteilung unseres Kuchenstücks einer Unterteilung unseres Quadrats, und die Fläche des Bildes eines Unterquadrats ist in etwa der Betrag der Funktionaldeterminante $|\det P|$ an einer Stelle unseres Unterquadrats multipliziert mit der Fläche besagten Unterquadrats. So wäre etwa die Fläche des schraffierten Teils im Kuchenstück rechts etwas weniger als halb so groß wie die Fläche des schraffierten Unterquadrats links, und $|\det P| = r$ nimmt auf unserem Unterquadrat Werte zwischen $1/4$ und $1/2$ an. Es wird also in etwa dasselbe herauskommen, wenn wir von der Funktion $(f \circ P)|\det P|$ auf unserem Quadrat in jedem der Unterquadrate den Funktionswert an einer Stelle mit der Fläche des entsprechenden Unterquadrats multiplizieren, und diese Produkte aufsummieren. Im Grenzübergang für immer feinere Unterteilungen kommt dann sogar nicht nur in etwa, sondern ganz genau dasselbe heraus. Das ist die anschauliche Bedeutung der Transformationsformel.

mit der Determinante $\det dP = r$. Beim Bilden des Betrages ändert sich nichts und wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(P(r, \vartheta)) \, r \, dr \, d\vartheta$$

für stetige Funktionen auf \mathbb{R}^2 mit kompaktem Träger, der darüber hinaus nicht die abgeschlossene negative x -Achse treffen darf. Oft schreibt man kurz $f(r, \vartheta)$ statt $f(P(r, \vartheta))$ in der Erwartung, daß schon aus der bloßen Bezeichnung der Variablen klar wird, was genau gemeint ist. So ergibt sich dann eine Formel für die Transformation eines Integrals auf Polarkoordinaten, die man als

$$dx \, dy = r \, dr \, d\vartheta$$

abkürzen mag. Leider erhalten wir besagte Formel vorerst nur für sehr spezielle Funktionen. In der Praxis ist deshalb unser Satz kaum anwendbar. Für die Praxis brauchbare Varianten formulieren und zeigen wir in 5.6.2 und [AN3] 1.8.1.

5.2.13. Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar nennt man $\det d\phi$ die **Funktionaldeterminante** von ϕ . Bevor wir den Satz beweisen, wollen wir versuchen, ihn mit Anschauung zu füllen. Wir beschränken uns dazu auf den Fall $n = 2$. Zunächst ist hoffentlich anschaulich klar, daß es für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reelle Konstante $c(L) \geq 0$ gibt derart, daß „das Bild unter L eines Flächenstücks U der Fläche $\text{vol}(U)$ die Fläche $\text{vol}(LU) = c(L) \text{vol}(U)$ hat“. Unsere Transformationsformel enthält nun, wenn man sie ohne Rücksicht auf die Bedingungen des Satzes mutig auf die konstante Funktion $f = 1$ auf U anwendet und $\phi = L$ linear annimmt, die Erkenntnis

$$c(L) = |\det L|$$

Das sieht man auch anschaulich leicht ein: Zunächst sollte anschaulich klar sein, daß „eine Scherung die Fläche nicht ändert“ und „die Streckung einer Achse die Fläche genau durch Multiplikation mit dem Betrag des Streckfaktors ändert“, so daß also unsere Erkenntnis anschaulich klar ist für lineare Abbildungen L mit Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Anschaulich klar ist weiter $c(L \circ M) = c(L)c(M)$ und nach der Multiplikationsformel für Determinanten haben wir auch $|\det L \circ M| = |\det L| |\det M|$. So rechtfertigen wir dann unsere Erkenntnis $c(L) = |\det L|$ im allgemeinen. Mehr dazu mag man in [LA1] 6.2.6 nachlesen. Das Integral von f erhalten wir nun im

Grenzwert, wenn wir V in lauter kleine Flächenstücke V_i zerlegen und die Produkte der Flächen dieser Flächenstücke mit einem Funktionswert an einem Punkt $y_i \in V_i$ des jeweiligen Flächenstück aufsummieren, in Formeln

$$\int_V f \simeq \sum f(y_i) \operatorname{vol}(V_i)$$

Wir betrachten nun die Urbilder $x_i = \phi^{-1}(y_i)$ unserer Punkte y_i und die Zerlegung von U durch die Urbilder $U_i = \phi^{-1}(V_i)$ unserer kleinen Flächenstücke V_i . Bei x_i wird ϕ bis auf Verschiebung gut approximiert durch $d_{x_i}\phi$, deshalb haben die Bilder $\phi(U_i) = V_i$ dieser Flächenstücke U_i in etwa die Fläche $\operatorname{vol}(V_i) \simeq |\det d_{x_i}\phi| \operatorname{vol}(U_i)$ und wir folgern

$$\int_V f \simeq \sum f(y_i) \operatorname{vol}(V_i) \simeq \sum (f \circ \phi)(x_i) |\det d_{x_i}\phi| \operatorname{vol}(U_i) \simeq \int_U (f \circ \phi) |\det d\phi|$$

Das beendet unsere anschauliche aber doch recht vage Argumentation und wir kommen nach einem Beispiel zum eigentlichen Beweis.

Beweis. Wir zeigen den Satz durch vollständige Induktion über n . Der Fall $n = 0$ ist unproblematisch und wir behandeln gleich den Fall $n = 1$. Nach [AN1] 12.3.2.42 kann jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ als disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen U_i geschrieben werden. Deren Bilder in V sind wieder Intervalle nach dem Zwischenwertsatz und offen nach dem Umkehrsatz 4.1.2. Unsere Funktion f verschwindet außerhalb von endlich vielen der $\phi(U_i)$, da ihr Träger nach Annahme kompakt ist. Wir können folglich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß U und V bereits offene Intervalle sind. Wir finden dann sicher ein mehrpunktiges kompaktes Intervall $[c, d] \subset V$, das den Träger von f umfaßt. Die Substitutionsregel [AN1] 12.5.8.1 liefert nun

$$\int_c^d f(y) dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx$$

für $a, b \in U$ mit $\phi(a) = c$ und $\phi(b) = d$. Da ϕ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus sein soll, ist ϕ' stetig mit $\phi' \neq 0$ auf U . Wir folgern, daß auf U entweder gilt $\phi' > 0$ oder aber $\phi' < 0$. Im ersten Fall haben wir $a < b$ und $|\phi'| = \phi'$ und die in 5.2.8 behauptete Transformationsformel steht bereits da. Im zweiten Fall haben wir $a > b$ und $|\phi'| = -\phi'$ und die beiden dadurch entstehenden Vorzeichen heben sich weg alias

$$\int_U (f \circ \phi) |\det d\phi| = \int_b^a f(\phi(x))|\phi'(x)| dx = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx$$

und wir sind wieder fertig. Damit ist der Fall $n = 1$ erledigt. Nehmen wir nun also an, wir hätten $n \geq 2$ und der Satz sei für Integration im \mathbb{R}^{n-1} schon bewiesen. Wir

gehen dann in mehreren Schritten vor.

1. Läßt ϕ die erste Koordinate unverändert, in Formeln $\phi_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$, so folgt unsere Transformationsformel aus der Induktionsvoraussetzung. Um das zu sehen, betrachten wir für festes $c \in \mathbb{R}$ die Einbettung $i_c : \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $(x_2, \dots, x_n) \mapsto (c, x_2, \dots, x_n)$, setzen $U_c := i_c^{-1}(U)$ sowie $V_c := i_c^{-1}(V)$ und betrachten den induzierten C^1 -Diffeomorphismus $\phi_c : U_c \rightarrow V_c$, der durch die Identität $i_c \circ \phi_c = \phi \circ i_c$ charakterisiert wird. Unsere Erkenntnisse über die

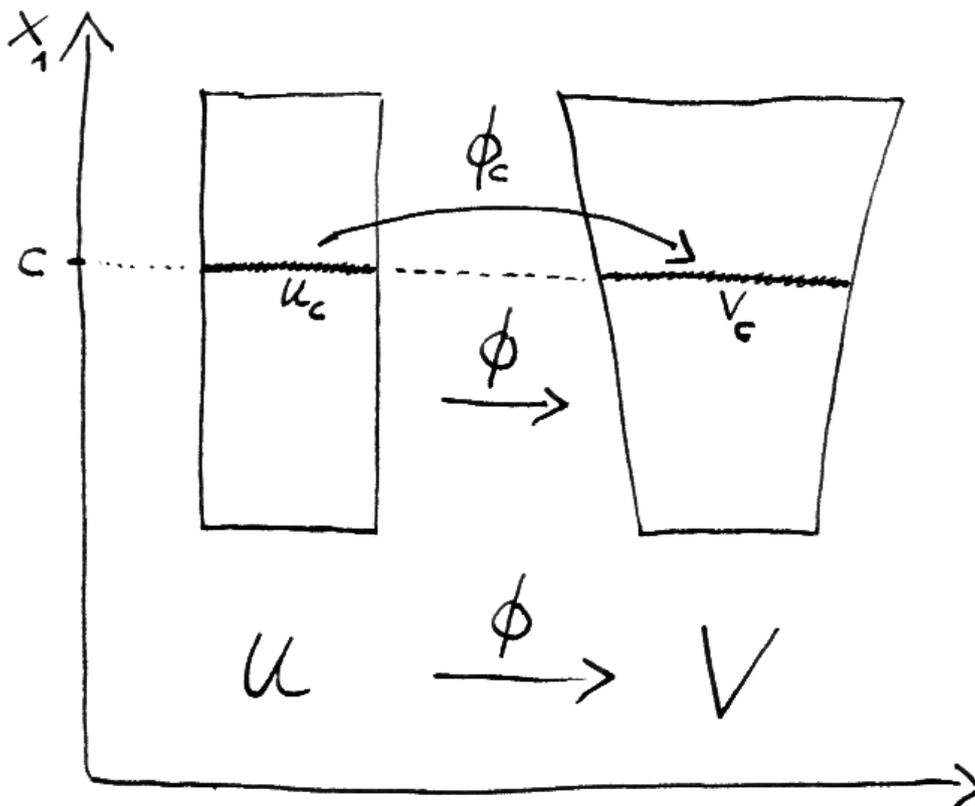


Illustration zum Beweis der Transformationsformel

Determinante von Block-unteren Dreiecksmatrizen zeigen

$$|\det d_{(x_2, \dots, x_n)} \phi_c| = |\det d_{(c, x_2, \dots, x_n)} \phi|$$

Für $f_c := f \circ i_c : V_c \rightarrow \mathbb{R}$ alias $f_c(x_2, \dots, x_n) = f(c, x_2, \dots, x_n)$ erhalten wir also nach der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \int f_c &= \int (f_c \circ \phi_c) |\det d\phi_c| \\ &= \int (f \circ \phi)(c, x_2, \dots, x_n) |\det d_{(c, x_2, \dots, x_n)} \phi| \end{aligned}$$

Integrieren wir diese Gleichung über alle c , so ergibt sich die Transformationsformel für unseren \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus ϕ .

2. Sind $W \xrightarrow{\psi} U \xrightarrow{\phi} V$ zwei \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n und gilt unsere Transformationsformel für ϕ und ψ , so gilt sie auch für $\phi \circ \psi$. In der Tat erhalten wir

$$\begin{aligned} \int f &= \int (f \circ \phi) |\det d\phi| \\ &= \int (f \circ \phi \circ \psi) (|\det d\phi| \circ \psi) |\det d\psi| \\ &= \int (f \circ \phi \circ \psi) |\det d(\phi \circ \psi)| \end{aligned}$$

Hier gilt die erste Zeile nach der Transformationsformel für ϕ angewandt auf die Funktion f , die zweite nach der Transformationsformel für ψ angewandt auf die Funktion $(f \circ \phi) |\det d\phi|$ und die dritte nach der Kettenregel

$$d_p(\phi \circ \psi) = d_{\psi(p)}\phi \circ d_p\psi$$

für $p \in W$ mit der Multiplikationsformel $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ für Determinanten.

3. Für ϕ eine Vertauschung der Koordinaten gilt unsere Formel. In der Tat ist so ein ϕ ja linear mit $|\det d\phi| = 1$ und wir wissen bereits nach 3.1.9, daß es bei Mehrfachintegralen nicht auf die Reihenfolge ankommt.

4. Ist eine Komponente von ϕ eine Koordinate auf U , haben wir also in Formeln $\phi_i(x_1, \dots, x_n) = x_j$ für geeignete i und j , so gilt unsere Formel. In der Tat finden wir dann eine Darstellung $\phi = \psi \circ \varphi \circ \chi$ derart, daß φ die erste Koordinate unverändert läßt und ψ, χ Koordinatenvertauschungen sind. Für φ gilt dann unser Satz nach Schritt 1, für ψ und χ nach Schritt 3, und damit für ϕ nach Schritt 2.

5. Jeder Punkt $p \in U$ besitzt eine offene Umgebung U_p derart, daß unsere Transformationsformel gilt für die Restriktion von ϕ auf U_p . In der Tat finden wir zunächst ein i derart, daß gilt $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}(p) \neq 0$, und dann gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung U_p von p derart, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \quad U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (\phi_i(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus von U_p auf eine offene Teilmenge $W_p := \psi(U_p) \subseteq \mathbb{R}^n$ induziert. Wir bezeichnen das Bild von U_p unter ϕ mit $V_p := \phi(U_p) \subseteq \mathbb{R}^n$ und erhalten ein kommutatives Diagramm von \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen

$$\begin{array}{ccc} U_p & \xrightarrow{\psi} & W_p \\ & \searrow \sim \phi & \swarrow \sim \phi\psi^{-1} \\ & & V_p \end{array}$$

Die i -te Komponente der Abbildung $\phi\psi^{-1}$ ist dann die erste Koordinate

$$(\phi\psi^{-1})_i(y_1, \dots, y_n) = y_1$$

Für beide Abbildungen ψ und $(\phi\psi^{-1})$ gilt also nach Schritt 4 unsere Transformationsformel, mithin gilt sie nach Schritt 2 auch für ihre Verknüpfung, als da heißt für die Restriktion $\phi : U_p \xrightarrow{\sim} V_p$ von ϕ auf U_p . Hier ist im übrigen die Stelle im Beweis, die uns daran hindert, unsere Induktion mit dem Trivialfall $n = 0$ zu beginnen: Im Fall $n = 1$ können wir nämlich Schritt 4 auf ψ nicht anwenden, da in diesem Fall keine Komponente von ψ eine Koordinate wäre.

6. Wir behandeln nun den allgemeinen Fall. Sei $f \in \mathcal{C}_1(V, \mathbb{R})$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Für $p \in U$ wählen wir U_p wie in Schritt 5 und setzen wieder $V_p = \phi(U_p)$. Da $(\text{supp } f)$ kompakt ist, finden wir eine endliche Teilmenge $E \subset U$ mit $(\text{supp } f) \subset \bigcup_{p \in E} V_p$. Jetzt benutzen wir das im Anschluß formulierte und bewiesene technische Lemma 5.2.14 zur „Teilung der Eins“, wählen für unsere endliche Überdeckung von $(\text{supp } f)$ durch die V_p mit $p \in E$ eine angepaßte Teilung der Eins α_p und schreiben

$$f = \sum_{p \in E} \alpha_p f$$

Die Summanden $\alpha_p f$ sind dann stetig mit kompaktem in V_p enthaltenen Träger. Nach der Wahl der V_p haben wir nun $\int \alpha_p f = \int ((\alpha_p f) \circ \phi) |\det d\phi|$ für alle $p \in E$. Addieren wir diese Gleichungen, so ergibt sich wie gewünscht

$$\int f = \int (f \circ \phi) |\det d\phi| \quad \square$$

Lemma 5.2.14 (Teilung der Eins). Sind $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $V_1, \dots, V_r \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset \bigcup V_i$, so gibt es stetige Funktionen $\alpha_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit kompaktem, jeweils in V_i enthaltenen Träger $\alpha_i \in \mathcal{C}_1(V_i, [0, 1])$ derart, daß gilt

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

5.2.15. Eine derartige Familie von Funktionen α_i heißt eine an die gegebene Überdeckung von K angepaßte **Teilung der Eins**.

Beweis. Wir wählen für jedes $x \in K$ ein $j(x)$ mit $x \in V_{j(x)}$ und eine stetige Funktion $\varphi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ mit kompaktem, in $V_{j(x)}$ enthaltenem Träger, die bei x nicht verschwindet, in Formeln $\varphi_x(x) > 0$. Die $N_x := \varphi_x^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ sind dann

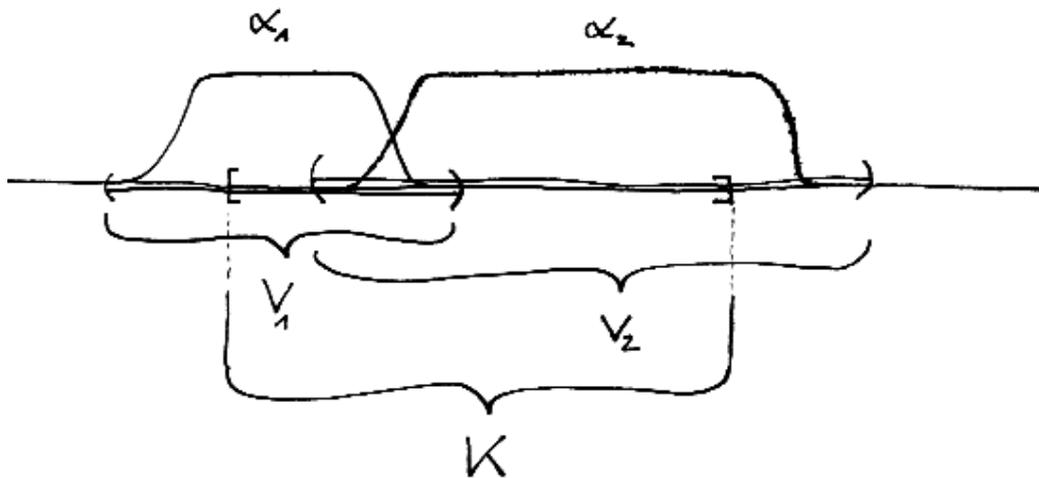


Illustration einer Teilung der Eins im Fall einer Überdeckung eines kompakten Intervalls $K \subset \mathbb{R}$ durch zwei offene Teilmengen.

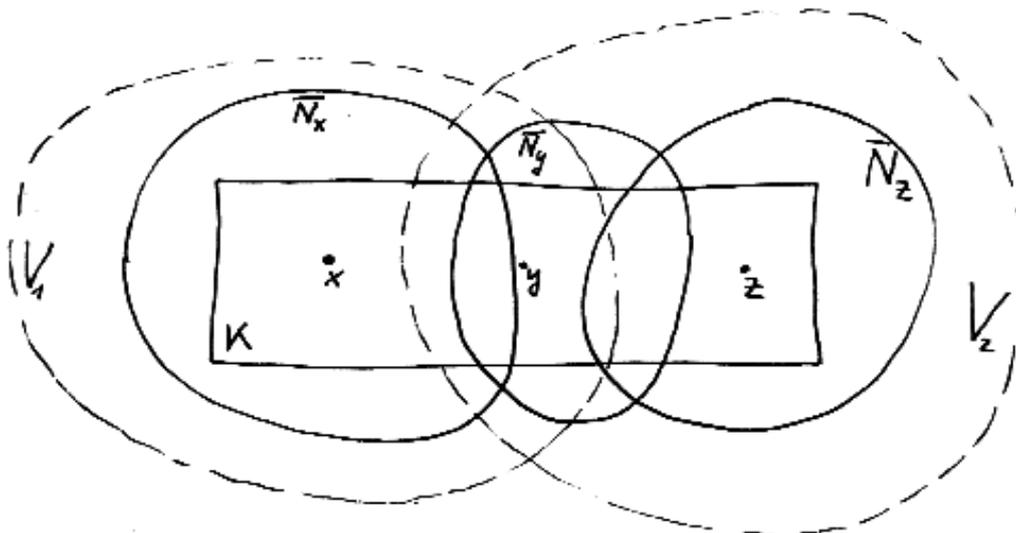


Illustration einiger Mengen, die bei unserer Konstruktion einer Teilung der Eins eine Rolle spielen, im Fall einer Überdeckung eines kompakten Quaders $K \subset \mathbb{R}^2$ durch zwei offene Teilmengen.

offen in \mathbb{R}^n und überdecken K und wir haben $\overline{N}_x \subset V_{j(x)}$. Da K kompakt ist, finden wir $E \subset K$ endlich mit $K \subset \bigcup_{x \in E} N_x$. Dann bilden wir

$$\psi := \sum_{x \in E} \varphi_x$$

Diese Funktion ist stetig auf ganz \mathbb{R}^n , nimmt auf $N := \bigcup_{x \in E} N_x$ positive Werte an, und verschwindet außerhalb von N . Nun betrachten wir für jedes $x \in E$ auf der offenen Menge N die stetige Funktion $\psi_x = \varphi_x / \psi$. Natürlich gilt $\sum_{x \in E} \psi_x(z) = 1$ nicht nur für alle $z \in K$, sondern sogar für alle $z \in N$, und ψ_x verschwindet außerhalb von N_x . Als nächstes konstruieren wir eine stetige Funktion $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, die auf K konstant Eins ist und deren Träger in N enthalten ist. Ist zum Beispiel m das Minimum von ψ auf K , so erhalten wir ein mögliches β , indem wir setzen $\beta = h \circ \psi$ für $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $h|_{[m, \infty)} = 1$ und $h|_{(-\infty, m/2]} = 0$. Dann setzen wir schließlich

$$\alpha_i := \sum_{j(x)=i} \beta \psi_x$$

Diese Funktionen sind zwar a priori nur auf N definiert, aber da \mathbb{R}^n durch N und das Komplement des Trägers von β überdeckt wird, lassen sie sich stetig durch Null auf ganz \mathbb{R}^n fortsetzen, und diese Fortsetzungen haben dann offensichtlich die gewünschten Eigenschaften. \square

Ergänzung 5.2.16 (Glatte Teilung der Eins). Im vorherigen Lemma können die Funktionen α_i sogar **glatt**, als da heißt beliebig gemischt partiell differenzierbar gewählt werden. Um das zu sehen, sind nur wenige Zusatzüberlegungen von Nöten. Aus [AN1] 12.5.4.15 kennen wir ja eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf der negativen Halbgeraden verschwindet und auf der echt positiven Halbgeraden positiv ist. Dann ist das Produkt $f(t)f(1-t)$ eine von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktion mit kompaktem Träger auf \mathbb{R} . Man erhält von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktionen mit kompaktem Träger auf \mathbb{R}^n , indem man von Null verschiedene nichtnegative glatte Funktionen mit kompaktem Träger in den einzelnen Koordinaten nimmt und das Produkt bildet. So sehen wir, daß die φ_x im vorhergehenden Beweis sogar glatt gewählt werden können. Damit sind dann auch ψ und die ψ_x glatt. Wählen wir zusätzlich die Funktion h glatt, bis auf Reskalierung könnte man für h etwa das Integral einer von Null verschiedenen nichtnegativen glatten Funktion mit kompaktem Träger nehmen, so liefert die Konstruktion aus dem vorhergehenden Beweis sogar eine glatte Teilung der Eins.

Übungen

Übung 5.2.17. Man zeige, daß die Funktionaldeterminante der Kugelkoordinatenabbildung K aus 4.2.3 gegeben wird durch $\det dK = r^2 \sin \vartheta$. Salopp gesprochen

transformieren sich also Volumenintegrale in Kugelkoordinaten mittels der Regel

$$dx \, dy \, dz = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

5.3 Integration über Mannigfaltigkeiten

Satz 5.3.1 (Integration über Mannigfaltigkeiten). Für jede k -Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$\int_M : \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

derart, daß für jede Karte $\varphi : W \rightarrow M$ und jede Funktion $f \in \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$ mit Träger im Bild besagter Karte $\text{supp } f \subset \varphi(W)$ gilt

$$\int_M f = \int_W f(\varphi(x)) \sqrt{\det (d_x \varphi)^\top (d_x \varphi)} \, d^k x$$

5.3.2. Für unser Integral einer Funktion f mit kompaktem Träger über eine Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ findet man in der Literatur auch die Notationen

$$\int_M f = \int_M f \, d\sigma = \int_M f \, dS = \int_M f \, d\circ = \int_M f \, dO = \int_M f \, d\text{vol}$$

Sie appellieren an unsere Anschauung für den zwei- oder dreidimensionalen Fall, σ und S stehen für „surface“ und \circ und O für „Oberfläche“ und vol für „Volumen“. Die obige Konstruktion wird auch als **Flächenintegral** bezeichnet. Im Spezialfall $k = n$ einer n -Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n alias einer offenen Teilmenge erhalten wir unser Integral $\int_M f(x) \, d^n x$ aus 5.2.6 zurück.

5.3.3 (**Einordnung des vorstehenden Integralbegriffs**). Die hier und im folgenden entwickelte Integrationstheorie ist insofern nützlich, als sie korrekte Definitionen und vollständige Beweise bis hin zum Satz von Stokes erlaubt. Sie erlaubt auch eine formale Rechtfertigung vieler expliziter Rechnungen, ist im Vergleich zur Lebesgue'schen Integrationstheorie [AN3] 1 aber dennoch recht unbeholfen. Bevor ich den obigen Satz beweise, will ich erst einmal versuchen, ihn zu motivieren und den darin erklärten Integralbegriff mit Anschauung zu füllen.

Beispiel 5.3.4 (Bezug unseres Flächenintegrals zum Kurvenintegral). Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig differenzierbar mit nirgends verschwindender Ableitung $\varphi'(t) \neq 0 \, \forall t$, so ist das Bild $M := \varphi([a, b])$ eine 1-Mannigfaltigkeit und das Integral einer Funktion $f \in \mathcal{C}_1(M; \mathbb{R})$ über M ist genau das Kurvenintegral der durch Null auf $\varphi([a, b])$ fortgesetzten Funktion f längs der Kurve φ im Sinne von [AN1] 12.7.1.23.

5.3.5. Hat M die Dimension k , so haben wir $d_x\varphi \in \text{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ und das Produkt $(d_x\varphi)^\top (d_x\varphi)$ dieser Matrix mit ihrer Transponierten ist folglich eine $(k \times k)$ -Matrix. Diese sogenannte **Gram'sche Matrix** kann aufgefaßt werden als die Matrix aller Skalarprodukte zwischen Spaltenvektoren von $d_x\varphi$. Sie ist nach [LA2] 4.3.34 insbesondere positiv semidefinit und hat damit eine nichtnegative Determinante. Gegeben eine nicht notwendig quadratische Matrix V mit Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ definieren wir ganz allgemein eine reelle Zahl

$$\text{vol } V = \text{vol}(v_1 | \dots | v_k) := \sqrt{\det(V^\top V)} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}$$

und nennen sie das **k -dimensionale Volumen** des von den Vektoren v_i aufgespannten Parallelepiped. Die Wurzel aus der Determinante der Gram'schen Matrix können wir mit dieser Notation auch kürzer schreiben als

$$\sqrt{\det (d_x\varphi)^\top (d_x\varphi)} = \text{vol}(d_x\varphi)$$

Im Fall $k = 1$ ist das eindimensionale Volumen eines Vektors nach dieser Definition schlicht seine Länge. Im Fall $k = 2$ bedeutet das zweidimensionale Volumen eines Paares von Vektoren v, w die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms mit den Ecken $0, v, w$ und $v + w$. Um die Bezeichnung „Volumen“ für die Zahl $\text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$ im Allgemeinen zu rechtfertigen, beachten wir:

1. Es gilt $\text{vol}(v_0 | v_1 | \dots | v_k) = \text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$ falls v_0 die Länge 1 hat und senkrecht steht auf allen anderen v_i .
2. Im Fall $k = n$ haben wir $\text{vol}(v_1 | \dots | v_n) = |\det(v_1 | \dots | v_n)|$. In der Tat, bezeichnet V die in diesem Fall quadratische Matrix mit Spalten v_i , so gilt nach dem Multiplikationssatz für Determinanten $\det(V^\top V) = (\det V)^2$.

Auf diese Weise kann unsere anschauliche Interpretation der Zahl $\text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$ heuristisch auf unsere anschauliche Interpretation der Determinante in 5.2.13 und [LA1] 6.2.6 zurückgeführt werden: Die Fläche eines Parallelogramms im Raum sollte eben das Volumen des Körpers sein, der entsteht, man besagtes Parallelogramm „zu einem Toast der Dicke Eins verdickt“.

5.3.6. Wir wollen nun auch unsere Definition des Integrals anschaulich rechtfertigen. Sei dazu $Q := [a, b] \times [c, d]$ ein kompaktes Rechteck und $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $f : \varphi(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistanten Unterteilungen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$, $c = c_0 < c_1 < \dots < c_r = d$ der Kanten von Q und bezeichnen mit $q_{i,j} = (a_i, c_j)$ die Gitterpunkte im so gegebenen Raster auf Q . Bezeichne weiter $p_{i,j} = \varphi(q_{i,j})$ die Bilder dieser Gitterpunkte unter φ . Damit definieren wir die r -te **Riemannsumme** $S_\varphi^r(f)$ durch die Formel

$$S_\varphi^r(f) = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(p_{i,j}) \text{vol}(p_{i+1,j} - p_{i,j} | p_{i,j+1} - p_{i,j})$$

Lemma 5.3.7. Seien $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein kompaktes Rechteck und $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. So gilt für jede stetige Funktion $f : \varphi(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ mit unseren eben definierten Riemannsummen

$$\int_Q f(\varphi(x)) \operatorname{vol}(d_x \varphi) d^2x = \lim_{r \rightarrow \infty} S_\varphi^r(f)$$

Ergänzung 5.3.8. Eine vielleicht noch anschaulichere Variante liefert der Mittelwert von Riemannsummen $(S_\varphi^r(f) + S_{\varphi \circ (-1)}^r(f))/2$ mit $\varphi \circ (-1) : (-Q) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $x \mapsto \varphi(-x)$. Dieser Mittelwert ist nämlich genau die Summe

$$\sum_{i,j=0}^{r-1} f(p_{i,j}) \Delta(p_{i,j}, p_{i+1,j}, p_{i,j+1}) + \sum_{i,j=1}^r f(p_{i,j}) \Delta(p_{i,j}, p_{i-1,j}, p_{i,j-1})$$

mit der Notation $\Delta(p, t, s)$ für die Fläche des Dreiecks mit Ecken $p, t, s \in \mathbb{R}^n$. Aus unserem Lemma folgt unmittelbar, daß auch dieser Mittelwert von Riemannsummen gegen das Integral strebt.

Beweis. Um Indizes zu vermeiden bezeichnen wir die Koordinaten auf \mathbb{R}^2 mit x, y und schreiben φ_x, φ_y für die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix von φ . Die linke Seite ist per definitionem das Integral $\int_Q (f \circ \varphi) \operatorname{vol}(\varphi_x | \varphi_y)$. Dies Integral können wir nach 3.1.8 schreiben als den Grenzwert für $r \rightarrow \infty$ gewisser Riemannsummen, die wir der Übersichtlichkeit halber mit $T^r = T_\varphi^r(f)$ abkürzen wollen mit T wie „tangential“ und die gegeben werden durch

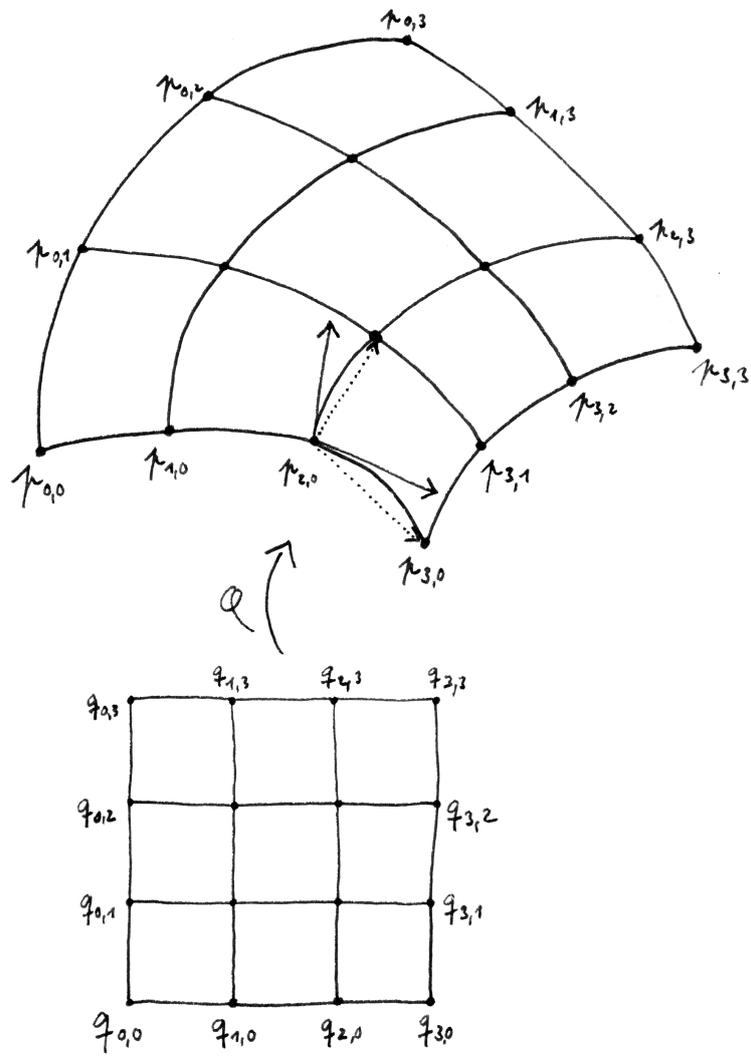
$$T^r = \sum_{i,j=0}^{r-1} f(\varphi(q_{i,j})) \operatorname{vol}(\varphi_x(q_{i,j}) | \varphi_y(q_{i,j})) \frac{\operatorname{vol} Q}{r^2}$$

für $\operatorname{vol} Q$ die Fläche unseres Rechtecks Q und damit $(\operatorname{vol} Q)/r^2$ die Fläche der kleinen rechteckigen Felder $Q_{i,j} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Nun ist φ_x gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum Q . Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $R > 0$ derart, daß gilt $\|\varphi_x(p) - \varphi_x(q)\| \leq \varepsilon$, wann immer p und q im selben kleinen rechteckigen Feld für eine Unterteilung mit $r \geq R$ liegen. Jetzt erklären wir die Vektoren $\varepsilon_{i,j}(r)$ durch die Identität

$$p_{i+1,j} - p_{i,j} = \frac{b-a}{r} (\varphi_x(q_{i,j}) + \varepsilon_{i,j}(r))$$

Mit dem Schrankensatz [AN1] 12.7.1.10 folgt unter der Voraussetzung $r \geq R$ die Abschätzung $\|\varepsilon_{i,j}(r)\| \leq \varepsilon$. Eine analoge Abschätzung erhalten wir für $p_{i,j+1} - p_{i,j}$. Jetzt setzen wir diese Darstellungen in S^r ein und überlassen es dem Leser, hieraus zu folgern, daß gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (S^r - T^r) = 0$$



Die gepunkteten Pfeile stellen die Vektoren $p_{3,0} - p_{2,0}$ und $p_{2,1} - p_{2,0}$ dar, die Fläche des durch sie bestimmten Parallelogramms geht in die Riemannsumme S_M^3 ein. Die durchgezogenen Pfeile stellen die Vektoren $\varphi_x(q_{2,0})$ und $\varphi_y(q_{2,0})$ dar, die Fläche des durch sie bestimmten Parallelogramms geht entsprechend in die Riemannsumme S_Q^3 ein. Beim Übergang zu immer feineren Rastern kommen wir zum selben Grenzwert, wie im Beweis von 5.3.7 ausgeführt wird.

Da aber die Folge T^r nach 3.1.8 gegen unser Integral \int_Q im Lemma konvergiert, muß dasselbe auch für die Folge S^r gelten. \square

Beweis für Satz 5.3.1, Integration über Mannigfaltigkeiten. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Der Träger $\text{supp } f$ unserer Funktion f besitzt als Kompaktum eine endliche Überdeckung durch Bilder von Karten (W_i, φ_i) . Nach 5.2.14 existiert eine an diese Überdeckung von $\text{supp } f$ angepaßte Teilung der Eins α_i . Dann gilt $f = \sum_i \alpha_i f$, und da unsere Bedingung bereits die Integrale der Summanden festlegt, legt die ebenfalls geforderte Linearität auch das Integral von f fest und wir haben notwendig

$$\int_M f = \sum_i \int_M \alpha_i f = \sum_i \int_{W_i} ((\alpha_i f) \circ \varphi_i)(x) \text{vol}(d_x \varphi_i) d^k x$$

Als nächstes zeigen wir, daß die rechte Seite nicht von den getroffenen Wahlen abhängt. Sei also eine weitere endliche offene Überdeckung von $\text{supp } f$ durch die Bilder endlich vieler Karten (V_j, ψ_j) gegeben sowie eine daran angepaßte Teilung der Eins β_j . Wir behaupten die Gleichheit

$$\sum_i \int_{W_i} ((\alpha_i f) \circ \varphi_i)(x) \text{vol}(d_x \varphi_i) d^k x = \sum_j \int_{V_j} ((\beta_j f) \circ \psi_j)(x) \text{vol}(d_x \psi_j) d^k x$$

Sie ist aufgrund der Linearität all dieser Integrale äquivalent zur Gleichheit

$$\sum_{i,j} \int_{W_i} ((\beta_j \alpha_i f) \circ \varphi_i)(x) \text{vol}(d_x \varphi_i) d^k x = \sum_{i,j} \int_{V_j} ((\beta_j \alpha_i f) \circ \psi_j)(x) \text{vol}(d_x \psi_j) d^k x$$

und folgt, wenn wir die Gleichheit aller Summanden zeigen. Hier haben nun die Funktionen $\beta_j \alpha_i f$ Träger im Schnitt $\varphi_i(W_i) \cap \psi_j(V_j)$. Wir können also die Indizes weglassen und müssen nur für jede Funktion $h \in \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$, deren Träger im Bild zweier Karten (W, φ) und (V, ψ) liegt, die Identität

$$\int_W h(\varphi(x)) \text{vol}(d_x \varphi) d^k x = \int_V h(\psi(x)) \text{vol}(d_x \psi) d^k x$$

zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $\varphi(W) = \psi(V)$ annehmen. Der Kartenwechsel ist nach 4.4.13 ein Diffeomorphismus $\kappa := \psi^{-1} \circ \varphi : W \xrightarrow{\sim} V$ mit $\psi \circ \kappa = \varphi : W \rightarrow M$. Es folgt $f(\varphi(x)) = f(\psi(\kappa(x)))$ und $d_x \varphi = d_{\kappa(x)} \psi \circ d_x \kappa$. Wir erhalten mit der Multiplikativität der Determinante also

$$\text{vol}(d_x \varphi) = |\det d_x \kappa| \text{vol}(d_{\kappa(x)} \psi)$$

und folgern die behauptete Gleichheit der Integrale aus der Transformationsformel, angewandt auf die Funktion $h \circ \psi$. Damit haben wir gezeigt, daß jede Überdeckung des Trägers unserer Funktion f durch Bilder von Karten und jede zugehörige Teilung der Eins in der Formel oben dieselbe Summe liefert, die wir

damit als unser $\int_M f$ erklären können. Daß die so erklärte Abbildung $f \mapsto \int_M f$ dann auch \mathbb{R} -linear ist und die geforderte Eigenschaft für Funktionen mit Träger im Bild einer Karte hat, folgt unmittelbar. \square

Übungen

Übung 5.3.9. Sind $M \subset \mathbb{R}^m$ sowie $N \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ kompakt getragene stetige Funktionen, so ist auch die Funktion $f \boxtimes g : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ kompakt getragen und stetig und es gilt

$$\int_{M \times N} f \boxtimes g = \left(\int_M f \right) \left(\int_N g \right)$$

5.4 Minkowskidimension

5.4.1. Wir verwenden die Minkowskidimension nur als Hilfsmittel zum Nachweis der Unabhängigkeit des Integrals von den bei seiner Berechnung verwendeten Integrationskarten im Kontext der Integration über Mannigfaltigkeiten und die etwas allgemeineren Fastfaltigkeiten. Sie ist aber auch unabhängig von dieser Anwendung ein interessantes Konzept und insbesondere für das Studium sogenannter Fraktale relevant.

5.4.2. Gegeben ein metrischer Raum X und $\rho > 0$ bezeichne $N_\rho(X)$ die Zahl der offenen Bälle vom Radius ρ , die man mindestens braucht, um X zu überdecken. Das Infimum aller $k \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^k N_\rho(X) = 0$$

heißt die **Minkowski-Dimension von X** . Wir notieren sie $\text{mdim}(X)$.

Beispiele 5.4.3 (Minkowskidimension kompakter Quader und ihrer Ränder). Für die Minkowskidimension eines kompakten Quaders $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren $Q^\circ \neq \emptyset$ erhalten wir $\text{mdim}(Q) = n$. Für seinen Rand erhalten wir dahingegen $\text{mdim}(\partial Q) < n$. Wegen der Äquivalenz von Normen ist es in diesem Zusammenhang unerheblich, welche Norm wir verwenden, um \mathbb{R}^n mit einer Metrik zu versehen.

5.4.4 (**Minkowskidimension von Vereinigungen**). Gegeben eine endliche Überdeckung $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ eines metrischen Raums X gilt offensichtlich

$$\text{mdim}(X) = \max\{\text{mdim}(X_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$$

Lemma 5.4.5 (Minkowskidimension von Bildmengen). Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ halboffen, kompakt und konvex. Ist $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so gilt für jede Teilmenge $T \subset A$ die Abschätzung

$$\text{mdim}(\varphi(T)) \leq \text{mdim}(T)$$

Beweis. Da wir A kompakt annehmen, gibt es eine obere Schranke C für die Operatornorm der Differentiale $d_p\varphi$ mit $p \in A$. Aus dem Schrankensatz folgt nun $\varphi(B(p; \rho) \cap A) \subset B(\varphi(p); C\rho)$ und damit $N_{C\rho}(\varphi(T)) \leq N_\rho(T)$. Daraus aber ergibt sich die Behauptung sofort. \square

5.5 Integration über Fastfaltigkeiten

Definition 5.5.1. Gegeben ein topologischer Raum X und darin eine Teilmenge $T \subset X$ gibt es eine größte offene Teilmenge

$$\text{Inn}_X(T) = \text{Inn}(T) = T^\circ := \bigcup_{U \subset T, U \text{ off.}} U$$

von X , die in T enthalten ist, nämlich die Vereinigung aller in T enthaltenen offenen Teilmengen von X . Diese Menge $\text{Inn}_X(T)$ heißt der **offene Kern** oder auch das **Innere** von T in X . Das Komplement

$$\partial T = \partial_X T := \bar{T} \setminus T^\circ$$

des Inneren von T in X im Abschluß von T in X heißt der **Rand von T in X** .

Beispiele 5.5.2. Für jeden topologischen Raum X gilt $\text{Inn}_X(X) = X$. Gegeben $a \leq b$ reelle Zahlen gilt $\text{Inn}_{\mathbb{R}}([a, b]) = (a, b)$ und $\text{Inn}_{[a, b]}([a, b]) = [a, b]$.

Definition 5.5.3. Sei X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum. Unter einer **k -Integrationskarte nach X** verstehen wir ein Paar (Q, φ) bestehend aus einer Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^k$, die dargestellt werden kann als eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen kompakten Quadern mit nichtleerem Inneren, und einer stetig differenzierbaren Abbildung $\varphi : Q \rightarrow X$ mit $\varphi(Q^\circ) \cap \varphi(\partial Q) = \emptyset$ und $\varphi|_{Q^\circ}$ injektiv und $d_p\varphi$ injektiv für alle $p \in Q^\circ$.

5.5.4. Wir erinnern aus 5.1.9, daß in einem Hausdorffraum jedes Kompaktum abgeschlossen ist. Wir erinnern aus 5.1.15, daß Bilder von Kompakta unter stetigen Abbildungen wieder kompakt sind. Wir erinnern aus 1.5.17, daß jede abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums kompakt ist.

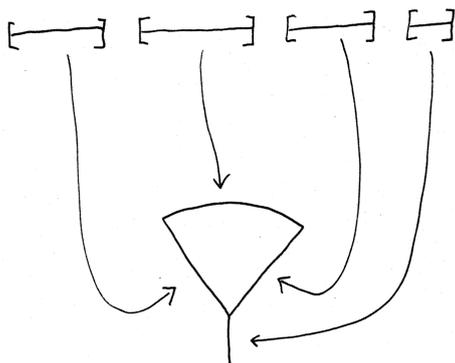
5.5.5 (**Einschränkung von Integrationskarten zu Karten**). Gegeben eine Integrationskarte (Q, φ) ist $\varphi(Q^\circ)$ eine Mannigfaltigkeit mit Karte $\varphi : Q^\circ \rightarrow \varphi(Q^\circ)$. Um das zu sehen, müssen wir nach unserer Beschreibung 4.4.1 von Mannigfaltigkeiten als Bilder nur noch prüfen, daß $\varphi^{-1} : \varphi(Q^\circ) \rightarrow Q^\circ$ stetig ist. Nun ist aber Q und damit auch $\varphi(Q)$ kompakt. Folglich bildet φ abgeschlossene alias kompakte Teilmengen von Q auf abgeschlossene alias kompakte Teilmengen von $\varphi(Q)$ ab. Für $U \subset \varphi(Q)$ impliziert $\varphi^{-1}(U) \Subset Q$ also $U \Subset \varphi(Q)$. Das

gilt im übrigen genauso für jede stetige Surjektion von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum. Aus unseren Annahmen folgt für $V \subset Q^\circ$ jedoch bereits $V = \varphi^{-1}(\varphi(V))$. Aus $V \Subset Q^\circ$ folgt mithin $\varphi^{-1}(\varphi(V)) \Subset Q^\circ$ und dann $\varphi^{-1}(\varphi(V)) \Subset Q$ und nach der Vorüberlegung $\varphi(V) \Subset \varphi(Q)$ und a fortiori $\varphi(V) \Subset \varphi(Q^\circ)$.

Beispiel 5.5.6. Wir erinnern unser Beispiel für eine Abbildung eines offenen Intervalls in die Ebene mit einer Figur 6 mit „offenem Ende“ als Bild, die injektiv ist aber kein Homöomorphismus auf ihr Bild. Es ist nicht möglich, sie auf das abgeschlossene Intervall Q so auszudehnen, daß gilt $\varphi(Q^\circ) \cap \varphi(\partial Q) = \emptyset$. Das mag zur Illustration der vorhergehenden Argumentation dienen.

Definition 5.5.7. Seien $k \in \mathbb{N}$ und X ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Unter einer k -**Integrationskarte** von M verstehen wir eine k -Integrationskarte $\varphi : Q \rightarrow X$ nach X mit $\varphi(Q) \subset M$ und $\varphi(Q^\circ) \Subset M$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heiße eine k -**Fast-Mannigfaltigkeit** oder abkürzend **Fastfaltigkeit**, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine k -Integrationskarte (Q, φ) von M gibt mit $p \in \text{Inn}_M(\varphi(Q))$.

Beispiele 5.5.8. Die Oberfläche eines Würfels ist eine 2-Fastfaltigkeit. Wir können sie sogar als das Bild einer einzigen Integrationskarte erhalten, deren Definitionsbereich eine disjunkte Vereinigung von sechs kompakten Rechtecksflächen in \mathbb{R}^2 ist. Jede k -Mannigfaltigkeit ist eine k -Fastfaltigkeit. Das Bild einer k -Integrationskarte ist stets eine k -Fastfaltigkeit. Der Mercedesstern ist ein schmutziges Beispiel für eine 1-Fastfaltigkeit. Eine Eiswaffel ist ein besonders schmutziges Beispiel für eine 2-Fastfaltigkeit. Jede offene Teilmenge $U \Subset M$ einer k -Fastfaltigkeit M ist wieder eine k -Fastfaltigkeit und Integrationskarten von U sind auch Integrationskarten von M .



Eine 1-Fastfaltigkeit in der Papierebene und eine surjektive Integrationskarte derselben mit einer disjunkten Vereinigung von vier kompakten Intervallen als Definitionsbereich.

5.5.9 (Diskussion der Terminologie). Die hier eingeführten Begriffe „Integrationskarte“ und „Fastfaltigkeit“ kenne ich nicht aus der Literatur. Sie sind das Ergebnis meiner Bemühungen, einen begrifflichen Rahmen bereitzustellen, in dem

den aus der Schulzeit bekannten Figuren in der vollen Exaktheit dieser Vorlesung eine Oberfläche zugeordnet und berechnet werden kann. Für diesen Zweck scheint mir die hier eingeführte Begrifflichkeit praktisch und angemessen.

Satz 5.5.10 (Integration über Fastfaltigkeiten). *Gegeben eine k -Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine Linearform auf dem Raum ihrer stetigen kompakt getragenen Funktionen*

$$\int_M : \mathcal{C}_l(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

derart, daß für jede k -Integrationskarte (Q, φ) von M und jede stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit Träger im Bild besagter Integrationskarte $\text{supp } f \subset \varphi(Q)$ gilt

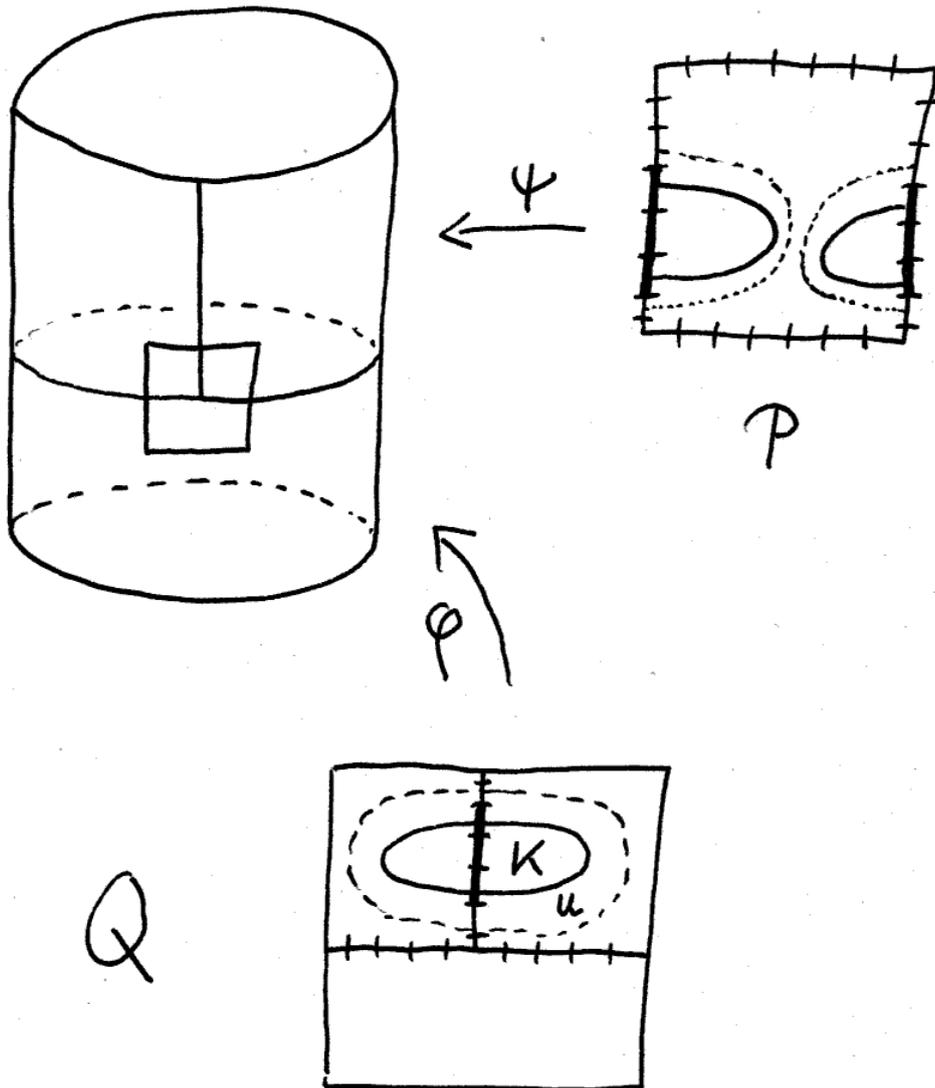
$$\int_M f = \int_Q f(\varphi(x)) \sqrt{\det (d_x \varphi)^\top (d_x \varphi)} \, d^k x$$

5.5.11. Das Integral über eine endliche Vereinigung Q von paarweise disjunkten kompakten Quadern ist hierbei zu verstehen als die Summe der Integrale über die einzelnen Quader. Im Fall einer Mannigfaltigkeit stimmt unser neues Integral offensichtlich mit dem bereits in 5.3.1 definierten Integral über Mannigfaltigkeiten überein. In diesem Fall finden wir ja eine Überdeckung durch Bilder von Integrationskarten, deren Restriktion auf die Inneren der jeweiligen Definitionsbereiche eine Überdeckung durch Bilder von Karten ist. Im Spezialfall $k = n$ einer n -Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ notieren wir unser Integral $\int_M f(x) \, d^n x$. Für diesen Fall werden wir in [AN3] 1.6.1 die Verallgemeinerung zum sogenannten „Lebesgue-Maß“ kennenlernen, die Kompatibilität beider Volumenbegriffe wird in [AN3] 1.9.5 diskutiert. Auch im Fall $k < n$ werden wir in [AN3] 1.9.3 noch derartige Verallgemeinerungen kennenlernen.

5.5.12 (**Inkonsistenzen der Notation**). Ein kompakter Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit leerem Inneren ist eine k -Fastfaltigkeit für geeignetes $k < n$. In diesem Fall verschwindet unser Quaderintegral $\int_Q f$ aus 3.1.4 und im allgemeinen verschieden vom Integral $\int_Q f$ über die k -Fastfaltigkeit Q . Der Leser muß manchmal also aus dem Kontext erschließen, welcher Integralbegriff mit $\int_Q f$ gemeint ist.

5.5.13. Die **Fläche** einer kompakten Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ erklären wir als das Integral $\int_M 1$ der konstanten Funktion Eins. Den Bezug dieser Definition zur Anschauung stellt die Beschreibung als Grenzwert von Riemannsummen 5.3.7 her. Umgangssprachlich würde man nur bei einer 2-Fastfaltigkeit von ihrer Fläche reden, aber wir verwenden diese Terminologie auch im allgemeinen.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Als Kompaktum besitzt $\text{supp } f$ nach 5.5.7 eine Überdeckung $\text{supp } f \subset \text{Inn}_M(\varphi_1(Q_1)) \cup \dots \cup \text{Inn}_M(\varphi_r(Q_r))$ durch die Inneren von Bildern von endlich vielen Integrationskarten (Q_i, φ_i) von



Zum Beweis der Unabhängigkeit des Integrals von der Integrationskarte

M . Wählen wir eine daran angepaßte Teilung der Eins, so folgt die Eindeutigkeit wie im Fall von Mannigfaltigkeiten 5.3.1. Um die Existenz nachzuweisen, argumentieren wir weiter wie im Fall von Mannigfaltigkeiten. Wir müssen dann nur noch zeigen, daß gegeben zwei Integrationskarten (Q, φ) und (P, ψ) von M und eine Funktion $f \in \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$ mit Träger im Bild beider Integrationskarten $\text{supp } f \subset \varphi(Q) \cap \psi(P)$ gilt

$$\int_Q f(\varphi(x)) \text{vol}(d_x \varphi) d^k x = \int_P f(\psi(y)) \text{vol}(d_y \psi) d^k y$$

Hier verwenden wir wieder unsere Abkürzung $\text{vol}(d_x \varphi) = \sqrt{\det (d_x \varphi)^\top (d_x \varphi)}$. Im Fall $(\text{supp } f) \subset \varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ)$ folgt obige Gleichheit unmittelbar aus dem bereits behandelten Fall der Integration über Mannigfaltigkeiten, angewandt auf die Mannigfaltigkeit $\varphi(Q^\circ) \cup \psi(P^\circ)$. Im allgemeinen Fall haben wir wegen unserer Annahme an Integrationskarten $\psi(\partial P) \sqcup \psi(P^\circ) = \psi(P) \not\subset M$ und folglich eine Zerlegung

$$Q = A \sqcup \varphi^{-1}(\psi(\partial P)) \sqcup \varphi^{-1}(\psi(P^\circ))$$

mit der Notation A für „den Rest“. Wir führen weitere abkürzende Notationen ein und schreiben unsere Zerlegung $Q = A \sqcup S \sqcup U$. Sicher gilt dann $A \Subset Q$, $S \not\subset Q$ und $U \Subset Q$. In derselben Weise bilden wir eine Zerlegung $P = B \sqcup T \sqcup V$. Zu zeigen ist eine Gleichheit

$$\int_Q g = \int_P h$$

von Integralen stetiger Funktionen $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g|_A = 0$ und $h|_B = 0$ und der Eigenschaft, daß es einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus

$$\kappa : Q^\circ \cap U \xrightarrow{\sim} P^\circ \cap V$$

gibt mit $g = (h \circ \kappa) |\det d\kappa|$ auf $Q^\circ \cap U$, nämlich den Kartenwechsel. Wir weisen nun geeignete „Kleinheitseigenschaften“ für S und T nach, mit deren Hilfe es dann gelingt, obige Gleichheit zu zeigen. Für $\varepsilon > 0$ bezeichne Q_ε die Menge aller Punkte von Q , die zum Komplement von Q einen Abstand $\leq \varepsilon$ haben. Wir zeigen die Abschätzung

$$\text{mdim}(S \cap Q_\varepsilon) < k \quad \forall \varepsilon > 0$$

Per definitionem haben wir $S = \varphi^{-1}(\psi(\partial P))$. Nach 5.4.3 hat ∂P Minkowskidimension $< k$, also hat nach 5.4.5 auch $\psi(\partial P)$ Minkowskidimension $< k$. Andererseits ist $\varphi(Q^\circ)$ eine Mannigfaltigkeit mit Karte $\varphi : Q^\circ \rightarrow \varphi(Q^\circ)$. Das durch diese Karte gegebene Koordinatensystem auf $\varphi(Q^\circ)$ besitzt nach 4.4.9 um jeden Punkt von $\varphi(Q^\circ)$ eine lokale Erweiterung zu einem lokalen Koordinatensystem

von \mathbb{R}^n . Als Bild eines Kompaktums ist $\varphi(Q_\varepsilon)$ kompakt und besitzt also eine endliche Überdeckung

$$\varphi(Q_\varepsilon) \subset B_1 \cup \dots \cup B_r$$

durch offene Bälle von positivem Radius $B_i \Subset \mathbb{R}^n$ derart, daß es \mathcal{C}^1 -Abbildungen $\chi_i : \bar{B}_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ gibt mit $\chi_i(\varphi(p)) = p \forall p \in Q^\circ \cap \varphi^{-1}(B_i)$. Wir haben also

$$S \cap Q_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^r \chi_i(\bar{B}_i \cap \psi(\partial P))$$

Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir zusammenfassend

$$\begin{aligned} \text{mdim}(\partial P) < k \text{ nach 5.4.3} &\Rightarrow \text{mdim}(\psi(\partial P)) < k \text{ nach 5.4.5} \\ &\Rightarrow \text{mdim}(\chi_i(\bar{B}_i \cap \psi(\partial P))) < k \text{ nach 5.4.5} \\ &\Rightarrow \text{mdim}(S \cap Q_\varepsilon) < k \text{ nach 5.4.4.} \end{aligned}$$

Nach Übung [AN3] 1.7.23 wäre damit $S \cap Q_\varepsilon$ eine „Lebesgue-Nullmenge“ und damit wären auch S und analog T selbst Nullmengen als abzählbare Vereinigungen von Nullmengen und der Beweis im Rahmen der Lebesgue-Theorie wäre fertig, vergleiche [AN3] 1.8.10. Wir wollen jedoch hier die Gleichheit

$$\int_Q g = \int_P h$$

ohne Lebesgue-Theorie zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $g \geq 0$ und $h \geq 0$ annehmen. Sicher reicht es für $g \geq 0$ mit $g|_A = 0$ zu zeigen

$$\int_Q g = \sup \left\{ \int_Q \beta g \mid \beta \in \mathcal{C}_1(Q^\circ \cap U, [0, 1]) \right\}$$

Sicher reicht es weiter, für $g \geq 0$ mit $g|_A = 0$ und alle $\varepsilon > 0$ zu zeigen

$$\int_{Q_\varepsilon} g = \sup \left\{ \int_{Q_\varepsilon} \beta g \mid \beta \in \mathcal{C}_1(Q_\varepsilon^\circ \cap U, [0, 1]) \right\}$$

Das aber folgt unmittelbar aus dem anschließenden Lemma 5.5.14, angewandt auf K einen der Quader, aus denen Q_ε besteht, mit $R := (S \cap K) \cup \partial K$. \square

Lemma 5.5.14 (Minkowskidimension und Integral). *Seien $K \subset \mathbb{R}^k$ ein kompakter Quader und $g : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative stetige Funktion. Hat $R \subset K$ Minkowskidimension $\text{mdim}(R) < k$, so gilt*

$$\int_K g = \sup \left\{ \int_K \beta g \mid \beta : K \rightarrow [0, 1] \text{ stetig mit } (\text{supp } \beta) \cap R = \emptyset \right\}$$

Beweis. Nach Annahme gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung $R \subset W_1 \cup \dots \cup W_r$ durch kompakte Würfel in \mathbb{R}^k mit einer festen gemeinsamen Kantenlänge und Gesamtvolumen $\sum_{i=1}^r \text{vol}(W_i) < \varepsilon$. Wir können sicher jeden dieser Würfel vergrößern zu einem offenen Würfel $U_i \supset W_i$ derart, daß gilt $\sum_{i=1}^r \text{vol}(U_i) < 2\varepsilon$. Dann bilden $U := \bigcup U_i$ und $V := \mathbb{R}^k \setminus \bigcup W_i$ eine offene Überdeckung von \mathbb{R}^k und für $h \in \mathcal{C}_1(U; \mathbb{R}_{\geq 0})$ gilt offensichtlich $\int h \leq 2\varepsilon \sup h$. Andererseits gibt es nach unseren Erkenntnissen zur Teilung der Eins 5.2.14 Funktionen $\alpha \in \mathcal{C}_1(U; [0, 1])$ und $\beta \in \mathcal{C}_1(V; [0, 1])$ mit $\alpha(x) + \beta(x) = 1 \forall x \in K$. Wir finden so

$$\int_K g = \int_K \alpha g + \int_K \beta g$$

mit $\int_K \alpha g \leq 2\varepsilon(\sup g)$ und $(\text{supp } \beta) \cap R = \emptyset$. Das zeigt die Behauptung. \square

5.5.15 (Integration über Fastfaltigkeiten in euklidischen Räumen). Gegeben ein endlichdimensionaler euklidischer Raum mit Längengerade \mathbb{L} im Sinne von [LA2] 3.1.10 liefern die analogen Definitionen für jedes k -Tupel von Vektoren v_1, \dots, v_k ein Element

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_k) = \sqrt{\det(s(v_i, v_j))} \in \mathbb{L}^{\otimes k}$$

Weiter liefern die analogen Definitionen für jede k -Fastfaltigkeit $M \subset X$ ein Integral

$$\int_M : \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes k}$$

Die **Fläche** einer kompakten Fastfaltigkeit $M \subset X$ erklären wir wieder als das Integral der konstanten Funktion Eins und erhalten so ein Element $\int_M 1 \in \mathbb{L}^{\otimes k}$. So gesehen messen sich also auch in der Mathematik „Längen in Metern, Flächen in Quadratmetern und Volumen in Kubikmetern“. Betrachten wir noch allgemeiner Funktionen mit Werten in einem Banachraum V , so wird unser Integral noch allgemeiner zu einer Abbildung $\int_M : \mathcal{C}_1(M, V) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes k} \otimes V$.

Übungen

Übung 5.5.16. Sind $M \subset \mathbb{R}^m$ sowie $N \subset \mathbb{R}^n$ Fastfaltigkeiten und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ kompakt getragene stetige Funktionen, so ist auch $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine Fastfaltigkeit und $f \boxtimes g : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ eine kompakt getragene stetige Funktion und es gilt

$$\int_{M \times N} f \boxtimes g = \left(\int_M f \right) \left(\int_N g \right)$$

5.6 Explizite Berechnung einiger Integrale

Beispiel 5.6.1 (Integration über eine Kreislinie). Gegeben $R > 0$ ist die Kreislinie $S := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R\}$ eine kompakte Einsmannigfaltigkeit in \mathbb{R}^2 . Die Abbildung $[0, 2\pi] \rightarrow S$ mit $\vartheta \mapsto (R \cos \vartheta, R \sin \vartheta)$ ist eine surjektive Integrationskarte von S . Gegeben $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig zeigt unser Satz 5.5.10 zur Integration über Fastfaltigkeiten folglich

$$\int_S f = \int_0^{2\pi} f(R \cos \vartheta, R \sin \vartheta) R \, d\vartheta$$

Beispiel 5.6.2 (Übergang zu Polarkoordinaten, Variante). Gegeben $R > 0$ ist die Kreisscheibe $D := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R\}$ eine kompakte 2-Fastfaltigkeit in \mathbb{R}^2 und die Polarkoordinatenabbildung $P : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow D$ gegeben durch $P : (r, \vartheta)^\top \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)^\top$ ist eine surjektive Integrationskarte von D . Gegeben $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig zeigt unser Satz 5.5.10 zur Integration über Fastfaltigkeiten folglich

$$\int_D f = \int_Q f \circ P \, |dP| = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r \, dr \, d\vartheta$$

Beispiel 5.6.3 (Oberfläche der Einheitskugel). Die Kugelschale

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ist eine kompakte Mannigfaltigkeit und unser Satz 5.3.1 ordnet ihr eine Zahl $\int_{S^2} 1$ zu, die wir als ihre Oberfläche interpretieren. Um sie zu berechnen, wenden wir unseren Satz 5.5.10 zur Integration über Fastfaltigkeiten an auf die surjektive Integrationskarte

$$K : \begin{array}{l} [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi, \pi] \rightarrow S^2 \\ (\theta, \varphi) \mapsto (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta) \end{array}$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich zu

$$dK = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten als Gram'sche Matrix

$$(dK)^\top (dK) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

Die Wurzel aus der Determinante der Gram'schen Matrix ergibt sich damit zu $\cos \theta$ und wir folgern für jede stetige Funktion $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel

$$\int_{S^2} f = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta) \cos \theta \, d\theta \, d\varphi$$

Wenden wir unsere Formel auf die konstante Funktion Eins an, so erhalten wir für die Oberfläche der Einheitskugel das Ergebnis

$$\int_{S^2} 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi$$

Beispiel 5.6.4 (Schwerpunkt einer Halbkugel). Wir berechnen die Höhe des Schwerpunkts der massiven Halbkugel $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}$. Per definitionem ist das diejenige Zahl $h \in \mathbb{R}$, für die gilt $\int_H (z-h) = 0$, so daß wir unter Zuhilfenahme von 5.6.7 erhalten

$$h \frac{2\pi}{3} = h \int_H 1 = \int_H z$$

Durch Übergang zu Kugelkoordinaten 5.2.17 folgt

$$\begin{aligned} \int_H z &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \vartheta) r^2 \sin(\vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= 2\pi \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \, d\vartheta \right) \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2\vartheta) \, d\vartheta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{-\cos(2\vartheta)}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

womit sich die Höhe des Schwerpunkts ergibt zu $h = 3/8$.

Beispiel 5.6.5 (Trägheitsmoment der Einheitskugel). Wir integrieren die Funktion $x^2 + y^2$ über die Einheitskugel $K := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Physikalisch Gebildete erkennen, daß wir hier im wesentlichen das Trägheitsmoment der Einheitskugel um die z -Achse berechnen, aber das spielt in unserer Rechnung keine Rolle. Durch Übergang zu Kugelkoordinaten 5.2.17 und mit [AN1] 12.4.5.34 erhalten wir

$$\int_K x^2 + y^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^4 \sin^3(\vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{8\pi}{15}$$

Ergänzung 5.6.6. Es sollte wohl irgendwann einmal gezeigt werden, daß mit der in [FT1] 16.5.4.1 definierten Interpolation $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ der Zuordnung $n \mapsto (n-1)!$ und der Konvention $x! := \Gamma(x+1)$ gilt

$$(\text{Volumen der Einheitskugel im } \mathbb{R}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}$$

Diese Formel kann mithilfe der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ aus [FT1] 16.5.4.1 und der Erkenntnis $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ aus [FT1] 16.5.4.5 auch leicht in eine etwas weniger elegante Formel umgeschrieben werden, in der die Γ -Funktion nicht mehr auftritt.

Übungen

Übung 5.6.7. Man zeige, daß die Einheitskugel in \mathbb{R}^3 das Volumen $4\pi/3$ hat.

Übung 5.6.8. Man berechne das Integral der Funktion $(xyz)^2$ über die Einheitskugel in \mathbb{R}^3 .

Übung 5.6.9 (Oberfläche eines Rotationskörpers). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges kompaktes Intervall und $f : I \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Man zeige, daß die **Mantelfläche** $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I, x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$ eine kompakte 2-Fastfaltung in \mathbb{R}^3 ist mit der Fläche

$$\int_M 1 = 2\pi \int_I f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz$$

Die anschauliche Bedeutung unserer Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers erkennt man, wenn man unsere Rotationsfläche durch eine Vereinigung von dünnen Bändern der Gestalt „oberer Ränder von Eiswaffeln“ approximiert.

Übung 5.6.10 (Volumen eines Rotationskörpers). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges kompaktes Intervall und $f : I \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Man zeige, daß der **Rotationskörper** $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I, x^2 + y^2 \leq (f(z))^2\}$ eine kompakte 3-Fastfaltung in \mathbb{R}^3 ist mit dem Volumen

$$\int_M 1 = \pi \int_I f(z)^2 dz$$

Die anschauliche Bedeutung unserer Formel für das Volumen eines Rotationskörpers erkennt man, wenn man unseren Rotationskörper durch eine Vereinigung von dünnen Scheiben approximiert.

Übung 5.6.11. Gegeben eine kompakte k -Fastfaltung $M \subset \mathbb{R}^n$ und $A \in O(n)$ zeige man

$$\int_M 1 = \int_{A(M)} 1$$

Insbesondere und in Worten bleibt also beim Drehen und Verschieben von Flächen im Raum ihre Oberfläche unverändert.

6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

6.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

6.1.1 (**Unterscheidung in gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen**). Ganz allgemein versteht man unter einer **gewöhnlichen Differentialgleichung** eine Gleichung, in der die Ableitungen einer zu bestimmenden Funktion *einer* Veränderlichen zueinander und mit der Veränderlichen selbst in Beziehung gesetzt werden. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$(f''(t))^2 f'(t) + t f(t) = t^2$$

für eine zu bestimmende zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Im Gegensatz dazu steht terminologisch der allgemeinere Fall der **partiellen Differentialgleichungen**, bei denen die partiellen Ableitungen einer Funktion *mehrerer* Veränderlichen auftreten. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

für eine zweimal partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Auf Englisch benutzt man die Abkürzungen **ODE** für **ordinary differential equation** und **PDE** für **partial differential equation**. Wir besprechen in diesem Abschnitt nur gewöhnliche Differentialgleichungen. Rein formal ist dieser Abschnitt unabhängig von der Behandlung linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in [AN1] 12.7.2.8 folgende. Ich denke jedoch, daß eine gewisse Vertrautheit mit diesen einfachsten und wichtigsten Spezialfällen es sehr erleichtern kann, die im folgenden zu entwickelnde allgemeine Theorie zu verstehen.

6.1.2 (**Unterscheidung in explizite und implizite Differentialgleichungen**). Die Ordnung der höchsten in einer gewöhnlichen Differentialgleichung auftretenden Ableitung heißt die **Ordnung** unserer Differentialgleichung. Von einer **expliziten** Gleichung spricht man, wenn in unserer Gleichung die Ableitung höchster Ordnung „explizit durch die tieferen Ableitungen ausgedrückt wird“. Andernfalls spricht man von einer **impliziten** Gleichung. Bei unserem obigen Beispiel handelt es sich also um eine implizite Gleichung. Wir werden uns im folgenden jedoch nur mit expliziten gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen. Eine derartige explizite Gleichung der Ordnung n hat, wenn wir von der Spezifikation allgemeinstmöglicher Definitionsbereiche einmal absehen, die Gestalt

$$f^{(n)}(t) = C(t, f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t))$$

mit einer Abbildung $C : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht sind alle Funktionen $f : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ auf mehrpunktigen reellen Intervallen I , die n -mal differenzierbar sind und eben diese Gleichung erfüllen.

6.1.3 (Reduktion auf Systeme erster Ordnung). Etwas allgemeiner betrachten wir zugleich auch **Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen**, bei denen vektorwertige Funktionen $f = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^k$ gesucht werden derart, daß eine Gleichung der obigen Gestalt gilt, die nun aber eine vektorwertige Gleichung meint mit einer fest vorgegebenen vektorwertigen Abbildung $C : \mathbb{R}^{kn+1} \rightarrow \mathbb{R}^k$, die auf $(n+1)$ -Tupeln bestehend aus einer reellen Zahl und n Vektoren definiert ist. Die Betrachtung von *Systemen* gewöhnlicher Differentialgleichungen erlaubt uns zumindest für Fragen des allgemeinen Lösungsverhaltens die Beschränkung auf den Fall erster Ordnung. Um zu zeigen, wie diese Reduktion funktioniert, betrachten wir beispielhaft den Fall einer Gleichung dritter Ordnung

$$f'''(t) = C(t, f(t), f'(t), f''(t))$$

mit $C : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Jede Lösung $f : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ liefert sicher eine Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mittels der Vorschrift $\phi(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$ und natürlich gilt dann

$$\begin{aligned}\phi_1'(t) &= \phi_2(t) \\ \phi_2'(t) &= \phi_3(t) \\ \phi_3'(t) &= C(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))\end{aligned}$$

Erklären wir nun also eine neue Abbildung $B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch die Vorschrift $B(t, x, y, z) = (y, z, C(t, x, y, z))$, so ist unser ϕ eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\phi'(t) = B(t, \phi(t))$$

Umgekehrt zeigt man leicht, daß für jede Lösung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dieses Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung die erste Komponente $\phi_1(t) = f(t)$ eine Lösung unserer ursprünglichen Gleichung dritter Ordnung liefert. In derselben Weise kann auch im Allgemeinen die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung auf den Fall von Systemen erster Ordnung zurückgeführt werden. Anschaulich mag man sich dann B als ein zeitabhängiges Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^n denken, das jedem Ort $x \in \mathbb{R}^n$ zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ einen Vektor $B(t, x) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. In dieser Anschauung beschreibt eine Lösung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Bewegung eines Teilchens, das zu jedem Zeitpunkt t die für seinen Ort $\phi(t)$ zu diesem Zeitpunkt durch unser zeitabhängiges Vektorfeld B vorgegebene Geschwindigkeit $\phi'(t) = B(t, \phi(t))$ hat.

6.1.4 (Reduktion auf den zeitunabhängigen Fall). Gegeben $B : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ löst eine differenzierbare Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ unsere Differentialgleichung

$$\phi'(t) = B(t, \phi(t))$$

genau dann, wenn die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $t \mapsto (t, \phi(t))$ die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = A(\gamma(t))$$

löst für $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben durch $A(t, x) := (1, B(t, x))$. In diesem Sinne können wir uns also stets auf den Fall zeitunabhängiger Felder zurückziehen. Eine graphische Darstellung dieser Erkenntnis geben wir in 6.1.10. Allerdings erhält man für zeitabhängige Felder bei einer eigenständigen Betrachtung etwas schärfere Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen, weshalb dieser Fall insbesondere in einigen Ergänzungen weiter betrachtet werden wird. Zunächst konzentrieren wir uns nun jedoch auf den zeitunabhängigen Fall und besprechen seine geometrische Bedeutung in einer koordinatenfreien Sprache.

6.1.5. Unter einem **Vektorfeld** auf einer Teilmenge $U \subset X$ eines affinen Raums X verstehen wir eine Abbildung $A : U \rightarrow \vec{X}$ von U in den Richtungsraum von X . Statt $A(p)$ schreiben wir in diesem Kontext auch oft A_p .

Definition 6.1.6. Seien X ein normierter reeller Raum und $A : X \supset U \rightarrow \vec{X}$ ein Vektorfeld. Ein **Flußweg** unseres Vektorfelds ist eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow U$ von einem mehrpunktigen reellen Intervall I nach U mit der Eigenschaft, daß physikalisch gesprochen zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ die Geschwindigkeit unseres Flußwegs zum Zeitpunkt t der durch das Vektorfeld vorgegebene Richtungsvektor an der Stelle $\gamma(t)$ ist, in Formeln

$$\gamma'(t) = A(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Ist $p \in U$ gegeben, so verstehen wir unter einem **Flußweg mit Anfangswert** p oder kurz einem **Flußweg zu** p einen Flußweg (γ, I) mit $0 \in I$ und $\gamma(0) = p$.

6.1.7. Auf der Menge aller Flußwege eines Vektorfelds erklären wir eine Teilordnung durch die Vorschrift, daß ein Flußweg kleinergleich einem anderen ist, wenn er aus ihm durch Einschränkung des Definitionsbereichs hervorgeht. Die maximalen Elemente dieser Menge nennen wir **maximale Flußwege**. Ein maximaler Flußweg ist also ein Flußweg, der nicht zu einem auf einem echt größeren reellen Intervall definierten Flußweg erweitert werden kann. Mit dem Zorn'schen Lemma sieht man unmittelbar, daß jeder Flußweg zu einem maximalen Flußweg erweitert werden kann. Das größte Element in der Menge aller Flußwege zu einem vorgegebenen Anfangswert nennen wir dahingegen, wenn es denn existiert, den **größten Flußweg** zu dem vorgegebenen Anfangswert. Das ist dann natürlich auch ein maximaler Flußweg unseres Vektorfelds und sogar der einzige maximale Flußweg zum vorgegebenen Anfangswert. Es kann aber durchaus vorkommen, daß es zu einem vorgegebenen Anfangswert zwar Flußwege gibt, aber keinen größten Flußweg, sondern stattdessen mehrere maximale Flußwege.

6.1.8 (**Diskussion der Terminologie**). In der Literatur heißen unsere Flußwege meist **Integralkurven**. Das paßt aber schlecht zu unserer Terminologie, nach der Kurven gewisse Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume und allgemeiner eindimensionale Mannigfaltigkeiten bezeichnen.

Beispiel 6.1.9. Ist unser Vektorfeld konstant, so laufen seine Flußwege auf den Geraden mit diesem konstanten Vektor als Richtungsvektor und mit der durch diesen Vektor vorgegebenen konstanten Geschwindigkeit. Ist unser Vektorfeld auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum $X = V$ gegeben durch eine lineare Abbildung $A \in \text{End } V$ oder genauer durch $\text{trans} \circ A$, so haben wir bereits in [AN1] 12.7.2.6 gezeigt, daß seine maximalen Flußwege genau die Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow V, t \mapsto \exp(tA)c$ sind mit $c \in V$.

6.1.10 (**Geometrische Interpretation im zeitabhängigen Fall**). Gegeben ein normierter reeller Raum X fassen wir eine Abbildung $A : (\mathbb{R} \times X) \supset W \rightarrow \vec{X}$ gerne als ein **zeitabhängiges Vektorfeld** auf und veranschaulichen uns die Lösungen der Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = A(t, \gamma(t))$$

in dieser Weise. Unter einem **Flußweg** verstehen wir in diesem Fall eine differenzierbare Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow X$ von einem mehrgliedrigen reellen Intervall I nach X mit $(t, \gamma(t)) \in W \forall t \in I$ derart, daß obige Gleichung erfüllt ist für alle $t \in I$. Gegeben $(s, p) \in W$ verstehen wir unter einem **Flußweg mit Anfangswert p zum Startzeitpunkt s** einen Flußweg (γ, I) mit $s \in I$ und $\gamma(s) = p$. Dieselbe Terminologie verwenden wir auch für zeitunabhängige Vektorfelder $A : X \supset U \rightarrow \vec{X}$, die wir als Spezialfall mit $W = \mathbb{R} \times U$ auffassen und bei denen wir a priori den Startzeitpunkt $s = 0$ wählen.

6.1.11 (**Zeitverschiebung**). Gegeben ein Vektorfeld auf einer halboffenen Teilmenge eines normierten reellen Raums und ein Flußweg (γ, I) ist für alle $c \in \mathbb{R}$ auch die Abbildung $t \mapsto \gamma(t + c)$ ein Flußweg, der nun eben definiert ist auf dem verschobenen Intervall $I - c$. Das gilt im Fall zeitabhängiger Vektorfelder allerdings nicht mehr.

6.1.12 (**Verwandtschaft von Vektorfeldern**). Gegeben halboffene Teilmengen normierter affiner Räume $U \subset X$ und $V \subset Y$ sowie Vektorfelder $A : U \rightarrow \vec{X}$ und $B : V \rightarrow \vec{Y}$ sowie eine differenzierbare Abbildung $\phi : U \rightarrow V$ schreiben wir

$$\phi : A \rightsquigarrow B$$

und sagen, unsere Vektorfelder seien **verwandt unter ϕ** , wenn für alle $p \in U$ gilt $d_p \phi : A(p) \mapsto B(\phi(p))$. Ist ϕ ein Diffeomorphismus, so hat jedes Vektorfeld A auf U genau einen Vorwärtsverwandten B auf V und jedes Vektorfeld B auf

V genau einen Rückwärtsverwandten A auf U . Im allgemeinen müssen weder Vorwärtsverwandte noch Rückwärtsverwandte existieren und wenn sie existieren, müssen sie im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein.

6.1.13 (Verwandtschaftsverträglichkeit von Flußwegen). Offensichtlich haben verwandte Vektorfelder verwandte Flußwege. Ist genauer unter einer differenzierbaren Abbildung ϕ ein Vektorfeld A verwandt zu einem Vektorfeld B , so ist für jeden Flußweg γ von A auch $\phi \circ \gamma$ ein Flußweg von B . Ist insbesondere ein Vektorfeld A unter einer stetig differenzierbaren Abbildung ϕ verwandt zum Nullfeld, in Formeln $\phi : A \rightsquigarrow 0$, und ist γ ein Flußweg von A , so ist $\phi \circ \gamma$ ein Flußweg des Nullfelds und mithin konstant. In anderen Worten ist dann die Funktion ϕ konstant auf jedem Flußweg von A . Eine reellwertige derartige Funktion ϕ heißt ein **erstes Integral** unserer Differentialgleichung. In physikalischen Modellen liefern oft Energie, Impuls und Drehimpuls solche ersten Integrale.

Übungen

Übung 6.1.14. Man gebe ein glattes Vektorfeld auf \mathbb{R} an, das keine auf ganz \mathbb{R} definierten Flußwege besitzt.

Übung 6.1.15. Man zeige für jedes Vektorfeld $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $A(p) \perp p \forall p \in \mathbb{R}^n$, daß seine Flußwege γ auf Sphären mit Zentrum im Ursprung verlaufen müssen, in Formeln $\|\gamma(t)\|$ konstant.

Übung 6.1.16. Seien $A : X \ni U \rightarrow \vec{X}$ ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines affinen Raums und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Man zeige: Gilt für die Richtungsableitungen $(D_{A(p)}f)(p) \geq 0 \forall p \in U$, so ist $f(\gamma(t))$ monoton wachsend für alle Flußwege γ unseres Vektorfelds. Gilt $(D_{A(p)}f)(p) > 0 \forall p \in U$, so ist $f(\gamma(t))$ analog streng monoton wachsend.

Übung 6.1.17. Seien $A : X \ni U \rightarrow \vec{X}$ ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines affinen Raums und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und sei die Null ein regulärer Wert von f , so daß $M := f^{-1}(0)$ eine Hyperfläche ist. Gilt $(d_p f)(A(p)) < 0 \forall p \in M$ und ist $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow U$ ein Flußweg von A , so folgt aus $f(\gamma(t)) \leq 0$ für ein $t \in I$ bereits $f(\gamma(s)) < 0$ für alle $s \in I$ mit $s \geq t$. Anschaulich gesprochen kann also ein Flußweg die Hyperfläche M nur höchstens einmal kreuzen und muß dabei von der Seite $f > 0$ auf die Seite $f < 0$ wechseln. Hinweis: [AN1] 12.5.5.24.

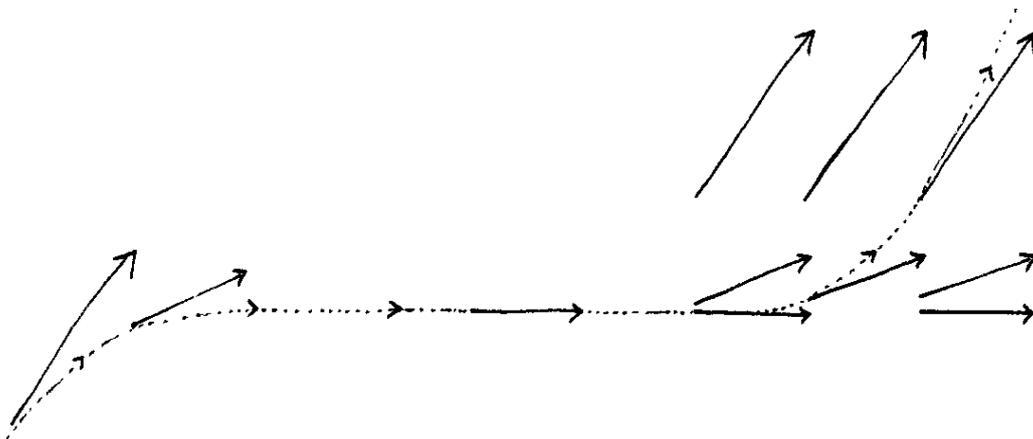
6.2 Beispiele und Gegenbeispiele

Satz 6.2.1 (Picard-Lindelöf). 1. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines reellen Raums endlicher Dimension gibt es zu jedem Anfangswert einen größten Flußweg;

2. Dieser größte Flußweg hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist dieses Intervall nach oben beschränkt, so verläßt der fragliche Flußweg für positive Zeiten jedes Kompaktum aus unserer offenen Teilmenge irgendwann einmal endgültig.

6.2.2. Wir zeigen diesen Satz als 6.4.9 sogar unter noch etwas schwächeren Voraussetzungen. Der letzte Teil der zweiten Aussage besagt salopp formuliert, daß der Grund dafür, daß sich ein Flußweg nicht beliebig weit in Richtung positiver Zeiten fortsetzen läßt, nur darin liegen kann, daß er bereits in endlicher Zeit „aus dem Definitionsbereich des Vektorfeldes hinausläuft“. Entsprechendes gilt in Richtung negativer Zeiten, was man durch Betrachtung des mit (-1) multiplizierten Vektorfeldes auch formal leicht folgern kann.

Beispiel 6.2.3 (Ein Fall mit nicht eindeutigen Flußwegen). Bei Vektorfeldern, die nicht stetig differenzierbar sind, kann es durchaus vorkommen, daß zu einem vorgegebenen Anfangswert kein größter Flußweg existiert, weil etwa mehrere maximale Flußwege mit ein und demselben Anfangswert existieren, die auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche nicht übereinstimmen. Betrachten wir zum Beispiel auf \mathbb{R}^2 das Vektorfeld A , für das sämtliche verschobenen Kubiken $\gamma_c(t) = (t + c, t^3)$ Flußwege sind. Wir haben $\gamma'_c(t) = (1, 3t^2)$ und damit $A(x, y) = (1, 3|y|^{2/3})$. Maximale Flußwege sind in diesem Fall nicht nur die verschobenen Kubiken γ_c , sondern auch alle Wege, die längs einer verschobenen Kubik auf die x -Achse hochsteigen und dann eine Weile auf der x -Achse entlanglaufen bevor



Das ebene stetige aber nicht stetig differenzierbare Vektorfeld aus Beispiel 6.2.3 mit einem seiner Flußwege

sie auf einer anderen verschobenen Kubik weitersteigen. In diesem Fall existie-

ren zwar maximale Flußwege zu jedem Punkt, von Eindeutigkeit kann aber keine Rede sein.

Beispiel 6.2.4 (Der Fall eindimensionaler Felder ohne Nullstellen). Gegeben ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf einer offenen Teilmenge eines eindimensionalen Raums gibt es zu jedem Anfangswert genau einen maximalen Flußweg. In diesem Fall brauchen wir also von unserem Vektorfeld nicht einmal stetige Differenzierbarkeit zu fordern. In der Tat sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und unser stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen zeige in Richtung der positiven x -Achse, als da heißt, es werde gegeben durch $a : U \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Flußwege sind auf mehrpunktigen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktionen $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow U$ mit

$$\gamma'(t) = a(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Aus dieser Gleichung folgt für alle $s, t \in I$ sofort

$$t - s = \int_s^t \frac{\gamma'(\tau) d\tau}{a(\gamma(\tau))} = \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{a(x)} = G(\gamma(t)) - G(\gamma(s))$$

für $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $1/a$. Nun wächst G sicher streng monoton und hat folglich als Bild ein offenes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ und für unsere Flußwege folgt $\gamma(t) = G^{-1}(t + c)$ mit der Konstanten $c = G(\gamma(s)) - s$. In anderen Worten ist

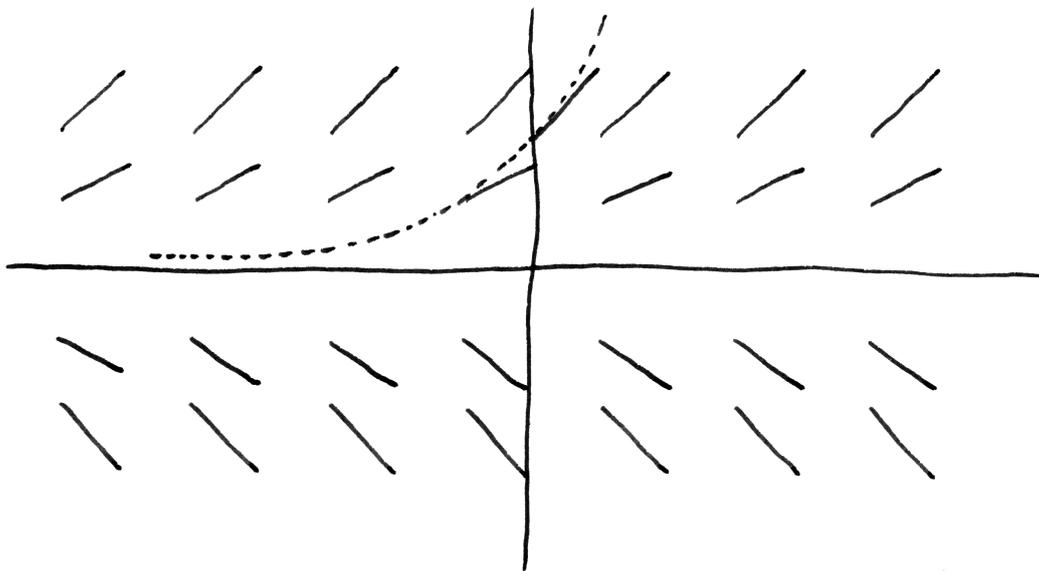
$$G^{-1} : J \xrightarrow{\sim} U$$

bis auf Zeitverschiebung der einzige maximale Flußweg. So ist etwa $a(x) = x$ ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen auf $U := \mathbb{R}_{>0}$ und $G(x) = \log x$ ist eine Stammfunktion von $1/x$ und jeder maximale Flußweg ist von der Gestalt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $\gamma(t) = \exp(t + c)$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

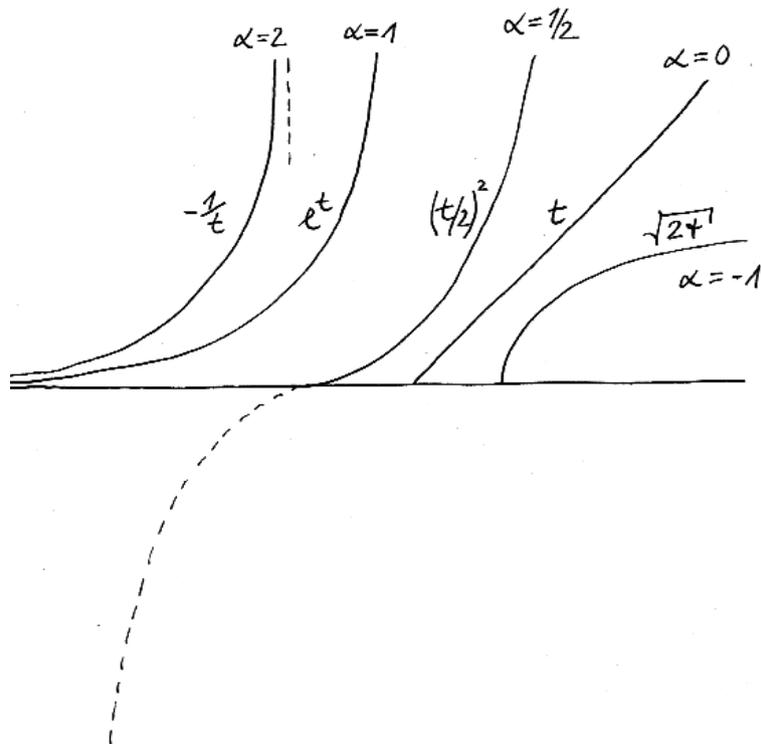
Beispiel 6.2.5 (Spezielle eindimensionale Felder mit Nullstellen). Gegeben ein stetiges Vektorfeld mit Nullstellen auf einer offenen Teilmenge eines eindimensionalen Raums liegen die Verhältnisse komplizierter als im Fall ohne Nullstellen 6.2.4. Wir suchen etwa für $\alpha \in \mathbb{R}$ Flußwege des Vektorfelds $a(x) = x^\alpha$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ alias auf einem mehrpunktigen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\gamma'(t) = (\gamma(t))^\alpha \quad \forall t \in I$$

Auf $\mathbb{R}_{>0}$ hat unser Feld keine Nullstellen und die in 6.2.4 entwickelte Theorie sagt uns, daß unsere Flußwege gerade die Umkehrfunktionen zu Stammfunktionen von $x^{-\alpha}$ sind. Den Fall $\alpha = 1$ kennen wir bereits aus 6.2.4. Im Fall $\alpha \neq 1$ erhalten wir als Stammfunktion $G(x) = x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$. Im Unterfall $\alpha > 1$ induziert nun G eine Bijektion $G : \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{<0}$ und im Unterfall $\alpha < 1$ eine Bijektion



Im Fall eindimensionaler Felder mag man sich die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung durch ihren im Bild gestrichelt eingezeichneten Graphen veranschaulichen und das Vektorfeld als eine Vorschrift, die diesem Graphen in jeder Höhe x eine Steigung $a(x)$ vorschreibt.



Mögliche Lösungsfunktionen mit positiven Werten der Differentialgleichung $\dot{\gamma}(t) = (\gamma(t))^\alpha$ für verschiedene Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$. Alle anderen Lösungsfunktionen mit positiven Werten erhält man durch horizontales Verschieben der entsprechenden Graphen. Im Fall $\alpha > 1$ „läuft unsere Lösung in endlicher Zeit nach Unendlich“, was die gestrichelt eingezeichnete vertikale Asymptote andeuten soll. Im Fall $1 > \alpha > 0$ kann man, wie gestrichelt angedeutet, die Lösung zu einer Lösung von $\dot{\gamma}(t) = |\gamma(t)|^\alpha$ ins Negative fortsetzen, aber eben auf vielerlei Weisen. Das war im wesentlichen auch unser Gegenbeispiel 6.2.3.

$G : \mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$, aber die Umkehrfunktion wird jedesmal durch dieselbe Formel gegeben und wir erhalten die Flußwege

$$\gamma(t) = ((1 - \alpha)t)^{(1-\alpha)^{-1}}$$

Im Fall $\alpha = 2$ etwa ergibt sich $\gamma(t) = -1/t$ und unser Flußwege „laufen in endlicher Zeit nach $+\infty$, brauchen aber, wenn wir die Zeit rückwärts laufen lassen, unendlich lange bis zum Ursprung“. Dasselbe gilt in allen Fällen mit $\alpha > 1$. Im Fall $\alpha = 0$ dahingegen ergibt sich $\gamma(t) = t$ und unser Flußweg „läuft für alle positiven Zeiten, braucht aber, wenn wir die Zeit rückwärts laufen lassen, nur endlich viel Zeit bis zum Ursprung“. Dasselbe gilt in allen Fällen mit $\alpha < 1$. In den Fällen mit $0 \leq \alpha$ können wir unser Vektorfeld stetig auf \mathbb{R} fortsetzen durch die Vorschrift $a(x) = |x|^\alpha$ und für $0 < \alpha$ hat diese Fortsetzung eine Nullstelle bei Null. In den Fällen $0 < \alpha < 1$ gibt es nun auch Flußwege, die in endlicher Zeit aus dem Negativen nach Null laufen und dort eine Weile stehenbleiben, bevor sie ins Positive weiterlaufen. Erklären wir etwa auf \mathbb{R} ein stetiges Vektorfeld durch $a(x) = \sqrt[3]{x^2}$, so ist $\gamma(t) = t^3/27$ ein Flußweg, aber auch die Abbildung $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben wird durch die Vorschrift

$$\psi(t) = \begin{cases} t^3/27 & t \leq 0; \\ 0 & 0 \leq t \leq 1; \\ (t-1)^3/27 & 1 \leq t; \end{cases}$$

ist ein Flußweg. Im Rückblick ist unser Beispiel 6.2.3 im wesentlichen dasselbe, nur in trivialer Weise um eine Dimension erweitert, damit es besser bildlich dargestellt werden kann.

Beispiel 6.2.6 (Verhalten unter Längenänderungen). Ändern wir bei einem Vektorfeld ohne Nullstellen nur die Längen seiner Vektoren, durchaus auch in Abhängigkeit vom Ort, so bleiben die Flußwege offensichtlich bis auf Reparametrisierung dieselben. Ist also in Formeln X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $U \subseteq X$ offen, $A : U \rightarrow \vec{X}$ ein Vektorfeld ohne Nullstellen und $c : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ohne Nullstellen und ist $\gamma : I \rightarrow U$ ein Flußweg von A , so finden wir mit dem Ansatz $\psi(t) = \gamma(r(t))$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\psi'(t) = c(\psi(t))A(\psi(t))$$

In der Tat liefert diese Gleichung nämlich für die Reparametrisierung r die Gleichung

$$r'(t)\gamma'(r(t)) = c(\gamma(r(t)))A(\gamma(r(t)))$$

und damit $r'(t) = (c \circ \gamma)(r(t))$. Diese Gleichung aber haben wir bereits in 6.2.4 lösen gelernt.

6.2.7 (Felder mit separierten Variablen). Gegeben endlichdimensionale reelle Räume X, Y und offene Teilmengen $U \subseteq X$ sowie $V \subseteq Y$ und Vektorfelder $A : U \rightarrow \vec{X}$ sowie $B : V \rightarrow \vec{Y}$ sind die Flußwege des Vektorfelds $(A \times B) : U \times V \rightarrow \vec{X} \times \vec{Y}$ genau die Abbildungen (γ, ψ) mit $\gamma : I \rightarrow U$ einem Flußweg von A und $\psi : I \rightarrow V$ einem Flußweg von B mit demselben Definitionsbereich. In dieser Situation spricht man von einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen oder lateinisch **separierten Variablen**. Man beachte die enge Beziehung zur „Verwandtschaftsverträglichkeit von Flußwegen“ 6.1.12. Die in 6.2.9 erläuterte Methode der „Separation der Variablen“ mag man auffassen als das Überführen einer Differentialgleichung in eine Gleichung mit separierten Variablen.

Beispiel 6.2.8 (Eindimensionale zeitabhängige Felder). Gegeben eine Funktion $a : \mathbb{R}^2 \supseteq W \rightarrow \mathbb{R}$ interessieren wir uns für Lösungen der Gleichung

$$y' = a(t, y)$$

Unter einer „Lösung“ versteht man hierbei ein Paar (γ, I) mit $I \subset \mathbb{R}$ einem mehrpunktigen Intervall und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ einer differenzierbaren Funktion, deren Graph in U enthalten ist und für die gilt

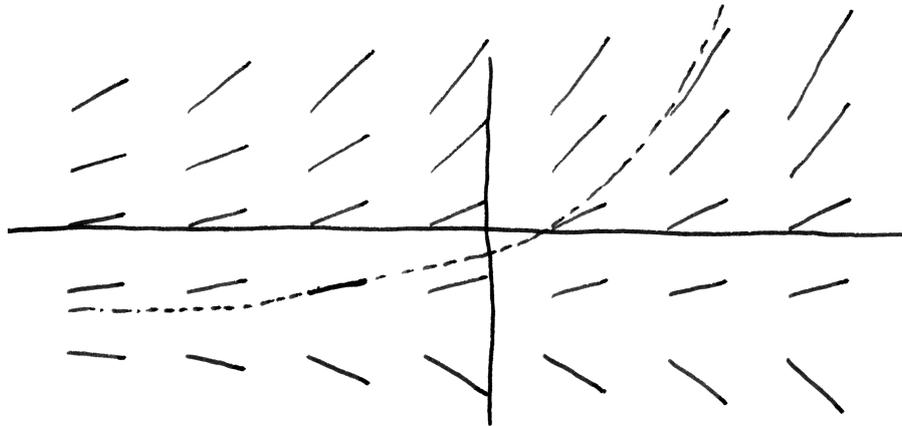
$$\gamma'(t) = a(t, \gamma(t)) \quad \forall t \in I$$

Ich habe hier Lösungen als $\gamma(t)$ und nicht als $y(t)$ geschrieben, wie es die Gleichung suggeriert, in der Hoffnung, daß das zum besseren Verständnis beiträgt. Hängt $a(t, y)$ gar nicht von y ab, also $a(t, y) = a(t)$, so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung natürlich genau die Stammfunktionen von a . Hängt $a(t, y)$ dahingegen nicht von t ab, also $a(t, y) = a(y)$, so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung nichts anderes als die Flußwege des auf einer geeigneten Teilmenge von \mathbb{R} definierten Vektorfelds $a(y)$, die wir bereits in 6.2.4 diskutiert hatten.

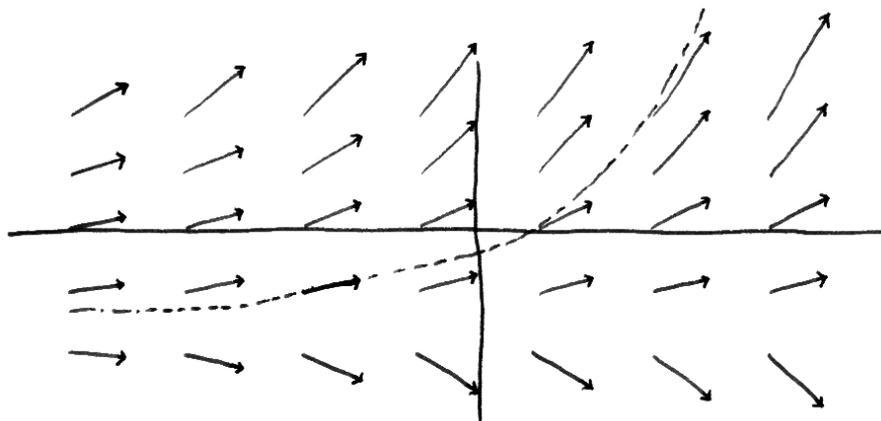
6.2.9. Seien $a : \mathbb{R} \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha : \mathbb{R} \supseteq J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Differentialgleichungen der Gestalt

$$y'(t) = \alpha(t)a(y(t))$$

für Funktionen $y = y(t)$ bedeuten geometrisch die Suche nach Flußwegen eines zeitabhängigen Vektorfelds auf $U \subseteq \mathbb{R}$, das die spezielle Gestalt $A(t, y) = \alpha(t)a(y)$ hat. Ich schreibe $y(t)$ statt $\gamma(t)$, weil wir ja nur eine reellwertige Funktion suchen, also $X = \mathbb{R}$. Sie lassen sich oft mit der Methode der **Separation der Variablen** oder auf deutsch **Variablentrennung** lösen. Ich führe zunächst dieses Verfahren vor und erkläre dann, inwiefern wir dabei implizit unsere Gleichung in eine Gleichung mit separierten Variablen im Sinne von 6.2.7 transformieren. Wir



Im Fall zeitabhängiger eindimensionaler Felder mag man sich ein Vektorfeld als ein „Steigungsfeld“ veranschaulichen, bei dem die jeweils vorgeschriebene Steigung $a(t, y)$ von beiden Koordinaten abhängen darf, und die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung durch ihren im Bild gestrichelt eingezeichneten Graphen, der dann eben an jeder Stelle tangential an das dort vorgegebene Steigungsfeld sein soll.



In 6.1.10 habe ich ausgeführt, wie die Untersuchung der Flußwege zeitabhängiger Felder auf einem Raum X auf die Untersuchung der Flußwege zeitunabhängiger Felder auf dem Raum $\mathbb{R} \times X$ zurückgeführt werden kann. Dieses Bild zeigt im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ das zeitunabhängige Vektorfeld auf \mathbb{R}^2 , dessen Flußwege den Flußwegen des durch das Bild darüber dargestellten zeitabhängigen Feldes auf \mathbb{R} entsprechen.

nehmen an, a habe keine Nullstelle und U sei ein Intervall. Gegeben eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ kann die Gleichung $y'(t) = \alpha(t)a(y(t))$ dann auch geschrieben werden als

$$\frac{y'(t)}{a(y(t))} = \alpha(t)$$

Ist nun G eine Stammfunktion von $1/a$ und B eine Stammfunktion von α , so folgt für alle $s, t \in I$ sofort

$$G(y(t)) - G(y(s)) = \int_{y(s)}^{y(t)} \frac{dy}{a(y)} = \int_s^t \frac{y'(\tau)}{a(y(\tau))} d\tau = \int_s^t \alpha(\tau) d\tau = B(t) - B(s)$$

Hier ist G sicher streng monoton. Folglich hat es offenes Bild $G(U) \subseteq \mathbb{R}$. Für die Umkehrabbildung $G^{-1} : G(U) \rightarrow \mathbb{R}$ folgt

$$y(t) = G^{-1}(B(t) + c) \quad \forall t \in I$$

mit der Konstante $c = G(y(s)) - B(s)$. Umgekehrt prüft man auch ohne Schwierigkeiten, daß für $(s, u) \in J \times U$ die obige Formel für $c = G(u) - B(s)$ und $t \in I + B^{-1}(G(U) - c)$ die größte Lösung unserer Differentialgleichung mit $y(s) = u$ liefert. Um den Zusammenhang mit der Situation separierter Variablen im Sinne von 6.2.7 herzustellen, interpretieren wir unsere Gleichung wie in 6.1.10 als die Suche nach Flußwegen des ebenen Vektorfelds $(x, y) \mapsto (1, \alpha(x)a(y))$ und kommen unter der zusätzlichen Annahme, daß auch α keine Nullstelle hat, mit der in 6.2.6 erläuterten Längenänderung um $c(x, y) := \alpha(x)^{-1}$ zum Vektorfeld $(x, y) \mapsto (\alpha(x)^{-1}, a(y))$. In dieser Weise landen wir dann bei der Suche nach den Flußwegen eines Vektorfelds mit separierten Variablen.

Proposition 6.2.10 (Strikte differentielle Ungleichungen). *Sei eine Funktion $K : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Graph in U derart, daß an jeder Stelle $t \in [a, b]$ gilt*

$$f'(t) \geq K(t, f(t)) \quad \text{und} \quad g'(t) < K(t, g(t)).$$

Haben wir außerdem $g(a) \leq f(a)$, so folgt $g(t) < f(t)$ für alle $t \in (a, b)$.

6.2.11. Fordern wir hier statt der strikten Ungleichung auch für g nur die nicht-strikte Ungleichung $g'(t) \leq K(t, g(t))$, so gilt die Aussage nur noch unter zusätzlichen Annahmen an die Funktion K und ich kenne keinen so einfachen Beweis mehr. Ich diskutiere eine Variante für nicht-strikte Ungleichungen in 6.7.1.

Beweis. Die Funktion $h := g - f$ ist differenzierbar mit $h(a) \leq 0$ und $h(t) = 0 \Rightarrow h'(t) < 0$. Damit folgt leicht $h(t) < 0$ für alle $t \in (a, b)$, wie Sie auch in [AN1] 12.5.5.24 schon zur Übung selbst zeigen durften. \square

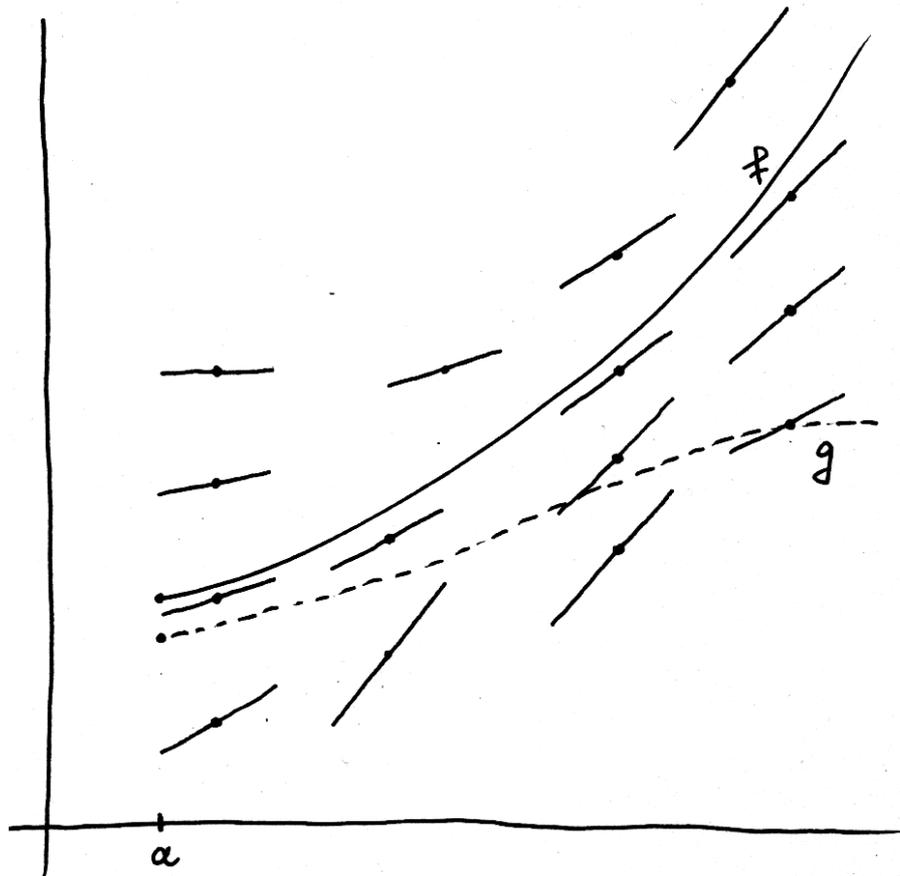


Illustration zur Proposition über strikte differentielle Ungleichungen. Ich denke mir K als ein „Steigungsfeld“. Eine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung muß nun offensichtlich stets über einer Lösung der der entsprechenden differentiellen Ungleichung bleiben, wenn sie zum Anfangszeitpunkt darüber liegt. Das ist die anschauliche Bedeutung der Proposition.

Beispiel 6.2.12 (Funktionen, die echt größer sind als ihre eigene Ableitung). Gegeben eine differenzierbare Funktion $g : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g'(t) < g(t)$ für alle $t \in [0, b)$ gilt $g(t) < g(0)e^t$ für alle $t \in (0, b)$. Das folgt, indem wir unsere Proposition über differentielle Ungleichungen mit $K(x, y) = y$ anwenden. Alternativ können wir bemerken, daß $g(t)e^{-t}$ negative Ableitung hat.

Beispiel 6.2.13 (Funktionen, die größergleich ihrer eigenen Ableitung sind). Gegeben eine differenzierbare Funktion $g : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g'(t) \leq g(t)$ für alle $t \in [0, b)$ gilt $g(t) \leq g(0)e^t$ für alle $t \in [0, b)$. Das können wir zeigen, indem wir bemerken, daß $g(t)e^{-t}$ nichtpositive Ableitung hat, vergleiche Übung [AN1] 12.5.5.23. Alternativ können wir unsere Proposition über differentielle Ungleichungen mit $K(x, y) = y + \varepsilon$ anwenden für alle $\varepsilon > 0$. Eine Lösung der Differentialgleichung $f'(t) = f(t) + \varepsilon$ mit Anfangswert $f(0) = g(0)$ ist $f(t) = (g(0) + \varepsilon)e^t - \varepsilon$ und wir folgern

$$g(t) < (g(0) + \varepsilon)e^t - \varepsilon \quad \forall t \in (0, b)$$

Im Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt dann die Behauptung. Das ist auch schon fast das Lemma von Gronwall, wie es im Anschluß bewiesen wird.

Korollar 6.2.14 (Lemma von Gronwall). 1. Gegeben Konstanten $L > 0$ und C sowie $b > 0$ und eine differenzierbare Funktion $g : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(0) \leq 0$ und $g'(t) \leq Lg(t) + C$ für alle $t \in [0, b)$ gelten für alle $t \in (0, b)$ die Abschätzungen

$$g(t) \leq (C/L)e^{Lt} - (C/L) \quad \text{und} \quad g'(t) \leq Ce^{Lt}.$$

2. Ist $b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $h : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gibt es Konstanten L, C mit $L \geq 0$ und

$$h(t) \leq L \int_0^t h(\tau) d\tau + C$$

für alle $t \in [0, b)$, so erfüllt h die Abschätzung $h(t) \leq Ce^{Lt}$.

Beweis. Man beachte, daß die Differentialgleichung $f'(t) = Lf(t) + C$ für $L \neq 0$ die Lösung $f(t) = (C/L)e^{Lt} - (C/L)$ mit Anfangswert $f(0) = 0$ hat. Für jedes $\varepsilon > 0$ folgt aus unseren Annahmen $g'(t) < Lg(t) + C + \varepsilon$. Damit folgt die erste Ungleichung im ersten Teil sogar für beliebiges $L \neq 0$ sofort aus unseren Erkenntnissen über differentielle Ungleichungen 6.2.10. Die zweite Ungleichung im ersten Teil folgt durch Einsetzen der ersten Ungleichung in die Annahme. Hierbei brauchen wir $L > 0$, damit sich die erste Ungleichung bei der Multiplikation mit L nicht umdreht. Daß die zweite Ungleichung im ersten Teil auch noch für $L = 0$ gilt, ist eh klar. Wenden wir sie auf $g(t) := \int_0^t h(\tau) d\tau$ an, ergibt sich der zweite Teil. \square

6.2.15. Eine Fülle an weiteren Beispielen und Lösungsmethoden zu gewöhnlichen Differentialgleichungen findet man etwa in [MV00].

Übungen

Übung 6.2.16 (Größere Felder haben schnellere Flußwege). Gegeben $U \subset \mathbb{R}$ halboffen und $a, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ohne Nullstelle mit $a \leq b$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $\gamma, \kappa : I \rightarrow U$ differenzierbar mit $\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t))$ und $\dot{\kappa}(t) = b(\kappa(t))$ für alle $t \in I$ folgt aus $\gamma(t_0) \leq \kappa(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ bereits dieselbe Aussage für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$.

6.3 Integration von vektorwertigen Funktionen

6.3.1. Wir zimmern in diesem Abschnitt einen begrifflichen Rahmen, der nicht nur das Integrieren komplexwertiger Funktionen als Spezialfall umfaßt, sondern auch in natürlicher Weise unsere Überlegungen zum Differenzieren vektorwertiger Funktionen ergänzt.

Definition 6.3.2. Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes Intervall, V ein reeller Vektorraum und $f : [a, b] \rightarrow V$ eine Abbildung. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistante Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r = b$ und definieren die **r -te Riemannsumme** $S^r(f) \in V$ durch

$$S^r(f) := \sum_{i=0}^{r-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_i) = \left(\frac{b-a}{r} \right) \sum_{i=0}^{r-1} f(t_i)$$

Satz 6.3.3 (Integration vektorwertiger Funktionen). Gegeben eine stetige Abbildung von einem nichtleeren kompakten Intervall in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum $f : [a, b] \rightarrow V$ existiert der Grenzwert der zugehörigen Riemannsummen. Das als dieser Grenzwert erklärte **Integral**

$$\int f = \int_a^b f = \int_a^b f(t) \, dt := \lim_{r \rightarrow \infty} S^r(f)$$

ordnet jedem f einen Vektor $(\int f) \in V$ zu und hat die folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $c \in [a, b]$ gilt $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;
2. Ist $f = v$ konstant ein $v \in V$, so gilt $\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b v \, dt = (b-a)v$;
3. Ist $\Lambda : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum W , so gilt

$$\int (\Lambda \circ f) = \Lambda \left(\int f \right)$$

4. Gegeben eine Norm $\| \cdot \|$ auf V gilt für die Norm des Integrals die Abschätzung $\| \int f \| \leq \int \| f \|$;
5. Im Fall $V = \mathbb{R}$ reellwertiger Funktionen erhalten wir unser Integral aus [AN1] 12.5.2.1 zurück.

Vorschau 6.3.4. Dieser Satz gilt genauso für Banachräume V, W . Der Beweis braucht dann aber zusätzliche Argumente.

6.3.5 (**Linearität des Integrals**). Sie mögen in diesem Satz die Regeln $\int \lambda f = \lambda \int f$ sowie $\int (f + g) = \int f + \int g$ für stetige vektorwertige Funktionen f, g und $\lambda \in \mathbb{R}$ vermißt haben. Sie folgen jedoch formal aus Teil 3. In der Tat dürfen wir dort $\Lambda = (\lambda \cdot) : V \rightarrow V$ nehmen und auch $\Lambda : V \times V \rightarrow V$ die Addition sowie die beiden Projektionen. So ergibt sich für die $V \times V$ -wertige Funktion (f, g) zunächst $\text{pr}_1 \int (f, g) = \int f$ und $\text{pr}_2 \int (f, g) = \int g$ und damit $\int (f, g) = (\int f, \int g)$ und durch Anwenden der Addition dann $\int (f + g) = \int f + \int g$. Etwas allgemeiner folgt die „Komponentenregel“ $\int (f, g) = (\int f, \int g)$ auch für f, g mit Werten in verschiedenen endlichdimensionalen reellen Vektorräumen.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann erweist sich unser Integral schlicht das „komponentenweise Integral“ und alle Aussagen des Satzes sind offensichtlich mit Ausnahme der Abschätzung $\| \int f \| \leq \int \| f \|$. Diese Abschätzung ist jedoch offensichtlich für die Riemannsummen und folgt im Grenzwert. \square

6.3.6. Wie im Fall reellwertiger Funktionen verwenden wir auch im Fall vektorwertiger Funktionen die Konvention $\int_b^a f = - \int_a^b f$. Ist dann $f : I \rightarrow V$ eine stetige Abbildung von einem reellen Intervall in einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so gilt für beliebige $a, b, c \in I$ die Formel $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

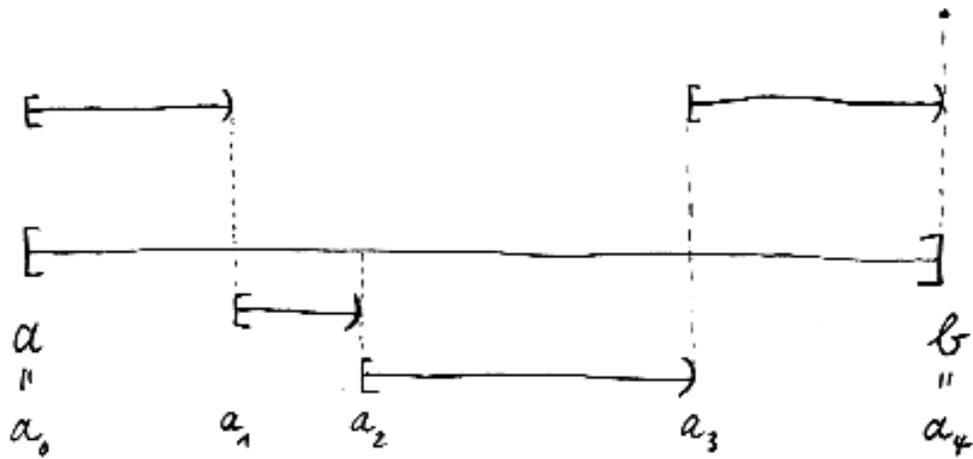
Satz 6.3.7 (Vektorwertige Variante des Hauptsatzes). Gegeben ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V , eine stetige Funktion $f : I \rightarrow V$ und ein Punkt $a \in I$ ist die Funktion

$$F : I \rightarrow V \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

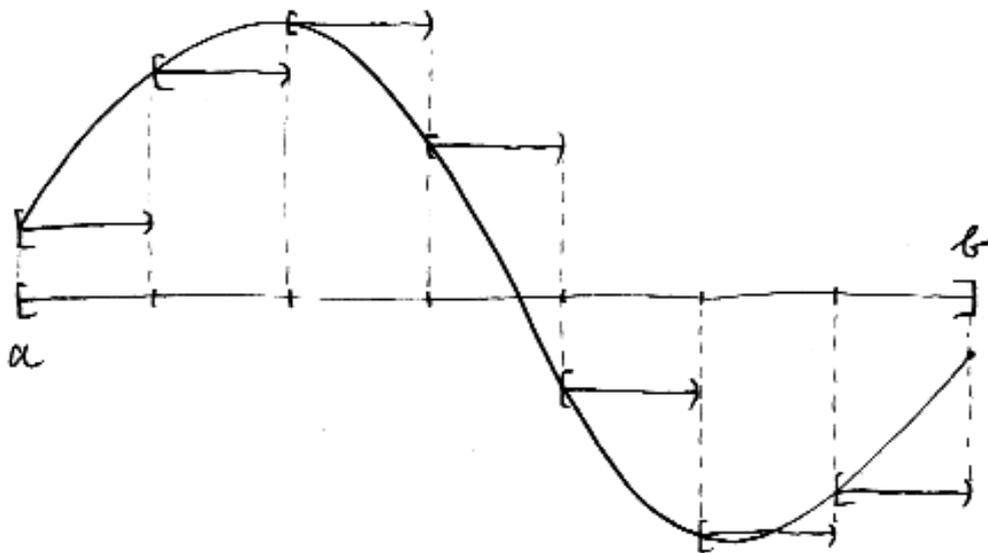
die einzige differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow V$ mit $F' = f$ und $F(a) = 0$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $V = \mathbb{R}^n$ annehmen und können uns so auf den Fall reellwertiger Funktionen zurückziehen. \square

Zweiter Beweis. Ähnlich zum Beweis für reellwertige Funktionen [AN1] 12.5.7.1 und dem Leser zur Übung überlassen. Man verwende die Abschätzung aus 6.3.3 für die Norm des Integrals und den Schrankensatz [AN1] 12.7.1.10. \square



Der Graph einer reellwertigen Treppenfunktion.



Der Graph einer reellwertigen Funktion f und der zugehörigen Treppenfunktion f_7 aus dem nebenstehenden Beweis, mit $I(f_7)$ der siebten Riemannsumme von f .

Korollar 6.3.8 (Integrieren mit Stammfunktionen). Seien V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \rightarrow V$ stetig. Ist $G : [a, b] \rightarrow V$ eine **Stammfunktion** von f , als da heißt eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $G'(t) = f(t)$, so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem vorhergehenden Satz 6.3.7. □

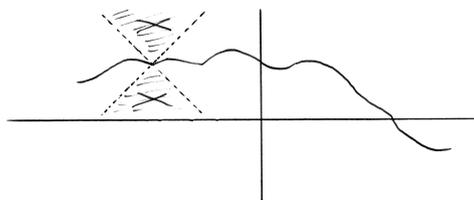
Übungen

Übung 6.3.9. Gegeben ein mehrpunktiges kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ein endlichdimensionaler normierter reeller Vektorraum V ist der Raum $\mathcal{C}^1(I, V)$ aller stetig differenzierbaren Abbildungen von I nach V vollständig für die Norm $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\| + \|\varphi'\|$ der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen und ihrer ersten Ableitungen. Hinweis: Man ziehe sich auf den Fall $V = \mathbb{R}$ zurück und erinnere das Vertauschen des Integrals mit gleichmäßiger Konvergenz [AN1] 12.6.1.14.

6.4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

6.4.1. Gegeben ein auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums definiertes Vektorfeld $A : X \ni U \rightarrow \vec{X}$ verstehen wir unter einem **Flußweg von A mit Anfangswert p** wie in 6.1.6 ein Paar (I, γ) mit $I \subset \mathbb{R}$ einem mehrpunktigen Intervall, das die Null enthält, und einer differenzierbaren Abbildung $\gamma : I \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(t) = A(\gamma(t))$ für alle $t \in I$.

6.4.2. Eine Abbildung f zwischen metrischen Räumen heißt **lipschitzstetig** wie in 4.1.8, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt mit $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ für alle x, y im Ausgangsraum. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **lokal lipschitzstetig**, wenn jeder Punkt des Ausgangsraums eine Umgebung besitzt, auf der unsere Funktion lipschitzstetig ist.



Die Restriktion auf die negative x -Achse der hier dargestellten Funktion ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1, da sie an jeder Stelle den schraffierten Bereich des entsprechend verschobenen Doppelkegels vermeidet.

6.4.3. Nach 2.4.11 ist jedes stetig differenzierbare Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines normierten Raums lokal lipschitzstetig, deshalb folgt der Satz über die Existenz und Eindeutigkeit im Fall stetig differenzierbarer Vektorfelder 6.2.1 unmittelbar aus der Fassung für lokal lipschitzstetige Vektorfelder, die wir im folgenden als 6.4.9 beweisen. Die Hauptlast des Beweises trägt das folgende Lemma 6.4.4.

Lemma 6.4.4 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit). *Gegeben ein endlichdimensionaler normierter reeller Raum X und ein beschränktes lipschitzstetiges Vektorfeld $A : X \times U \rightarrow \vec{X}$ existieren zu jedem Anfangswert $p \in U$ Flußwege von A mit offenem Definitionsbereich und je zwei Flußwege $\gamma : I \rightarrow U$ sowie $\phi : J \rightarrow U$ mit demselben Anfangswert stimmen für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ auf $I \cap J \cap [-\varepsilon, \varepsilon]$ überein.*

6.4.5. Gegeben metrische Räume X, Y, Z heißt eine Abbildung $f : X \times Y \rightarrow Z$ **partiell lipschitzstetig in der zweiten Variable**, wenn es $L \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$d(f(x, y_1), f(x, y_2)) \leq Ld(y_1, y_2) \quad \forall x \in X, y_1, y_2 \in Y$$

Das ist stärker, als nur zu fordern, daß für jedes $x \in X$ die Abbildung $y \mapsto f(x, y)$ lipschitzstetig sein soll, denn dann bräuchten wir nur für jedes $x \in X$ jeweils eine Konstante L_x mit der entsprechenden Eigenschaft zu finden.

6.4.6. Allgemeiner gilt der Satz über die lokale Existenz und Eindeutigkeit auch für stetige beschränkte zeitabhängige Vektorfelder $A : (-a, a) \times U \rightarrow \vec{X}$, die partiell lipschitzstetig sind im Ort. Der Beweis ist mutatis mutandis derselbe. Diese Variante ist insofern stärker, als unser Lemma beim Übergang 6.1.10 von zeitabhängigen zu zeitunabhängigen Vektorfeldern dieselbe Folgerung nur liefert unter der stärkeren Annahme, daß $A : (-a, a) \times U \rightarrow \vec{X}$ voll lipschitzstetig ist.

Beweis. Wir betrachten für ein beliebiges mehrpunktiges kompaktes reelles Intervall $K \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in K$ den affinen Raum

$$\mathcal{C}_p(K, X)$$

aller stetigen Wege $\gamma : K \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = p$ und versehen seinen Richtungsraum $\mathcal{C}_0(K, \vec{X})$ mit der Norm $\| \cdot \|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz. Nach Übung 1.6.10 erhalten wir so einen vollständigen normierten Vektorraum. Nun betrachten wir in unserem affinen Raum die offene Teilmenge $\mathcal{C}_p(K, U)$ aller in U verlaufenden Wege und die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p(K, U) &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{C}_p(K, X) \\ (\rho, \gamma) &\mapsto (\rho, \gamma - \rho \int (A \circ \gamma)) \end{aligned}$$

Hierbei sei $f : \mathcal{C}(K, \vec{X}) \rightarrow \mathcal{C}_0(K, \vec{X})$ gegeben durch $(f\psi)(t) := \int_0^t \psi(\tau) d\tau$ mit unserem vektorwertigen Integral aus 6.3.3. Bezeichne κ den konstanten Weg bei p . Unter unserer Abbildung geht aufgrund der vektorwertigen Variante 6.3.7 des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (ρ, γ) nach (ρ, κ) genau dann, wenn $\gamma : K \rightarrow U$ ein Flußweg des reskalierten Feldes ρA ist. Insbesondere haben wir $(0, \kappa) \mapsto (0, \kappa)$. Wir wenden nun den Umkehrsatz für stetige Abbildungen 4.1.12 an und zeigen genauer, daß für $\eta > 0$ hinreichend klein und $K \subset [-1/4S, 1/4S]$ mit $S > 0$ einer oberen Schranke der Normen der Vektoren unseres Vektorfelds A die Restriktion von $F - \text{id}$ auf $(-\eta, \eta) \times \mathcal{C}_p(K, U)$ kontrahierend ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
\|(F - \text{id})(\sigma, \psi) - (F - \text{id})(\rho, \gamma)\| &= \left\| \sigma \int A\psi - \rho \int A\gamma \right\|_{\infty} \\
&\leq |\sigma - \rho| \left\| \int A\psi \right\|_{\infty} + |\rho| \left\| \int A\psi - A\gamma \right\|_{\infty} \\
&\leq |\sigma - \rho|(S/4S) + (\eta L/4S) \|\psi - \gamma\|_{\infty} \\
&\leq |\sigma - \rho|/4 + \|\psi - \gamma\|_{\infty}/4 \\
&\leq (1/2) \|(\rho - \sigma, \gamma - \psi)\|
\end{aligned}$$

falls im vorletzten Schritt $\eta > 0$ so klein ist, daß gilt $\eta L/S < 1$. Dann liefert uns der Umkehrsatz für stetige Abbildungen 4.1.12 wegen $F : (0, \kappa) \mapsto (0, \kappa)$, daß es für $\rho > 0$ hinreichend klein genau ein Urbild (ρ, γ_{ρ}) von (ρ, κ) unter F gibt, also genau einen Flußweg $\gamma_{\rho} : K \rightarrow U$ des reskalierten Vektorfelds ρA . Gehen wir etwa von $K = [-\beta, \beta]$ aus, so ist dann $\gamma(t) := \gamma_{\rho}(\rho^{-1}t)$ ein auf $(-\rho\beta, \rho\beta)$ definierter Flußweg des Vektorfelds A zu p und die Existenzaussage des Lemmas ist gezeigt. Seien andererseits $\gamma : I \rightarrow U$ und $\phi : J \rightarrow U$ Flußwege mit demselben Anfangswert. Besteht $I \cap J$ nur aus dem Nullpunkt, so ist die Behauptung eh klar. Sonst gibt es $\alpha > 0$ mit $I \cap J \cap [-\alpha, \alpha]$ mehrpunktig und kompakt und in $[-1/4S, 1/4S]$ enthalten. Für alle $\rho \in [0, 1]$ sind dann die Abbildungen $t \mapsto \gamma(\rho t)$ und $t \mapsto \phi(\rho t)$ auf $I \cap J \cap [-\alpha, \alpha]$ definierte Flußwege mit Anfangswert p des reskalierten Vektorfelds ρA . Für hinreichend kleines $\rho > 0$ gibt es aber nach dem, was wir gezeigt haben, nur einen derartigen Flußweg, und damit folgt auch die zweite Behauptung des Lemmas. \square

6.4.7. Beim Beweis des Umkehrsatzes für eine stetige Abbildung f hatten wir Urbilder von y unter f konstruiert als Fixpunkte der kontrahierenden Abbildung $k_y : x \mapsto x - f(x) + y$. Hier bedeutet das, daß wir Lösungen auf K für das mit betragsmäßig hinreichend kleinem σ reskalierte Feld konstruieren als Fixpunkte der kontrahierenden Abbildung

$$k_{(\sigma, \kappa)} : (\rho, \gamma) \mapsto (\sigma, \kappa + \rho \int A \circ \gamma)$$

und, wenn wir den ersten Term der Iteration weglassen und das σ vorne in der Klammer desgleichen, als Fixpunkte der kontrahierenden Abbildung

$$\gamma \mapsto \kappa + \sigma \int A \circ \gamma$$

Das heißt die **Picard-Iteration**.

Ergänzung 6.4.8. Die allgemeinere Aussage 6.4.6 über lokale Existenz und Eindeutigkeit der Flußwege für stetige beschränkte im Ort partiell lipschitzstetige zeitabhängige Vektorfelder folgt analog mithilfe der Abbildung

$$F : (\rho, \gamma) \mapsto (\rho, \gamma - \rho \int A(\rho\tau, \gamma(\tau)) \, d\tau)$$

mit dem Integral als Abkürzung für die Abbildung $t \mapsto \int_0^t A(\rho\tau, \gamma(\tau)) \, d\tau$.

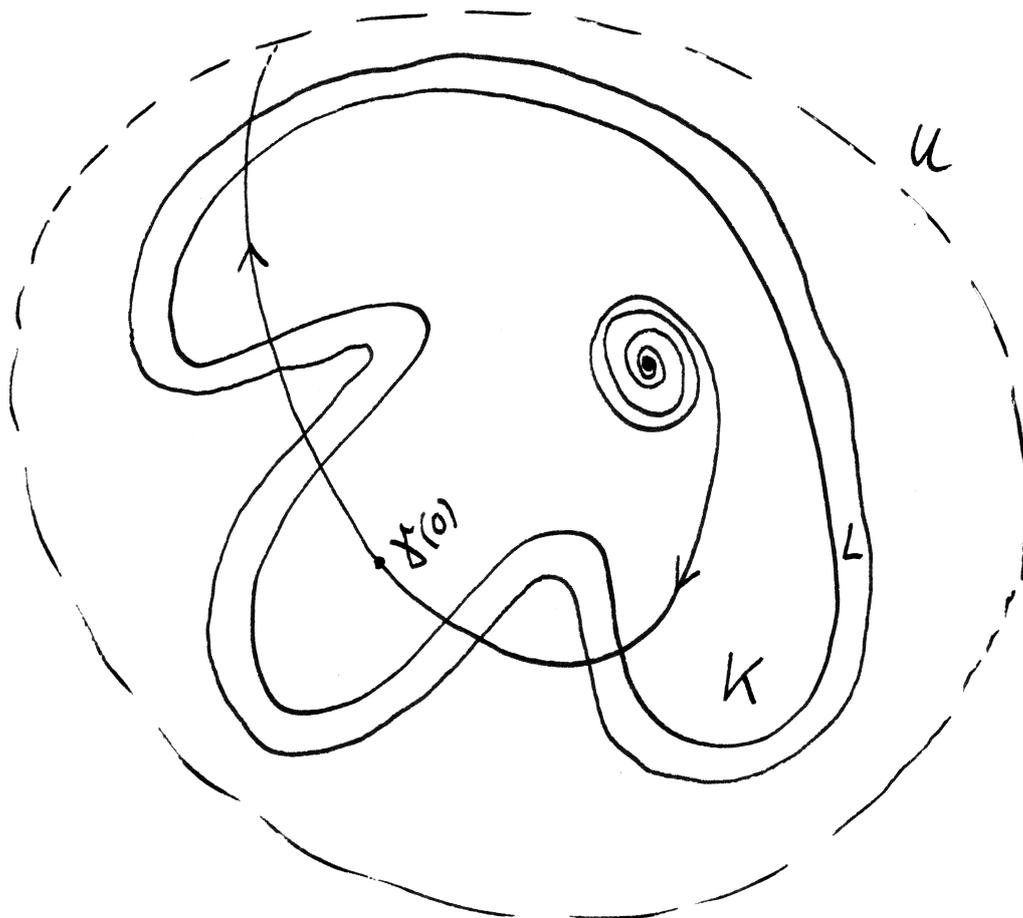
Satz 6.4.9 (Picard-Lindelöf). 1. Gegeben ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten reellen Raums gibt es zu jedem Anfangswert einen größten Flußweg;

2. Dieser größte Flußweg hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist besagtes Intervall nach oben beschränkt, so verläßt er für positive Zeiten jedes Kompaktum aus unserer offenen Teilmenge irgendwann endgültig.

6.4.10 (**Flüsse von Vektorfeldern mit kompaktem Träger**). Ein Flußweg eines lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes, der durch eine Nullstelle unseres Feldes geht, ist offensichtlich konstant. Jeder Flußweg, der durch eine Nichtnullstelle unseres Feldes geht, bleibt also für alle Zeiten seines Definitionsbereichs in den Nichtnullstellen. Jeder Flußweg, der durch einen Punkt im Träger unseres Feldes geht, bleibt mithin für alle Zeiten seines Definitionsbereichs im Träger unseres Feldes. Verschwindet speziell unser Vektorfeld außerhalb von einem Kompaktum, so ist jeder maximale Flußweg auf ganz \mathbb{R} definiert.

6.4.11. Beim Beweis zeigen wir stärker als in Teil 2 formuliert: Ist das Definitionsintervall unseres größten Flußwegs nach oben beschränkt, so kann er nicht ab irgendeinem Zeitpunkt ganz innerhalb irgendeiner in unserem affinen Raum abgeschlossenen Teilmenge bleiben, die im Definitionsbereich unseres Vektorfeldes enthalten ist und auf der unser Vektorfeld beschränkt ist.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß je zwei Flußwege γ, ψ mit demselben Anfangswert p und demselben Definitionsintervall I übereinstimmen. Wir zeigen nur, daß sie auf $I \cap [0, \infty)$ übereinstimmen, für $I \cap (-\infty, 0]$ argumentiert man analog. Stimmen aber unsere Wege auf $I \cap [0, \infty)$ nicht überein, so wäre das Supremum s über alle $t \in I$ mit $\gamma|_{[0, t]} = \psi|_{[0, t]}$ nicht das Supremum von I . Wir hätten also $s \in I$



Ein größter Flußweg, dessen Definitionsbereich nach oben beschränkt ist und die so jedes Kompaktum wie etwa K oder L irgendwann einmal endgültig verläßt. In diesem Fall wäre der Definitionsbereich nach unten unbeschränkt und unser Flußweg würde für negative Zeiten gegen eine Nullstelle unseres Vektorfeldes konvergieren, die im Zentrum der Spirale liegt.

und wegen der Stetigkeit der Flußwege gälte $\gamma(s) = \psi(s)$, und nach der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 6.4.4 muß dann auch gelten $\gamma|_{[0, s + \eta]} = \psi|_{[0, s + \eta]}$ für ein positives η im Widerspruch zur Wahl von s . Folglich stimmen je zwei Flußwege mit Anfangswert p auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche überein und es gibt unter allen Flußwegen mit Anfangswert p einen größten, dessen Definitionsbereich eben die Vereinigung der Definitionsbereiche aller Flußwege zu p ist. Wäre dieser Definitionsbereich nicht offen, so enthielte er sein Supremum oder sein Infimum. Dann könnten wir jedoch um die Bilder dieser Grenzpunkte auch wieder Flußwege mit offenem Definitionsbereich finden und „ankleben“ und unser Flußweg wäre nicht maximal gewesen. Dieser Widerspruch zeigt, daß unser größter Flußweg offenen Definitionsbereich hat. Bezeichne schließlich A unser Vektorfeld und $U \subseteq X$ seinen Definitionsbereich. Ist $\gamma : [0, b) \rightarrow U$ ein Flußweg von A , dessen Bild in einem Kompaktum $M \subset U$ landet, so ist wegen $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))$ seine Geschwindigkeit $\|\dot{\gamma}(t)\|$ beschränkt auf $[0, b)$, mithin ist γ Lipschitzstetig und besitzt nach 1.6.11 eine stetige Fortsetzung $\tilde{\gamma} : [0, b] \rightarrow M$. Die Integralform unserer Differentialgleichung zeigt dann sofort, daß auch $\tilde{\gamma}$ ein Flußweg von A sein muß. Mithin kann ein Flußweg mit nach oben beschränktem Definitionsbereich, der ganz in einem Kompaktum $M \subset U$ verläuft, schon einmal nicht maximal sein. Wir erklären nun noch, warum ein maximaler Flußweg mit nach oben beschränktem Definitionsbereich ab einem gewissen Zeitpunkt auch nicht mehr in ein vorgegebenes Kompaktum $M \subset U$ zurückkehren darf. Dazu bemerken wir zunächst, daß wir $r > 0$ finden können derart, daß für

$$N := \{x \in X \mid d_M(x) \leq r\}$$

gilt $N \subset U$. In der Tat ist das klar im Fall $U = X$ und folgt sonst, indem wir $2r = \inf d_{X \setminus U}(M)$ setzen. Nun ist aber auch N kompakt und die Norm unseres Vektorfeldes ist folglich beschränkt auf N und wir finden mit derselben Argumentation wie zuvor $\varepsilon > 0$ derart, daß für jeden Flußweg $\gamma : I \rightarrow U$ und $t < s$ aus I mit $\gamma(t) \in M$ und $\gamma(s) \notin N$ folgt $s - t > \varepsilon$. Es ist deshalb nicht möglich, daß ein maximaler Flußweg mit nach oben beschränktem Definitionsbereich unendlich oft abwechselnd einen Punkt aus M und dann wieder einen Punkt aus $U \setminus N$ durchläuft. Da wir aber bereits wissen, daß er oberhalb jedes Zeitpunkts einmal N verlassen muß, kann er dann nicht oberhalb jedes Zeitpunkts auch wieder nach M zurückkehren. \square

Satz 6.4.12 (Picard-Lindelöf, zeitabhängiger Fall). 1. Gegeben ein endlich-dimensionaler reeller Raum X und $A : (\mathbb{R} \times X) \ni W \rightarrow \vec{X}$ ein stetiges und im Ort lokal partiell Lipschitzstetiges zeitabhängiges Vektorfeld gibt es für jedes $(s, p) \in W$ unter allen Flußwegen unseres Feldes mit Anfangswert p zum Startzeitpunkt s einen größten;

2. Dieser größte Flußweg γ hat als Definitionsbereich ein offenes Intervall, und ist besagtes Intervall nach oben beschränkt, so verläßt $(t, \gamma(t))$ für positive Zeiten jedes Kompaktum aus W irgendwann endgültig.

6.4.13. Mit **lokal partiell lipschitzstetig** ist gemeint, daß jeder Punkt von W eine offene Umgebung in W besitzen soll, auf der A im Sinne von 6.4.6 partiell lipschitzstetig ist.

Beweis. Mutatis mutandis derselbe wie für zeitunabhängige Vektorfelder 6.4.9, man muß sich nur abweichend auf die Variante 6.4.6 des lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes stützen. \square

Übungen

Übung 6.4.14. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $A(p) \in \mathbb{R}^2 \times 0 \forall p \in \mathbb{R}^2 \times 0$ liegt jede Flußkurve, die die xy -Ebene $\mathbb{R}^2 \times 0$ trifft, bereits ganz in der xy -Ebene.

Übung 6.4.15. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $A : X \ni U \rightarrow \vec{X}$ auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums und eine Mannigfaltigkeit $M \subset X$ mit $M \not\subset U$ und $A(p) \in T_p M \forall p \in M$ verläuft jeder Flußweg von A , der M trifft, bereits ganz in M .

6.5 Lineare Differentialgleichungen

Satz 6.5.1 (Homogene lineare Differentialgleichungen). Gegeben ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum V und eine stetige Abbildung $M : I \rightarrow \text{End } V$ bilden die differenzierbaren Abbildungen $\gamma : I \rightarrow V$ mit

$$\gamma'(t) = M(t)\gamma(t) \quad \forall t \in I$$

einen Untervektorraum $\mathcal{L} \subset \text{Ens}(I, V)$, den **Lösungsraum** unserer Differentialgleichung. Weiter ist für jedes $t_0 \in I$ das Auswerten bei t_0 ein Vektorraumisomorphismus $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} V, \gamma \mapsto \gamma(t_0)$, der **Anfangswertisomorphismus**.

Ergänzung 6.5.2. Es ist unmittelbar klar, daß unter der Annahme, M sei k -mal stetig differenzierbar, unsere Lösungen γ sogar $(k + 1)$ -mal stetig differenzierbar sein müssen.

Ergänzung 6.5.3. Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch im Fall eines beliebigen Banachraums V , wenn man statt dem Raum $\text{End } V$ aller Endomorphismen von V den normierten Raum $\mathcal{B}(V)$ aller stetigen Endomorphismen von V betrachtet. Wir müssen dann nur am Schluß des Beweises etwas sorgfältiger argumentieren, etwa in dem Sinne, daß ein auf $[0, b)$ definierter Flußweg nach den

Abschätzungen im Beweis gleichmäßig stetig wäre und sich nach 1.6.11 stetig auf $[0, b]$ fortsetzen ließe. Das Bild dieser stetigen Fortsetzung ist in diesem Fall wieder das gesuchte Kompaktum, das nicht verlassen wird, im Widerspruch zu 6.4.12.

Beispiel 6.5.4 (Explizite Lösung im eindimensionalen Fall). Im eindimensionalen Fall $\dim V = 1$ oder der Einfachheit halber noch besser $V = \mathbb{R}$ haben wir in 6.2.9 schon allgemeinere Differentialgleichungen explizit gelöst. In diesem Fall ist M eine reellwertige Funktion. Bezeichnen wir sie statt mit M mit $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ und bezeichnen $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von h , so sind die Lösungen unserer Differentialgleichung $\gamma'(t) = h(t)\gamma(t)$ insbesondere schlicht die Funktionen $\gamma(t) = c \exp(H(t))$ für $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Daß unser Lösungsraum $\mathcal{L} \subset \text{Ens}(I, V)$ ein Untervektorraum ist und das Auswerten bei t_0 linear scheint mir beides offensichtlich. Es bleibt nur, Injektivität und Surjektivität des Auswertens zu zeigen. Falls I nicht offen ist, wählen wir eine stetige Fortsetzung von M auf ein offenes Intervall $J \supset I$. Nun erfüllt $\gamma : J \rightarrow V$ nach 6.1.10 unsere Differentialgleichung genau dann, wenn es ein Flußweg des zeitabhängigen Vektorfelds $(t, v) \mapsto M(t)v$ auf $J \times V$ ist. Dies zeitabhängige Vektorfeld ist lokal partiell lipschitzstetig im Sinne von 6.4.13, also gibt es nach 6.4.12 zu jedem (t_0, v_0) mit $t_0 \in J$ und $v_0 \in V$ unter allen Flußwegen γ mit $\gamma(t_0) = v_0$ einen größten und insbesondere im Fall $t_0 \in I$ höchstens einen derartigen auf I definierten Flußweg. Das zeigt die Injektivität. Für den Beweis der Surjektivität reicht es zu zeigen, daß der größte Flußweg des zeitabhängigen Vektorfelds $(t, v) \mapsto M(t)v$ mit $\gamma(t_0) = v_0$ auf ganz J definiert ist. Sicher reicht es zu zeigen, daß er bis zum oberen Ende von J definiert ist. Sonst gäbe es aber $b \in J$ derart, daß die Lösung nicht in positiver Richtung über $[t_0, b)$ hinaus fortgesetzt werden könnte. Es gibt jedoch L mit $\|M(t)\| \leq L$ für alle $t \in [t_0, b]$, daraus folgt für $t \in [t_0, b)$ erst

$$\|\gamma(t)\| = \left\| v_0 + \int_{t_0}^t M(\tau)\gamma(\tau) \, d\tau \right\| \leq \|v_0\| + L \int_{t_0}^t \|\gamma(\tau)\| \, d\tau$$

und dann $\|\gamma(t)\| \leq \|v_0\| e^{L(t-t_0)}$ nach dem Lemma von Gronwall 6.2.14. Dann wäre aber $\|\gamma(t)\|$ beschränkt auf $t \in [t_0, b)$, nämlich durch $\|v_0\| e^{L(b-t_0)}$, im Widerspruch zur letzten Aussage im Satz über die Existenz und Eindeutigkeit 6.4.9 oder genauer ihrer Verallgemeinerung 6.4.12 auf den Fall zeitabhängiger Vektorfelder. \square

Korollar 6.5.5 (Inhomogene lineare Differentialgleichungen). Gegeben $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrgliedriges Intervall, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum sowie stetige Abbildungen $M : I \rightarrow \text{End } V$ und $f : I \rightarrow V$ bilden die differenzier-

baren Abbildungen $\gamma : I \rightarrow V$ mit

$$\gamma'(t) = M(t)\gamma(t) + f(t) \quad \forall t \in I$$

einen affinen Teilraum $\mathcal{L}_i \subset \text{Ens}(I, V)$ mit dem Lösungsraum der zugehörigen linearen Gleichung als Raum von Richtungsvektoren. Für jedes $t_0 \in I$ definiert weiter das Auswerten bei t_0 eine Bijektion $\mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} V$, $\gamma \mapsto \gamma(t_0)$, den **Anfangswertisomorphismus**.

Ergänzung 6.5.6. Dies Korollar gilt wieder mit fast demselben Beweis auch im Fall eines beliebigen Banachraums V , wenn man statt dem Raum $\text{End } V$ aller Endomorphismen von V den normierten Raum $\mathcal{B}(V)$ aller stetigen Endomorphismen von V betrachtet.

Beweis. Die Differenz von je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung ist offensichtlich eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, und die Summe einer Lösung der homogenen und einer Lösung der inhomogenen Gleichung ist offensichtlich eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Damit bleibt nur zu zeigen, daß die inhomogene Gleichung überhaupt eine Lösung besitzt. Das folgt ähnlich wie im homogenen Fall und ohne weitere Schwierigkeiten aus unseren allgemeinen Prinzipien. Wir geben nun aber sogar eine Lösungsmethode an, die Methode der **Variation der Konstanten**. Dazu wählen wir eine Basis $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ des Lösungsraums der homogenen Gleichung und fassen sie zusammen zu einer Lösung $X : I \rightarrow V^n = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$ der homogenen linearen Differentialgleichung

$$X'(t) = M(t)X(t)$$

für Funktionen $I \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$. Da die Werte von $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ an jeder Stelle eine Basis von V bilden, ist $X(t)$ an jeder Stelle ein Vektorraumisomorphismus. Nun machen wir für die Lösung unserer inhomogenen Gleichung den Ansatz $\gamma(t) = X(t)c(t)$ mit $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar alias $\gamma(t) = c_1(t)\gamma_1(t) + \dots + c_n(t)\gamma_n(t)$ und finden

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= X'(t)c(t) + X(t)c'(t) \\ &= M(t)X(t)c(t) + X(t)c'(t) \\ &= M(t)\gamma(t) + X(t)c'(t) \end{aligned}$$

Unser Ansatz führt also zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung genau dann, wenn gilt $X(t)c'(t) = f(t)$ alias $c'(t) = X^{-1}(t)f(t)$. Ein c mit dieser Eigenschaft existiert aber ganz offensichtlich, eben das Integral der rechten Seite. \square

6.5.7 (Verhalten benachbarter Flußwege). Sei $A : X \ni U \rightarrow \vec{X}$ ein lip-schitzstetiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen

Raums mit Lipschitzkonstante L . Sind $\gamma_p, \gamma_q : [0, b] \rightarrow U$ Flußwege zu Anfangswerten $p, q \in U$, so finden wir für alle $t \in [0, b]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\gamma_p(t) - \gamma_q(t)\| &= \left\| p + \int_0^t A(\gamma_p(\tau)) d\tau - q - \int_0^t A(\gamma_q(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \|p - q\| + L \int_0^t \|\gamma_p(\tau) - \gamma_q(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

und das Lemma von Gronwall 6.2.14 liefert für alle $t \in [0, b]$ die Abschätzung

$$\|\gamma_p(t) - \gamma_q(t)\| \leq \|p - q\| e^{Lt}$$

Salopp gesprochen besagt diese Abschätzung, daß zwei Flußwege eines lipschitzstetigen Vektorfelds „höchstens exponentiell auseinanderlaufen können“. Das Argument vom Schluß des Beweises des Satzes über homogene lineare Differentialgleichungen 6.5.1 mag man vergrößernd dahingehend zusammenfassen, daß sich in diesem Fall eine beliebige Lösung höchstens exponentiell von der Null-Lösung entfernt und insbesondere nicht in endlicher Zeit ins Unendliche entweichen kann.

Proposition* 6.5.8 (Lösungswachstum für lineare Differentialgleichungen).

Seien V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $M : [b, c) \rightarrow \text{End } V$ stetig. Bezeichne $\|\cdot\|$ eine Norm auf V und die zugehörige Operatornorm auf $\text{End } V$. Erfüllt M die Abschätzung $\|M(t)\| \leq S(t)$ für ein stetiges $S : [b, c) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ und ist $h : [b, c) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $h'(t) = S(t)h(t)$ zum Anfangswert $h(b) = 1$, so gilt für alle Lösungen $\gamma : [b, c) \rightarrow V$ der Differentialgleichung $\gamma'(t) = M(t)\gamma(t)$ die Abschätzung

$$\|\gamma(t)\| \leq h(t)\|\gamma(b)\| \quad \forall t \in [b, c)$$

6.5.9. Die Aussage gilt allgemeiner und mit demselben Beweis, wenn V ein beliebiger reeller Banachraum ist.

Beweis. Unsere Differentialgleichung kann umgeschrieben werden zur Integralgleichung

$$\gamma(t) = \gamma(b) + \int_b^t M(\tau)\gamma(\tau) d\tau$$

So erhalten wir die Abschätzung

$$\|\gamma(t)\| < C + \int_b^t S(\tau)\|\gamma(\tau)\| d\tau$$

für alle $t \in [b, c)$ und alle C mit $\|\gamma(b)\| < C$. Das Integral definiert eine Funktion $g(t)$ mit $g'(t) = S(t)\|\gamma(t)\| < S(t)C + S(t)g(t)$ und mit $g(b) = 0$. Für $f(t) =$

$Ch(t) - C$ gilt nun sicher $f'(t) = S(t)C + S(t)f(t)$ und $f(b) = 0$. Nach unseren Erkenntnissen über strikte differentielle Ungleichheiten 6.2.10 folgt $g(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [b, c)$ und damit

$$\|\gamma(t)\| \leq Ch(t) \quad \forall t \in [b, c)$$

Da das für alle C mit $\|\gamma(b)\| < C$ gilt, folgt die Proposition. □

Korollar* 6.5.10. Seien $b > 0$ und V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $M : (0, b] \rightarrow \text{End } V$ stetig. Bezeichne $\|\cdot\|$ eine Norm auf V und die zugehörige Operatornorm auf $\text{End } V$. Erfüllt M die Abschätzung $\|M(t)\| < N/t$ für ein $N \in \mathbb{R}_{>0}$, so gilt für alle Lösungen $\gamma(t)$ der Differentialgleichung $\gamma'(t) = M(t)\gamma(t)$ die Abschätzung

$$\|\gamma(t)\| \leq \|\gamma(b)\|(b/t)^N$$

Übungen

Übung 6.5.11 (Nahe lineare Differentialgleichungen haben nahe Lösungen). Seien V ein endlichdimensionaler normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $b > 0$. Seien $A, B : [0, b] \rightarrow \text{End } V$ stetig mit durch $M > 0$ beschränkter Operatornorm. Für Lösungen $\phi, \psi : [0, b] \rightarrow V$ der Differentialgleichungen $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ und $\psi'(t) = B(t)\psi(t)$ mit demselben Anfangswert $v = \phi(0) = \psi(0)$ zeige man die Abschätzung

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| \leq \exp(t\|A - B\|_\infty) \cdot \|v\|e^{Mb}$$

Hinweis: Man finde zunächst mit 6.5.7 Schranken für die Lösungen und dann durch nochmalige Anwendung eine Schranke für ihre Differenz.

Übung 6.5.12. Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Differentialgleichung $y' + y \sin(x) = \cos(x) \sin(x)$.

6.6 Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts*

Definition 6.6.1. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums X besitzt nach 6.2.1 zu jedem Anfangswert $q \in U$ einen größten Flußweg $\gamma_q : I_q \rightarrow U$. Wir erklären seinen **Fluß** als die Abbildung

$$\Phi : (t, q) \mapsto \gamma_q(t)$$

von der Menge $\tilde{U} := \{(t, q) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in I_q\}$, dem **Definitionsbereich des Flusses**, in den Definitionsbereich U unseres Vektorfelds. Allgemeiner vereinbaren wir dieselbe Definition für jedes Vektorfeld, das zu jedem Anfangswert einen größten Flußweg besitzt.

Satz 6.6.2 (Lösungen als Funktionen ihres Anfangswerts). *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums hat sein Fluß offenen Definitionsbereich und ist ebenfalls glatt.*

Ergänzung 6.6.3. Auch dieser Satz gilt mit fast demselben Beweis allgemeiner für jeden Banachraum. Beim Beweis zeigen wir sogar, daß für jedes C^k -Vektorfeld mit $k \geq 1$ sein Fluß einen offenen Definitionsbereich hat und auch von der Klasse C^k ist.

Beweis. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X , ein C^k -Vektorfeld $A : X \supset U \rightarrow \vec{X}$ mit $k \geq 1$ und ein Punkt $p \in U$ wählen wir zunächst offene Umgebungen $V \subset U$ von p und $W \subset \vec{X}$ von Null mit $V + W \subset U$. Weiter wählen wir eine Norm auf \vec{X} . Dann betrachten wir für ein mehrpunktiges kompaktes reelles Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ den affinen Raum

$$\mathcal{C}_p^1(I, X)$$

aller stetig differenzierbaren Wege $\gamma : I \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = p$. Seinen Richtungsraum $\mathcal{C}_0^1(I, \vec{X})$ verstehen wir mit der Norm $\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz von Funktion und erster Ableitung. Nach 6.3.9 erhalten wir so einen reellen Banachraum. Nun betrachten wir die Abbildung

$$F : \mathbb{R} \times V \times \mathcal{C}_0^1(I, W) \rightarrow \mathcal{C}(I, \vec{X}) \\ (\tau, q, \psi) \mapsto \psi' - \tau(A \circ (q + \psi))$$

Genau dann wird (τ, q, ψ) auf Null abgebildet, wenn $t \mapsto \gamma(t) = q + \psi(t)$ ein Flußweg des reskalierten Vektorfelds τA zum Anfangswert $\gamma(0) = q$ ist. Nach Summenregel 2.6.4, Produktregel 2.6.5 und dem im Anschluß bewiesenen Lemma 6.6.4 ist F differenzierbar mit Differential

$$(d_{(\tau, q, \psi)} F)(h, v, \alpha) = \alpha' - h(A \circ (q + \psi)) - \tau((dA) \circ (q + \psi, v + \alpha))$$

Insbesondere gilt $(d_{(0, p, 0)} F)(0, 0, \alpha) = \alpha'$, und da $\alpha \mapsto \alpha'$ eine stetige und stetig umkehrbare Bijektion $\mathcal{C}_0^1(I, \vec{X}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(I, \vec{X})$ definiert und F nach unserer Formel stetig differenzierbar ist, dürfen wir den Satz über implizite Funktionen 4.3.7 anwenden. Er liefert uns ein Paar (A_1, B_1) mit $(0, p) \in A_1 \subset \mathbb{R} \times V$ und $0 \in B_1 \subset \mathcal{C}_0^1(I, W)$ derart, daß es für jedes $(\tau, q) \in A_1$ genau ein $\psi_{\tau, q} \in B_1$ gibt, für das $\gamma_{\tau, q} = q + \psi_{\tau, q}$ ein auf I definierter Flußweg des reskalierten Vektorfelds τA mit Anfangswert q ist. Wählen wir also etwa $I = [-1, 1]$, so finden wir in A_1 eine offene Umgebung von $(0, p)$ der Gestalt $(-\eta, \eta) \times D$, und daselbst ist dann auch der Fluß definiert. Da Flußwege unter Zeitverschiebung Flußwege bleiben, zeigt das schon mal, daß unser Fluß einen offenen Definitionsbereich

hat. Weiter ist F nach obiger Formel für sein Differential sogar von der Klasse \mathcal{C}^k im Sinne von ???. Damit zeigt der Satz über implizite Funktionen mit den Resultaten und Definitionen von ??? aber auch, daß die Zuordnung $(\tau, q) \mapsto \gamma_{\tau, q}$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung $(-\eta, \eta) \times D \rightarrow \mathcal{C}^1(I, U)$ ist. Verknüpfen wir diese mit dem Auswerten an einer festen Stelle $t \in I \setminus 0$, einer stetigen affinen Abbildung, und beachten $\gamma_{\tau, q}(t) = \gamma_q(\tau t)$, so folgt, daß der Fluß selbst eine \mathcal{C}^k -Abbildung ist. \square

Lemma 6.6.4. *Seien X, Y normierte Räume und $A : X \oplus U \rightarrow Y$ stetig differenzierbar. Für jedes Kompaktum K ist dann auch die Abbildung $(A \circ) : \mathcal{C}(K, U) \rightarrow \mathcal{C}(K, Y)$ differenzierbar und ihr Differential paßt in ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(K, U) \times \mathcal{C}(K, \vec{X}) & \xrightarrow{d(A \circ)} & \mathcal{C}(K, \vec{Y}) \\ \downarrow \wr & & \parallel \\ \mathcal{C}(K, U \times \vec{X}) & \xrightarrow{(dA) \circ} & \mathcal{C}(K, \vec{Y}) \end{array}$$

6.6.5. Hier verstehen wir für jeden normierten Raum Z den Abbildungsraum $\mathcal{C}(K, Z)$ mit seiner Norm der gleichmäßigen Konvergenz und identifizieren den Richtungsraum unseres Abbildungsraums in der hoffentlich offensichtlichen Weise mit $\mathcal{C}(K, \vec{Z})$. In der oberen Horizontalen meinen wir die Abbildung $(\gamma, \alpha) \mapsto (d_\gamma(A \circ))(\alpha)$ und in der unteren Horizontalen meint dA entsprechend die Abbildung $dA : U \times \vec{X} \rightarrow \vec{X}, (x, v) \mapsto (d_x A)(v)$.

Beweis. Es reicht, an jeder Stelle $\gamma \in \mathcal{C}(K, U)$ die Differenzierbarkeit zu untersuchen und das Differential $d_\gamma(A \circ)$ zu bestimmen. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es für alle $x \in \gamma(K)$ ein größtes $\eta(x) = \eta_\varepsilon(x) \in (0, 1)$ derart, daß gilt $B(x; \eta(x)) \subset U$ und

$$\|x - z\| < \eta(x) \Rightarrow \|d_x A - d_z A\| \leq \varepsilon$$

Man erkennt unschwer, daß $\eta : \gamma(K) \rightarrow (0, 1)$ stetig ist, ja sogar lipschitzstetig mit Lipschitz-Konstante Zwei. Sei $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ das Minimum von η auf unserem Kompaktum $\gamma(K)$. Für $x \in \gamma(K)$ und $h \in \vec{X}$ mit $\|h\| \leq \delta$ liefert dann der Schrankensatz oder vielmehr sein Korollar 2.4.11 die Abschätzung

$$\|A(x+h) - A(x) - (d_x A)(h)\| \leq \|h\| \varepsilon$$

Für jedes $\alpha : K \rightarrow \vec{X}$ mit $\|\alpha\| \leq \delta$ gilt also

$$\|A \circ (\gamma + \alpha) - A \circ \gamma - (dA) \circ (\gamma, \alpha)\| \leq \|\alpha\| \varepsilon$$

Das war im wesentlichen die Behauptung. \square

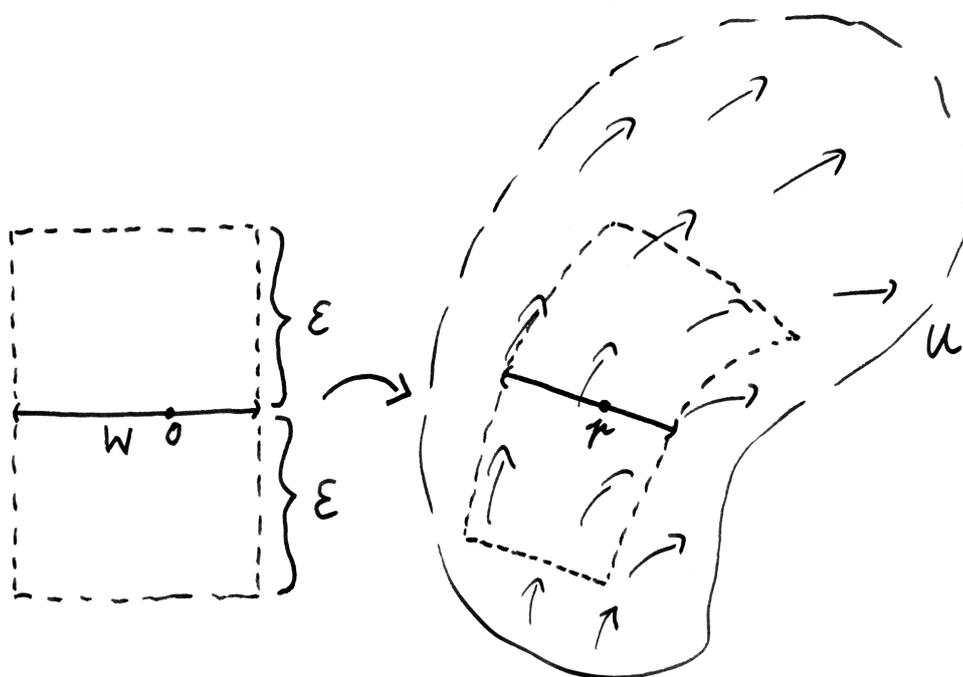


Illustration zum Beweis von Satz 6.6.6 zur lokalen Normalform eines Vektorfelds ohne Nullstelle

Satz 6.6.6 (Normalform eines Vektorfelds ohne Nullstelle). *Gegeben ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums, das an einer festen Stelle nicht verschwindet, ist unser Feld auf einer offenen Umgebung dieser Stelle unter einem Diffeomorphismus verwandt zu einem konstanten Feld.*

6.6.7. In Koordinaten gesprochen hat also jedes Vektorfeld, daß an einer vorgegebenen Stelle nicht verschwindet, in geeigneten lokalen Koordinaten x_1, \dots, x_n um diese Stelle die Gestalt $\frac{\partial}{\partial x_1}$.

Beweis. Sei $A : X \supset U \rightarrow \vec{X}$ unser Vektorfeld und $p \in U$ die vorgegebene Stelle. Wir wählen $\vec{Y} \subset \vec{X}$ komplementär zur Geraden mit Richtungsvektor A_p und wählen einen Isomorphismus $L : \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$. Gegeben ein glattes Vektorfeld A auf einer offenen Teilmenge U eines endlichdimensionalen affinen Raums schreiben wir im folgenden $A^t q$ für die Stelle $A^t q \in U$, an der der Punkt $q \in U$ landet, wenn er sich für die Zeitspanne t mit dem Fluß des Vektorfelds A treiben läßt. Man zeigt mühelos, daß für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und eine hinreichend kleine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ des Ursprungs die Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W \rightarrow U$, $(t, \vec{w}) \mapsto A^t(p + L\vec{w})$ sinnvoll definiert und ein Diffeomorphismus der gewünschten Art ist. \square

6.7 Ergänzung zu differentiellen Ungleichungen*

Lemma* 6.7.1 (Nicht-strikte differentielle Ungleichungen). *Seien eine stetig differenzierbare Funktion $K : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ und $a < b$ gegeben und seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit Graph in U derart, daß an jeder Stelle $t \in [a, b]$ gilt*

$$f'(t) \geq K(t, f(t)) \quad \text{und} \quad g'(t) \leq K(t, g(t)).$$

Haben wir außerdem $g(0) \leq f(0)$, so folgt $g(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [a, b]$.

6.7.2. Die analoge Aussage mit einer strikten Ungleichung in der Formelzeile ist leichter zu zeigen und gilt sogar für beliebige Funktionen K , vergleiche 6.2.10.

6.7.3. Ich erwarte, daß die Aussage weiter gilt, wenn wir K nur stetig und in Bezug auf die zweite Variable lokal partiell lipschitzstetig annehmen, kann es aber nicht beweisen. Am liebsten hätte ich eh auch schon für obige Aussage einen einfacheren Beweis.

Beweis. Die Beweisidee besteht darin, sich durch einen geeigneten Koordinatenwechsel auf den Fall zurückzuziehen, daß K die Nullfunktion ist. Wir argumentieren durch Widerspruch. Wäre die Aussage des Lemmas falsch, so gehörte

$$t := \inf\{s \in [a, b] \mid g(s) > f(s)\}$$

zu $[a, b)$ und wir hätten $g(t) = f(t)$. Wir setzen $y := g(t) = f(t)$. Für jedes $(t, y) \in U$ gibt es nach Satz 6.6.2 über den Fluß, genauer seiner Variante 6.6.3 für stetig differenzierbare Vektorfelder, positive $\varepsilon, \delta > 0$ und $F : (t - \delta, t + \delta) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $(s, F(s, z)) \in U$ für alle (s, z) aus dem Definitionsbereich von F und $k_z : s \mapsto F(s, z)$ einer Lösung der Differentialgleichung $k'_z(s) = K(s, k_z(s))$ mit Anfangswert $k_z(t) = z$ für alle $z \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Indem wir, um uns zusätzliches Nachdenken zu ersparen, möglicherweise ε und δ noch verkleinern, dürfen wir sogar annehmen, daß die Abbildung $\bar{F} : (s, z) \mapsto (s, F(s, z))$ offenes Bild $V \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $\bar{H} : V \xrightarrow{\sim} (t - \delta, t + \delta) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ hat, die wir natürlich als $\bar{H}(s, u) = (s, H(s, u))$ schreiben können mit $H : V \rightarrow \mathbb{R}$. Nun können wir $\delta > 0$ sogar so klein wählen, daß gilt $(s, f(s)), (s, g(s)) \in V$ für alle $s \in [t, t + \delta)$. Offensichtlich gilt $\partial_u F > 0$ und dann auch $\partial_u H > 0$ auf den jeweiligen Definitionsbereichen. Wir erreichen also bereits den gesuchten Widerspruch, wenn wir $H(s, g(s)) \leq H(s, k_y(s)) \leq H(s, f(s))$ zeigen für $s \in [t, t + \delta)$. Es reicht, die erste Ungleichung zu zeigen. Nach Konstruktion von H gilt $z = H(s, k_z(s))$ für alle (s, z) . Damit müssen wir einerseits nur noch $H(s, g(s)) \leq y$ zeigen für $s \in [t, t + \delta)$, und andererseits erhalten wir

$$0 = \frac{d}{ds} H(s, k_z(s)) = \frac{\partial H}{\partial s}(s, k_z(s)) + \frac{\partial H}{\partial u}(s, k_z(s)) k'_z(s)$$

alias $0 = \frac{\partial H}{\partial s}(s, u) + \left(\frac{\partial H}{\partial u}(s, u)\right) K(s, u)$ für alle $(s, u) \in V$. Insbesondere haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} H(s, g(s)) &= \frac{\partial H}{\partial s}(s, g(s)) + \frac{\partial H}{\partial u}(s, g(s)) g'(s) \\ &\leq \frac{\partial H}{\partial s}(s, g(s)) + \left(\frac{\partial H}{\partial u}(s, g(s))\right) K(s, g(s)) = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt aber sofort $H(s, g(s)) \leq y$ für $s \in [t, t + \delta)$. □

7 Grundlegendes zu Fourierreihen

7.1 Eindeutigkeit der Fourierreihe

Definition 7.1.1. Seien M eine Menge und $p > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir sagen, eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow M$ habe die **Periode** p , wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x + p) = f(x)$.

Satz 7.1.2 (Fourier-Reihe, reelle Form). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion der Periode 2π . So gibt es eindeutig bestimmte $a_\nu, b_\nu, c \in \mathbb{R}$ derart, daß gilt

$$f(x) = c + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin(\nu x) + b_\nu \cos(\nu x)$$

in dem Sinne, daß die Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen unsere Funktion f konvergiert.

Satz 7.1.3 (Fourier-Reihe, komplexe Form). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion der Periode 2π . So gibt es eindeutig bestimmte $c_\nu \in \mathbb{C}$ derart, daß im Sinne gleichmäßiger Konvergenz gilt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} c_\nu e^{i\nu x}$$

7.1.4 (Übergang zwischen reeller und komplexer Fourierreihe). Sicher können wir in der ersten Formulierung 7.1.2 unseres Satzes auch komplexwertige Funktionen erlauben, wenn wir $a_\nu, b_\nu, c \in \mathbb{C}$ zulassen. Die beiden Sätze sind dann äquivalent, da nach der Euler'schen Formel gilt

$$\begin{aligned} e^{i\nu x} &= \cos \nu x + i \sin \nu x \\ e^{-i\nu x} &= \cos \nu x - i \sin \nu x \end{aligned}$$

Gegeben eine Darstellung wie in Satz 7.1.3 erhalten wir also eine Darstellung wie in Satz 7.1.2 mit $c = c_0$, $b_\nu = c_\nu + c_{-\nu}$, $a_\nu = i c_\nu - i c_{-\nu}$. Umgekehrt sind diese Gleichungen sind genau dann erfüllt, wenn gilt

$$c_0 = c, \quad c_\nu = \frac{1}{2}(b_\nu - i a_\nu) \quad \text{und} \quad c_{-\nu} = \frac{1}{2}(b_\nu + i a_\nu).$$

Beweis. Wir zeigen vorerst nur die Eindeutigkeit, der Beweis der Existenz wird in 7.3.7 nachgeholt. Aus der Euler'schen Formel folgt, daß die Ableitung von $f(x) = e^{i\nu x} = \cos \nu x + i \sin \nu x$ gegeben wird durch $f'(x) = i\nu e^{i\nu x} = -\nu \sin \nu x + i\nu \cos \nu x$. Mit der komplexwertigen Variante des Hauptsatzes der Differential-

und Integralrechnung erhalten wir $\int_0^{2\pi} e^{i\nu x} dx = \frac{1}{i\nu} e^{i\nu x} \Big|_0^{2\pi} = 0$ für $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und für $\nu = 0$ ergibt sich $\int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$. Wir folgern

$$\int_0^{2\pi} e^{i\mu x} e^{-i\nu x} dx = \begin{cases} 2\pi & \nu = \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Indem wir die gleichmäßige Konvergenz mit dem Integral vertauschen und uns überlegen, daß das auch für komplexwertige Funktionen erlaubt ist, erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\nu x} dx = 2\pi c_\nu$$

Das zeigt die Eindeutigkeit der c_ν . Der Beweis der Existenz wird in 7.3.7 nachgeholt. \square

7.1.5. Gegeben ein normierter Vektorraum V nennt man eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V **summierbar mit Summe** $s \in V$ und schreibt

$$\sum_{i \in I} v_i = s$$

als Abkürzung für die Aussage, daß es für jede Umgebung U von s eine endliche Teilmenge $I_U \subset I$ gibt derart, daß für jede endliche Obermenge J von I_U in I gilt

$$\sum_{i \in J} v_i \in U$$

Satz 7.1.6 (Summierbarkeit der Fourier-Reihe). *Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion der Periode 2π , so gibt es eindeutig bestimmte $c_\nu \in \mathbb{C}$ derart, daß bezüglich der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\text{Ens}^b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ im Sinne der Summierbarkeit 7.1.5 in normierten Vektorräumen gilt*

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu x} = f(x)$$

7.1.7. Natürlich müssen hier die c_ν dieselben sein wie in der schwächeren aber einfacher zu formulierenden Version 7.1.3, so daß die Eindeutigkeit aus dem Vorhergehenden folgt. Der Beweis dieser stärkeren Konvergenzaussage wird in 7.3.7 gegeben. Ich habe etwas gezögert, auf der rechten Seite $f(x)$ zu schreiben, wo doch schlicht die Funktion f gemeint ist, aber auf der linken Seite steht ja auch $e^{i\nu x}$ für die Funktion $x \mapsto e^{i\nu x}$.

Vorschau 7.1.8. Die obigen Sätze über die Fourierreihenentwicklung sind erste Vertreter eines großen Theoriegebäudes, in das wir in [AN3] 2.1.1 folgende tiefer eindringen. Insbesondere ergibt sich die Frage, welche Abbildungen $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ denn nun etwa den stetig differenzierbaren oder den glatten periodischen Funktionen entsprechen. Diese Frage erweist sich als recht delikat. In 7.3.10 diskutieren wir, welche

Fourierreihen beliebig oft differenzierbaren 2π -periodischen Funktionen entsprechen. In [AN3] 2.2.3 führen wir den Raum der „quadratintegrierbaren Funktionen“ ein und zeigen, daß diese unter unserer Fourierentwicklung genau denjenigen Abbildungen $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ entsprechen, bei denen die Summe der Betragsquadrate endlich ist.

7.2 Approximationssatz von Stone-Weierstraß

7.2.1. Unter einem kompakten Raum darf man in diesem Abschnitt je nach Wissensstand einen kompakten metrischen Raum oder allgemeiner einen kompakten topologischen Raum verstehen.

7.2.2. Im folgenden verwende ich eine Begrifflichkeit, die in [LA2] 9.9.1 ausführlich eingeführt wird, und bespreche an dieser Stelle nur das Nötigste. Gegeben ein Körper k bezeichnet man einen k -Vektorraum A mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \rightarrow A$ ganz allgemein als eine k -**Algebra**. Ist die Verknüpfung assoziativ, so spricht man von einer **assoziativen Algebra**. Gibt es für unsere Verknüpfung ein neutrales Element, so spricht man von einer **unitären Algebra** und nennt das fragliche Element das **Eins-Element**. Eine Algebra ist also genau dann assoziativ und unitär, wenn die zugrundeliegende Menge mit der Vektorraum-Addition als Addition und der bilinearen Verknüpfung als Multiplikation im Sinne von [LA1] 5.1.1 ein Ring ist. Ich nenne derartige Algebren **Ringalgebren**.

7.2.3. Gegeben ein Körper k und eine beliebige Menge X ist der k -Vektorraum $\text{Ens}(X, k)$ aller k -wertigen Funktionen auf X mit der punktweisen Multiplikation als Verknüpfung eine Ringalgebra mit der konstanten Funktion Eins als Eins-Element. Wir sagen, eine Teilmenge $A \subset \text{Ens}(X, k)$ **trenne die Punkte von X** , wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $a \in A$ gibt mit $a(x) \neq a(y)$.

7.2.4. Gegeben ein Körper k und eine k -Algebra A versteht man unter einer **Unteralgebra** $B \subset A$ einen unter der Verknüpfung unserer Algebra stabilen Untervektorraum. Gegeben ein Körper k und eine k -Ringalgebra A verstehen wir unter einer **Unterringalgebra** $B \subset A$ einen unter der Verknüpfung unserer Ringalgebra stabilen Untervektorraum, der darüber hinaus das Einselement der Ringalgebra A enthält. In anderen Worten ist eine Unterringalgebra also eine Unteralgebra, die gleichzeitig ein Teilring ist im Sinne von [AL] 2.2.1.

7.2.5. Man beachte, daß wir bereits wissen, daß die stetigen reellen Funktionen auf einem topologischen Raum X in der \mathbb{R} -Ringalgebra aller reellen Funktionen eine \mathbb{R} -Unterringalgebra

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \subset \text{Ens}(X, \mathbb{R})$$

bilden. Des weiteren wissen wir nach 1.4.10, daß diese Unterringalgebra stabil ist unter dem Bilden gleichmäßiger Grenzwerte. Gegeben ein kompakter Raum X

bezeichne im folgenden $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ den reellen Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X mit seiner Supremumsnorm.

Definition 7.2.6. Eine Teilmenge eines metrischen oder auch eines topologischen Raums heißt **dicht**, wenn ihr Abschluß der ganze Raum ist.

Satz 7.2.7 (Approximationssatz von Stone-Weierstraß). *In der Ringalgebra aller stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum liegt jede Unterringalgebra, die die Punkte unseres Raums trennt, bereits dicht in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

Ergänzung 7.2.8. Ich erwähne noch eine Variante dieses Satzes, die man oft in der Literatur findet, die jedoch für uns hier noch nicht von Belang ist. Statt einer Unterringalgebra könnten wir mit einer Unteralgebra arbeiten und zusätzlich voraussetzen, daß es für jedes $x \in X$ ein $a \in A$ gibt mit $a(x) \neq 0$. Man sagt dann, A habe „keine simultane Nullstelle“. Unser Beweis funktioniert dann im wesentlichen immer noch, man muß dazu nur Lemma 7.2.11 verfeinern zur Aussage, daß p_ε sogar ohne konstanten Term gefunden werden kann, und muß in Schritt 3 etwas feiner argumentieren.

Korollar 7.2.9 (Approximationssatz von Weierstraß). *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Polynomfunktion $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ mit*

$$|p(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weierstraß 7.2.7. □

Beweis von Stone-Weierstraß. Seien X unser kompakter Raum und $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ unsere Unterringalgebra. Wir ziehen uns zunächst auf den Fall zurück, daß A in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ abgeschlossen ist.

Lemma 7.2.10. *Ist X kompakt und $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra, so ist auch der Abschluß \bar{A} von A eine Unteralgebra.*

Beweis. Nach 1.5.18 ist \bar{A} genau die Menge aller stetigen Funktionen $a : X \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß es eine Folge a_n aus A gibt, die gleichmäßig gegen a konvergiert. Sei b ein weiteres Element von \bar{A} und b_n eine Folge aus A , die gleichmäßig gegen b konvergiert. Wir behaupten, daß dann auch $a_n + b_n$ gleichmäßig gegen $a + b$ konvergiert und $a_n b_n$ gleichmäßig gegen ab . Den Beweis der ersten Aussage überlassen wir dem Leser. Für die Zweite benutze man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|ab - a_n b_n\| &\leq \|a - a_n\| \cdot \|b_n\| + \|a\| \cdot \|b - b_n\| \\ &\leq \varepsilon(\|b\| + 1 + \|a\|) \end{aligned}$$

falls gilt $\|a - a_n\| < \varepsilon$, $\|b - b_n\| < \varepsilon$ und $\varepsilon < 1$. □

Erfüllt also eine Unterringalgebra $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ die Bedingungen von Stone-Weierstraß, so ist auch ihr Abschluß \bar{A} eine Unterringalgebra und trennt a fortiori die Punkte von X . Um Stone-Weierstraß zu beweisen reicht es demnach aus, wenn wir unter der zusätzlichen Annahme A abgeschlossen die Gleichheit $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ zeigen. Nun zeigen wir zunächst einmal einen Spezialfall des Approximationssatzes von Weierstraß durch ein direktes Argument.

Lemma 7.2.11. *Für ein beliebiges positives $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom $p = p_\varepsilon$ mit $|\sqrt{x} - p(x)| < \varepsilon \forall x \in [0, 1]$.*

Erster Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da \sqrt{x} gleichmäßig stetig ist auf $[0, 2]$, finden wir $\eta \in (0, 1)$ mit

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x + \eta}| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Da die Taylorreihe von \sqrt{x} um den Entwicklungspunkt 1 nach [AN1] 12.6.1.23 auf dem Intervall $[\eta, 1 + \eta]$ gleichmäßig gegen \sqrt{x} konvergiert, finden wir weiter ein Polynom p mit

$$|\sqrt{x + \eta} - p(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \square$$

Zweiter Beweis. Bei der folgenden Alternative muß man etwas mehr denken, aber nichts wissen über die Konvergenz von Taylorreihen. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Polynomen durch $p_0(x) = 0$, $p_{n+1}(x) = p_n(x) + (1/2)(x - p_n(x))^2$ und behaupten, daß diese Folge auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen \sqrt{x} konvergiert. In der Tat gilt ja

$$p_{n+1} = p_n + (\sqrt{x} - p_n)(\sqrt{x} + p_n)/2$$

und dieser Gleichung sehen wir an, daß für $x \in [0, 1]$ gilt

$$p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq \sqrt{x}$$

denn es folgt induktiv $(\sqrt{x} - p_n) \geq 0$ und $(\sqrt{x} + p_n)/2 \leq 1$. Andererseits folgt aus unserer Gleichung auch

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} - p_{n+1}) &= (\sqrt{x} - p_n)(2 - \sqrt{x} - p_n)/2 \\ &\leq (\sqrt{x} - p_n)(2 - \sqrt{x})/2 \end{aligned}$$

und somit konvergiert unsere Folge p_n auf jedem Intervall $[a, 1]$ mit $0 < a < 1$ gleichmäßig gegen \sqrt{x} . Dann muß mit etwas Nachdenken unsere Folge aber auf ganz $[0, 1]$ gleichmäßig gegen \sqrt{x} konvergieren. \square

Nun zeigen wir Stone-Weierstraß 7.2.7 für eine abgeschlossene Unterringalgebra A , auf diesen Fall hatten wir uns ja bereits zurückgezogen, in fünf Schritten.

Gegeben $a \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ bezeichne $|a| \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ die Funktion $x \mapsto |a(x)|$ und $\|a\| \in \mathbb{R}$ die Supremumsnorm von a .

1. Wir zeigen $a \in A \Rightarrow |a| \in A$. Dazu schreiben wir $a = \lambda b$ mit $\lambda \in (0, \infty)$ und $\|b\| \leq 1$ und erhalten $|a| = \lambda \sqrt{b^2}$. Nach Lemma 7.2.11 gibt es eine Folge p_n von Polynomen, die auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen \sqrt{x} strebt, und dann strebt $\lambda p_n(b^2)$ auf X gleichmäßig gegen $|a|$. Da A eine Unteralgebra ist, liegen alle $\lambda p_n(b^2)$ auch in A , und da A abgeschlossen ist unter gleichmäßiger Konvergenz, folgt $|a| \in A$.

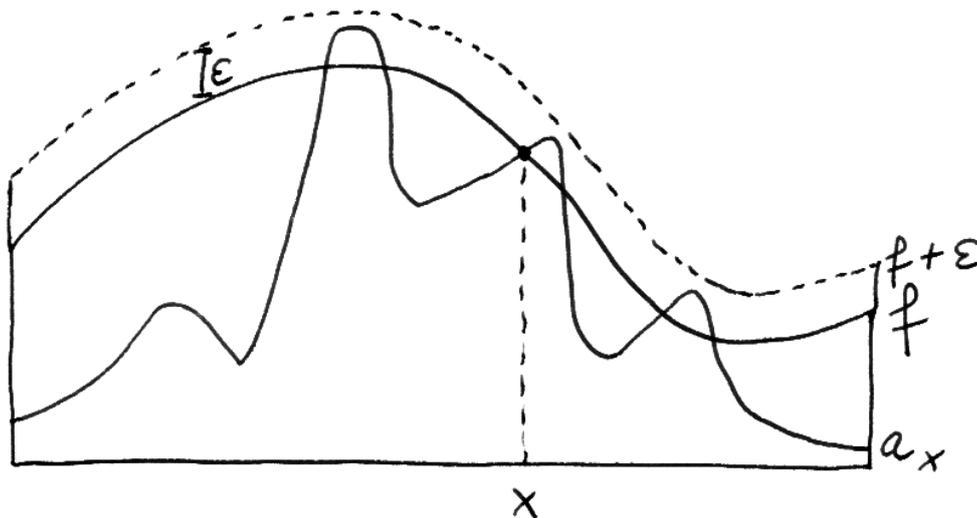
2. Wir zeigen $a, b \in A \Rightarrow \sup(a, b) \in A, \inf(a, b) \in A$. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \sup(a, b) &= 1/2(a + b + |a - b|) \\ \inf(a, b) &= 1/2(a + b - |a - b|) \end{aligned}$$

3. Für $x \neq y$ zwei verschiedene Punkte aus X und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es $a \in A$ mit $a(x) = \alpha, a(y) = \beta$. In der Tat betrachte man die \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ a &\mapsto (a(x), a(y)) \end{aligned}$$

Da A Punkte trennt, gibt es $a \in A$ mit $a(x) \neq a(y)$. Da die Konstanten zu A gehören, liegt jedoch auch $(1, 1)$ im Bild unserer linearen Abbildung. Damit enthält das Bild unserer linearen Abbildung zwei linear unabhängige Vektoren und ist folglich ganz \mathbb{R}^2 .



Zum Beweis von 7.2.7, Schritt 4

4. Für beliebige $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $a_x \in A$ mit $a_x(x) = f(x)$ und

$$a_x(y) < f(y) + \varepsilon \quad \forall y \in X$$

In der Tat, für alle $y \in X$ finden wir $a_{x,y} \in A$ mit $a_{x,y}(x) = f(x)$ und $a_{x,y}(y) = f(y)$. Auf einer geeigneten offenen Umgebung U_y von y gilt dann $a_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall z \in U_y$. Da X kompakt ist, gibt es nun $E \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{y \in E} U_y$. Dann nehmen wir $a_x = \inf_{y \in E} a_{x,y}$ und haben unser a_x gefunden.

5. Für beliebiges $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $a \in A$ mit $\|a - f\| < \varepsilon$. Sei in der Tat für jedes $x \in X$ ein a_x wie eben gewählt. Dann hat jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung V_x mit $f(z) - \varepsilon < a_x(z) < f(z) + \varepsilon \quad \forall z \in V_x$ wobei die zweite Ungleichung sogar gilt für alle $z \in X$. Da X kompakt ist, gibt es wieder $F \subset X$ endlich mit $X = \bigcup_{x \in F} V_x$. Ist X nicht leer, so nehmen wir nun $a = \sup_{x \in F} a_x$ und haben unser a gefunden. Der Fall $X = \emptyset$ ist eh unproblematisch. \square

7.2.12. Gegeben ein Kompaktum X bezeichne $\mathcal{C}(X)$ die \mathbb{C} -Ringalgebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm.

Korollar 7.2.13 (Stone-Weierstraß im Komplexen). *In der Ringalgebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum liegt jede komplexe Unterringalgebra, die die Punkte unseres Raums trennt und die stabil ist unter der komplexen Konjugation, bereits dicht in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

Beweis. Sei X unser kompakter Raum und $B \subset \mathcal{C}(X)$ unsere komplexe Unterringalgebra, die die Punkte von X trennt und stabil ist unter der komplexen Konjugation, in Formeln $b \in B \Rightarrow \bar{b} \in B$. Wir wenden den Satz von Stone-Weierstraß 7.2.7 an auf $A := B \cap \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Aus $b \in B$ folgt $\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b \in A$, denn es gilt $\operatorname{Re} b = (b + \bar{b})/2$ und $\operatorname{Im} b = (b - \bar{b})/2i$. Also trennt auch unser A die Punkte von X . Für $f \in \mathcal{C}(X)$ finden wir $u, v \in A$ mit $|\operatorname{Re} f(x) - u(x)| < \varepsilon/2$ und $|\operatorname{Im} f(x) - v(x)| < \varepsilon/2$ für alle $x \in X$, setzen $b = u + iv$ und folgern $\|f - b\| < \varepsilon$. \square

Korollar 7.2.14. *Das \mathbb{C} -Erzeugnis der $(z^\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ liegt dicht im Raum $\mathcal{C}(S^1)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf der Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ in Bezug auf die Metrik der gleichmäßigen Konvergenz.*

Beweis. Wegen $\bar{z} = z^{-1}$ für alle $z \in S^1$ folgt das aus dem Satz von Stone-Weierstraß für komplexwertige Funktionen 7.2.13. \square

Definition 7.2.15. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Gestalt $t \mapsto \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} d_\nu e^{i\nu t}$ mit $d_\nu \in \mathbb{C}$ heiße ein **trigonometrisches Polynom**.

Satz 7.2.16 (Dichtheit der trigonometrischen Polynome). *Gegeben eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ gibt es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom $g = g_\varepsilon$ mit*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

Beweis. Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Wir betrachten die Abbildung $E : [0, 2\pi] \rightarrow S^1, t \mapsto e^{it}$, die anschaulich gesprochen „unser Intervall zu einer Kreislinie zusammenbiegt“. Das Vorschalten von E liefert eine Bijektion

$$(\circ E) : \mathcal{C}(S^1) \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]) \mid f(0) = f(2\pi)\}$$

Das kann man unschwer direkt einsehen und auch formal aus dem anschließenden Lemma 7.2.17 folgern. Unter unserer Bijektion entsprechen nun die trigonometrischen Polynome auf $[0, 2\pi]$ genau den Funktionen der Form $\sum_{\nu=-n}^n d_\nu z^\nu$ auf der Kreislinie S^1 . Der Satz folgt aus Korollar 7.2.14. \square

Lemma 7.2.17. *Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Surjektion von einem kompakten Raum zu einem Hausdorffraum, so ist eine Abbildung $g : Y \rightarrow Z$ in einen weiteren Raum Z stetig genau dann, wenn $g \circ f$ stetig ist.*

Beweis. Das Problem ist nur, die Stetigkeit von g aus der Stetigkeit von $g \circ f$ zu folgern. Da f surjektiv ist, gilt für jede Teilmenge $A \subset Z$ offensichtlich

$$g^{-1}(A) = f((g \circ f)^{-1}(A))$$

Ist A abgeschlossen in Z , so ist $(g \circ f)^{-1}(A)$ abgeschlossen in X wegen der Stetigkeit von $g \circ f$, also kompakt nach 5.1.11. Dann ist $f((g \circ f)^{-1}(A))$ kompakt nach 5.1.15 als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung, mithin abgeschlossen nach 5.1.9, da Y ein Hausdorffraum ist. Zusammenfassend haben wir gezeigt, daß das Urbild $g^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subset Z$ abgeschlossen ist in Y . Daraus folgt mit 1.5.11 die Stetigkeit von g . \square

7.3 Konvergenz der Fourierreihe

7.3.1. Wir verwenden im folgenden die Begrifflichkeit der Skalarprodukte, wie sie etwa in [LA2] 2.1 eingeführt wird.

Definition 7.3.2. Wir versehen den komplexen Vektorraum $V = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ aller stetigen Funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}g$$

Die zugehörige Norm notiert man in diesem Fall mit $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

7.3.3. Unsere Formeln aus dem Beweis von 7.1.3 besagen genau, daß die $e^{i\nu x}$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$ in diesem Raum ein Orthonormalsystem im Sinne von [LA2] 2.1.13 bilden, in Formeln

$$\langle e^{i\nu x}, e^{i\mu x} \rangle = \begin{cases} 1 & \nu = \mu; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fourier-Koeffizienten schreiben sich nun kürzer $c_\nu = \langle e^{i\nu x}, f \rangle$. Indem wir jeder stetigen Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ die Familie ihrer „Fourierkoeffizienten“ zuordnen, in Formeln $f^\wedge(\nu) := \langle e^{i\nu x}, f \rangle$, erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0, 2\pi]) & \rightarrow & \text{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & f^\wedge \end{array}$$

Satz 7.3.4 (Quadratische Konvergenz der Fourierreihe). *Gegeben eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit Fourierkoeffizienten $c_\nu := \langle e^{i\nu x}, f \rangle$ gilt*

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu x}$$

im Sinne der Summierbarkeit nach 7.1.5 im komplexen Vektorraum $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ mit seiner Skalarproduktnorm $\| \cdot \|_2$.

7.3.5. Ich betone, daß dieser Satz keine Aussage über punktweise Konvergenz beinhaltet. Ich habe auf der linken Seite auch nur f und nicht $f(x)$ geschrieben, um das zu betonen. Punktweise Konvergenz gilt auch gar nicht in der Allgemeinheit dieses Satzes.

Beweis. Für alle endlichen Teilmengen $I \subset \mathbb{Z}$ können wir f nach [LA2] 2.1.22 zerlegen in seine Projektion auf den von allen $e^{i\nu x}$ mit $\nu \in I$ aufgespannten Teilraum von $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ und einen auf diesem Teilraum senkrechten Anteil,

$$f = \sum_{\nu \in I} c_\nu e^{i\nu x} + \left(f - \sum_{\nu \in I} c_\nu e^{i\nu x} \right)$$

Wir nehmen nun zunächst zusätzlich $f(0) = f(2\pi)$ an. Für alle $\varepsilon > 0$ finden wir dann nach 7.2.16 eine endliche Teilmenge $I_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ und ein trigonometrisches Polynom $g = \sum_{\nu \in I_\varepsilon} d_\nu e^{i\nu x}$ mit

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x$$

Es folgt sofort $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Da in einem Skalarproduktraum nach [LA2] 2.1.22 die orthogonale Projektion eines Vektors auf einen endlichdimensionalen Teilraum stets die bestmögliche Approximation durch Vektoren dieses Teilraums ist, folgt für alle endlichen $J \supset I_\varepsilon$ erst recht

$$\left\| f - \sum_{\nu \in J} c_\nu e^{i\nu x} \right\|_2 < \varepsilon$$

Das zeigt die Behauptung im Fall $f(0) = f(2\pi)$. Im Fall $f(0) \neq f(2\pi)$ müssen wir noch eine zusätzliche Verrenkung machen und zunächst eine stetige Funktion \tilde{f} finden mit $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi)$ sowie $\|\tilde{f} - f\|_2 < \varepsilon$. Dann gibt es wieder ein trigonometrisches Polynom g mit $\|\tilde{f} - g\|_2 < \varepsilon$, also $\|f - g\|_2 < 2\varepsilon$, und der Beweis kann wie zuvor zu Ende geführt werden. \square

Korollar 7.3.6. Sei $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und seien $c_\nu = \langle e^{i\nu x}, f \rangle$ seine Fourierkoeffizienten. So gilt $\|f\|_2^2 = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |c_\nu|^2$.

Beweis. Die Differenz $\|f\|_2^2 - \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} |c_\nu|^2$ ist das Quadrat eines Ausdrucks, von dem wir gerade gezeigt haben, daß er gegen Null strebt. \square

Satz 7.3.7 (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe). Gegeben eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Periode 2π mit Fourierkoeffizienten $c_\nu := \langle e^{i\nu x}, f \rangle$ gilt

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} c_\nu e^{i\nu x}$$

im Sinne der Summierbarkeit nach 7.1.5 im komplexen Vektorraum $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz.

7.3.8. Der Satz gilt mit fast demselben Beweis auch noch, wenn unsere Funktion nur „stückweise stetig differenzierbar“ ist, wenn es also Punkte $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 2\pi$ gibt derart, daß die Einschränkung von f auf jedes der Intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ stetig differenzierbar ist. Die Details mag der Leser zur Übung selbst ausarbeiten.

Beweis. Die Fourier-Koeffizienten $c_\nu = \langle e^{i\nu x}, f \rangle$ von f ergeben sich für $\nu \neq 0$ aus den Fourier-Koeffizienten $c'_\nu = \langle e^{i\nu x}, f' \rangle$ von f' durch partielles Integrieren zu

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\nu x} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(x) e^{-i\nu x}}{-i\nu} dx = \frac{-ic'_\nu}{\nu}$$

Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt jedoch $2|\alpha\beta| \leq (|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ und es folgt

$$\sum_{\nu} |c_\nu| \leq |c_0| + \sum_{\nu \neq 0} \left(\frac{1}{\nu^2} + |c'_\nu|^2 \right) < \infty$$

Also gibt es eine stetige Funktion g mit $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in x}$ im komplexen Vektorraum $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$. A fortiori gilt das dann auch in Bezug auf die Norm $\|\cdot\|_2$. Aus dem Satz über die quadratische Konvergenz der Fourierreihe 7.3.4 folgt damit $g = f$ und wir sind fertig. \square

Vorschau 7.3.9 (Fourierreihe und Wärmeverteilung). Fassen wir eine stetig differenzierbare 2π -periodische Funktion f als eine Funktion auf dem Einheitskreis auf und nehmen sie reellwertig an, so gilt für ihre Fourier-Koeffizienten offensichtlich $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$. Sie können zum Beispiel in [FT1] 16.5.1 lernen, warum die Formel

$$P(z) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu + c_{-\nu} \bar{z}^\nu$$

dann die eindeutig bestimmte „stabile Wärmeverteilung mit Randverteilung f auf der Einheitskreisscheibe“ beschreibt. In diesem Zusammenhang hat Fourier, von dem erzählt wird, daß er häufig fröstelte, ursprünglich die heute nach ihm benannten Reihenentwicklungen gefunden und in seinem Werk „Théorie analytique de la chaleur“ veröffentlicht.

7.3.1 Übungen

Übung 7.3.10. Wir erklären den **Schwarzraum** $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \subset \text{Ens}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ als den Raum aller Abbildungen $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^k a_n| < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß die Entwicklung in eine Fourierreihe $(a_n) \mapsto f$ mit $f(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$ einen Isomorphismus induziert zwischen dem Schwarzraum $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ und dem Raum der beliebig oft differenzierbaren 2π -periodischen Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Hinweis: Man gehe den Beweis von 7.3.7 noch einmal durch.

8 Wegintegrale und Potentiale

8.1 Vektorfelder und Kovektorfelder

Definition 8.1.1. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Vektorfeld** oder genauer ein **relatives Vektorfeld auf U** ist wie in 6.1.5 eine Abbildung

$$\begin{aligned} A : U &\rightarrow \vec{X} \\ p &\mapsto A_p \end{aligned}$$

von U in den Richtungsraum \vec{X} von X .

8.1.2 (**Diskussion der Terminologie**). Später einmal werden wir ein „Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M “ erklären als eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $A_p \in T_p M$ zuordnet. Das ist etwas spezielleres als ein „relatives“ Vektorfeld, das jedem Punkt $p \in M \subset X$ einfach irgendeinen Richtungsvektor $A_p \in \vec{X}$ zuordnet. Vorerst jedoch werden wir nur mit Vektorfeldern auf halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler Räume X arbeiten, und in diesem Fall sind unsere „relativen“ Vektorfelder bereits die „richtigen“ Vektorfelder. Deshalb kommt es auf derartige Feinheiten hier noch nicht an.

8.1.3. Wir schreiben im Zusammenhang mit Differentialgleichungen statt A_p auch $A(p)$. Die Notation A_p dahingegen ist praktisch, wenn wir unsere Vektorfelder wie in 8.1.20 auf Funktionen anwenden wollen. In der physikalischen Terminologie heißen Vektorfelder **kontravariant** aus Gründen, die in 8.2.17 diskutiert werden.

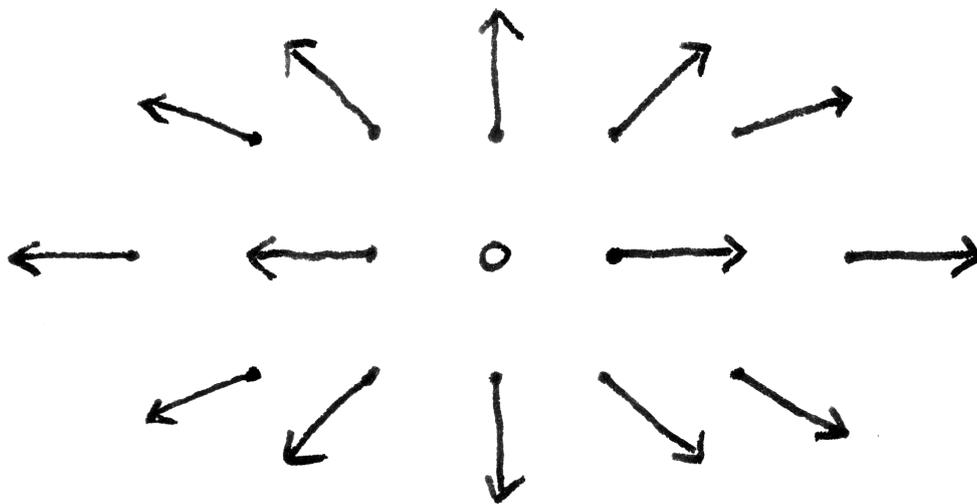
8.1.4. Zu jedem reellen Vektorraum V bilden wir wie in der linearen Algebra in [LA1] 2.9.1 seinen **Dualraum** $V^* = V^\top := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$.

Definition 8.1.5. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Kovektorfeld** oder genauer **relatives Kovektorfeld auf U** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega : U &\rightarrow \vec{X}^* \\ p &\mapsto \omega_p \end{aligned}$$

von U in den Dualraum \vec{X}^* des Richtungsraums von X .

8.1.6 (**Diskussion der Terminologie**). Später einmal werden wir ein Kovektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M erklären als eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ ein Element $\omega_p \in (T_p M)^*$ zuordnet. Das ist etwas anderes als ein relatives Kovektorfeld, das jedem Punkt $p \in M \subset X$ einfach irgendeine Linearform $\omega_p \in \vec{X}^*$ zuordnet. Vorerst jedoch werden wir nur mit Kovektorfeldern auf halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler Räume X arbeiten, und in diesem Fall sind unsere relativen Kovektorfelder bereits die endgültigen Kovektorfelder. Deshalb kommt es auf derartige Feinheiten hier noch nicht an.



Graphische Darstellung eines Vektorfelds auf der Papierebene, das in geeigneten Koordinaten in der Notation von 8.1.21 durch die Formel

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \partial_x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \partial_y$$

gegeben würde. Hier haben wir zu ausgewählten Punkten den ihnen zugeordneten Richtungsvektor als Pfeil von besagtem Punkt zu dem um diesen Richtungsvektor verschobenen Punkt dargestellt.

8.1.7. Wir schreiben ω_p statt $\omega(p)$, damit $\omega_p(v) \in \mathbb{R}$ den Wert der Linearform ω_p auf einem Vektor $v \in \vec{X}$ bezeichnen kann. Ein Kovektorfeld nennt man auch eine **Pfaff'sche Form** oder eine **Differentialform erster Ordnung** oder eine **1-Form** oder eine **Einsform**. In der physikalischen Terminologie heißen Kovektorfelder **kovariant** aus Gründen, die in 8.2.17 diskutiert werden.

8.1.8 (**Graphische Darstellung ebener Kovektorfelder**). Für die graphische Darstellung eines Kovektorfelds ω auf der Tafel Ebene X denke ich mir Kreisscheiben um einzelne fett eingezeichnete Punkte $p \in X$ und zeichne jeweils deren Schnitt mit $\{p + \vec{v} \mid \omega_p(\vec{v}) \in \mathbb{N}\}$. Im Fall $\omega_p = 0$ muß ich die ganze Kreisscheibe ausmalen, weshalb ich diesen Fall nach Möglichkeit vermeide. Im Fall $\omega_p \neq 0$ sehr klein ist nur ein Stück der Gerade $p + \ker \omega_p$ zu sehen und man kann nicht erkennen, auf welcher Seite dieser Gerade die Punkte $p + \vec{v}$ liegen mit $\omega_p(\vec{v}) > 0$, weshalb ich auch diesen Fall nach Möglichkeit vermeide. Ich hoffe, daß der Leser die so erzeugte Anschauung auf den räumlichen Fall übertragen kann, in dem ich die entsprechenden Bilder nicht mehr malen kann, und ebenso auf den eindimensionalen Fall, in dem die entsprechenden Bilder wie so vieles im eindimensionalen Fall weniger Aussagekraft haben.

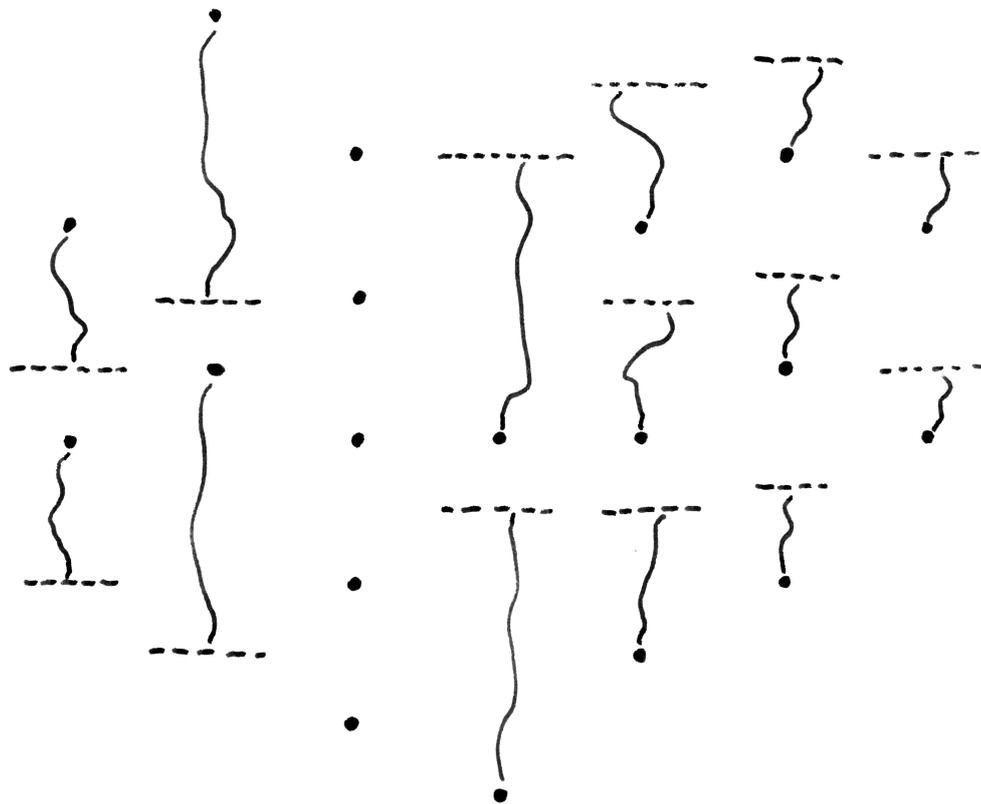
Beispiel 8.1.9 (**Kovektorfelder auf der Zeitachse**). Ein Kovektorfeld ohne Nullstelle auf der Zeitachse \mathbb{T} aus [LA1] 3.1.11 können wir uns in der in [LA1] 2.9.4 noch genauer erklärten Weise denken als eine Vorschrift, die jedem Zeitpunkt ein Paar bestehend aus einer Frequenz und einer Orientierung der Zeitachse zuordnet.

8.1.10 (**Addition von Feldern und Multiplikation mit Funktionen**). Wir addieren Vektorfelder wie auch Kovektorfelder punktweise, die Summe $\omega + \eta$ zweier Kovektorfelder ist also etwa erklärt durch $(\omega + \eta)_p = \omega_p + \eta_p$, wobei letzteres Summenzeichen die Addition in \vec{X}^* meint. Wir multiplizieren Vektorfelder und auch Kovektorfelder mit Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls punktweise, indem wir setzen $(fA)_p = f(p)A_p$ beziehungsweise $(f\omega)_p = f(p)\omega_p$.

8.1.11 (**Paaren von Vektorfeldern mit Kovektorfeldern**). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ist $A : U \rightarrow \vec{X}$ ein Vektorfeld und $\omega : U \rightarrow \vec{X}^*$ ein Kovektorfeld, so können wir das Vektorfeld A in das Kovektorfeld ω einsetzen oder, vielleicht besser gesagt, das Kovektorfeld ω auf dem Vektorfeld A auswerten oder, besonders ausgewogen und immer noch gleichbedeutend, das **Kovektorfeld ω mit dem Vektorfeld A paaren**. Wir erhalten dann eine Funktion

$$\begin{aligned} \omega(A) = \langle \omega, A \rangle : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \omega_p(A_p) \end{aligned}$$

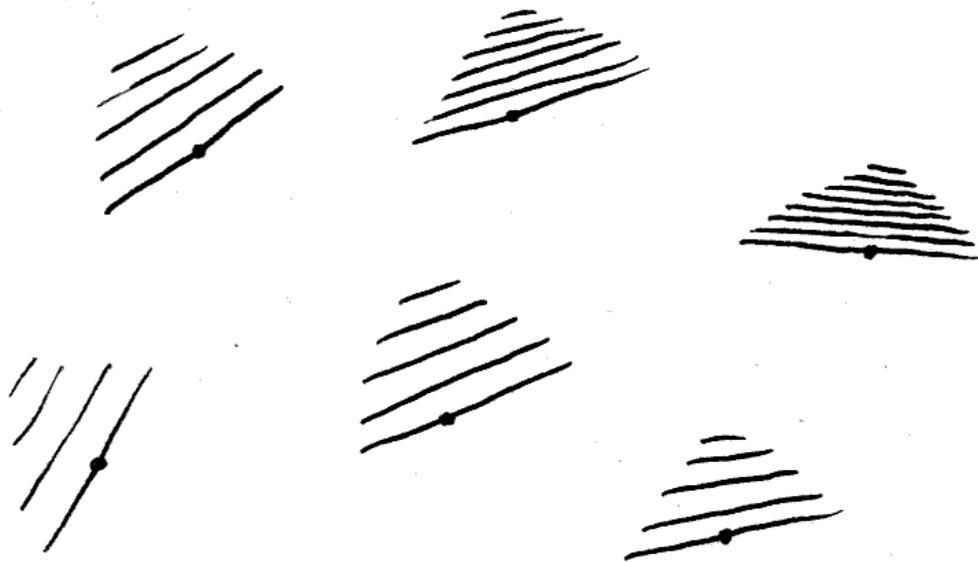
8.1.12 (**Verschiedene Interpretationen von Kovektorfeldern**). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Im Sinne des Exponentialgesetzes [GR] 1.6.5 können wir ein Kovektorfeld $\omega : U \rightarrow \vec{X}^*$ auch



Versuch der graphischen Darstellung eines Kovektorfelds auf der Papierebene, das in geeigneten Koordinaten in der Notation 8.1.13 durch die Formel

$$x dy$$

gegeben würde.



Alternativer Versuch der graphischen Darstellung eines Kovektorfelds auf der Papierebene. Hier legen wir die Konvention aus [LA1] 2.9.1 zur graphischen Darstellung von Kovektoren zugrunde, der Wert auf einem Vektor ist also salopp gesagt die Anzahl der gekreuzten Striche. Insbesondere bedeuten „enger zusammenliegende Striche“ hier „größere Kovektoren“. Bei einer Streckung etwa um einen Faktor Zwei werden also Vektoren doppelt so lang, aber in Gegensatz dazu Kovektoren halb so lang, weil die Striche weiter auseinander rücken.

auffassen als eine Abbildung $U \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ oder sogar als eine Abbildung $\vec{X} \rightarrow \text{Ens}(U, \mathbb{R})$. Es gehört etwas Übung dazu, alle diese verschiedenen Aspekte gleichzeitig präsent zu haben. Wir können also ein Kovektorfeld einerseits an einem Punkt $p \in U$ auswerten und so eine Linearform $\omega_p : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Richtungsraum erhalten, wir können es aber andererseits auch auf einem Richtungsvektor $v \in \vec{X}$ auswerten und so eine reellwertige Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \omega_p(v)$ erhalten. Wir können es sogar etwas allgemeiner, wie in 8.1.11 besprochen, auf einem Vektorfeld $p \mapsto v_p$ auswerten und auch so eine reellwertige Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \omega_p(v_p)$ erhalten. Man beachte, daß beim Auswerten von Kovektorfeldern auf Vektorfeldern keinerlei Differentiation stattfindet sondern ausschließlich lineare Algebra, nur eben „in Abhängigkeit vom Punkt p “.

Definition 8.1.13 (Differential einer Funktion als Kovektorfeld). Seien X ein reeller endlichdimensionaler Raum und $U \subset X$ eine halboffene Teilmenge. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist das Differential von f bei p eine lineare Abbildung $d_p f : \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Unter dem **Differential** df von f verstehen wir dann das Kovektorfeld auf U , das gegeben wird durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \vec{X}^* \\ p &\mapsto d_p f \end{aligned}$$

Für das Differential von einem Produkt gilt nach 2.6.5 die Produktregel $d(fg) = f dg + g df$ und für das Differential einer Summe haben wir $d(f+g) = df + dg$.

8.1.14 (Anschauung für das Differential einer Funktion). In der in 8.1.8 erklärten Anschauung für ebene Kovektorfelder als „Liniendichten“ wäre das Differential einer Funktion auf der Ebene, aufgefaßt als die Höhe in einer Landkarte in Metern, salopp gesprochen zu verstehen als eine Linearisierung des durch die Höhenlinien gegebenen Bildes, mit einer Höhenlinie pro Meter und wo wir nur die Höhenlinie durch unseren Punkt und ein paar Höhenlinien oberhalb einzeichnen.

8.1.15 (Darstellung von Kovektorfeldern in Koordinaten). Ist speziell $X = \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und bezeichnet $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Restriktion der i -ten Koordinate auf U , so ist $dx_i : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ konstant die i -te Koordinate selber. Die Bezeichnung dx_i für dieses konstante Kovektorfeld vereinbaren wir allgemeiner auch für beliebige Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$. Die Koordinaten bilden nun eine Basis des Dualraums von \mathbb{R}^n . Folglich läßt sich jedes Kovektorfeld auf U schreiben in der Gestalt $\sum a_i dx_i$ mit eindeutig bestimmten $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ich vermute, daß hier der Ursprung der alternativen Bezeichnung von Kovektorfeldern als „Differentialformen“ zu suchen ist: In gewisser Weise können wir eben unsere Kovektorfelder als „Linearkombinationen von Differentialen“ schreiben. Für eine differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ haben wir dann

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Man prüft das durch Auswerten beider Seiten an einer Stelle $p \in U$ und Anwenden der so entstehenden Linearformen auf alle Vektoren der Standardbasis des \mathbb{R}^n . Speziell haben wir für $f : \mathbb{R} \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit A halboffen in \mathbb{R} also

$$df = f'(x) dx$$

8.1.16 (Übergang von Vektorfeldern zu Kovektorfeldern). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X mit einem Skalarprodukt s auf seinem Richtungsraum erinnern wir aus 2.3.9 den Isomorphismus $\text{can}_s : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{X}^*$ gegeben durch die Vorschrift $v \mapsto (w \mapsto s(v, w))$. Jedem Vektorfeld $v : X \supset A \rightarrow \vec{X}$ können wir so das Kovektorfeld

$$\text{can}_s(v) := \text{can}_s \circ v : X \supset A \rightarrow \vec{X}^*$$

zuordnen. Im Spezialfall (\mathbb{R}^n, s) des Vektorraums \mathbb{R}^n mit seinem Standardskalarprodukt kennen wir bereits aus 2.3.9 die Beziehung

$$df = \text{can}_s(\text{grad } f)$$

8.1.17 (Differential einer Funktion mit halboffenem Definitionsbereich). Ist $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, so gilt dasselbe, wenn die partiellen Ableitungen dabei im Sinne unserer Notation 2.3.23 als virtuelle partielle Ableitungen verstehen. Ist speziell $f : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf einem mehrgliedrigen Intervall, so gilt $df = f'(x) dx$.

8.1.18 (Anschauliche Bedeutung von Formeln in Differentialen). Anschaulich gesprochen beschreibt die in 8.1.15 herausgestellte Gleichung, wie sich der Funktionswert der Funktion f in erster Näherung ändert, wenn wir an den Koordinaten x_i wackeln: Genauer gilt bei festen x_1, \dots, x_n für $\delta x_1, \dots, \delta x_n \in \mathbb{R}$ so nah bei Null, daß alles definiert ist, eben

$$f(x_1 + \delta x_1, \dots, x_n + \delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + R(\delta x_1, \dots, \delta x_n)$$

mit einem Rest R , der auch nach dem Teilen durch das Maximum der Beträge aller δx_i noch gegen Null strebt, wenn alle δx_i gegen Null streben. Hierbei ist zu verstehen, daß die fraglichen partiellen Ableitungen an unserer festen Stelle (x_1, \dots, x_n) ausgewertet werden sollen, und um die partiellen Ableitungen zu bilden, müssen die x_i natürlich noch als variabel gedacht werden. Vielleicht wäre es hier konsistenter gewesen, die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ zu notieren oder sogar $(\partial_i f)(x_1, \dots, x_n)$ um anzudeuten, daß sie ja an der festen Stelle (x_1, \dots, x_n) auszuwerten sind. Bei komplizierteren Formeln führt aber größere Präzision auch nicht notwendig zu besserer Verständlichkeit. Die Notation δx_i könnten wir zu δ_i

abkürzen, aber dann wirkt die Formel weniger suggestiv. Kürzen wir auch noch die linke Seite zu δf ab, so können wir unsere Identität mit der in 3.3.2 eingeführten Notation auch schreiben als die Übereinstimmung erster Ordnung von Funktionen der „Verrückungen“ δx_i in der Gestalt

$$\delta f \sim_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

Beispiel 8.1.19. Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto 1/\|v\|$ hat mit der Konvention $v := (x, y, z)$ das Differential $df = -(x dx + y dy + z dz)/\|v\|^3$.

Definition 8.1.20 (Ableiten einer Funktion in Richtung eines Vektorfeldes). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X , eine halboffene Teilmenge $U \subset X$, ein Vektorfeld $A : U \rightarrow \vec{X}$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ erklären wir eine Funktion $(Af) : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$(Af)(p) := (d_p f)(A_p)$$

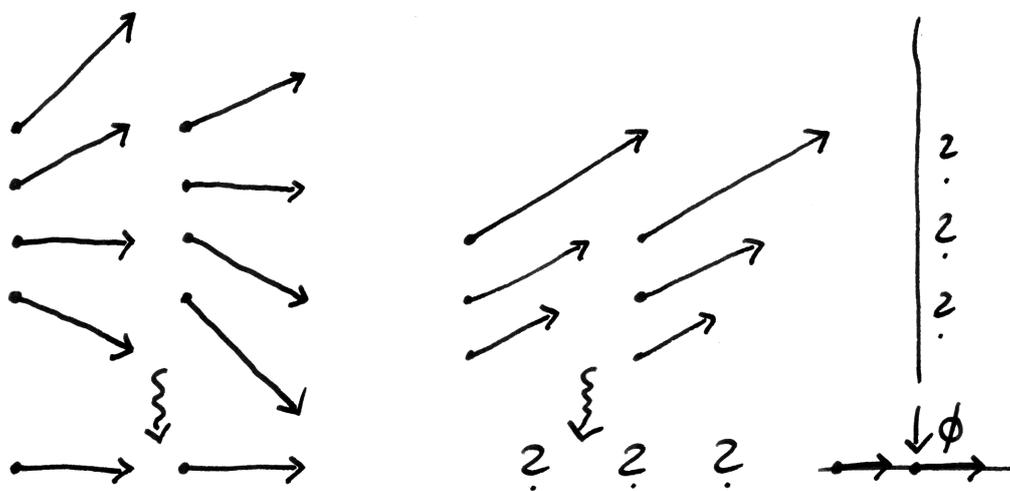
Ist U eine Umgebung von p , so ist nach 2.3.3 also $(Af)(p) = (D_{A_p} f)(p)$ die Richtungsableitung 2.3.1 von f bei p in der Richtung A_p . Wir sagen deshalb auch, die Funktion Af entstehe aus f durch **Ableiten in Richtung des Vektorfeldes A** . In anderen Worten entsteht diese Funktion durch das Paaren des Vektorfeldes A mit dem durch das Differential der Funktion f gegebenen Kovektorfeld df . Mit unserer Notation 8.1.11 kann diese Funktion auch $Af = \langle df, A \rangle$ geschrieben werden.

8.1.21 (Darstellung von Vektorfeldern in Koordinaten). Meist werden Vektorfelder identifiziert mit den zugehörigen Differentialoperatoren. So notiere ich etwa das konstante Vektorfeld v wie die zugehörige Richtungsableitung D_v . Spezieller bezeichnet man das konstante Vektorfeld mit Wert e_i auf \mathbb{R}^n oft als „das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x_i}$ “ oder „das Vektorfeld ∂_i “ und im Fall nicht nummerierter Koordinaten wie etwa x, y, z auf \mathbb{R}^3 schreiben wir für die fraglichen Vektorfelder auch $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ und dergleichen. Sicher läßt sich für $U \subset \mathbb{R}^n$ jedes Vektorfeld auf U schreiben in der Gestalt

$$\sum c_i \partial_i$$

mit eindeutig bestimmten $c_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Paaren wir das Vektorfeld $\sum c_i \partial_i$ auf \mathbb{R}^n mit dem Kovektorfeld $\sum a_i dx_i$, so ergibt sich die Funktion $\sum a_i c_i$. In unserer Notation 8.1.11 und mit dem Kroneckerdelta haben wir nämlich

$$\langle dx_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$$



Ganz links ist zuerst ein Vektorfeld auf der Ebene abgebildet, das unter der orthogonalen Projektion auf die x -Achse verwandt ist zu einem ebenfalls eingezeichneten konstanten Vektorfeld auf der x -Achse. In der Mitte dann ein Vektorfeld auf der Ebene, das unter dieser Projektion zu keinem Vektorfeld auf der x -Achse verwandt ist. Schließlich ganz rechts die konstante Abbildung der y -Achse auf einen Punkt der x -Achse und ein Vektorfeld auf der x -Achse, das darunter zu keinem Vektorfeld auf der y -Achse verwandt ist.

8.2 Verwandtschaft

8.2.1 (**Diskussion des Verwandtschaftsbegriffs**). Zentral für das weitere sind die zu unseren jeweiligen Feldern gehörigen Verwandtschaftsbegriffe, die wir im folgenden diskutieren. Im Fall der ϕ -Verwandtschaft unter einem Diffeomorphismus ϕ mit einer halboffenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n mag man sich darunter eine „Darstellung in lokalen Koordinaten“ denken, aber das Konzept trägt weiter. Unsere Vektorfelder müssen im allgemeinen weder „Vorwärtsverwandte“ noch, anders als man es als Mensch gewohnt ist, „Rückwärtsverwandte“ haben. Bei Kovektorfeldern ist es etwas besser, sie haben immer genau einen „Rückwärtsverwandten“. Wir beginnen unsere Diskussion mit der einfacheren und grundlegenderen Diskussion der Verwandtschaft von Funktionen und von Wegen. Eine wesentliche Eigenschaft von Verwandtschaft, die „Transitivität“, besprechen wir erst in 8.2.18.

Definition 8.2.2 (Verwandtschaft von Funktionen). Gegeben eine Abbildung $\phi : U \rightarrow V$ und reelle Funktionen $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißen unsere Funktionen ϕ -**verwandt** und wir schreiben $\phi : g \rightsquigarrow f$, wenn gilt $g(x) = f(\phi(x))$ für alle $x \in U$ alias

$$g = f \circ \phi$$

Definition 8.2.3 (Verwandtschaft von Wegen). Seien U und V topologische Räume und $\phi : U \rightarrow V$ eine stetige Abbildung. Zwei Wege $\gamma : I \rightarrow U$ und $\kappa : J \rightarrow V$ heißen ϕ -**verwandt** und wir schreiben $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$, wenn sie denselben Definitionsbereich $I = J$ haben und wenn für alle $t \in I$ gilt $\kappa(t) = \phi(\gamma(t))$ alias

$$\kappa = \phi \circ \gamma$$

8.2.4 (**Auswerten auf Wegen respektiert Verwandtschaft**). Das Auswerten verwandter Funktionen auf verwandten Wegen liefert trivialerweise dieselbe Funktion auf dem Parameterintervall, in Formeln folgt in den Notationen der vorhergehenden Definitionen aus $\phi : g \rightsquigarrow f$ und $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$ also

$$g \circ \gamma = f \circ \kappa$$

Definition 8.2.5 (Verwandtschaft von Vektorfeldern). Sei $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume X und Y . Vektorfelder $A : U \rightarrow \vec{X}$ und $B : V \rightarrow \vec{Y}$ heißen ϕ -**verwandt** und wir schreiben $\phi : A \rightsquigarrow B$ wie in 6.1.12, wenn für alle $x \in U$ gilt

$$(d_x \phi)(A_x) = B_{\phi(x)}$$

8.2.6 (**Summe und Produkt respektiert Verwandtschaft**). Gegeben in den vorherigen Notationen verwandte Vektorfelder $\phi : A \rightsquigarrow B$ und $\phi : C \rightsquigarrow D$ haben wir

auch $\phi : (A + C) \rightsquigarrow (B + D)$. Gegeben weiter verwandte Funktionen $\phi : f \rightsquigarrow g$ haben wir auch $\phi : fA \rightsquigarrow gB$. und, wenn wir schon dabei sind, gegeben zusätzlich verwandte Funktionen $\phi : h \rightsquigarrow k$ haben wir ebenso $\phi : (f + h) \rightsquigarrow (g + k)$ und $\phi : fh \rightsquigarrow gk$.

8.2.7 (Ableiten nach Vektorfeldern respektiert Verwandtschaft). Wenden wir verwandte Vektorfelder auf verwandte differenzierbare Funktionen an, so erhalten wir verwandte Funktionen. Ist genauer $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume, so impliziert in Formeln $\phi : A \rightsquigarrow B$ und $\phi : g \rightsquigarrow f$ bereits $\phi : Ag \rightsquigarrow Bf$ oder umgeschrieben $(Bf) \circ \phi = A(f \circ \phi)$. Das folgt direkt aus der Kettenregel in mehreren Veränderlichen. Letzteres ist sogar eine hinreichende Bedingung: Gilt $(Af) \circ \phi = B(f \circ \phi)$ für alle differenzierbaren Funktionen f , so folgt $\phi : A \rightsquigarrow B$.

8.2.8 (Flußwege respektieren Verwandtschaft). Ein Weg $\gamma : I \rightarrow U$ in einer halboffenen Teilmenge $U \subset X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums heißt ein **Flußweg** eines Vektorfelds $A : U \rightarrow \vec{X}$, wenn er differenzierbar ist und wenn für alle $t \in I$ gilt $\gamma'(t) = A_{\gamma(t)}$. Ist nun $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung in eine weitere halboffene Teilmenge V eines endlichdimensionalen reellen Raums Y und B ein Vektorfeld auf V mit $\phi : A \rightsquigarrow B$ und $\kappa = \phi \circ \gamma$ der verwandte Weg $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$ und ist γ ein Flußweg von A , so ist auch κ ein Flußweg von B . Das ist einigermaßen offensichtlich und wurde bereits im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen in 6.1.12 besprochen.

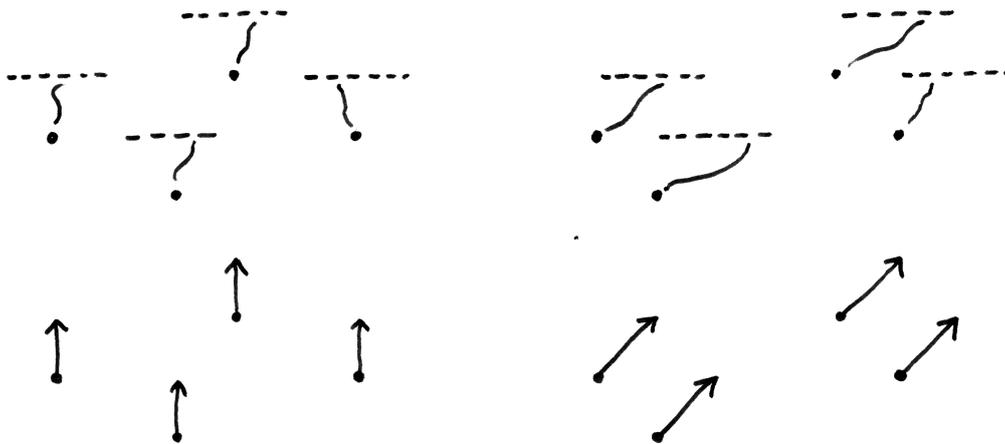
Definition 8.2.9 (Verwandtschaft von Kovektorfeldern). Sei $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume X und Y . Kovektorfelder $\eta : U \rightarrow \vec{X}^*$ und $\omega : V \rightarrow \vec{Y}^*$ heißen **ϕ -verwandt** und wir schreiben $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$, wenn für alle Punkte $x \in U$ gilt $\eta_x = \omega_{\phi(x)} \circ d_x \phi$. Gleichbedeutend mit der transponierten Abbildung zum Differential notiert ist die Forderung, daß für alle $x \in U$ gilt

$$\eta_x = (d_x \phi)^\top (\omega_{\phi(x)})$$

8.2.10 (Summe und Produkt respektiert Verwandtschaft). Gegeben in den vorherigen Notationen verwandte Kovektorfelder $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$ und $\phi : \sigma \rightsquigarrow \tau$ haben wir auch $\phi : (\eta + \sigma) \rightsquigarrow (\omega + \tau)$ und gegeben verwandte Funktionen $\phi : f \rightsquigarrow g$ haben wir auch $\phi : f\eta \rightsquigarrow g\omega$.

8.2.11 (Paaren respektiert Verwandtschaft). Sei $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume X und Y . Seien $A : U \rightarrow \vec{X}$ sowie $B : V \rightarrow \vec{Y}$ Vektorfelder und $\omega : U \rightarrow \vec{X}^*$ sowie $\eta : V \rightarrow \vec{Y}^*$ Kovektorfelder. So gilt

$$(\phi : A \rightsquigarrow B \text{ und } \phi : \omega \rightsquigarrow \eta) \Rightarrow \phi : \langle \omega, A \rangle \rightsquigarrow \langle \eta, B \rangle$$



Dieses Bild soll den Effekt der Scherung $\phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, y)$ auf dem Kovektorfeld dy und dem Vektorfeld ∂_y darstellen. Bei der bildlichen Darstellung unseres Kovektorfelds folgen wir den auf Seite ?? im Anschluß an 8.1.1 eingeführten Konventionen. Man erkennt, daß dy unter dieser Scherung verwandt ist zu sich selber, in Formeln $\phi : dy \rightsquigarrow dy$, wohingegen ∂_y verwandt ist zu $\partial_x + \partial_y$, in Formeln $\phi : \partial_y \rightsquigarrow \partial_x + \partial_y$. Alternativ und im wesentlichen gleichbedeutend mag man sich auch auf den Standpunkt stellen, daß wir auf dem Wertebereich von ϕ ein „verschertes Koordinatensystem“ (u, v) eingeführt haben mit u und v den Komponenten der zu ϕ inversen Abbildung, also $u(x, y) = x - y$ und $v(x, y) = y$. Dann erhalten wir statt der obigen Verwandtschaften die Formeln $dv = dy$ sowie $\partial_v = \partial_x + \partial_y$.

8.2.12 (**Existenz und Eindeutigkeit von Verwandten**). Unter einer differenzierbaren Bijektion zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume mit differenzierbarer Umkehrabbildung haben alle Vektorfelder, Kovektorfelder, Wege und Funktionen jeweils genau einen Verwandten und unter der Identität sind sie jeweils selbst dieser einzige Verwandte. Ist allgemeiner $\phi : U \rightarrow V$ eine beliebige differenzierbare Abbildung von einer halboffenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums $U \subset X$ in einen weiteren reellen Raum Y , die in einer Teilmenge $V \subset Y$ landet, so hat jedes Kovektorfeld ω auf V immer noch genau einen „Rückwärtsverwandten“ auf U , der eben gegeben wird durch die Formel $\eta_x = (d_x\phi)^\top(\omega_{\phi(x)})$. Für diesen eindeutig bestimmten Rückwärtsverwandten von ω unter ϕ vereinbaren wir die Notation

$$\phi^*(\omega)$$

Er heißt das **mit ϕ zurückgezogene** oder **zurückgeholte Kovektorfeld**. Ebenso hat jede Funktion f auf V genau einen „Rückwärtsverwandten“, nämlich die Funktion $f \circ \phi$, die man auch die **mit ϕ zurückgezogene Funktion** nennt und manchmal $\phi^*(f)$ notiert. Bei Vektorfeldern liegen die Verhältnisse nicht so einfach, aber ist ϕ surjektiv, so hat jedes Vektorfeld auf U zumindest nicht mehr als einen „Vorwärtsverwandten“ auf V , und ist das Differential von ϕ an jeder Stelle bijektiv, so hat jedes Vektorfeld auf V genau einen Rückwärtsverwandten auf U .

8.2.13. Weil Verwandtschaft Summe und Produkt respektiert, muß auch das Zurückholen Summe und Produkt von Funktionen und Kovektorfeldern respektieren, in Formeln $\phi^*(\omega + \tau) = \phi^*(\omega) + \phi^*(\tau)$ und $\phi^*(g\omega) = \phi^*(g)\phi^*(\omega)$.

8.2.14 (**Differential respektiert Verwandtschaft**). Verwandte Funktionen haben verwandte Differentiale. Ist genauer $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume, so impliziert in Formeln $\phi : g \rightsquigarrow f$ bereits $\phi : dg \rightsquigarrow df$. Gleichbedeutend haben wir für alle f die Identität $\phi^*(df) = d(\phi^*(f)) = d(f \circ \phi)$. In der Tat gilt für jeden Punkt y nach der Definition der Verwandtschaft und der Kettenregel

$$(\phi^*(df))_y = (d_{\phi(y)}f) \circ d_y\phi = d_y(f \circ \phi)$$

8.2.15 (**Verwandtschaft von Gradienten**). Gegeben $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $\phi : U \xrightarrow{\sim} V$ haben verwandte differenzierbare Funktionen zwar verwandte Differentiale, aber im allgemeinen keineswegs verwandte Gradienten. Das gilt nur unter sehr viel stärkeren Voraussetzungen. Ist etwa ϕ die Einschränkung eines Isomorphismus von affinen Räumen mit orthogonalem linearem Anteil $\vec{\phi} \in O(n)$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so haben wir

$$\phi : \text{grad}(f \circ \phi) \rightsquigarrow \text{grad}(f)$$

In der Tat ist unter diesen Annahmen die Verwandtschaft $\phi : v \rightsquigarrow w$ von Vektorfeldern gleichbedeutend zur Verwandtschaft $\phi : \text{can}_s(v) \rightsquigarrow \text{can}_s(w)$ von Kovektorfeldern und unsere Verwandtschaft von Gradienten so nach 8.1.16 gleichbedeutend zur Verwandtschaft der Differentiale $\phi : d(f \circ \phi) \rightsquigarrow df$. Sind allgemeiner $\phi : X \xrightarrow{\sim} Y$ ein Isomorphismus von endlichdimensionalen affinen Räumen und s, t Skalarprodukte auf \vec{X} beziehungsweise \vec{Y} und ist $\vec{\phi} : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{Y}$ dafür orthogonal, ist in anderen Worten ϕ ein isometrischer Isomorphismus, so erhalten wir für unsere verallgemeinerten Gradienten aus 2.3.9 mit derselben Argumentation

$$\phi : \text{grad}_s(f \circ \phi) \rightsquigarrow \text{grad}_t(f)$$

Noch allgemeinere Aussagen in dieser Richtung diskutieren wir in 8.3.10.

8.2.16 (Partielle Ableitungen in lokalen Koordinaten). Gegeben ein endlichdimensionaler affiner Raum X und eine halboffene Teilmenge $U \subset X$ und ein Diffeomorphismus alias ein System lokaler Koordinaten $(x_1, \dots, x_n) : U \xrightarrow{\sim} V$ mit einer halboffenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet man mit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ oder ∂_i auch diejenigen Vektorfelder auf U , die unter diesem Diffeomorphismus zu den eben eingeführten Vektorfeldern auf \mathbb{R}^n verwandt sind. Man beachte jedoch, daß für eine einzelne Funktion $x : U \rightarrow \mathbb{R}$ nicht sinnvoll ein Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x}$ auf U erklärt werden kann: Selbst wenn sich unsere Funktion zu einem Koordinatensystem ergänzen lassen sollte, wird doch das durch diese Ergänzung erklärte Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x}$ wesentlich von der Wahl der anderen Koordinaten abhängen. All das steht im Gegensatz zum Differential dx einer Funktion x , das durchaus auch für eine einzelne Funktion sinnvoll definiert ist.

8.2.17 (Kovariante und kontravariante Transformation). Zumindest unter linearen Koordinatentransformationen verhalten sich Kovektorfelder „so wie Koordinaten“. Ist etwa x_1, \dots, x_n ein System linearer Koordinaten auf einem reellen Vektorraum X im Sinne einer Familie von linearen Abbildungen $x_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, die zusammen einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ liefern, und ist y_1, \dots, y_n ein anderes System linearer Koordinaten, und haben wir etwa $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ für eine Matrix von reellen Zahlen a_{ij} , so gilt die Identität von Kovektorfeldern $dy_i = \sum_j a_{ij} dx_j$. Für die durch unsere Koordinatensysteme bestimmten Vektorfelder haben wir dahingegen umgekehrt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

und benötigen die inverse Matrix, um $\frac{\partial}{\partial y_i}$ durch die $\frac{\partial}{\partial x_j}$ auszudrücken. In diesem Sinne „transformieren sich Kovektorfelder wie Koordinaten“ und heißen deshalb auch „kovariant“, wohingegen Vektorfelder sich „vermittels der inversen transponierten Matrix transformieren“ und deshalb „kontravariant“ heißen.

8.2.18 (Transitivität von Verwandtschaft). Seien $\phi : U \rightarrow V$ und $\psi : V \rightarrow W$ differenzierbare Abbildung zwischen halboffenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume. Ist ein Vektorfeld C auf W unter ψ verwandt zu B , so ist auch A unter $\psi \circ \phi$ verwandt zu C , in Formeln implizieren $\phi : A \rightsquigarrow B$ und $\psi : B \rightsquigarrow C$ also $\psi \circ \phi : A \rightsquigarrow C$. Analoges gilt für Wege und Funktionen und Kovektorfelder und läßt sich in den beiden letzteren Fällen auch schreiben als $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$, so daß etwa für jedes Kovektorfeld κ auf W gilt

$$(\psi \circ \phi)^*(\kappa) = \phi^*(\psi^*(\kappa))$$

Aus Gründen der formalen Vollständigkeit sei noch ergänzt, daß unter der Identität, wie bereits in 8.2.12 erwähnt, jedes Vektorfeld und jedes Kovektorfeld und jede Funktion und jeder Weg verwandt ist zu sich selber und nur zu sich selber. Es gilt also in Formeln $(\text{id} : A \rightsquigarrow B) \Leftrightarrow A = B$ und dergleichen. Weiter sei erwähnt, daß W für alle diese Überlegungen sogar eine beliebige Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums sei darf.

Beispiel 8.2.19 (Zurückholen von Kovektorfeldern in Koordinaten). Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten x_1, \dots, x_n und $Y = \mathbb{R}^m$ mit Koordinaten y_1, \dots, y_m und $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ eine differenzierbare Abbildung von einer halboffenen Teilmenge von \mathbb{R}^n in eine halboffene Teilmenge von \mathbb{R}^m ergibt sich $\phi^*(dy_j) = d(\phi^*y_j) = d\phi_j = \sum_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx_i$, da das Differential Verwandtschaft respektiert 8.2.14 und wir für das Differential einer Funktion bereits die explizite Formel 8.1.13 kennen. Folglich kann das Zurückholen von Kovektorfeldern in Koordinaten beschrieben werden durch die Formel

$$\phi^* \left(\sum_j b_j dy_j \right) = \sum_{i,j} \left((b_j \circ \phi) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \right) dx_i$$

Beispiel 8.2.20 (Verwandtschaften unter der Polarkoordinatenabbildung). Wir betrachten die Polarkoordinatenabbildung

$$P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \vartheta) \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

und benutzen die üblichen Koordinaten x, y auf dem Wertebereich. Unter dieser Abbildung ist etwa das Kovektorfeld dx auf dem Wertebereich verwandt zum Kovektorfeld

$$P^*(dx) = d(P^*x) = d(x \circ P) = d(r \cos \vartheta) = (\cos \vartheta) dr - (r \sin \vartheta) d\vartheta$$

Ebenso ist das Kovektorfeld dy auf dem Wertebereich unter P verwandt zum Kovektorfeld $d(r \sin \vartheta) = (\sin \vartheta) dr + (r \cos \vartheta) d\vartheta$. Um einen Verwandten für ∂_ϑ zu

suchen, wenn dieses Vektorfeld denn einen Verwandten haben sollte, machen wir den Ansatz $\partial_\vartheta \rightsquigarrow a\partial_x + b\partial_y$ mit unbestimmten Funktionen a, b und finden durch Paaren mit dx leicht $-(r \sin \vartheta) \rightsquigarrow a$ und durch Paaren mit dy ebenso $(r \cos \vartheta) \rightsquigarrow b$, womit wir für das Vektorfeld ∂_ϑ links als einzigen Verwandten das Vektorfeld $-y\partial_x + x\partial_y$ rechts finden. Das Vektorfeld ∂_r links hat keinen Verwandten rechts, denn derselbe Ansatz $\partial_r \rightsquigarrow a\partial_x + b\partial_y$ führt zu $P : \sin \vartheta \rightsquigarrow a$ und $P : \cos \vartheta \rightsquigarrow b$ und derartige Funktionen a, b gibt es nicht. Schränken wir jedoch unsere Polarkoordinatenabbildung ein zu einer Abbildung $P : \{(r, \vartheta) \mid r > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$, so gibt es derartige Funktionen doch und unser Vektorfeld ∂_r hat unter dieser Einschränkung den einzigen Verwandten

$$\partial_r \rightsquigarrow \left(x/\sqrt{x^2 + y^2} \right) \partial_x + \left(y/\sqrt{x^2 + y^2} \right) \partial_y$$

Meist wird man mit diesen Begriffen etwas großzügiger umgehen, zwischen verwandte Objekte schlicht ein Gleichheitszeichen schreiben und es auch mit den Definitionsbereichen nicht so genau nehmen, so daß wir etwa schreiben würden

$$\begin{aligned} \partial_r &= (\cos \vartheta)\partial_x + (\sin \vartheta)\partial_y = \left(x/\sqrt{x^2 + y^2} \right) \partial_x + \left(y/\sqrt{x^2 + y^2} \right) \partial_y \\ \partial_\vartheta &= -(r \sin \vartheta)\partial_x + (r \cos \vartheta)\partial_y = -y\partial_x + x\partial_y \\ \partial_x &= (\cos \vartheta)\partial_r - (r^{-1} \sin \vartheta) \partial_\vartheta \\ \partial_y &= (\sin \vartheta)\partial_r + (r^{-1} \cos \vartheta) \partial_\vartheta \\ dx &= (\cos \vartheta) dr - (r \sin \vartheta) d\vartheta \\ dy &= (\sin \vartheta) dr + (r \cos \vartheta) d\vartheta \\ d\vartheta &= (-y/(x^2 + y^2)) dx + (x/(x^2 + y^2)) dy \\ dr &= \left(x/\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx + \left(y/\sqrt{x^2 + y^2} \right) dy \end{aligned}$$

Das kann allerdings nur dann gutgehen, wenn die Bezeichnung der Koordinaten dem Leser erlaubt zu erraten, welche Art von Verwandtschaft gemeint ist. Man kann die unteren Formeln auch so verstehen, daß eben dr das Differential der Funktion $r : (\mathbb{R}^2 \setminus 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto r(x, y)$ meint. Bei $d\vartheta$ wird es schon kritischer, da ja eigentlich ϑ nur auf geschlitzten Ebenen definiert werden kann. Allerdings unterscheiden sich die auf verschiedenen geschlitzten Ebenen definierten ϑ nur um additive Konstanten, so daß sie alle dasselbe Differential haben und wir ausnahmsweise doch ein wohldefiniertes Kovektorfeld $d\vartheta$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ erhalten. Das ist auch der tiefere Grund dafür, daß alle unsere Standardvektorfelder in diesem Fall unter der Einschränkung $r > 0$ wohldefinierte Verwandte haben und wir mit unseren Gleichheitszeichen nicht in Teufels Küche kommen. Bei komplizierteren Vektorfeldern sähe das anders aus: So hat etwa das Vektorfeld $\vartheta\partial_\vartheta$ gar keinen

Verwandten, es sei denn, wir schränken unsere Polarkoordinatenabbildung noch weiter ein.

Übungen

Übung 8.2.21. Unter der Inversion am Einheitskreis $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \setminus 0$, $(x, y) \mapsto (u, v) := (x^2 + y^2)^{-1}(x, y)$ zeige man die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\begin{aligned}\partial_x &\rightsquigarrow (v^2 - u^2)\partial_u - 2uv\partial_v \\ \partial_y &\rightsquigarrow (u^2 - v^2)\partial_v - 2uv\partial_u\end{aligned}$$

Übung 8.2.22. Gegeben auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset E$ eines n -dimensionalen reellen Raums Vektorfelder A_1, \dots, A_n und Kovektorfelder $\omega_1, \dots, \omega_n$ mit $\langle \omega_i, A_j \rangle = \delta_{ij}$ an jeder Stelle $p \in U$ gilt für jede differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Identität $df = (A_1 f)\omega_1 + \dots + (A_n f)\omega_n$.

Übung 8.2.23. Man bestimme die Rückwärtsverwandten unter $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ von ∂_x und ∂_y .

8.3 Gradienten in krummlinigen Koordinaten*

8.3.1 (**Motivation und erstes Beispiel**). Gegeben eine halboffene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine partiell differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt man wie in 2.1.4 ihren **Gradienten** als das Vektorfeld

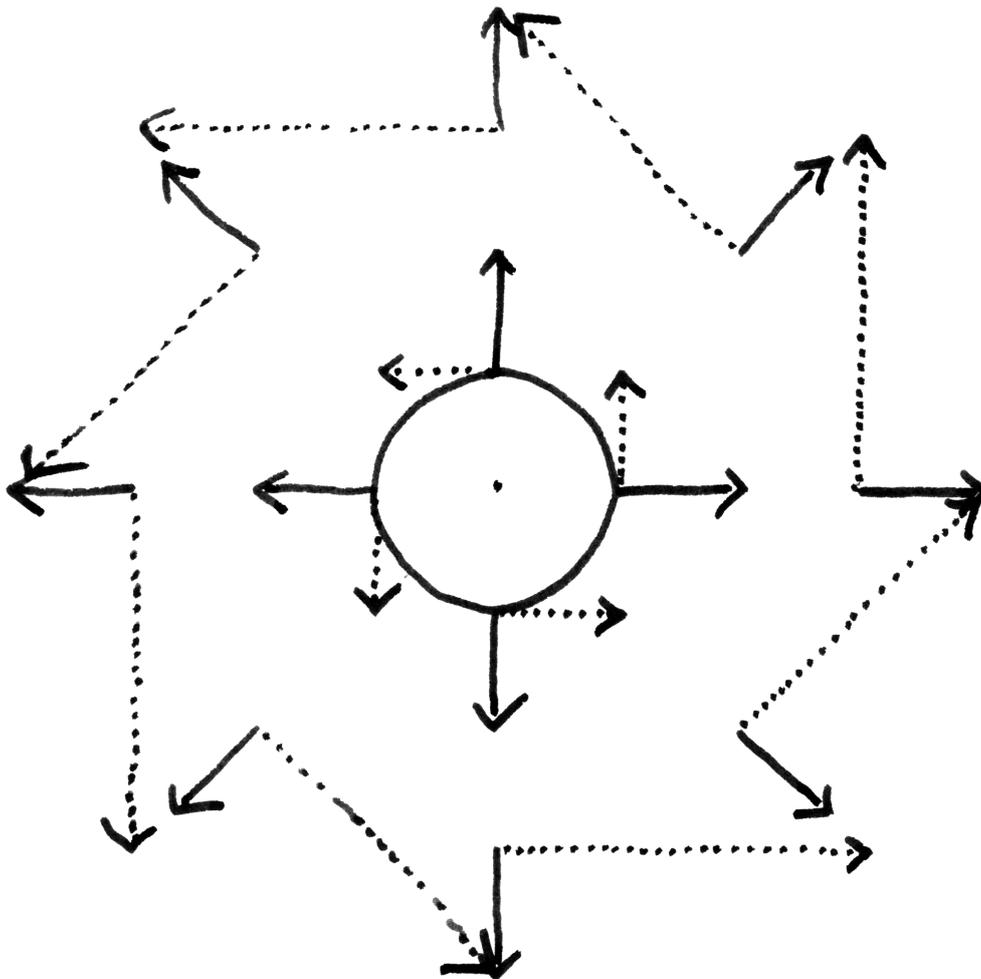
$$\text{grad } f := \frac{\partial f}{\partial x_1} \partial_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \partial_n$$

auf U . Ich will nun diskutieren, welche Form dieses Konstrukt in krummlinigen Koordinaten annimmt. Formal ist damit folgendes gemeint: Man betrachte zusätzlich eine halboffene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\phi : V \xrightarrow{\sim} U$. Nun finde man Vektorfelder A_1, \dots, A_n auf V mit

$$\phi : (A_1(f \circ \phi))\partial_1 + \dots + (A_n(f \circ \phi))\partial_n \rightsquigarrow (\partial_1 f)\partial_1 + \dots + (\partial_n f)\partial_n$$

In der Notation wird vielfach ϕ einfach weggelassen und nur die Bezeichnungen der Koordinaten deuten das Gemeinte an. Ist etwa $\phi = P : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \xrightarrow{\sim} \{(x, y) \mid y = 0 \Rightarrow x > 0\}$ wie in 8.2.20 die Polarkoordinatenabbildung, so erhalten wir mit den Formeln aus 8.2.20 sofort $f_x = \cos \vartheta f_r - r^{-1} \sin \vartheta f_\vartheta$ und $f_y = \sin \vartheta f_r + r^{-1} \cos \vartheta f_\vartheta$ und nach kurzer Rechnung die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$P : (\partial_r(f \circ P))\partial_r + \frac{1}{r^2}(\partial_\vartheta(f \circ P))\partial_\vartheta \rightsquigarrow (\partial_x f)\partial_x + (\partial_y f)\partial_y$$



Einige Werte des Vektorfelds ∂_r als durchgezogene Pfeile und des Vektorfeld ∂_θ als gepunktete Pfeile, gezeichnet in der xy -Ebene.

oder kurz gefaßt $\text{grad } f = f_x \partial_x + f_y \partial_y = f_r \partial_r + \frac{1}{r^2} f_\vartheta \partial_\vartheta$. Man nennt sie die **Darstellung des Gradienten in Polarkoordinaten**. Hier haben wir die Notation $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ für die entsprechende partielle Ableitung aus 2.1.1 und die Abkürzung $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ aus 8.1.21 für den besagten Differentialoperator alias besagtes Vektorfeld verwendet. Bereits bei der Transformation des Gradienten in Kugelkoordinaten wird die Rechnung jedoch recht aufwendig. Ich will im folgenden erklären, mit welchen Kunstgriffen man sie strukturieren und übersichtlicher gestalten kann.

8.3.2 (**Tensornotation für Bilinearformen**). Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k notieren wir

$$\text{Bil}(V) = \text{Bil}_k(V)$$

den Vektorraum aller bilinearen Abbildungen $V \times V \rightarrow k$ alias Bilinearformen auf V . Gegeben Linearformen $\lambda, \eta : V \rightarrow k$ notieren wir $(\lambda \otimes \eta) \in \text{Bil}(V)$ die Bilinearform $(v, w) \mapsto \lambda(v)\eta(w)$. Sicher ist $(\lambda, \eta) \mapsto \lambda \otimes \eta$ selbst eine bilineare Abbildung $V^* \times V^* \rightarrow \text{Bil}(V)$. Statt $\eta \otimes \eta$ schreibt man meist kürzer $\eta^{\otimes 2}$. Das Symbol \otimes wird in [LA2] 8.1.2 noch mit zusätzlicher Bedeutung aufgeladen. Hier darf und soll es ausschließlich als bequeme Notation verstanden werden. Wir nennen $\lambda \otimes \eta$ das **Tensorprodukt** unserer Linearformen.

Definition 8.3.3. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Zweitensor** oder genauer ein **relativer kovarianter Zweitensor auf U** ist eine Abbildung

$$g : U \rightarrow \text{Bil}(\vec{X})$$

von U in den Raum $\text{Bil}(\vec{X})$ aller Bilinearformen auf \vec{X} . Eine **riemannsche Metrik** auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset X$ ist ein glatter Zweitensor g , der jedem Punkt $p \in U$ ein Skalarprodukt g_p auf \vec{X} zuordnet.

Beispiel 8.3.4. Auf dem \mathbb{R}^n ist der konstante Zweitensor, der jedem Punkt das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n zuordnet, eine riemannsche Metrik s . Sie heißt die **Standardmetrik** auf dem \mathbb{R}^n .

8.3.5 (**Einschränkung von Zweitensoren**). Gegeben ein endlichdimensionaler Raum X und ein Zweitensor g auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset X$ und eine weitere halboffene Teilmenge $V \subset X$ mit $V \subset U$ erhalten wir durch Einschränkung einen Zweitensor $g|_V$ auf V . War g eine riemannsche Metrik, so ist auch $g|_V$ eine riemannsche Metrik.

8.3.6 (**Notation für Zweitensoren**). Gegeben Kovektorfelder ω und η auf einer Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums X können wir den Zweitensor

$$\begin{aligned} \omega \otimes \eta : U &\rightarrow \text{Bil}(\vec{X}) \\ p &\mapsto \omega_p \otimes \eta_p \end{aligned}$$

bilden. Wir können Zweitensoren punktweise addieren und mit Funktionen multiplizieren. Wir können unsere konstante riemannsche Standardmetrik auf \mathbb{R}^n in diesen Konventionen schreiben als $s = dx_1^{\otimes 2} + \dots + dx_n^{\otimes 2}$. Eine beliebiger Zweitensor g auf einer halboffenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ hat in diesen Notationen die Gestalt

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

für Funktionen $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Er ist eine riemannsche Metrik genau dann, wenn die g_{ij} glatte Funktionen sind und ihre Werte $g_{ij}(p)$ an jedem Punkt $p \in U$ eine positiv definite symmetrische Matrix bilden.

8.3.7 (Partielles Auswerten von Bilinearformen). Gegeben ein Vektorraum V über einem Körper k liefert jede Bilinearform $g \in \text{Bil}(V)$ eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{can}_g : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto (w \mapsto g(v, w)) \end{aligned}$$

von unserem Vektorraum in seinen Dualraum, die jedem Vektor v die Linearform $g(v, \cdot)$ zuordnet. Wir nennen sie die **Linkseinsetzung von g** . Zum Beispiel haben wir $\text{can}_{\lambda \otimes \eta}(v) = \lambda(v)\eta$. Gleichberechtigt können wir auch die „Rechtseinsetzung“ betrachten, aber sei's drum. Ist g nichtausgeartet und V endlichdimensional, so ist unsere Linkseinsetzung ein Isomorphismus $\text{can}_g : V \xrightarrow{\sim} V^*$.

8.3.8 (Partielles Auswerten von Zweitensoren). Gegeben ein Vektorfeld A und ein Zweitensor g auf einer Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums können wir ein Kovektorfeld $\text{can}_g(A)$ bilden durch das Einsetzen von A in die erste Stelle von g . Ist unser Zweitensor g an keiner Stelle ausgeartet, ist etwa g eine riemannsche Metrik, so ist diese Abbildung eine Bijektion

$$\text{can}_g : \{\text{Vektorfelder auf } U\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Kovektorfelder auf } U\}$$

Bezeichnet speziell s das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n , so haben wir etwa $\text{can}_s(a\partial_i) = a dx_i$ für jede Funktion a . Für unseren Gradienten aus 2.1.4 einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ gilt folglich wie bereits in 2.3.9 besprochen $\text{grad } f = \text{can}_s^{-1}(df)$ in Bezug auf die konstante riemannsche Standardmetrik s . Im allgemeinen verwendet man die Notation

$$\text{grad}_g f := \text{can}_g^{-1}(df)$$

und nennt dies Vektorfeld den **g -Gradienten von f** zur riemannschen Metrik g oder allgemeiner zum nichtausgearteten Zweitensor g .

Definition 8.3.9 (Verwandtschaft von Zweitensoren). Seien $U \subset X, V \subset Y$ Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume. Sei U halboffen und sei $\phi :$

$U \rightarrow V$ differenzierbar. Vorgegebene Zweitensoren s auf U und g auf V heißen **ϕ -verwandt** und wir schreiben $\phi : s \rightsquigarrow g$, wenn für alle $x \in U$ und $v, w \in \vec{X}$ gilt

$$s_x(v, w) = g_{\phi(x)}((d_x\phi)(v), (d_x\phi)(w))$$

8.3.10 (Verträglichkeiten unserer Verwandtschaften). Verwandtschaft ist verträglich mit allen natürlichen Operationen, genauer mit Addition, der Multiplikation mit Funktionen, dem Einsetzen von Vektorfeldern und unserer Konstruktion \otimes . Insbesondere haben verwandte differenzierbare Funktionen unter verwandten riemannschen Metriken verwandte Gradienten, in Formeln impliziert die Verwandtschaft $\phi : s \rightsquigarrow g$ von nichtausgearteten Zweitensoren also für jede differenzierbare Funktion f die Verwandtschaft von Vektorfeldern

$$\phi : \text{grad}_s(f \circ \phi) \rightsquigarrow \text{grad}_g f$$

Offensichtlich hat jeder Zweitensor g auf V genau einen Rückwärtsverwandten auf U , den wir mit ϕ^*g bezeichnen und den **zurückgeholten Zweitensor** nennen. Gegeben eine parametrisierte Fläche im Raum oder allgemeiner eine differenzierbare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ halboffen bezeichnet man den symmetrischen Zweitensor auf \mathbb{R}^2 , der durch das Zurückholen der Standardmetrik entsteht, als die **erste Fundamentalform** unserer parametrisierten Fläche.

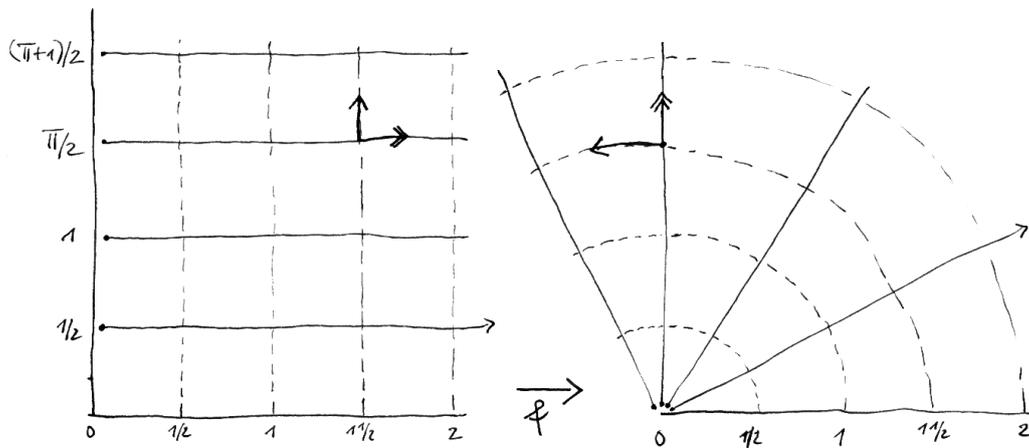
Beispiel 8.3.11 (Gradienten in Polarkoordinaten). Unter der Polarkoordinatenabbildung P aus 8.2.20 ist die Standardmetrik $s = dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}$ auf der xy -Ebene verwandt zum Zweitensor

$$\begin{aligned} g &= (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) \otimes (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) \\ &\quad + (\sin \vartheta dr + r \cos \vartheta d\vartheta) \otimes (\sin \vartheta dr + r \cos \vartheta d\vartheta) \\ &= dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2} \end{aligned}$$

auf der $r\vartheta$ -Ebene, der auf dem Komplement der Nullstellenmenge von r auch wieder eine riemannsche Metrik ist. Daß hier im Resultat keine gemischten Tensoren $dr \otimes d\vartheta$ auftreten, hat den Grund, daß die Vektorfelder ∂_r und ∂_ϑ auch in der xy -Ebene an jedem Punkt aufeinander senkrecht stehen. Die Koeffizienten 1 und r^2 bedeuten gerade die quadrierten Längen $s(\partial_r, \partial_r)$ und $s(\partial_\vartheta, \partial_\vartheta)$ der Vektoren dieser Vektorfelder. Für eine Funktion $f = f(x, y)$ muß schließlich df unter P verwandt sein zu $d(f \circ P)$ und dann muß auch $\text{grad} f = \text{grad}_s f = \text{can}_s^{-1}(df)$ verwandt sein zu

$$\text{grad}_g(f \circ P) = \text{can}_g^{-1}(d(f \circ P)) = \text{can}_g^{-1}(f_r dr + f_\vartheta d\vartheta) = f_r \partial_r + \frac{1}{r^2} f_\vartheta \partial_\vartheta$$

Damit haben wir die Darstellung des Gradienten in Polarkoordinaten ein weiteres Mal hergeleitet.



Dies Bild soll die Verwandtschaft von riemannschen Metriken $f : dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2} \rightsquigarrow dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}$ verdeutlichen, mit $f = P$ der Polarkoordinatenabbildung. Das Differential an der Stelle $(r, \vartheta) = (1\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist dargestellt durch seinen Effekt auf der Standardbasis, die wir auch $(\partial_r, \partial_\vartheta)$ notieren könnten. Die Standardbasis geht an jeder Stelle über in eine Orthogonalbasis und das Bild des ersten Basisvektors hat auch wieder die Länge Eins, das Bild des zweiten Basisvektors jedoch im allgemeinen die Länge r und in unserem Fall die Länge $1\frac{1}{2}$. Die Standardmetrik auf der xy -Ebene entspricht folglich einer Metrik auf der $r\vartheta$ -Ebene, bei der ∂_r und ∂_ϑ aufeinander senkrecht stehen und ∂_r die Länge Eins hat, wohingegen ∂_ϑ die Länge r hat. Diese Eigenschaften aber charakterisieren genau unsere Metrik $dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2}$.

Ergänzung 8.3.12 (**Im Ingenieurwesen gebräuchliche alternative Notation**). Ingenieure arbeiten gerne mit einer anderen Darstellung von Vektorfeldern und betrachten etwa auf dem \mathbb{R}^2 die auf Skalarproduktnorm Eins normierten Vektorfelder $\mathbf{e}_r = \partial_r$ und $\mathbf{e}_\vartheta = r^{-1}\partial_\vartheta$. Natürlich kann jedes Vektorfeld v auf dem Komplement des Ursprungs auch als $v = a\mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_\vartheta$ geschrieben werden mit geeigneten reellwertigen Funktionen a, b . In Formelsammlungen findet man häufig Formeln für Gradienten und dergleichen in dieser Darstellung, zum Beispiel hätten wir $\text{grad } f = (\partial_r f)\mathbf{e}_r + r^{-1}(\partial_\vartheta f)\mathbf{e}_\vartheta$. Meist heißen die Koeffizienten eines Vektorfelds $v = a\mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_\vartheta$ dann auch noch $a = v_r, b = v_\vartheta$. Das verbietet sich für uns jedoch, da wir die Indexnotation bereits als Kürzel für partielle Ableitungen verwenden.

Ergänzung 8.3.13. Ein Zweitensor auf einem endlichdimensionalen reellen Raum X heißt **symmetrisch** beziehungsweise **antisymmetrisch**, wenn er jedem Punkt eine symmetrische beziehungsweise antisymmetrische Bilinearform auf \vec{X} zuordnet. Antisymmetrische Zweitensoren werden wir später als sogenannte 2-Formen wiedertreffen. Eine riemannsche Metrik ist per definitionem ein symmetrischer Zweitensor mit der zusätzlichen Eigenschaft, an jedem Punkt positiv definit zu sein.

Übungen

Übung 8.3.14 (**Riemannsche Metrik in Kugelkoordinaten**). Man zeige, daß die Standardmetrik im xyz -Raum unter Kugelkoordinaten, wie sie 4.2.3 eingeführt werden, verwandt ist zur Metrik

$$g = dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2} + (r \sin \vartheta)^2 d\varphi^{\otimes 2}$$

Übung 8.3.15 (**Gradient in Kugelkoordinaten**). Man zeige, daß der Gradient in Kugelkoordinaten, wie sie 4.2.3 eingeführt werden, ausgedrückt wird durch die Formel

$$\text{grad } f = f_r \partial_r + r^{-2} f_\vartheta \partial_\vartheta + (r \sin \vartheta)^{-2} f_\varphi \partial_\varphi$$

8.4 Wegintegrale

8.4.1. Ich verallgemeinere die in [AN1] 12.7.1.2 eingeführte Terminologie. Eine stetige Abbildung von einem mehrpunktigen reellen Intervall in einen topologischen Raum nennen wir einen **Weg** in unserem Raum. Ist das Definitionsintervall kompakt, sprechen wir von einem **kompakten Weg**. Ist das Definitionsintervall das Einheitsintervall $[0, 1]$, so sprechen wir von einem **normierten Weg**. Oft lassen wir diese Zusätze aber auch weg und hoffen, daß aus dem Kontext hervorgeht, was jeweils gemeint ist.

Definition 8.4.2. Gegeben $A \subset X$ eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums und $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer Weg und $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld auf A erklären wir eine reelle Zahl $\int_{\gamma} \omega$ durch die Vorschrift

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

Sie heißt das **Integral des Kovektorfelds ω längs des Weges γ** . Sobald ich hoffe, Sie davon überzeugt zu haben, daß keine Verwechslungen zu befürchten sind, notiere ich Wegintegrale meist ohne Kringel mit \int statt \oint .

8.4.3. In der physikalisch motivierten Terminologie aus [AN1] 12.7.1.4 gilt es also, zu jedem Zeitpunkt $t \in [a, b]$ den Kovektor $\omega_{\gamma(t)}$ auf dem Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ auszuwerten und die so entstehende reellwertige Funktion über das Intervall $[a, b]$ zu integrieren.

8.4.4 (**Diskussion der Terminologie**). Ich unterscheide zwischen dem „Kurvenintegral“ aus [AN1] 12.7.1.23 und dem „Wegintegral“ wie es eben definiert wurde. In der Literatur findet man stattdessen vielfach die Terminologie „Kurvenintegral erster Art“ und „Kurvenintegral zweiter Art“.

Vorschau 8.4.5. Das in der Funktionentheorie betrachtete Wegintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$ ist eine Erweiterung des hier eingeführten Wegintegrals auf „komplexwertige Einsformen“, wie in 8.4.23 und [FT1] 16.2.5 folgende ausgeführt wird.

8.4.6 (**Vage Anschauung für das Wegintegral**). In der vor 8.1.11 erklärten Anschauung für ebene Kovektorfelder als „Liniendichten“ wäre das Wegintegral zu verstehen als eine Präzisierung der Idee der „Zahl der von unserem Weg gekreuzten Linien“. Da das arg vage ist, gebe ich auch noch eine präzise Variante in Form eines Lemmas.

Lemma 8.4.7 (Wegintegral durch Riemannsummen). Seien $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer Weg in einer Teilmenge A eines endlichdimensionalen reellen Raums X und $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld auf A . Man betrachte für $r \geq 1$ die äquidistante Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r = b$ und bilde die **Riemannsumme**

$$S_{\gamma}^r(\omega) = \sum_{i=0}^{r-1} \omega_{\gamma(a_i)}(\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i))$$

So ist unser Wegintegral der Grenzwert der Folge von Riemannsummen

$$\int_{\gamma} \omega = \lim_{r \rightarrow \infty} S_{\gamma}^r(\omega)$$

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem Richtungsraum \vec{X} und bezeichne $\|\cdot\|$ auch die zugehörige Operatornorm auf \vec{X}^* . Nach [AN1] 12.5.2.5 ist unser Integral der Grenzwert der Folge von Riemannsummen

$$S^r = \sum_{i=0}^{r-1} \omega_{\gamma(t_i)}(\gamma'(t_i)) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ finden wir wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von γ' ein $\delta > 0$ derart, daß gilt $|s - t| < \delta \Rightarrow \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \varepsilon$. Ist $R = R_\varepsilon$ so groß, daß die Länge der Intervalle $t_{i+1} - t_i$ unter δ sinkt, so folgt für $r \geq R$ mit dem Schrankensatz [AN1] 12.7.1.10 oder genauer seiner offensichtlichen Variante für einen beliebigen endlichdimensionalen normierten Raum $\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \in (t_{i+1} - t_i) B(\gamma'(t_i); \varepsilon)$. Das können wir umschreiben zu

$$\|(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) - (t_{i+1} - t_i)\gamma'(t_i)\| < (t_{i+1} - t_i)\varepsilon$$

Das hinwiederum liefert für $r \geq R$ die Abschätzung

$$|S_\gamma^r(\omega) - S^r| \leq \sum_{i=0}^{r-1} \|\omega_{\gamma(t_i)}\| (t_{i+1} - t_i)\varepsilon \leq (\sup_{t \in [a,b]} \|\omega_{\gamma(t)}\|) (b - a)\varepsilon$$

Diese Differenz strebt also gegen Null für $r \rightarrow \infty$, folglich strebt die Folge $S_\gamma^r(\omega)$ gegen denselben Grenzwert wie die Folge S^r . \square

Beispiel 8.4.8 (Wegintegral eines Kovektorfelds auf der Zeitachse). Ein Kovektorfeld auf der Zeitachse kann, wie in 8.1.9 erklärt, als eine Vorschrift aufgefaßt werden, die jedem Zeitpunkt eine Frequenz und eine Orientierung der Zeitachse zuordnet. Nehmen wir der Einfachheit halber an, alle diese Orientierungen seien die Standardorientierung der Zeitachse und unser Weg gehe in Richtung positiver Zeiten von einem Anfangszeitpunkt zu einem Endzeitpunkt, so liefert unser Wegintegral anschaulich gesprochen die Zahl der Schwingungen zwischen Anfangszeitpunkt und Endzeitpunkt.

Satz 8.4.9 (Formelsammlung für das Wegintegral). *Das Wegintegral hat die folgenden Eigenschaften:*

1. **(Wegintegral über Identitätswege).** *Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stimmt das Wegintegral des Kovektorfelds $f(x) dx$ über den Identitätsweg $\text{id} : [a, b] \rightarrow [a, b]$ überein mit dem in [AN1] 12.5.2.1 eingeführten Integral von f , in Formeln*

$$\oint_{\text{id}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

2. **(Verwandtschaftsverträglichkeit).** Gegeben X und Y endlichdimensionale reelle Räume, $A \subset X$ und $B \subset Y$ Teilmengen mit A halboffen, $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer Weg, $\phi : A \rightarrow B$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $\eta : B \rightarrow \vec{Y}^*$ ein stetiges Kovektorfeld auf B gilt

$$\int_{\gamma} \phi^* \eta = \int_{\phi \circ \gamma} \eta$$

3. **(Zerstückeln von Wegintegralen).** Gegeben X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge, $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld, $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer Weg und $c \in (a, b)$ ein Zwischenpunkt gilt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma|_{[a,c]}} \omega + \int_{\gamma|_{[c,b]}} \omega$$

4. **(Wegintegral über ein totales Differential).** Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X , eine halboffene Teilmenge $A \subset X$, ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\gamma} dg = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

Beweis. Die Formel für das Wegintegral über Identitätswege folgt unmittelbar aus den Definitionen. Die Verwandtschaftsverträglichkeit des Wegintegrals entpuppt sich so im Fall eines Identitätsweges $\gamma = \text{id} : [a, b] \xrightarrow{\sim} [a, b] = A \subset \mathbb{R} = X$ als unsere Definition des Wegintegrals über den Weg ϕ mittels $\int_{\phi} \eta := \int_{\text{id}} \phi^* \eta$ wegen $\phi^* \eta = \eta_{\phi(t)}(\phi'(t)) dt$. Im Fall eines allgemeinen Weges γ folgt sie durch zweifaches Anwenden dieser Erkenntnis aus der Gleichungskette

$$\int_{\gamma} \phi^* \eta = \int_{\text{id}} \gamma^* \phi^* \eta = \int_{\text{id}} (\phi \circ \gamma)^* \eta = \int_{\phi \circ \gamma} \eta$$

Die Möglichkeit der stückweisen Berechnung eines Wegintegrals folgt unmittelbar durch Zurückholen auf den Identitätsweg aus den ersten beiden Aussagen oder auch direkt aus den Definitionen. Schließlich folgern wir die Formel für das Wegintegral eines totalen Differentials aus den beiden ersten Aussagen durch die Rechnung

$$\int_{\gamma} dg = \int_{\text{id}} \gamma^*(dg) = \int_{\text{id}} d(g \circ \gamma) = \int_a^b (g \circ \gamma)'(x) dx = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung im letzten Schritt. \square

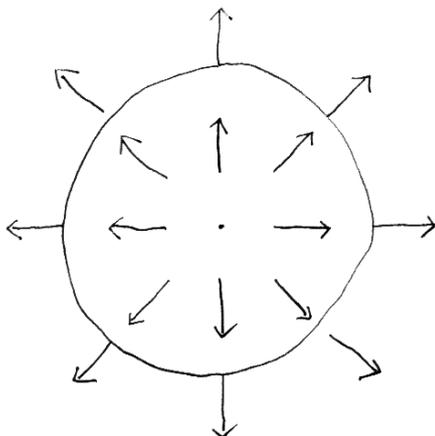
8.4.10 (Diskussion der Verwandtschaftsverträglichkeit). Jeder Weg γ in A hat genau einen Verwandten in B , nämlich den Weg $\kappa := \phi \circ \gamma$. Die Verwandtschaftsverträglichkeit in unserem Satz 8.4.9 besagt in dieser Terminologie, daß die Verwandtschaft von Wegen $\phi : \gamma \rightsquigarrow \kappa$ zusammen mit der Verwandtschaft von Kovektorfeldern $\phi : \omega \rightsquigarrow \eta$ die Gleichheit der Wegintegrale $\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\kappa} \eta$ impliziert.

Beispiel 8.4.11 (Berechnung von Wegintegralen). Sei A eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums X . Für einen beliebigen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ und ein beliebiges stetiges Kovektorfeld ω auf A hat das mit dem Weg zurückgeholte Kovektorfeld nach 8.2.11 die Gestalt $\gamma^* \omega = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$ und wir kommen mit den Umformungen

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_{\text{id}} \gamma^* \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

wieder zu unserer ursprünglichen Definition zurück, die wir in diesem Sinne als ein „Zurückholen auf den Parameterbereich“ auffassen können. Integrieren wir zum Beispiel das Kovektorfeld $\omega = x dx + x^4 dy$ auf der Ebene \mathbb{R}^2 über den Weg $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (\sqrt{t}, \log t)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \omega &= \oint_{\gamma} x dx + x^4 dy \\ &= \int_{\text{id}} \sqrt{t} d(\sqrt{t}) + (\sqrt{t})^4 d(\log t) \\ &= \int_1^2 \sqrt{t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt + t^2 t^{-1} dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} + t\right) dt = 2 \end{aligned}$$



Der Fluß des Vektorfeldes
 $\partial_r = (x/r)\partial_x + (y/r)\partial_y$ durch den
Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $t \mapsto (3 \cos t, 3 \sin t)$ ergibt sich nach
kurzer Rechnung zu 6π . Die
Zirkulation desselben Vektorfeldes
in demselben Weg ist dahingegen
Null.

Ergänzung 8.4.12 (Wegintegrale von Vektorfeldern). Redet man vom Integral eines Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ längs eines Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ oder

von der **Zirkulation eines Vektorfelds in einem Weg**, so ist das Integral des Kovektorfelds $\omega = \text{can}_s(v)$ nach 8.1.16 gemeint, das in Formeln gegeben wird durch $\omega = v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n$. In der Physik wird das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n meist $s(v, w) = v \cdot w$ notiert und unser Wegintegral über einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ würde geschrieben als

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} v \cdot dx = \int_a^b v \cdot d\gamma = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Die Bedeutung der Terme des rechtesten Integrals sollte hier klar sein. In der Mitte ist zu verstehen $d\gamma = d_t\gamma = \gamma'(t) dt$. Weiter links meint dx ein „kleines vektoriell Kurvenelement“ und das x ist fett gedruckt um anzudeuten, daß ein Vektor gemeint ist. Ich mag diese Notation nicht besonders, die fette Schreibweise ist auch an der Tafel schlecht umzusetzen. Allgemeiner kann man Wegintegrale von Vektorfeldern v bilden, wann immer ein Skalarprodukt oder allgemeiner ein ausgezeichneter Zweitensor g zur Verfügung steht, indem wir eben zu unserem Vektorfeld das Kovektorfeld $\omega = \text{can}_g(v)$ bilden und dieses Kovektorfeld dann integrieren wie in 8.4.2 erklärt.

8.4.13 (Wegintegral über Feld mit Potential, Variante). Die letzte Aussage von Satz 8.4.9 liest sich für Wegintegrale über Vektorfelder auf dem \mathbb{R}^n als die Formel

$$\int_a^b (\text{grad } g) \cdot d\gamma = g(\gamma(a)) - g(\gamma(b))$$

Die „Verträglichkeit des Wegintegrals mit Verwandtschaft“ 8.4.9.2 hat für Wegintegrale über Vektorfelder in \mathbb{R}^n keine Entsprechung. Das ist ein wesentlicher Grund dafür, daß der Begriff des Wegintegrals über Kovektorfelder weiter trägt.

Ergänzung 8.4.14. Redet man im Fall $X = \mathbb{R}^2$ vom **Fluß eines Vektorfelds** $F = (F_x, F_y) : \mathbb{R}^2 \supset A \rightarrow \mathbb{R}^2$ **durch einen Weg**, so ist das Integral über das Kovektorfeld $\omega_F := F_x dy - F_y dx$ gemeint. Dies Kovektorfeld kann alternativ auch beschrieben werden durch die Formel $(\omega_F)_p(u) = \det(F(p)|u)$, in der $F(p)$ und u als Spaltenvektoren aufzufassen sind.

8.4.15 (Wegintegral versus Kurvenintegral). In der Literatur scheint mir eine gewisse Verwirrung zu herrschen was die Begriffe „Wegintegral“ und „Kurvenintegral“ angeht. Die hier gewählte Terminologie soll zum Ausdruck bringen, daß für einen injektiven stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ unser Kurvenintegral nur von der Bildmenge $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$ abhängt, die wir im Sinne unserer Definition 9.6.1 eine „Kurve“ werden nennen dürfen. Unser Wegintegral dahingegen hängt auch von der „durch den Weg γ gegebenen Richtung auf unserer Kurve“ ab und ändert sein Vorzeichen, wenn wir die Kurve „in der umgekehrten Richtung durchlaufen“. Andererseits bleibt das Wegintegral unverändert selbst bei

nicht notwendig monotoner „Neuparametrisierung“, wenn diese nur den Anfang beziehungsweise das Ende des neuen Parameterintervalls auf den Anfang beziehungsweise das Ende des Alten wirft, siehe 8.4.17. Das Kurvenintegral dahingegen ändert sich bei derartigen Neuparametrisierungen im allgemeinen sehr wohl.

8.4.16 (Wegintegrale in eindimensionalen Räumen). Ist X ein eindimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ eine endliche Vereinigung von mehrpunktigen Intervallen oder auch eine beliebige offene Teilmenge, so ist offensichtlich jedes stetige Kovektorfeld ω auf A das Differential $\omega = dg$ einer stetig differenzierbaren Funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Gegeben $c, d \in A$ und ein stetig differenzierbarer Weg γ von c nach d hängt also $\int_{\gamma} \omega = g(d) - g(c)$ nach unserem Satz 8.4.9 vom Weg γ gar nicht ab. Wir notieren dies Integral dann kürzer

$$\int_c^d \omega := \int_{\gamma} \omega$$

Diese Notation ist allerdings nur sinnvoll, wenn es auch in der Tat einen Weg von c nach d gibt, der ganz in A verläuft. Ist $A \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so prüft man unschwer, daß mit dieser Notation unsere Formel

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^d f(x) dx$$

aus 8.4.9.1 für beliebige $c, d \in A$ gültig bleibt. Ist schließlich $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer Weg von c nach d , so entpuppt sich die bloße Abhängigkeit des Wegintegrals von den Endpunkten als verkleidete Fassung der Substitutionsregel, indem wir sie für $\omega = f(x) dx$ ausschreiben zu

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b \gamma^* \omega = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \omega = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(x) dx$$

Korollar 8.4.17 (Wegintegrale sind unabhängig von der Parametrisierung).

Sei $\gamma : [c, d] \rightarrow X$ ein stetig differenzierbarer Weg in einem endlichdimensionalen reellen Raum X und ω ein stetiges Kovektorfeld auf einer Teilmenge, die sein Bild umfaßt. Sei $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ stetig differenzierbar mit $u(a) = c$ und $u(b) = d$. So gilt

$$\int_{\gamma \circ u} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

Beweis. Mit der Verwandtschaftsverträglichkeit des Wegintegrals 8.4.9 schreiben wir die Behauptung um zu $\int_u \gamma^* \omega = \int_{\text{id}} \gamma^* \omega$ mit id dem Identitätsweg des Intervalls $[a, b]$. In eindimensionalen Räumen hängt aber nach 8.4.16 das Wegintegral über stetige Kovektorfelder nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, und diese sind bei unserem Weg u und dem Identitätsweg dieselben. \square

8.4.18 (**Verhalten unter richtungsumkehrender Umparametrisierung**). Der vorstehende Beweis zeigt auch, daß bei einer richtungsumkehrenden Umparametrisierung alias $u(a) = d$ und $u(b) = c$ das Wegintegral über den umparametrisierten Weg das Negative des Wegintegrals über den ursprünglichen Weg ist.

Vorschau 8.4.19. In 9.4.3 werden wir unter anderem das Integral von stetigen Kovektorfeldern mit kompaktem Träger über eindimensionale „orientierte“ Fastfaltungen einführen. Es gießt die in der Proposition enthaltene Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung zu einer Definition um.

8.4.20 (**Wegintegrale rationaler Funktionen über ebene Quadriken**). Wir können nun auch den in [AN1] 12.5.10.19 erklärten Trick zur Berechnung der Integrale von rationalen Ausdrücken in $(x, \sqrt{x^2 + 1})$ geometrisch verstehen. Gegeben solch ein rationaler Ausdruck $R(x, y)$ betrachten wir dazu auf einer geeigneten Teilmenge des \mathbb{R}^2 die Differentialform $R(x, y) dx$ und den Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t, \sqrt{t^2 + 1})$ und fassen unser Integral auf als Wegintegral

$$\int_a^b R(t, \sqrt{t^2 + 1}) dt = \int_{\gamma} R(x, y) dx$$

Solch ein Wegintegral ist nach 8.4.17 unabhängig von der Parametrisierung. Unser Weg durchläuft ein Stück der Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$, genauer ein Stück des Hyperbelastes mit $y > 0$. Diesen Ast können wir nach [AN1] 12.5.9.6 auch parametrisieren durch $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(\tau) = \left(\frac{2\tau}{\tau^2 - 1}, \frac{1 + \tau^2}{1 - \tau^2} \right)$$

und bei dieser Parametrisierung führt uns unser Wegintegral ganz offensichtlich auf das Integral einer rationalen Funktion in τ , das wir nach [AN1] 12.5.10 im Prinzip durch bekannte Funktionen ausdrücken können. In derselben Weise kann man auch das Integral eines rationalen Ausdrucks im Funktionenpaar (\sin, \cos) wie zum Beispiel

$$\frac{\sin^3(\tau) + \cos(\tau)}{\cos(\tau) + \cos^2(\tau)}$$

angehen, das bereits in [AN1] 12.5.10.17 diskutiert wurde. Noch natürlicher als dort mag man es auffassen als Wegintegral im Sinne von [AN1] 12.7.1.23 eines Kovektorfelds mit rationalen Koeffizienten in zwei Veränderlichen, in unserem Beispiel etwa das Integral des Kovektorfelds

$$R(x, y) \frac{dy}{x} = \frac{y^3 + x}{x + x^2} \frac{dy}{x}$$

über ein Stück des Einheitskreises. Mit der rationalen Parametrisierung [AN1] 12.5.8.20 des Einheitskreises durch die stereographische Projektion läßt es sich

dann umwandeln in ein Integral einer rationalen Funktion einer Veränderlichen. Im wesentlichen dasselbe Verfahren funktioniert auch für rationale Ausdrücke in den Funktionenpaaren (\sinh, \cosh) und $(\sqrt{1+x^2}, x)$.

Ergänzung 8.4.21. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, W ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein **W -wertiges Kovektorfeld auf A** ist eine Abbildung

$$\omega : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$$

Sie ordnet also jedem Punkt $p \in A$ eine lineare Abbildung des Richtungsraums in den Raum W zu. Ist etwa Y ein weiterer endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ halboffen und $f : A \rightarrow Y$ differenzierbar, so ist df oder genauer $p \mapsto d_p f$ ein \vec{Y} -wertiges Kovektorfeld auf A . Ist nun $\varphi : [a, b] \rightarrow A$ ein stetig differenzierbarer Weg in einer Teilmenge A eines endlichdimensionalen reellen Raums X und $\omega : A \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{X}, W)$ ein stetiges Kovektorfeld auf A mit Werten in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum W , so definieren wir in Verallgemeinerung des Falls reellwertiger Kovektorfelder aus 8.4 einen Vektor $(\int_{\varphi} \omega) \in W$, das **Integral des W -wertigen Kovektorfelds ω längs des Weges φ** , durch die Vorschrift

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \omega_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) dt$$

Rechts ist also für jeden Zeitpunkt t der Homomorphismus $\omega_{\varphi(t)} : \vec{X} \rightarrow W$ auszuwerten auf dem Geschwindigkeitsvektor $\varphi'(t) \in \vec{X}$, und die so entstehende stetige Abbildung $[a, b] \rightarrow W$ ist als vektorwertige Funktion zu integrieren im Sinne von 6.3.3.

Ergänzendes Beispiel 8.4.22. In der Physik begegnen einem insbesondere oft Kovektorfelder mit Werten in eindimensionalen reellen Vektorräumen. Zum Beispiel wird man sich ein Kraftfeld auf dem Anschauungsraum \mathbb{E} aus [LA2] 3.3.5 a priori wie in 10.1.8 erklärt als ein „Vektorfeld mit Einheiten“ denken, genauer als eine Abbildung

$$F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \langle \text{g/s}^2 \rangle$$

Da es sich jedoch mit Kovektorfeldern bei Koordinatenwechseln sehr viel besser rechnen läßt als mit Vektorfeldern, ist es oft günstiger, die durch das kanonische Skalarprodukt $s : \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$ aus [LA2] 8.4.6 gegebene Identifikation $\acute{s} : \vec{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}}, \mathbb{L}^{\otimes 2})$ nachzuschalten und unser Kraftfeld stattdessen als eine Abbildung

$$\tilde{F} : \mathbb{E} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}}, \langle \text{g m}^2/\text{s}^2 \rangle)$$

aufzufassen. Die Elemente des eindimensionalen Vektorraums

$$\langle \text{g m}^2/\text{s}^2 \rangle = \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{\otimes 2} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$$

heißen in der Physik auch **Energien**. In diesem Sinne können wir ein Kraftfeld also als ein energiewertiges Kovektorfeld auffassen. Das Wegintegral über dieses Kovektorfeld heißt die bei Durchlaufen des Weges in besagtem Kraftfeld freiwerdende Energie und, wenn es negativ ist, die zu verrichtende **Arbeit**. Anschaulich und etwas vage gesprochen ordnet das Negative dieses Kovektorfelds nämlich gerade „jeder kleinen Verrückung die Arbeit zu, die bei dieser kleinen Verrückung gegen das Kraftfeld zu leisten wäre“. Eine energiewertige Abbildung $V : \mathbb{E} \rightarrow \langle \text{g m}^2/\text{s}^2 \rangle$ mit $dV = -\tilde{F}$ heißt in der Physik ein **Potential** unseres Kraftfelds.

Ergänzendes Beispiel 8.4.23. Zentral in der „Funktionentheorie“ sind die Wegintegrale komplexwertiger Kovektorfelder, die auf Teilmengen der komplexen Zahlenebene definiert sind, vergleiche [FT1] 16.2.1.1 und [FT1] 16.2.5. Üblicherweise bezeichnet in diesem Kontext $z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Identität und dz ihr Differential, ein komplexwertiges Kovektorfeld auf \mathbb{C} . Mit $f(z) dz$ bezeichnet man dann das Produkt dieses Kovektorfelds mit einer komplexwertigen Funktion $z \mapsto f(z)$. Das Integral derartiger Kovektorfelder heißt das „komplexe Wegintegral“ und liefert entsprechend komplexe Zahlen.

Übungen

Übung 8.4.24. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ ist der Winkel im Bogenmaß ϑ lokal eine „bis auf eine additive Konstante wohl definierte Funktion“. Das Differential $d\vartheta$ ist somit ein wohldefiniertes Kovektorfeld, wenn es auch global nicht das Differential einer Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ zu sein braucht. Man berechne das Wegintegral $\int_{\gamma} d\vartheta$ für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Man folgere, daß $d\vartheta$ nicht das Differential einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ sein kann.

Ergänzende Übung 8.4.25 (Ein divergierendes Wegintegral). Man betrachte den Weg $\gamma(t) := r(t)(\cos t, \sin t)$ für $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ glatt und monoton fallend mit $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$. Man zeige, daß man r so wählen kann, daß die Wegintegrale $\int_{\gamma|_{[0,b]}} x dy$ bei wachsendem b über alle Grenzen wachsen. Hinweis: Man wähle r so, daß gilt $\sin(2t) > 0 \Rightarrow r'(t) = 0$ und daß r nur sehr langsam fällt. Durch Umparametrisieren des Weges γ von $[0, \infty)$ auf $[0, 1)$ und stetiges Fortsetzen durch $\beta(1) := (0, 0)$ erhält man dann einen Weg $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, der auf $[0, 1)$ glatt ist und bei dem die Wegintegrale $\int_{\beta|_{[0,c]}} x dy$ für $c \rightarrow 1$ monoton über alle Grenzen wachsen.

8.5 Wegzusammenhang

Definition 8.5.1. Ist X ein topologischer Raum und sind $x, y \in X$ Punkte, so nennen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ einen

Weg von x nach y . Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und es für je zwei Punkte unseres Raums einen Weg vom einen zum anderen gibt.

Definition 8.5.2. Unter einem **stückweise linearen Weg** in einem reellen Raum verstehen wir einen Weg, der aus endlich vielen Geradensegmenten zusammengesetzt ist. Genauer und in Formeln heißt also ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ in einem reellen Raum stückweise linear, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ gibt derart, daß γ auf jedem Teilintervall $[a_{i-1}, a_i]$ mit der Restriktion einer affinen Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow X$ übereinstimmt.

8.5.3. Im Lichte unserer allgemeinen Definitionen müßten wir eigentlich von einem „stückweise affinen Weg“ reden, aber das tut kein Mensch.

Lemma 8.5.4. *In einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge eines normierten reellen Raums lassen sich je zwei Punkte auch durch einen stückweise linearen Weg verbinden.*

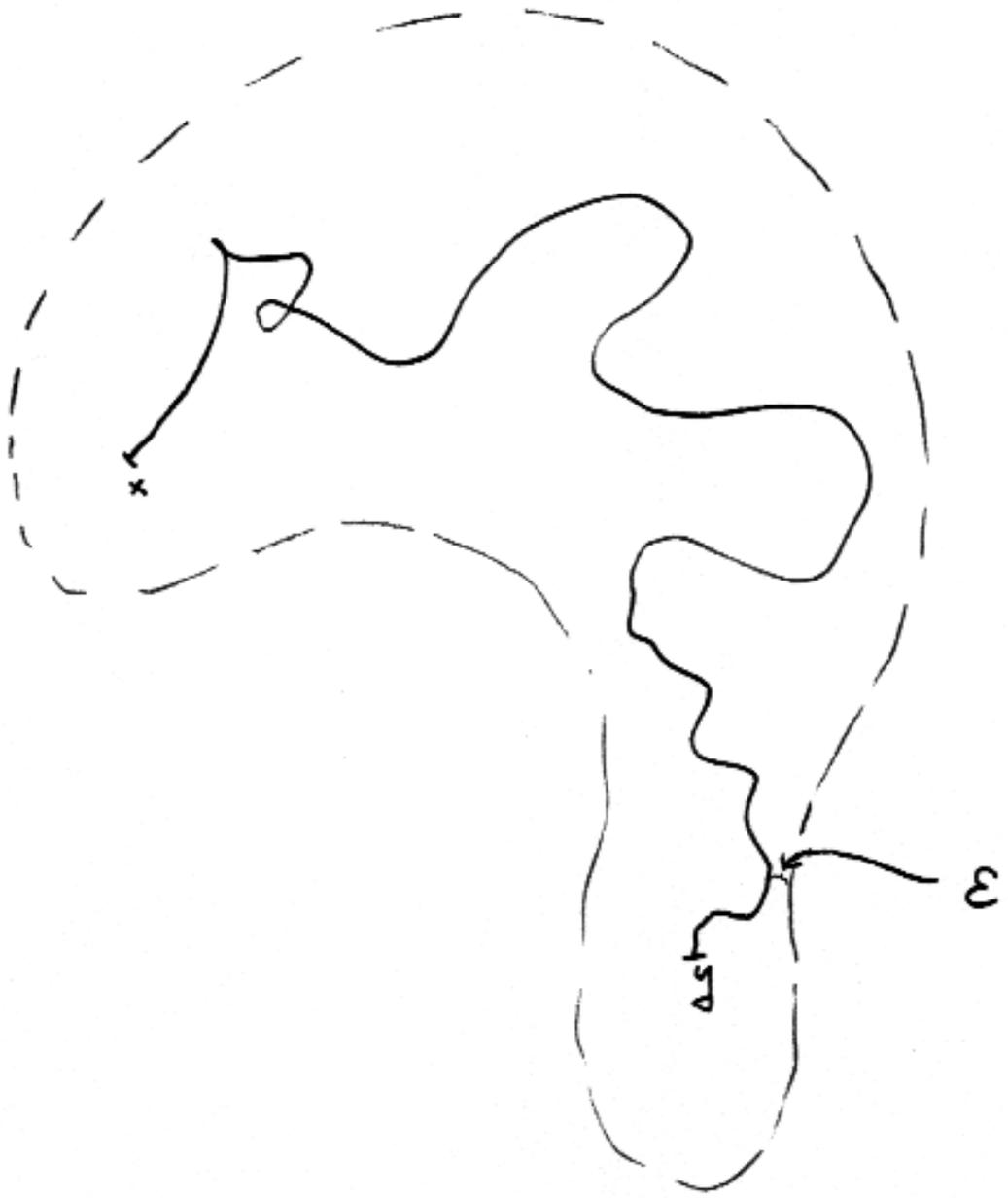
Beweis. Sei $U \subset X$ unsere Teilmenge und seien $x, y \in U$ gegeben. Nach Annahme gibt es einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ von x nach y . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $U \neq X$ annehmen. Dann ist der Abstand zum Komplement von U nach 1.1.18 eine stetige Funktion $d_{X \setminus U} : X \rightarrow \mathbb{R}$ ohne Nullstelle auf U . Also hat $d_{X \setminus U} \circ \gamma$ nach [AN1] 12.5.1.5 auf $[a, b]$ ein Minimum $\varepsilon > 0$, als da heißt, es gibt $\varepsilon > 0$ derart, daß alle Punkte aus $\gamma([a, b])$ mindestens den Abstand ε zum Komplement von U haben. Andererseits ist γ gleichmäßig stetig, wir finden also eine Unterteilung $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$ unseres Intervalls mit $\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| < \varepsilon$ für $1 \leq i \leq n$. Ein zwischen den Eckpunkten $x = \gamma(a_0), \gamma(a_1), \dots, \gamma(a_n) = y$ jeweils gerade verlaufender Weg bleibt also ganz in U . Damit ist gezeigt, daß sich je zwei Punkte aus U auch durch einen stückweise linearen Weg in U verbinden lassen. \square

Lemma 8.5.5. *Auf einer offenen wegzusammenhängenden Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist jede differenzierbare reellwertige Funktion mit verschwindendem Differential konstant.*

Beweis. Eine differenzierbare Funktion mit verschwindendem Differential muß nach 8.4.16 am Anfang und Ende jedes stetig differenzierbaren Weges und dann auch am Anfang und Ende jedes stückweise linearen Weges denselben Wert annehmen. Das Lemma folgt damit aus 8.5.4. \square

Übungen

8.5.6. Ich führe für die Übungen noch einige Begrifflichkeiten ein, die im Rest der Vorlesung vorest nicht benötigt werden.



Definition 8.5.7. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt **diskret**, wenn jeder ihrer Punkte eine Umgebung besitzt, in der kein anderer Punkt besagter Teilmenge liegt. In anderen Worten nennen wir also eine Teilmenge eines topologischen Raums diskret, wenn sie mit der Spurtopologie ein diskreter topologischer Raum wird.

8.5.8. Zum Beispiel ist die Menge aller Brüche $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ mit einer Eins im Zähler eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlengeraden.

8.5.9 (**Diskussion der Terminologie**). Andere Autoren verstehen unter einer „diskreten Teilmenge“ eines topologischen Raums abweichend eine Teilmenge derart, daß jeder Punkt des gesamten Raums eine Umgebung besitzt, in der höchstens ein Punkt besagter Teilmenge liegt. In unserer Terminologie sind das genau die diskreten abgeschlossenen Teilmengen.

Definition 8.5.10. Eine Funktion auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^n , die in einer Umgebung eines jeden Punktes ihres Definitionsbereichs durch ihre Taylorreihe dargestellt werden kann, heißt **analytisch**.

8.5.11. Wir werden in [FT1] 16.3.2.8 zeigen, daß Potenzreihen in einer Veränderlichen analytische Funktionen liefern. Analog kann man dasselbe auch für Potenzreihen in mehreren Veränderlichen zeigen.

8.5.12. Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht leer ist und jede nichtleere Teilmenge, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, bereits der ganze Raum sein muß.

Vorschau 8.5.13. Als Übung 8.5.21 werden Sie zeigen, daß jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend ist. Als Übung 8.5.15 werden Sie zeigen, daß ein zusammenhängender Raum genau dann wegzusammenhängend ist, wenn darin jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt. Insbesondere ist eine offene Teilmenge eines reellen normierten Raums genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist. Wir benutzen deshalb in diesen Fällen meist das kürzere Wort „zusammenhängend“. In [TM] 18.1.3.23 geben wir ein Beispiel für einen zusammenhängenden aber nicht wegzusammenhängenden Raum. Mehr zu diesem Themenkomplex wird in [TM] 18.1.3.3 besprochen.

Übung 8.5.14. Auf jedem topologischen Raum X definiert man die Relation W der „Wegverbindbarkeit“ durch die Vorschrift, daß gilt xWy , wenn es in X einen Weg von x nach y gibt. Man zeige, daß das eine Äquivalenzrelation ist. Hinweis: Die Transitivität ergibt sich durch das „Aneinanderhängen von Wegen“ und die Stetigkeit der so entstehenden Wege folgt mit 1.5.12. Die Äquivalenzklassen für die Äquivalenzrelation der Wegverbindbarkeit heißen die **Wegzusammenhangskomponenten** unseres Raums.

Übung 8.5.15. Man zeige, daß die Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raums offen sind genau dann, wenn jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt. Insbesondere ist ein Raum, in dem jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt, genau dann zusammenhängend, wenn er wegzusammenhängend ist.

Übung 8.5.16. Das Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge in einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist für $n > 1$ wegzusammenhängend. Dasselbe gilt im Übrigen auch ohne die Bedingung „abgeschlossen“, ist dann aber schwerer zu zeigen.

Übung 8.5.17. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum einer Dimension $\dim A \leq n - 2$ alias einer Kodimension mindestens Zwei, so ist auch $U \setminus A$ wegzusammenhängend. Für Teilräume A der Kodimension Eins alias affine Hyperebenen A gilt das natürlich nicht!

Übung 8.5.18. Stimmen zwei auf derselben wegzusammenhängenden offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n definierte analytische Funktionen auf einer Umgebung eines Punktes überein, so sind sie gleich. Hinweis: Man ziehe sich mithilfe stückweise linearer Wege auf den Fall $n = 1$ zurück.

Ergänzende Übung 8.5.19. Die Gruppe $SO(n)$ aller orthogonalen $(n \times n)$ -Matrizen mit Determinante Eins ist wegzusammenhängend. Hinweis: [LA2] 2.5.3. Weiter ist auch die Gruppe $GL(n; \mathbb{R})^+$ aller invertierbaren reellen $(n \times n)$ -Matrizen mit positiver Determinante wegzusammenhängend. Hinweis: [LA2] 2.5.9. Die Gruppen $SU(n)$ und $U(n)$ und $GL(n; \mathbb{C})$ sind wegzusammenhängend. Die vorgeschlagenen Lösungsansätze laufen auf eine Flickschusterei hinaus. Einen konzeptionellen Beweis werden wir in [TM] 18.2.3.14 kennenlernen.

Ergänzende Übung 8.5.20. Das Bild eines wegzusammenhängenden Raums unter einer stetigen Abbildung ist stets wieder wegzusammenhängend. Die wegzusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} sind gerade die nichtleeren Intervalle.

Übung 8.5.21. Gegeben ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist jede Teilmenge, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, entweder leer oder bereits der ganze Raum. Hinweis: Man wähle sonst einen Weg von einem Punkt unserer Teilmenge in ihr Komplement und konstruiere einen Widerspruch. Wir führen auch beim Beweis von [FT1] 16.3.3.4 ein Argument aus.

Übung 8.5.22. Man zeige: Gegeben ein von Null verschiedenes Polynom $P \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$ ist die Menge seiner Nichtnullstellen in \mathbb{C}^n offen, dicht und wegzusammenhängend.

8.6 Felder mit Potential

8.6.1. Wir interessieren uns im weiteren für die Frage, unter welchen Bedingungen ein stetiges Kovektorfeld das Differential einer Funktion ist und inwieweit

diese Funktion dann eindeutig bestimmt ist.

Proposition 8.6.2 (Felder mit Potential). *Gegeben X ein endlichdimensionaler Raum und $\omega : X \ni U \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetiges Kovektorfeld sind gleichbedeutend:*

1. Unser Kovektorfeld ω ist das Differential $\omega = df$ einer differenzierbaren Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$;
2. Das Integral unseres Kovektorfelds über beliebige stetig differenzierbare Wege in U hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab;
3. Das Integral unseres Kovektorfelds über jeden geschlossenen stetig differenzierbaren Weg in U verschwindet.

8.6.3 (Diskussion der Terminologie). In physikalischer Terminologie 8.4.22 hat also ein Kraftfeld oder genauer das zugehörige energiewertige Kovektorfeld ein Potential genau dann, wenn die längs beliebiger Wege geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt.

Beweis. Es ist im folgenden bequem, für etwas allgemeinere als nur stetig differenzierbare Wege den Begriff des Wegintegrals zur Verfügung zu haben.

Definition 8.6.4. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ unseres Intervalls gibt derart, daß die Restriktionen $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ stetig differenzierbar sind für alle i . Wir bezeichnen stückweise stetig differenzierbare Wege abkürzend als **Integrationswege**.

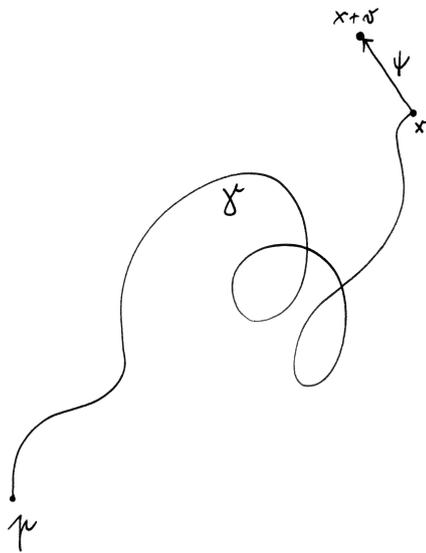
8.6.5 (Wegintegral über Integrationswege). Gegeben $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ein Integrationsweg in einem endlichdimensionalen reellen Raum X und ω ein auf dem Bild von γ definiertes stetiges relatives Kovektorfeld setzen wir

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma|_{[a, a_1]}} \omega + \int_{\gamma|_{[a_1, a_2]}} \omega + \dots + \int_{\gamma|_{[a_{r-1}, b]}} \omega$$

für $a_1 < \dots < a_{r-1}$ die Stellen in (a, b) , an denen γ nicht differenzierbar ist. Sicher gilt dann $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma|_{[a, c]}} \omega + \int_{\gamma|_{[c, b]}} \omega$ für alle $c \in (a, b)$.

Wir behaupten nun zunächst, daß die Aussagen 2 beziehungsweise 3 der Proposition 8.6.2 jeweils gleichbedeutend sind zu

- 2'. Das Integral von ω über beliebige Integrationswege in U hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.
- 3'. Das Integral von ω über jeden geschlossenen Integrationsweg in U verschwindet.



Ein beliebiger Weg mit
angehängtem geraden Stück aus
dem Beweis von $2' \Rightarrow 1$.

Hier ist $2' \Rightarrow 2$ offensichtlich. Andererseits können wir aber jeden Integrationsweg so umparametrisieren, daß er stetig differenzierbar wird. Das Integral ändert sich dabei nicht, und so folgt auch die andere Richtung $2 \Rightarrow 2'$. Ebenso zeigt man $3 \Leftrightarrow 3'$. Nach diesen Vorarbeiten beginnen wir nun mit dem eigentlichen Beweis der Proposition. Die Folgerungen $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ sind offensichtlich. Wir zeigen als nächstes $3' \Rightarrow 2$ durch Widerspruch: Gäbe es zwei Integrationswege mit demselben Anfangs- und Endpunkt aber verschiedenen Integralen, so könnten wir den einen dieser Wege umdrehen und an den anderen anhängen und so einen geschlossenen Integrationsweg erhalten, über den das Integral von ω nicht Null wäre. Damit ist $3' \Rightarrow 2$ gezeigt. Zeigen wir nun noch $2' \Rightarrow 1$, so haben wir alles bewiesen. Nach Übung 8.5.14 und 8.5.4 dürfen wir annehmen, daß U nicht leer ist und sich je zwei Punkte aus U durch einen Integrationsweg verbinden lassen. Dann wählen wir $p \in U$ fest und definieren eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$f(x) = \int_{\gamma} \omega$$

für einen und nach $2'$ dann auch jeden Integrationsweg γ von p nach x . Ist nun ψ ein stetig differenzierbarer Weg in U von x nach y , so behaupten wir

$$\int_{\psi} \omega = f(y) - f(x)$$

In der Tat können wir ja ψ am γ anhängen und so einen Integrationsweg von p nach y erhalten, so daß also gilt $\int_{\gamma} \omega + \int_{\psi} \omega = f(y)$. Mit dieser Erkenntnis läßt sich das Differential von f nun sehr leicht berechnen. Gegeben $x \in U$ sei $B \Subset X$ ein offener Ball um Null mit $x + B \subset U$. Gegeben $v \in B$ betrachten wir den Weg $\psi : [0, 1] \rightarrow U$, $\psi(t) = x + tv$ und erhalten

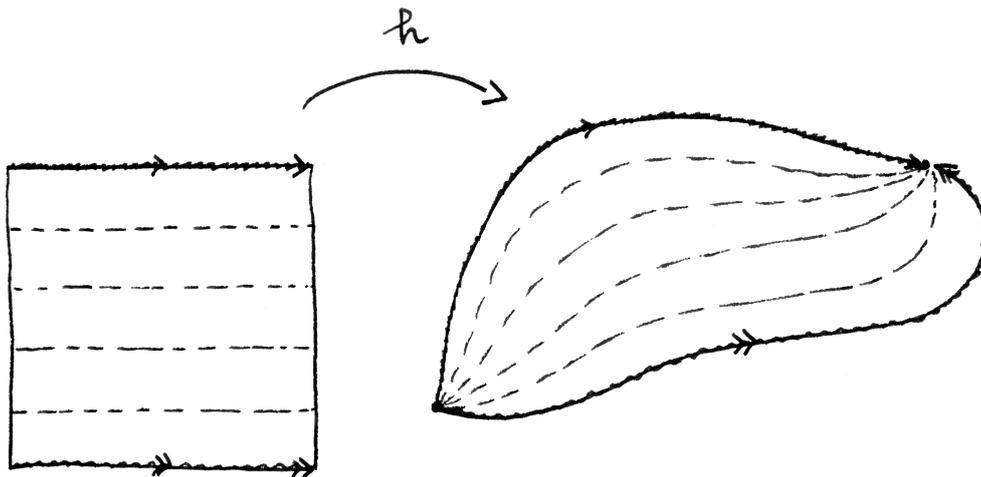
$$f(x + v) - f(x) = \int_{\psi} \omega = \int_0^1 \omega_{x+tv}(v) dt = \omega_x(v) + \int_0^1 (\omega_{x+tv} - \omega_x)(v) dt$$

Das letzte Integral läßt sich aber schreiben als $\|v\|$ mal eine Funktion, die beschränkt ist für $v \in B$ durch $\sup\{\|\omega_{x+w} - \omega_x\| \mid \|w\| \leq \|v\|\}$ und die folglich mit v gegen Null strebt. Das zeigt $d_x f = \omega_x$ wie gewünscht. \square

8.7 Homotopie von Wegen

8.7.1. Einen durch das Einheitsintervall parametrisierten Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ in einem topologischen Raum X nennen wir im folgenden einen **normierten Weg**. Zu jedem Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ bilden wir den zugehörigen normierten Weg $\hat{\gamma} : t \mapsto \gamma((1-t)a + tb)$.

Definition 8.7.2. Seien x, y Punkte eines topologischen Raums X . Zwei normierte Wege α, β von x nach y heißen **homotop** oder präziser **homotop in X** oder ganz pedantisch **homotop mit festen Randpunkten** und wir schreiben $\alpha \simeq \beta$, wenn es eine stetige Abbildung



Eine Homotopie zwischen zwei Wegen, in diesem Fall zwischen den beiden Randwegen unserer Banane.

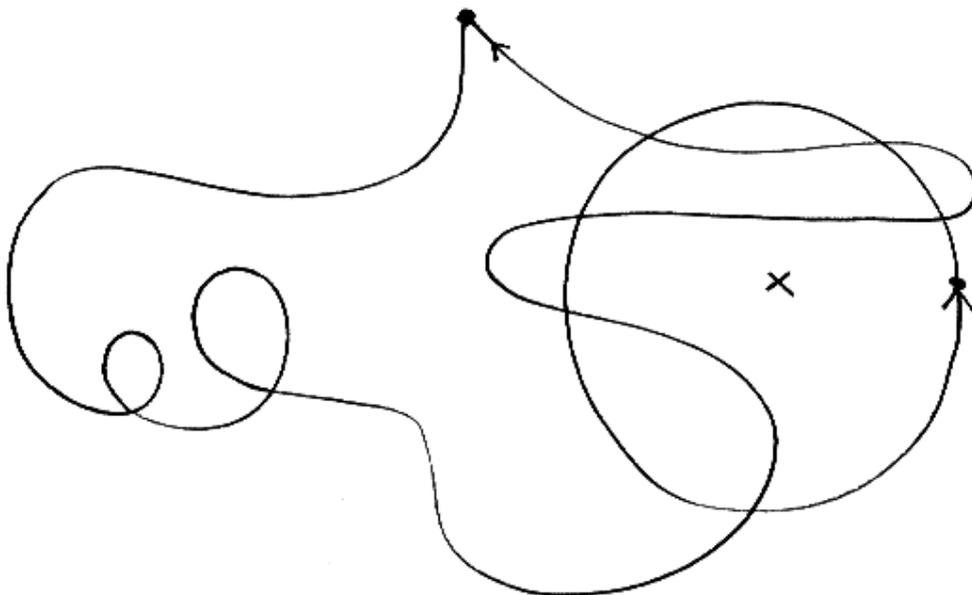
$$h : [0, 1]^2 \rightarrow X$$

des Einheitsquadrats in unseren Raum gibt, die auf der Unter- beziehungsweise Oberkante unseres Quadrats mit α beziehungsweise β übereinstimmt und die auf der Vorder- und der Hinterkante konstant ist. In Formeln ausgedrückt fordern wir also $h(t, 0) = \alpha(t)$ und $h(t, 1) = \beta(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ sowie $h(0, \tau) = x$ und $h(1, \tau) = y$ für alle $\tau \in [0, 1]$. Wir sagen dann auch, h sei eine **Homotopie zwischen α und β** und schreiben $h : \alpha \simeq \beta$. Zwei beliebige Wege von x nach y nennen wir **homotop** genau dann, wenn die zugehörigen normierten Wege homotop sind.

8.7.3. Vielleicht anschaulicher kann man Homotopie von Wegen auch dahingehend interpretieren, daß es eine durch $\tau \in [0, 1]$ parametrisierte Familie von normierten Wegen h_τ von x nach y geben soll derart, daß gilt $h_0 = \alpha$, $h_1 = \beta$ und daß unsere Familie stetig von τ abhängt in dem Sinne, daß die Abbildung $[0, 1]^2 \rightarrow X$, $(t, \tau) \mapsto h_\tau(t)$ stetig ist.

Beispiel 8.7.4. Für eine konvexe Teilmenge X eines endlichdimensionalen reellen Raums und zwei beliebige Punkte $x, y \in X$ sind je zwei Wege α, β von x nach y homotop in X . Sind unsere Wege normiert, so kann man eine Homotopie explizit angeben vermittels $h(t, \tau) = (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$.

8.7.5 (Vorwärtsverwandte homotoper Wege sind homotop). Ist in Formeln $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, so folgt aus $h : \alpha \simeq \beta$ schon $f \circ h : f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$. Speziell ist ein Weg homotop zu allen seinen Umparametrisierungen, denn nach 8.7.4 sind je zwei Wege in $[0, 1]$ von 0 nach 1 homotop und damit gilt dasselbe für ihre Verknüpfung mit einer beliebigen stetigen Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$.



Ein zusammenziehbarer und ein nicht zusammenziehbarer geschlossener Weg in Komplement des durch ein Kreuzchen markierten Punktes in der Papierebene

Definition 8.7.6. Ein Weg in einem topologischen Raum heißt ein **geschlossener Weg**, wenn sein Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Ein geschlossener Weg heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotop ist zu einem konstanten Weg. Ein topologischer Raum heißt **schleifenfüllend**, wenn jeder geschlossene Weg in unserem Raum zusammenziehbar ist.

Vorschau 8.7.7. In der Literatur heißen wegzusammenhängende schleifenfüllende Räume auch „einfach zusammenhängend“, aber ich nenne sie gerne genauer „einfach wegzusammenhängend“.

Vorschau 8.7.8. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und schleifenfüllend und ist $A \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum einer Kodimension ≥ 3 , so ist auch $U \setminus A$ schleifenfüllend. Für einen Beweis dieses Analogons zu 8.5.17 verweise ich auf die Topologie [TF] 19.5.1.7.

Übungen

Übung 8.7.9. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege zwischen zwei fest vorgegebenen Punkten. Hinweis: Verkleben stetiger Abbildungen 1.5.12.

Übung 8.7.10. Ein Raum ist schleifenfüllend genau dann, wenn je zwei Wege mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt darin homotop sind.

Ergänzende Übung 8.7.11. Jeder Weg in einer offenen Teilmenge eines normierten reellen Vektorraums ist in besagter offener Teilmenge homotop zu einem stückweise linearen Weg. Hinweis: 8.5.4.

8.8 Wegintegrale über geschlossene Felder

Definition 8.8.1. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge. Ein stetig differenzierbares Kovektorfeld $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ heißt **geschlossen**, wenn an jeder Stelle $p \in A$ sein Differential $d_p\omega : \vec{X} \rightarrow \vec{X}^*$ eine symmetrische Bilinearform auf \vec{X} liefert im Sinne der Gleichheit von reellen Zahlen

$$(d_p\omega)(\vec{v})(\vec{w}) = (d_p\omega)(\vec{w})(\vec{v}) \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$$

8.8.2 (Diskussion der Terminologie). Die Bezeichnung als „geschlossenes Kovektorfeld“ geht vermutlich auf den gleich folgenden Satz 8.8.8 zurück, nach dem ein stetig differenzierbares Kovektorfeld geschlossen ist genau dann, wenn seine Wegintegrale über alle geschlossenen und im Definitionsbereich zusammenziehbaren Wege verschwinden.

8.8.3 (Rückwärtsverwandtschaft erhält Geschlossenheit). Gegeben ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld ist, wie man leicht sieht, auch sein Rückwärtsverwandter unter jeder affinen Abbildung geschlossen.

Vorschau 8.8.4. Dasselbe zeigen wir in 9.5.11 sogar für Rückwärtsverwandte unter beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Abbildungen.

Beispiel 8.8.5 (Geschlossene Kovektorfelder auf \mathbb{R}^n). Ein stetig differenzierbares Kovektorfeld $\omega = \sum u_i dx_i$ auf einer offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist geschlossen genau dann, wenn gilt

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$$

In der Tat liefern unsere Definitionen in diesem Fall $(d_p\omega)(e_i)(e_j) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p)$.

Beispiel 8.8.6 (Differenziale sind stets geschlossen). Gegeben eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums X ist ihr Differential df stets geschlossen. In der Tat

reicht es aufgrund unserer Erkenntnis 8.8.3, daß Rückwärtsverwandte geschlossener Kovektorfelder unter affinen Abbildungen wieder geschlossen sind, den Fall $X = \mathbb{R}^n$ zu betrachten. Für $\omega = \sum u_i dx_i = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df$ gilt dann in der Tat wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen stets

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

und damit ist df geschlossen nach 8.8.5. Nebenbei bemerkt sieht man leicht ein, daß die $d_p(df)$ entsprechende symmetrische Bilinearform gerade das Doppelte des „quadratischen Anteils der Taylorentwicklung der Funktion f um p “ ist.

Vorschau 8.8.7. Später werden wir in 9.5.4 ganz allgemein die „äußere Ableitung von Differentialformen“ einführen. In dieser Terminologie sind dann unsere geschlossenen Kovektorfelder aus der vorhergehenden Definition 8.8.1 genau diejenigen differenzierbaren Kovektorfelder, deren „äußere Ableitung“ $d\omega$ verschwindet, die grob gesprochen definiert wird als der „antisymmetrische Anteil von $d\omega$ “. Daß Rückwärtsverwandtschaft Geschlossenheit erhält, ist in diesem Kalkül eine unmittelbare Folgerung aus der Verträglichkeit von äußerer Ableitung mit Verwandtschaft 9.5.11.

Satz 8.8.8 (Wegintegrale und Geschlossenheit von Kovektorfeldern). *Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Für ein stetig differenzierbares Kovektorfeld $\omega : X \supset U \rightarrow \vec{X}^*$ sind gleichbedeutend:*

1. *Unser Kovektorfeld ist geschlossen;*
2. *Die Wegintegrale unseres Kovektorfelds über je zwei in U homotope Integrationswege stimmen überein;*
3. *Das Wegintegral unseres Kovektorfelds über jeden in U zusammenziehbaren geschlossenen Integrationsweg verschwindet.*

8.8.9. Einen alternativen und besonders glatten Beweis des Satzes unter stärkeren Voraussetzungen geben wir in 9.7.29.

8.8.10 (**Beziehung zur Proposition über Wegintegral und Potential**). Unsere Proposition 8.6.2 zu Wegintegral und Potential oder besser ihre Erweiterung zu Integrationswegen im Laufe des Beweises besagt, daß gegeben eine offene Teilmenge U eines endlichdimensionalen reellen Raums und ein stetiges Kovektorfeld auf U gleichbedeutend sind:

1. Unser Kovektorfeld ist das Differential einer differenzierbaren Funktion;
2. Die Wegintegrale unseres Kovektorfelds über je zwei Integrationswege in U mit demselben Anfangs- und Endpunkt stimmen überein;

3. Das Wegintegral unseres Kovektorfelds über jeden geschlossenen Integrationsweg in U verschwindet.

Alle diese gleichbedeutenden Bedingungen sind stärker als die entsprechenden Bedingungen in unserem Satz 8.8.8 über Wegintegrale und die Geschlossenheit von Kovektorfeldern: Die erste, da nach 8.8.6 Differentiale, wenn sie stetig differenzierbare Kovektorfelder sind, stets geschlossen sein müssen, die anderen aus offensichtlichen Gründen.

Korollar 8.8.11 (Geschlossenheit und Potential). *Auf einer schleifenfüllenden offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums ist ein stetig differenzierbares Kovektorfeld genau dann geschlossen, wenn es das Differential einer differenzierbaren Funktion ist.*

Beweis. Für U schleifenfüllend und ein stetig differenzierbares Kovektorfeld ω auf U ist die letzte der äquivalenten Eigenschaften aus Satz 8.8.8, daß nämlich das Wegintegral über jeden in U zusammenziehbaren Integrationsweg in U verschwinden möge, gleichbedeutend zur letzten der äquivalenten Eigenschaften aus Proposition 8.6.2, daß nämlich das Wegintegral über jeden geschlossenen Integrationsweg in U verschwinden möge. Mithin sind für U schleifenfüllend alle sechs Eigenschaften aus 8.8.8 und 8.6.2 gleichbedeutend. Insbesondere ist unter dieser Voraussetzung jedes stetig differenzierbare geschlossene Kovektorfeld auf U das Differential einer Funktion. \square

8.8.12 (**Übersetzung in Aussagen über Gradientenfelder**). Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ schleifenfüllend besagt Korollar 8.8.11 in der Terminologie der Gradientenfelder, daß ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann das Gradientenfeld einer differenzierbaren Funktion ist, wenn gilt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$$

Insbesondere ist für $n = 1$ jedes stetig differenzierbare Vektorfeld ein Gradientenfeld, aber in diesem Fall wissen wir bereits stärker, daß sogar jede stetige Funktion eine Stammfunktion hat. Weiter ist für $n = 2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld v genau dann ein Gradientenfeld, wenn seine **skalare Rotation** alias **Wirbeldichte** $\text{rot } v := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ verschwindet. Und schließlich ist für $n = 3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld v genau dann ein Gradientenfeld, wenn seine **Rotation** verschwindet, die man in diesem Falle definiert als das Vektorfeld

$$\text{rot } v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Um für das Konzept der Rotation von Vektorfeldern in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 eine Anschauung zu entwickeln, mag man sich unser Vektorfeld v als ein Kraftfeld vorstellen.

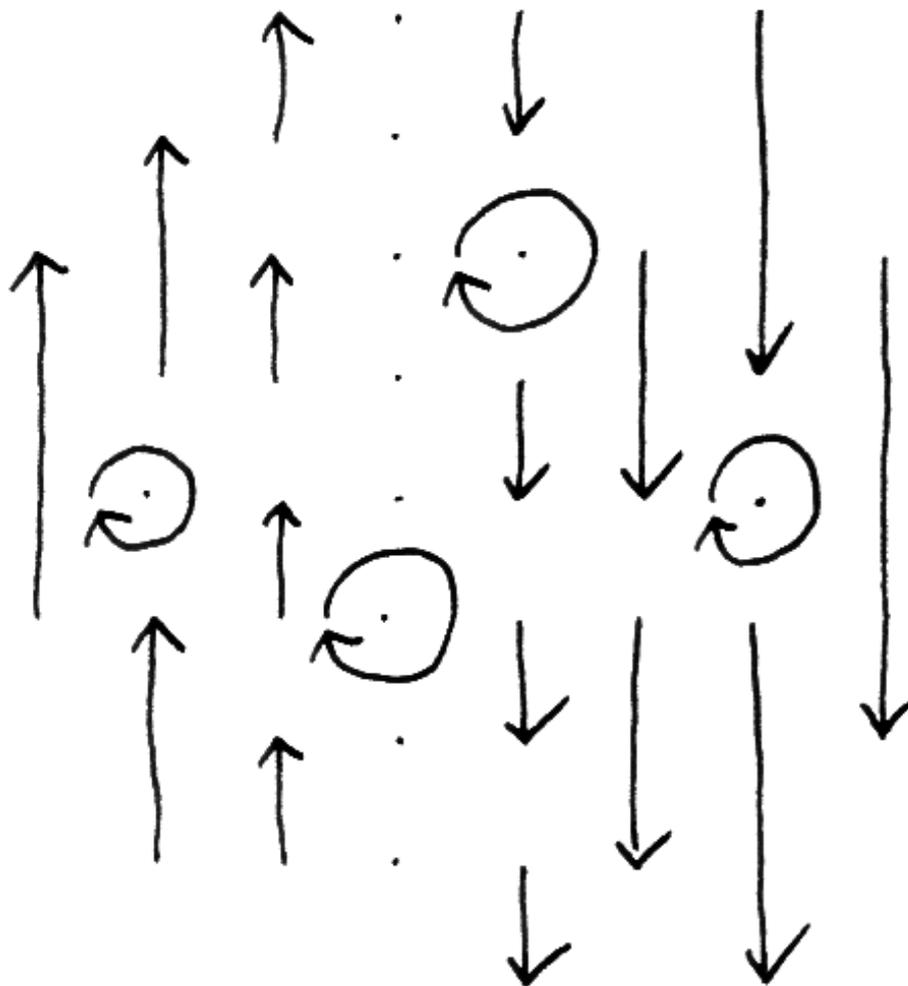
Läßt man im ebenen Fall $n = 2$ dieses Kraftfeld auf den Rand einer kleinen Kreisscheibe wirken, die an einer Stelle unserer Ebene drehbar befestigt ist, so beginnt sie sich zu drehen. Drehsinn und Drehmoment geteilt durch die Fläche der Kreisscheibe entsprechen Vorzeichen und Betrag der skalaren Rotation. Läßt man im räumlichen Fall dieses Kraftfeld auf die Oberfläche eines kleinen Bällchens wirken, den man an einer Stelle p hineinhält, so beginnt auch er sich zu drehen. Die Drehachse ist dann die von der Rotation unseres Vektorfeldes bei p erzeugte Gerade und Drehsinn sowie Drehmoment geteilt durch die Fläche der vom Äquator berandeten Kreisscheibe zu unserem Bällchen entsprechen Richtung und Länge der Rotation. Allgemeiner kann man die Rotation eines Vektorfeldes definieren und geometrisch interpretieren wie oben angedeutet, wenn X zwei- oder dreidimensional ist und \vec{X} versehen mit einem ausgezeichneten Skalarprodukt und im dreidimensionalen Fall zusätzlich mit einer ausgezeichneten Orientierung.

Beweis von Satz 8.8.8. Die Implikation $2 \Rightarrow 3$ ist offensichtlich. Um $3 \Rightarrow 1$ zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß U konvex ist. Dann ist in U jeder geschlossene Weg zusammenziehbar und unsere Erkenntnisse zu Wegintegral und Potential 8.6.2 zeigen, daß unser Kovektorfeld auf besagter konvexer Teilmenge das Differential $\omega = df$ einer differenzierbaren Funktion sein muß. Solch ein Differential aber ist nach 8.8.6 stets geschlossen. Alternativ können wir die Implikation $3 \Rightarrow 1$ auch leicht aus Übung 8.8.19 herleiten. Damit bleibt nur noch $1 \Rightarrow 2$ zu zeigen, daß also für jedes stetig differenzierbare geschlossene Kovektorfeld seine Wegintegrale über homotope Wege übereinstimmen. Wir beginnen unseren Beweis von $1 \Rightarrow 2$, indem wir ein Korollar unseres Satzes als Lemma formulieren und dafür einen eigenständigen Beweis geben.

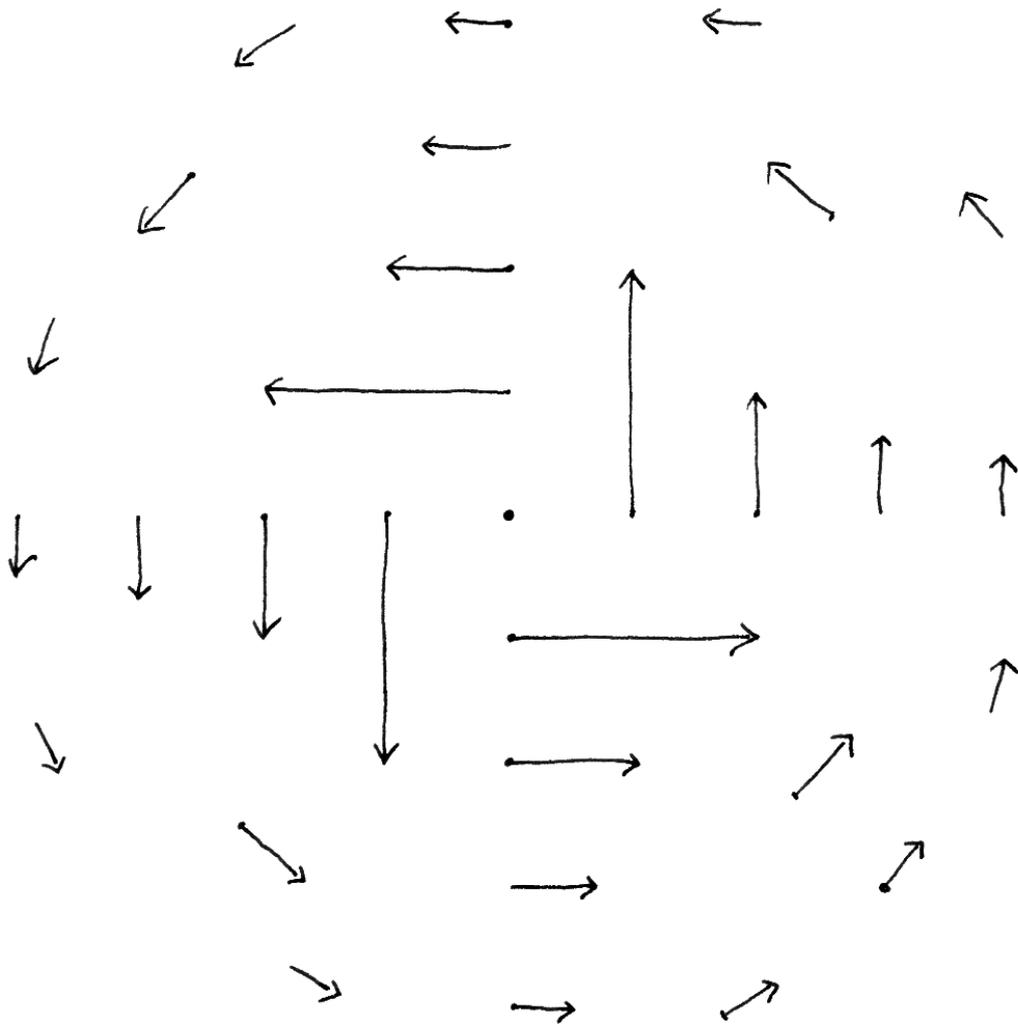
Lemma 8.8.13. *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und ω darauf ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld, so ist ω das Differential einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.*

8.8.14. Ich gebe für dies Lemma zwei Beweise: Erst einen sehr kurzen mehr rechnerischen Beweis und im Anschluß einen etwas längeren mehr konzeptionellen Beweis.

Beispiel 8.8.15. Daß ein rotationsfreies Vektorfeld auf einer nicht einfach wegzusammenhängenden offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n nicht notwendig ein Potential besitzt, zeigt das Vektorfeld $\text{grad } \theta$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, wo $\theta(x, y)$ der eben nur bis auf eine additive Konstante wohlbestimmte Winkel ist, den der Strahl vom Nullpunkt nach (x, y) mit der horizontalen Koordinatenachse einschließt. Der Gradient $\text{grad } \theta$ ist dann ein wohldefiniertes rotationsfreies Vektorfeld auf dem Komplement des Ursprungs, hat aber kein global definiertes Potential. Es heißt das **Winkelfeld**. Dies



Das ebene Vektorfeld $(x, y) \mapsto (0, -x)$ hat konstant die Rotation -1 .



Ein rotationsfreies Vektorfeld ohne Potential auf der punktierten Ebene.

Vektorfeld ist nicht ganz leicht zu zeichnen, da die Längen seiner Vektoren gegen den Ursprung hin ins Unendliche wachsen. Auf den ersten Blick mag es absurd wirken, dieses Feld wirbelfrei zu nennen. Eine außerhalb des Ursprungs zum Testen hereingelegte kleine Kreisscheibe würde aber in der Tat nicht gedreht, die stärkeren Vektoren zerren zwar an der dem Ursprung zugewandten Seite, aber von diesen Vektoren greifen andererseits auch weniger an. In gewisser Weise konzentriert sich hier das gesamte Wirbeln im Ursprung, und der gehört nun eben gerade nicht zu unserem Definitionsbereich. In mathematischer Sprechweise ist $d\vartheta$ ein geschlossenes Kovektorfeld auf der punktierten Ebene, das jedoch nicht das Differential einer global definierten Funktion ist. Anschaulich mag man sich das Winkelfeld als das „Steigungsfeld einer Wendeltreppe“ denken, bei dem auf dem Boden unter einer Wendeltreppe an jeder Stelle eingezeichnet wird, in welcher Richtung es auf der Wendeltreppe darüber am steilsten hochgeht und wie steil es da hochgeht.

Rechnerischer Beweis. Sei $\omega = \sum u_j dx_j$. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \in U$ annehmen. Wir bezeichnen nun mit $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ einen Punkt und betrachten den Weg $\psi_x : [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto tx$ und die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_{\psi_x} \omega = \int_0^1 \omega_{tx}(x) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n u_j(tx) \cdot x_j dt$$

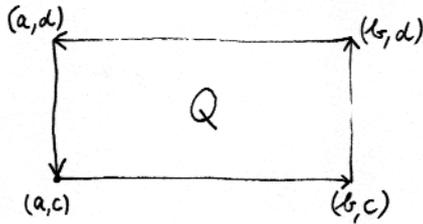
Ihre partielle Ableitung nach x_i ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x=tp} \left(\sum_{j=1}^n (u_j \circ (t \cdot)) \cdot x_j \right) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n t \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(tp) \cdot p_j + u_i(tp) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n t \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(tp) \cdot p_j + u_i(tp) dt \\ &= \int_0^1 t \cdot \frac{d}{dt}(u_i(tp)) + u_i(tp) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t \cdot (u_i(tp))) dt \\ &= t \cdot u_i(tp) \Big|_0^1 \\ &= u_i(p) \end{aligned}$$

und wir sehen, daß in der Tat gilt $df = \omega$. □

Konzeptioneller Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $n = 2$ als eigenständiges Lemma.

Lemma 8.8.16. *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine ebene Kreisscheibe und ω darauf ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld, so ist ω das Differential einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.*



Das Rechteck aus dem Beweis von 8.8.16.

Beweis. Um Indizes zu vermeiden schreiben wir bei der Behandlung dieses Spezialfalls (x, y) statt (x_1, x_2) in der Hoffnung, durch das Einsparen von Indizes mehr an Klarheit zu schaffen als durch die Verwendung der Buchstaben x, y mit verschiedenen Bedeutungen an Verwirrung. Betrachten wir ein Rechteck $Q := [a, b] \times [c, d] \subset U$ und integrieren unser Kovektorfeld einmal im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand entlang, den wir dazu als einen Weg ρ parametrisieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\rho} \omega &= \int_a^b u_1(x, c) dx + \int_c^d u_2(b, y) dy - \int_a^b u_1(x, d) dx - \int_c^d u_2(a, y) dy \\ &= \int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Für ein stetig differenzierbares geschlossenes Kovektorfeld verschwindet also das Wegintegral einmal um den Rand unseres Rechtecks und der „obere“ beziehungsweise der „untere“ Weg auf den Kanten des Rechtecks von einem Punkt zum diagonal gegenüberliegenden Punkt liefern dasselbe Wegintegral. Halten wir nun einen Punkt $(p, q) \in U$ fest, so liefert dieses gemeinsame Wegintegral eine Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_p^x u_1(t, q) dt + \int_q^y u_2(x, s) ds \\ &= \int_q^y u_2(p, s) ds + \int_p^x u_1(t, y) dt \end{aligned}$$

Für diese Funktion gilt wegen der ersten Darstellung offensichtlich $f_y = u_2$ und wegen der zweiten Darstellung $f_x = u_1$. Damit gilt $\omega = df$ wie behauptet. \square

Jetzt führen wir unseren konzeptionellen Beweis des Lemmas im Fall allgemeiner Dimension zu Ende. Wir betrachten dazu alle Wege, die längs der Kanten eines achsenparallelen Quaders vom Ursprung nach p laufen. Genauer betrachten wir für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ den Weg $[\sigma] = [\sigma; p]$ vom Ursprung nach p , der gerade verläuft zwischen den Eckpunkten

$$0, p_{\sigma(1)}\vec{e}_{\sigma(1)}, p_{\sigma(1)}\vec{e}_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)}\vec{e}_{\sigma(2)}, \dots, p$$

Ist $\tau = (i, i + 1)$ eine Transposition benachbarter Zahlen, so unterscheiden sich $[\sigma]$ und $[\sigma \circ \tau]$ nur dadurch, daß sie beim i -ten und $(i + 1)$ -ten Geradenstück

auf verschiedenen Kantenwegen diagonal gegenüberliegende Punkte eines ebenen Rechtecks verbinden. Ziehen wir unser Kovektorfeld auf eine geeignete Ebene zurück, so landen wir im bereits behandelten Fall und folgern

$$\int_{[\sigma]} \omega = \int_{[\sigma \circ \tau]} \omega$$

für jede Transposition τ der Gestalt $\tau = (i, i + 1)$. Wissen wir nun bereits nach [LA1] 6.1.8, daß derartige Transpositionen die symmetrische Gruppe erzeugen, so können wir sofort folgern, daß $\int_{[\sigma]} \omega$ gar nicht von $\sigma \in \mathcal{S}_n$ abhängt. Die durch

$$f(p) = \int_{[\sigma;p]} \omega$$

für ein und alle σ definierte Funktion f hat dann Differential $df = \omega$, da ihre partielle Ableitung nach x_i auch aus jeder Darstellung durch ein σ mit $\sigma(n) = i$ berechnet werden kann, für die $\frac{\partial f}{\partial x_i} = u_i$ offensichtlich ist. \square

Jetzt können wir schließlich in unserem Satz 8.8.8 auch noch die Implikation $1 \Rightarrow 2$ zeigen, daß also bei stetig differenzierbaren geschlossenen Kovektorfeldern die Wegintegrale über homotope Integrationswege übereinstimmen. Sei $h : [0, 1]^2 \rightarrow U$ eine Homotopie zwischen unseren beiden Integrationswegen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit normiert annehmen dürfen. Analog wie beim Beweis von 8.5.4 zeigen wir mithilfe von 1.1.18 und [AN1] 12.5.1.5, daß es für den Abstand von Punkten aus dem Bild unseres Einheitsquadrats und Punkten außerhalb von U eine positive untere Schranke gibt. Da h nach [AN1] 12.5.1.15 gleichmäßig stetig ist, finden wir weiter ein $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ derart, daß bei Unterteilung des Einheitsquadrats in r^2 kleine Schachfelder der Kantenlänge $1/r$ die einzelnen Felder unter h jeweils ganz in einen offenen Ball in U abgebildet werden. Jetzt betrachten wir die Integrale längs der Geradensegmente zwischen den Bildern in U von benachbarten Ecken unserer Schachfelder

$$c_{i,j} = \int_{h(\frac{i}{r}, \frac{j}{r})}^{h(\frac{i+1}{r}, \frac{j}{r})} \omega \quad \text{und} \quad d_{i,j} = \int_{h(\frac{i}{r}, \frac{j}{r})}^{h(\frac{i}{r}, \frac{j+1}{r})} \omega$$

Indem wir unsere Erkenntnisse zur Existenz einer Stammfunktion Lemma 8.8.13 zusammen mit Proposition 8.6.2 auf unsere offenen Bälle in U anwenden, finden wir $c_{i,j} + d_{i+1,j} - d_{i,j} - c_{i,j+1} = 0$ und durch Aufsummieren

$$\sum_{0 \leq i < r} c_{i,0} + \sum_{0 \leq j < r} d_{r,j} - \sum_{0 \leq j < r} d_{0,j} - \sum_{0 \leq i < r} c_{i,r} = 0$$

Indem wir nochmals Lemma 8.8.13 auf unsere offenen Bälle anwenden sehen wir dann weiter, daß diese vier Summen jeweils den Wegintegralen von ω über

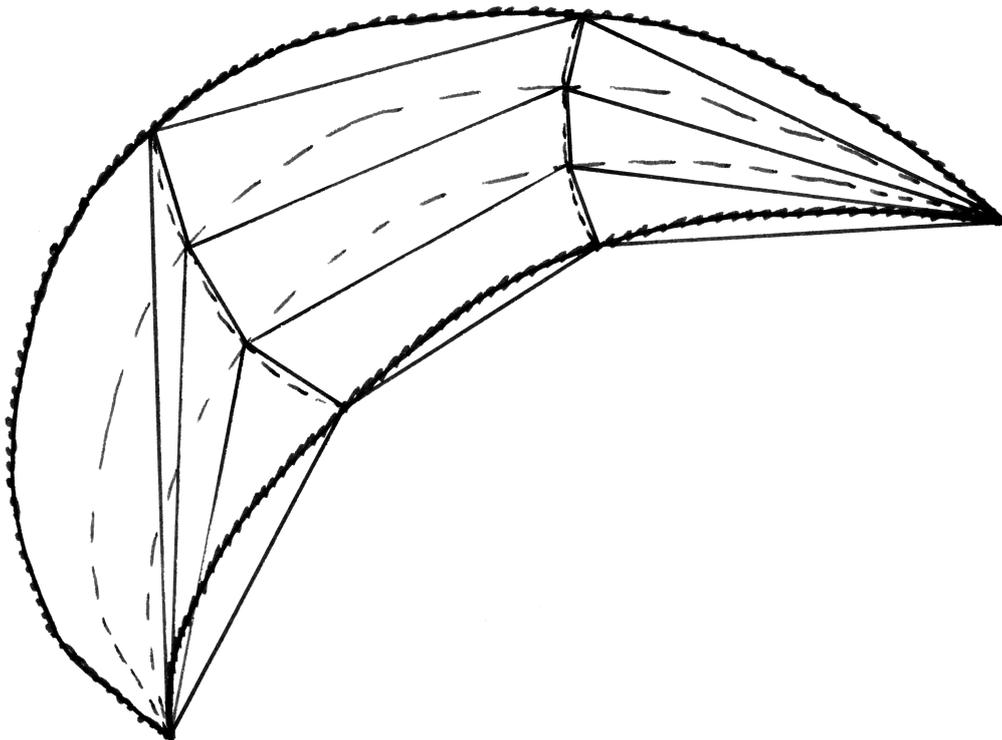


Illustration zum Beweis von Satz 8.8.8 über die Homotopieinvarianz von Wegintegralen bei gewissen Kovektorfeldern. Die beiden Wege werden durch dicke gezackte Linien dargestellt, die Homotopie zwischen ihnen durch feine gestrichelte Linien. Es gilt, diese Unterteilung so fein zu wählen, daß jeder dieser „Ziegel“ ganz in einem im Definitionsbereich unserer geschlossenen Differentialform enthaltenen Ball liegt.

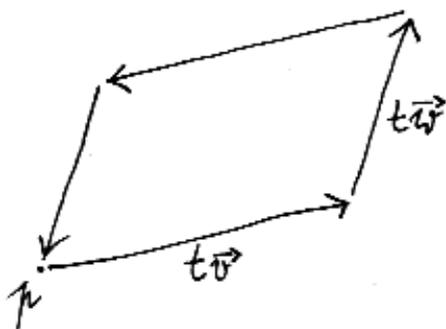
die durch die vier Kanten unseres Quadrats gegebenen Wege gleichen. Zwei von diesen Wegen sind eh konstant und die übrigen sind eben gerade die beiden homotopen Integrationswege, von denen wir ausgegangen waren. \square

Satz 8.8.17 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Ergänzung 8.8.18. Einen Überblick über die gängigsten alternativen Beweise mit ihren Stärken und Schwächen gebe ich in [LA1] 5.3.27. Einen recht elementaren analytischen Beweis hatten wir bereits in [AN1] 12.5.1.7 gesehen.

Beweis. Sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ unser Polynom. Wir argumentieren durch Widerspruch und betrachten für jeden Radius $r > 0$ den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = re^{it} = r \cos t + ir \sin t$, der einmal auf dem Kreis mit Radius r umläuft. Nach 8.7.4 ist er in \mathbb{C} zusammenziehbar. Hätte unser Polynom keine Nullstelle, so lieferte es eine stetige Abbildung $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, und nach 8.7.5 wären alle $P \circ \gamma_r$ zusammenziehbar in \mathbb{C}^\times . Für hinreichend großes r gilt nun jedoch $r^n > |a_{n-1}|r^{n-1} + \dots + |a_1|r + |a_0|$, und für solche r ist der Weg $P \circ \gamma_r$ in \mathbb{C}^\times homotop zum Weg $t \mapsto \gamma_r(t)^n$, da nämlich für kein t die Strecke von $P(\gamma_r(t))$ nach $\gamma_r(t)^n$ den Nullpunkt trifft. Hätte also P keine Nullstelle, so wäre der Weg $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $t \mapsto \gamma_r(t)^n$ zusammenziehbar in \mathbb{C}^\times . Das steht jedoch im Widerspruch zu Übung 8.8.20. \square

Übungen



Der Weg $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$ aus Übung 8.8.19. Mit $t \rightarrow 0$ wird er natürlich immer kleiner.

Übung 8.8.19. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $A \subseteq X$ eine offene Teilmenge, $p \in A$ ein Punkt und $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetig differenzierbares Kovektorfeld. So gilt in den Notationen der vorhergehenden Definition 8.8.1 für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$ die Identität

$$(d_p\omega)(\vec{v})(\vec{w}) - (d_p\omega)(\vec{w})(\vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_{\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})} \omega$$

mit der Notation $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$ für den Weg, der einmal das Parallelogramm mit einer Ecke p und Kantenvektoren $t\vec{v}$ und $t\vec{w}$ umläuft, oder genauer, der stückweise linear läuft erst von p nach $p+t\vec{v}$, dann weiter nach $p+t\vec{v}+t\vec{w}$, von da nach $p+t\vec{w}$, und dann wieder zurück nach p . Hinweis: Es mag die Rechnung vereinfachen, wenn man das fragliche Integral zu einer Funktion von zwei Veränderlichen s, t erweitert.

Übung 8.8.20. Man zeige, daß gegeben $n \in \mathbb{Z}$ der geschlossene Weg in der punktierten Ebene $\gamma_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\gamma(t) = (\cos nt, \sin nt)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nur für $n = 0$ zusammenziehbar ist. Hinweis: Man berechne das Integral des Winkelfeldes über diesen Weg und beachte 8.8.8. Ich empfinde es allerdings als Umweg, diese Aussage mithilfe von Wegintegralen nachzuweisen, und ziehe den topologischen Beweis über Liftungseigenschaften in [TF] 19.1.3 folgende vor.

Ergänzende Übung 8.8.21. Gegeben ein Rechteck $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ und darauf ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ stimmt das Integral seiner Wirbeldichte alias skalaren Rotation $\text{rot } v$ über das Rechteck Q überein mit seinem Wegintegral als Vektorfeld einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Rand des Rechtecks. In 9.7.26 werden wir diese Aussage als Spezialfall des allgemeinen Stokes'schen Satzes zu verstehen lernen.

9 Integralsatz von Stokes

In Abschnitt 5.5.1 haben wir unser Kurvenintegral aus [AN1] 12.7.1.23 verallgemeinert zum Integral einer Funktion über eine Fastfaltung in einem \mathbb{R}^n . In diesem Abschnitt werden wir unser Wegintegral aus 8.4, als da heißt das Integral eines Kovektorfelds auf einem endlichdimensionalen reellen Raum längs eines Weges, verallgemeinern zum Integral einer „Differentialform“ auf einem endlichdimensionalen reellen Raum über eine „orientierte“ Fastfaltung. Als Spezialfälle enthält diese Konstruktion insbesondere die Definition des „Flusses eines Vektorfelds in \mathbb{R}^3 durch eine orientierte Fläche in \mathbb{R}^3 “. Unser eigentliches Ziel ist dann der sogenannte „allgemeine Satz von Stokes“ 9.7.2, der den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung [AN1] 12.5.7.1 auf höhere Dimensionen verallgemeinert.

9.1 Alternierende Formen und Dachprodukt

Definition 9.1.1. Sei k ein Körper. Gegeben ein k -Vektorraum V und eine natürliche Zahl p bilden wir den Raum der **alternierenden p -Multilinearformen** oder kurz **p -Formen**

$$\text{Alt}^p V := \{\omega : V \times \dots \times V \rightarrow k \mid \omega \text{ ist multilinear und alternierend}\}$$

Hier meint alternierend wie in [LA1] 6.3.1, daß $\omega(v_1, \dots, v_p)$ verschwindet wann immer es $i \neq j$ gibt mit $v_i = v_j$.

9.1.2. Hat unser Körper nicht die Charakteristik 2, so mag man gleichbedeutend fordern, daß $\omega(v_1, \dots, v_p)$ sein Vorzeichen ändert, wenn man zwei Einträge v_i und v_j vertauscht. Daher kommt die Bezeichnung „alternierend“. Unter Nullformen verstehen wir Skalare, in Formeln setzen wir also $\text{Alt}^0 V = k$. Einsformen sind Elemente des Dualraums alias Linearformen, wir haben also $\text{Alt}^1 V = V^\top$. Gegeben Linearformen $f_1, \dots, f_p \in V^\top$ erklären wir $\text{alt}(f_1, \dots, f_p) \in \text{Alt}^p V$ durch die Vorschrift

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p)(v_1, \dots, v_p) := \det(f_i(v_j))$$

Wir nennen es bis auf weiteres das „Determinantenprodukt“ der f_i .

9.1.3. Wir werden unmittelbar im Anschluß das Dachprodukt von alternierenden Multilinearformen einführen und dessen Assoziativität beweisen ebenso wie die Formel $\text{alt}(f_1, \dots, f_p) = f_1 \wedge \dots \wedge f_p$. Sobald das geleistet ist, wird die Notation $\text{alt}(f_1, \dots, f_p)$ obsolet und statt „Determinantenprodukt“ dürfen und werden wir „iteriertes Dachprodukt“ sagen.

Vorschau 9.1.4 (Bezug zur äußeren Algebra). Im Rahmen unserer Diskussion des Tensorprodukts werden die Begriffsbildungen dieses Abschnitts auch noch unter einem anderen Gesichtspunkt besprochen. Genauer konstruieren wir in [LA2] 8.5.3 einen kanonischen Isomorphismus $\text{Alt}^p \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^p V)^\top$ zwischen dem hier definierten Raum der alternierenden Multilinearformen auf V und dem Dualraum der dort definierten p -ten äußeren Potenz $\bigwedge^p V$ von V . Zusätzlich erklären wir in [LA2] 8.5.6 für endlichdimensionales V kanonische Isomorphismen $(\bigwedge^p V)^\top \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p(V^\top)$ zwischen den Dualräumen der äußeren Potenzen und den äußeren Potenzen des Dualraums und erhalten so zusammen endlichdimensionales V einen kanonischen Isomorphismus $\text{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p(V^\top)$.

9.1.5. Sind Linearformen $f_1, \dots, f_n \in V^\top$ gegeben und ist $I \subset \{1, \dots, n\}$ eine Teilmenge mit p Elementen, so setzen wir

$$f_I := \text{alt}(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) \in \text{Alt}^p V$$

für das entsprechende Determinantenprodukt der Basisvektoren mit $i_1 < \dots < i_p$ den der Größe nach gereihten Elemente von I . Für $I = \emptyset$ vereinbaren wir $f_\emptyset = 1$.

Proposition 9.1.6 (Basis des Raums der p -Formen). *Ist V ein Vektorraum und f_1, \dots, f_n eine Basis seines Dualraums V^\top , so bilden die Determinantenprodukte f_I mit $|I| = p$ eine Basis von $\text{Alt}^p V$.*

9.1.7. Für ein n -dimensionalen Vektorraum V gilt also $\dim \text{Alt}^n V = 1$ und $\text{Alt}^p V = 0$ für $p > n$.

Beweis. Ist v_1, \dots, v_n die duale Basis von V und ist auch $J = \{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, n\}$ gegeben mit $j_1 < \dots < j_p$, so gilt offensichtlich

$$f_I(v_{j_1}, \dots, v_{j_p}) = \begin{cases} 1 & I = J; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das zeigt die lineare Unabhängigkeit der f_I . Andererseits ist klar, daß eine alternierende Multilinearform schon festgelegt wird durch ihre Werte auf den p -Tupeln $(v_{j_1}, \dots, v_{j_p})$ mit $j_1 < \dots < j_p$. Das zeigt, daß die f_I auch $\text{Alt}^p V$ erzeugen. \square

9.1.8. Im Vorgriff auf unsere zukünftige Notation $f_1 \wedge \dots \wedge f_p$ für $\text{alt}(f_1, \dots, f_p)$ ist im Fall eines Vektorraums V der Dimension $\dim V = 4$ also $\text{Alt}^2 V$ ein Vektorraum der Dimension $\dim(\text{Alt}^2 V) = 6$ und für $f_1, \dots, f_4 \in V^*$ eine Basis seines Dualraums ist $f_1 \wedge f_2, f_1 \wedge f_3, f_1 \wedge f_4, f_2 \wedge f_3, f_2 \wedge f_4, f_3 \wedge f_4$ eine Basis von $\text{Alt}^2 V$.

Proposition 9.1.9. Seien k ein Körper, V ein k -Vektorraum endlicher Dimension und $p, q \geq 0$. So gibt es genau eine bilineare Abbildung, das **Dachprodukt**

$$\begin{aligned} \text{Alt}^p V \times \text{Alt}^q V &\rightarrow \text{Alt}^{p+q} V \\ (\omega, \eta) &\mapsto \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

derart, daß für alle $f_1, \dots, f_{p+q} \in V^\top$ gilt

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p) \wedge \text{alt}(f_{p+1}, \dots, f_{p+q}) = \text{alt}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_{p+q})$$

9.1.10. Mit 9.1.6 folgt unmittelbar die **Assoziativität des Dachprodukts**

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$$

Damit brauchen wir auch bei längeren Dachprodukten keine Klammern zu setzen und unsere Notation „alt“ wird obsolet, denn offensichtlich folgt aus der Proposition auch

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p) = f_1 \wedge \dots \wedge f_p$$

Vorschau 9.1.11. Die vorhergehende Definition ist unnötig einschränkend. Man kann durchaus auch im unendlichdimensionalen Fall sinnvoll ein Dachprodukt von alternierenden Formen erklären, vergleiche [TSK] 21.2.3.12, aber die damit verbundenen Komplikationen möchte ich hier vermeiden.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus 9.1.6 und nur die Existenz ist noch zu zeigen. Wir betrachten dazu die Menge $\mathcal{S}_{p,q} \subset \mathcal{S}_{p+q}$ aller Permutationen, die die Reihenfolge der ersten p Einträge und die der letzten q Einträge unverändert lassen. Stellen wir uns unsere Permutationen als Mischvorschriften für ein Spiel von $p+q$ Karten vor, so heben wir also p Karten ab und schieben die beiden so gebildeten Stapel von p beziehungsweise q Karten irgendwie ineinander. Solche Permutationen heißen auch (p, q) -**Shuffles**, in Formeln haben wir

$$\mathcal{S}_{p,q} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q} \mid \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ und } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)\}$$

Weiter betrachten wir in \mathcal{S}_{p+q} die Untergruppe $\mathcal{S}_p \boxtimes \mathcal{S}_q$ aller Permutationen, die die ersten p Einträge unter sich vertauschen und die letzten q Einträge ebenso. Die Verknüpfung von Permutationen liefert dann offensichtlich eine Bijektion

$$\mathcal{S}_{p,q} \times (\mathcal{S}_p \boxtimes \mathcal{S}_q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{p+q}$$

Jetzt definieren wir für ω und η wie oben eine Multilinearform $\omega \wedge \eta$ durch die Vorschrift

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{p+q}) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p,q}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \eta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

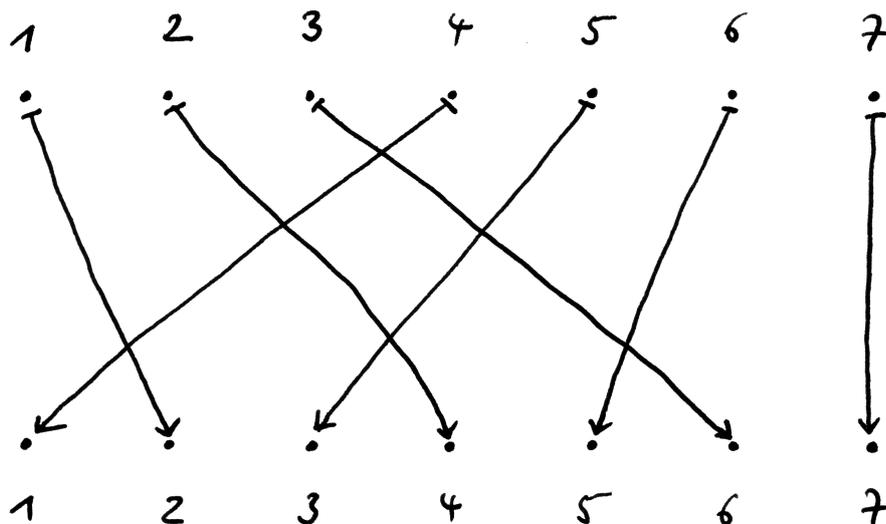
Betrachten wir nun unsere Definition des Determinantenprodukts, die wir nach der Leibnizformel schreiben können als

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_n)(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\tau) f_1(v_{\tau(1)}) \dots f_n(v_{\tau(n)})$$

Setzen das mit $n = p, q$ in unsere Definition von \wedge ein, so ergibt sich mithilfe der Bijektion $\mathcal{S}_{p,q} \times (\mathcal{S}_p \boxtimes \mathcal{S}_q) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{p+q}$ wie gewünscht

$$\text{alt}(f_1, \dots, f_p) \wedge \text{alt}(f_{p+1}, \dots, f_{p+q}) = \text{alt}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_{p+q})$$

Die Bilinearität von \wedge zeigt dann weiter, daß die Multilinearform $\omega \wedge \eta$ auch im allgemeinen alternierend ist, so daß unsere Formel für \wedge in der Tat eine Abbildung $\text{Alt}^p V \times \text{Alt}^q V \rightarrow \text{Alt}^{p+q} V$ mit den geforderten Eigenschaften liefert. \square



Ein (3, 4)-Shuffle

Lemma 9.1.12 (Graduierte Kommutativität des Dachprodukts). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für beliebige $\omega \in \text{Alt}^p V$ und $\eta \in \text{Alt}^q V$ gilt $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$. Bezeichnet $|\omega|$ den Grad von ω , also $|\omega| = p$ für $\omega \in \text{Alt}^p$, so können wir diese Regel auch schreiben in der Gestalt

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{|\omega||\eta|} \eta \wedge \omega$$

Beweis. Aus 9.1.9 folgt sofort $f_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge f_{\sigma(n)} = (\text{sgn } \sigma) f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ und alle $f_1, \dots, f_n \in V^\top$. Die Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}$, die die ersten p Einträge an den Schluß schiebt und die letzten q Einträge an den Anfang, hat aber nach [LA1] 6.1.3 das Signum $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{pq}$. Das Lemma folgt so zunächst für ω, η iterierte Dachprodukte und dann auch für allgemeine endlichdimensionale Räume. \square

9.1.13 (Funktorialität alternierender Multilinearformen). Zu jeder linearen Abbildung $L : V \rightarrow W$ bilden wir wie in [LA1] 2.9.13 ihre transponierte Abbildung $L^\top : W^\top \rightarrow V^\top$, $f \mapsto f \circ L$ und allgemeiner auch die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} L^\top : \text{Alt}^p W &\rightarrow \text{Alt}^p V \\ \omega &\mapsto \omega \circ (L \times \dots \times L) \end{aligned}$$

mit $L \times \dots \times L$ wie in [LA1] 1.3.5 alias $(L^\top \omega)(v_1, \dots, v_p) = \omega(Lv_1, \dots, Lv_p)$. Wir nennen auch sie **transponierte Abbildungen**. Aus den Definitionen folgen leicht die Formeln $\text{id}^\top = \text{id}$ und $(L \circ M)^\top = M^\top \circ L^\top$ für die transponierten Abbildungen sowie die Verträglichkeit mit dem Dachprodukt

$$L^\top(\omega \wedge \eta) = (L^\top \omega) \wedge (L^\top \eta)$$

Ergänzung 9.1.14. In der Sprache der Kategorientheorie [LA2] 9.2.1 ausgedrückt bilden demnach für jedes p die Zuordnungen $V \mapsto \text{Alt}^p V$, $L \mapsto L^\top$ einen kontravarianten Funktor Alt^p von der Kategorie der k -Vektorräume in sich selber, dessen Effekt auf Morphismen ich nur der Bequemlichkeit der Notation halber $L \mapsto L^\top$ statt $L \mapsto \text{Alt}^p(L)$ notiert habe, und $V \mapsto \text{Alt } V := \bigoplus_p \text{Alt}^p V$ ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der k -Vektorräume in die Kategorie der k -Ringalgebren.

Lemma 9.1.15 (Dachprodukt und Determinante). *Gegeben ein n -dimensionaler Vektorraum V und eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow V$ gilt*

$$L^\top = (\det L) : \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V$$

Beweis. Ist V ein n -dimensionaler Vektorraum, so ist $\text{Alt}^n V$ eindimensional. Für $L : V \rightarrow V$ linear muß also $L^\top : \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V$ die Multiplikation mit einem Skalar aus dem Grundkörper sein. Ist v_1, \dots, v_n eine Basis von V und f_1, \dots, f_n die duale Basis von V^\top , so ist $f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ eine Basis von $\text{Alt}^n V$ und das Lemma folgt mit expliziter Rechnung, für $(\det L)$ die Determinante der Matrix von L in der gewählten Basis. Daß die fragliche Determinante von der Wahl der Basis gar nicht abhängt und deshalb in der Tat $(\det L)$ notiert werden darf, erhält man als Konsequenz. \square

Ergänzung 9.1.16. Nehmen wir 9.1.13 und 9.1.15 zusammen, so ergibt sich unmittelbar die Multiplikationsformel für Determinanten [LA1] 6.4.1.

Ergänzung 9.1.17. Gegeben endlichdimensionale Vektorräume V, W und Formen $\omega \in \text{Alt}^p V$ und $\eta \in \text{Alt}^q W$ verwenden wir für die $(p+q)$ -Form $(\text{pr}_1^\top \omega) \wedge (\text{pr}_2^\top \eta)$ auf $V \times W$ die Notation $\omega \boxtimes \eta$. Manche Autoren verwenden allerdings auch \wedge für dieses „äußere Dachprodukt“.

Übungen

Übung 9.1.18. Für jeden Vektorraum V endlicher Dimension $\dim V = n$ liefert das Dachprodukt $V^\top \times \text{Alt}^{n-1} V \rightarrow \text{Alt}^n V$ eine nichtausgeartete Paarung im Sinne von [LA2] 4.3.35, als da heißt, jeder Isomorphismus $\text{Alt}^n V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ liefert mittels unserer Paarung einen Isomorphismus $\text{Alt}^{n-1} V \xrightarrow{\sim} V^{\top\top} \xrightarrow{\sim} V$.

9.2 Differentialformen höheren Grades

Definition 9.2.1. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein **Feld von p -Formen auf U** alias eine **p -Differentialform** ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \omega : U &\rightarrow \text{Alt}^p \vec{X} \\ x &\mapsto \omega_x \end{aligned}$$

Ausgeschrieben ordnet ω also jedem Punkt $x \in U$ eine alternierende p -Multilinearform $\omega_x : \vec{X} \times \dots \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ zu.

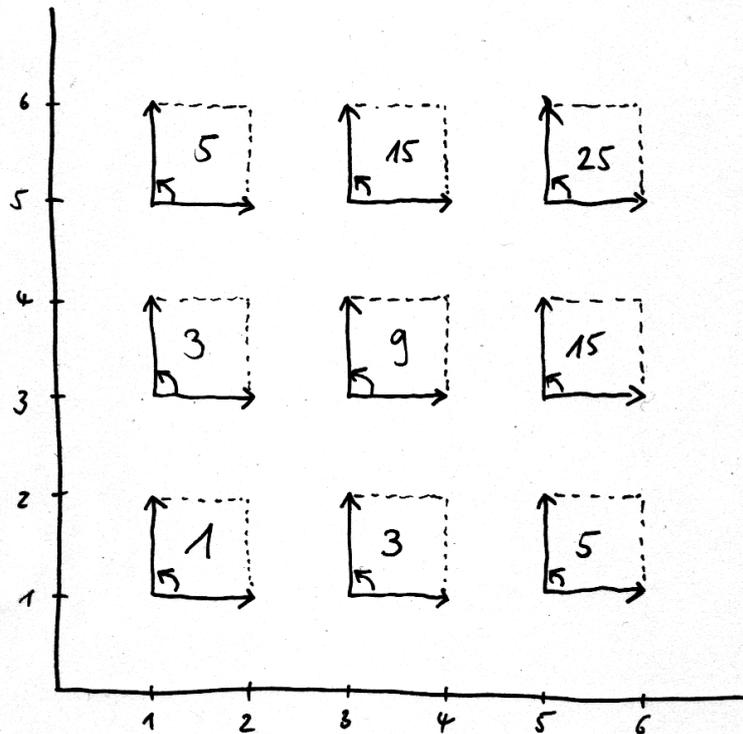
9.2.2 (Diskussion der Terminologie). In der Differentialgeometrie werden wir allgemein Differentialformen auf abstrakten Mannigfaltigkeiten erklärt als Zuordnungen, die jedem Punkt eine alternierende Multilinearform auf dem Tangentialraum am entsprechenden Punkt zuordnen. Im Fall einer eingebetteten Mannigfaltigkeit $U \subset X$ positiver Kodimension ist das natürlich etwas anderes, als jedem Punkt eine alternierende Multilinearform auf dem Richtungsraum des umgebenden affinen Raums zuzuordnen. Zur Unterscheidung mag man das hier eingeführte elementarere Konzept eine **relative Differentialform** nennen und den Begriff aus der Differentialgeometrie eine **absolute Differentialform**. Jede relative Differentialform liefert durch Einschränkung eine absolute Differentialform. Diese Feinheiten werden erst relevant, wenn es einmal um „de-Rham-Kohomologie“ und dergleichen geht. Manchmal redet man auch ganz knapp von einer **p -Form** und der Leser muß aus dem Kontext erschließen, ob eine p -Differentialform oder vielmehr ein Element von $\text{Alt}^p V$ gemeint ist. Reden wir etwa von einer **konstanten Form**, so ist stets ein konstantes Formenfeld gemeint.

Beispiel 9.2.3. Sei U eine Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums X . Eine 0-Form auf U ist eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Eine relative 1-Form auf U ist ein relatives Kovektorfeld im Sinne von 8.1.5.

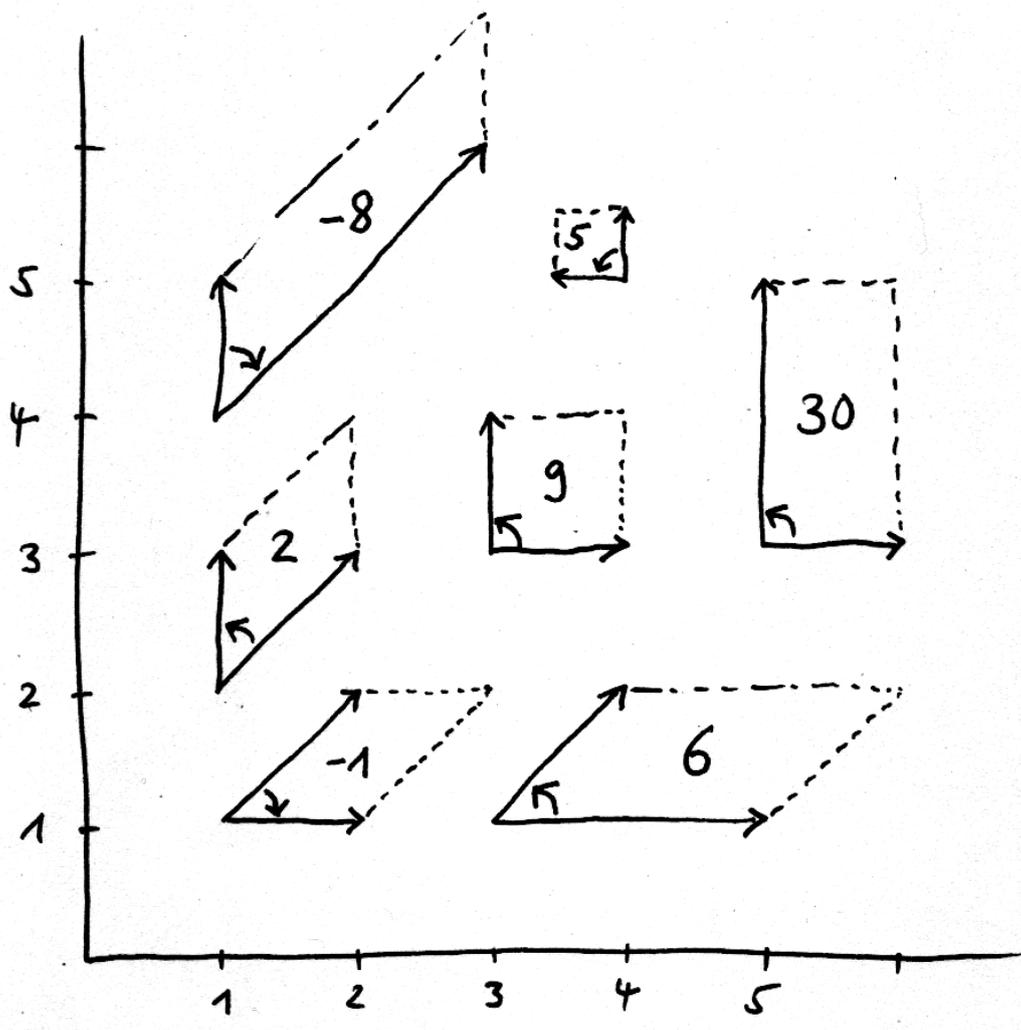
Beispiel 9.2.4 (Anschauung für Differentialformen). In einem dreidimensionalen orientierten reellen affinen Raum X , dessen Richtungsraum nicht notwendig mit einem Skalarprodukt versehen ist, bewege sich ein Gas. Wir halten ein kurzes Zeitintervall fest und ordnen jedem Tripel $(p, v, w) \in X \times \vec{X} \times \vec{X}$ bestehend aus einem Punkt und zwei Vektoren, aufgefaßt als „kleine orientierte Parallelogrammfläche“ alias „orientiertes Flächenelement“, die Zahl der Gasmoleküle zu, die in diesem Zeitintervall hindurchtritt, wobei wir je nach der Richtung, in der unsere Moleküle hindurchtreten, noch das Negative nehmen: Nämlich dann, wenn ein und jeder Richtungsvektor u in Richtung des Durchtritts zusammen mit v, w eine negativ orientierte angeordnete Basis (u, v, w) des Richtungsraums \vec{X} bildet. Diese Zuordnung wäre ein schmutziges Feld von 2-Formen. Man nennt es die **Flußdichte**. Ruht das Gas und ordnen wir jedem Quadrupel bestehend aus einem Punkt und drei Vektoren, aufgefaßt als „kleines orientiertes Parallelepiped“ alias „orientiertes Volumenelement“ die Zahl der darin befindlichen Gasmoleküle zu, gewichtet mit einem Vorzeichen, das von der Orientierung bestimmt wird, so erhalten wir ein schmutziges Feld von 3-Formen auf unserem affinen Raum. Man nennt es die **Dichte** unseres Gases. Wählen wir zusätzlich auf dem Richtungsraum unseres affinen Raums ein Skalarprodukt, so erhalten wir eine Identifikation von Vektorfeldern mit 2-Formen, indem wir jedem Vektor u die 2-Form $(v, w) \mapsto \text{vol}(u, v, w)$ zuordnen, mit $\text{vol}(u, v, w)$ dem „Volumen“ des Parallelepipeds mit Kanten u, v, w und einem Vorzeichen, das von der „Orientierung“ unseres Tripels abhängt. Ähnlich erhalten wir dann auch eine Identifikation von Funktionen mit 3-Formen. Die Möglichkeit dieser Identifikationen mag ein Grund dafür sein, daß Differentialformen der Intuition weniger gut zugänglich sind. Es fällt uns einfach nicht zu, einen dreidimensionalen Raum ohne Skalarprodukt zu visualisieren, geschweige denn Räume höherer Dimension: Das beste Beispiel für eine 2-Form wäre dann nämlich, nach Wahl der dazu nötigen physikalischen Einheiten, das elektromagnetische Feld auf der Raumzeit. Um auch in nichtorthogonalen und eventuell sogar krummlinigen Koordinatensystemen Dichten und Flußdichten anzugeben und mit ihnen zu rechnen, sind unsere Differentialformen jedoch in jedem Falle ein geschickter Formalismus.

Definition 9.2.5. Gegeben zwei Differentialformen ω und η erklären wir ihr **Dachprodukt** $\omega \wedge \eta$ als punktweises Dachprodukt im Sinne von 9.1.9, in Formeln $(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x$. Für f eine Funktion alias Nullform schreiben wir meist $f\eta$ statt $f \wedge \eta$. Dies Dachprodukt ist auch wieder assoziativ.

9.2.6. Ist speziell $X = \mathbb{R}^n$ und sind $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen, so



Versuch einer graphischen Darstellung der 2-Form auf der Papierebene, die in den durch die Koordinatenachsen gegebenen Koordinaten durch die Formel $xy \, dx \wedge dy$ dargestellt werden könnte. Eingezeichnet ist an jedem Punkt ein geordnetes Paar von Richtungsvektoren, gestrichelt ergänzt zu einem Parallelogramm, und hineingeschrieben der Wert unserer Zweiform auf diesem geordneten Paar. Die Anordnung wird hierbei durch einen kleinen Pfeil vom ersten zum zweiten Vektor angezeigt. Natürlich ist dies Vektorenpaar in keinsten Weise eindeutig, wir könnten dieselbe 2-Form auch ganz anders darstellen, die beteiligten Vektoren müssen dabei auch keineswegs parallel zu Koordinatenachsen sein.



Eine alternative Darstellung derselben Form $xy \, dx \wedge dy$

läßt sich für $U \subset X$ nach 9.1.6 jede relative p -Form ω auf U schreiben als

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} a_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $a_{i_1, \dots, i_p} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Das Dachprodukt zweier so in Koordinaten gegebenen Formen ergibt sich dann leicht mittels der Regeln $dx_i \wedge dx_i = 0$ und $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.

9.2.7. Die 2-Form $dx \wedge dy$ auf dem \mathbb{R}^3 kann man sich veranschaulichen als Vorschrift, die „jeder kleinen orientierten Parallelogrammfläche den Flächeninhalt ihrer orthogonalen Projektion auf die (x, y) -Ebene zuordnet, mit einem von der Orientierung abhängigen Vorzeichen“.

Definition 9.2.8. Gegeben endlichdimensionale reelle Räume X, Y und eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi : A \rightarrow B$ von einer halboffenen Teilmenge $A \subset X$ in eine Teilmenge $B \subset Y$ und eine Differentialform $\omega : B \rightarrow \text{Alt}^p \vec{Y}$ auf B erklären wir die **zurückgeholte Differentialform** $\phi^* \omega$ auf A durch die Vorschrift

$$(\phi^* \omega)_x := (d_x \phi)^\top (\omega_{\phi(x)})$$

Hier bezeichnet $(d_x \phi)^\top : \text{Alt}^p \vec{Y} \rightarrow \text{Alt}^p \vec{X}$ die vom Differential $d_x \phi : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ von ϕ an der Stelle $x \in A$ induzierte Abbildung. Alternativ könnten wir auch schreiben $(\phi^* \omega)_x(v_1, \dots, v_p) := \omega_{\phi(x)}((d_x \phi)(v_1), \dots, (d_x \phi)(v_p))$.

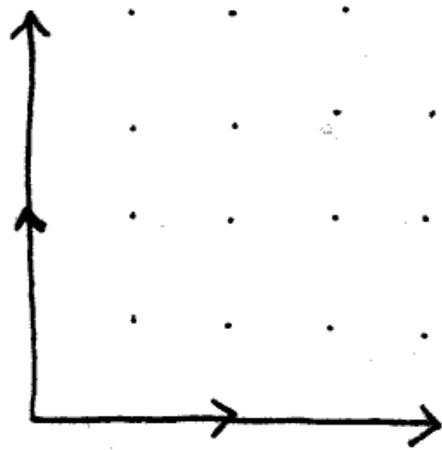
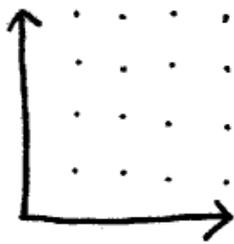
9.2.9. Dies Zurückholen ist bei der Begrifflichkeit der Differentialformen die eigentliche Hauptsache. Das Zurückholen von Funktionen alias Nullformen mit einer Abbildung ist schlicht das „Vorschalten“ von besagter Abbildung, in Formeln $\phi^*(g) = g \circ \phi$ für eine Funktion $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Das Zurückholen von 1-Formen haben wir bereits in 8.2.12 diskutiert. Wir verallgemeinern die dort eingeführte Terminologie auf den vorliegenden Fall und nennen Differentialformen η und ω **verwandt unter** ϕ und schreiben $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega$, wenn gilt $\eta = \phi^*(\omega)$.

9.2.10. Wir erinnern aus 8.2.14, daß das Differential Verwandtschaft respektiert, in Formeln

$$\phi(df) = d(f \circ \phi)$$

für $\phi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir werden demnächst auch für allgemeine Differentialformen ω ihre sogenannte „äußere Ableitung“ erklären und deren Verwandtschaftsverträglichkeit $\phi(d\omega) = d(\phi^* \omega)$ zeigen.

Beispiel 9.2.11. Unter der Abbildung $(2 \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ erhalten wir für das Zurückholen der Standard-Volumenform $(2 \cdot)^*(dx \wedge dy) = 4 dx \wedge dy$. In der Tat, denken wir uns schmutzig ein „ebenes Gas“ mit vielen einzelnen Molekülen und expandieren es mit einer Streckung um den Faktor Zwei, so verdünnt es sich um den Faktor Vier. Allgemeiner haben wir $(2 \cdot)^*(a(x, y) dx \wedge dy) = 4a(2x, 2y) dx \wedge dy$.



Versuch einer Veranschaulichung der Verwandtschaft (2.) : $4 dx \wedge dy \rightsquigarrow dx \wedge dy$.
 Man mag sich den Wert an einer Stelle (a, b) des Koeffizienten vor $dx \wedge dy$ als ein Maß für die „Zahl der Moleküle eines ebenen Gases im Quader $[a, a + 1] \times [b, b + 1]$ “ denken.

Lemma 9.2.12. Für das Zurückholen von Differentialformen gilt die Kettenregel, wir haben genauer und in Formeln ausgedrückt stets $\text{id}^* = \text{id}$ und

$$\psi^*(\phi^*\omega) = (\phi \circ \psi)^*(\omega)$$

Beweis. Das folgt mit der üblichen Kettenregel 2.4.2 sofort aus den Definitionen. Wir können die Aussage des Lemmas auch im Sinne von 8.2.18 dahingehend verstehen, daß Verwandtschaft transitiv ist. \square

Lemma 9.2.13. Verwandtschaft alias das Zurückholen ϕ^* von Differentialformen ist verträglich mit dem Dachprodukt, in Formeln gilt also

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta)$$

Beweis. Das folgt, indem wir die Regel $L^\top(\omega \wedge \eta) = (L^\top\omega) \wedge (L^\top\eta)$ aus 9.1.13 für lineare Abbildungen L punktweise anwenden. \square

Beispiel 9.2.14 (Zurückholen von 1-Formen). Wir erinnern 8.2.19. Für $X = \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten x_1, \dots, x_n und $Y = \mathbb{R}^m$ mit Koordinaten y_1, \dots, y_m und $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ eine differenzierbare Abbildung von einer halboffenen Teilmenge von \mathbb{R}^m in eine halboffene Teilmenge von \mathbb{R}^n ergibt sich $\phi^*(dx_i) = d(\phi^*x_i) = d\phi_i = \sum_j \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j$. Folglich kann das Zurückholen von 1-Formen in Koordinaten beschrieben werden durch die Formel

$$\phi^*\left(\sum_i a_i dx_i\right) = \sum_{i,j} (a_i \circ \phi) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j$$

Beispiel 9.2.15. Ist ϕ die Polarkoordinatenabbildung

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \vartheta) &\mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \end{aligned}$$

und haben wir auf \mathbb{R}^2 die 1-Form $y dx$ gegeben, so wird sie zurückgeholt zu

$$\begin{aligned} \phi^*(y dx) &= \phi^*(y)\phi^*(dx) \\ &= r \sin \vartheta d(r \cos \vartheta) \\ &= r \sin \vartheta \cos \vartheta dr - r^2 \sin^2 \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

und für die 2-Form $dx \wedge dy$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi^*(dx \wedge dy) &= \phi^*(dx) \wedge \phi^*(dy) \\ &= d(r \cos \vartheta) \wedge d(r \sin \vartheta) \\ &= (\cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta) \wedge (\sin \vartheta dr + r \cos \vartheta d\vartheta) \\ &= r dr \wedge d\vartheta \end{aligned}$$

Man mag sich letztere Formel dahingehend veranschaulichen, daß „ein kleines orientiertes Flächenelement in der xy -Ebene unter der Polarkoordinatenabbildung einem entsprechend größeren oder auch kleineren orientierten Flächenelement in der $r\vartheta$ -Ebene entspricht, je nachdem, in welchem Abstand vom Ursprung unser ursprüngliches Flächenelement liegt“.

Satz 9.2.16 (Funktionaldeterminante und Rückzug von Volumenformen). Für A halboffen in \mathbb{R}^n und $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar gilt stets

$$\phi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (\det d\phi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Beweis. Für jeden Endomorphismus L eines n -dimensionalen Vektorraums V ist die induzierte Abbildung $L^\top : \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V$ nach 9.1.15 gerade die Multiplikation mit $\det L$. □

9.3 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

9.3.1. Ich erinnere daran, daß nach [LA1] 6.5.2 eine **Orientierung** eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums V eine Vorschrift ε ist, die jeder angeordneten Basis B unseres Vektorraums ein Vorzeichen $\varepsilon(B) \in \{+1, -1\}$ zuordnet und zwar so, daß für je zwei angeordnete Basen B, B' die Determinante der Basiswechselmatrix das Vorzeichen $\varepsilon(B)\varepsilon(B')$ hat. In [LA1] 6.5.2 werden in diesem Zusammenhang noch weitere Begriffsbildungen formal eingeführt, deren Bedeutung hier nicht wiederholt werden soll und von denen ich hoffe, daß sie sich weitgehend von selbst verstehen.

9.3.2. Gegeben X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit und ein Punkt $p \in M$ erinnern wir aus 4.2.9 ihren Tangentialraum $T_p M \subset \vec{X}$. Gegeben (W, φ) eine Karte von M gilt für alle $w \in W$ nach Übung 4.4.18 die Identität

$$T_{\varphi(w)} M = \text{im}(d_w \varphi)$$

Definition 9.3.3. Eine **Orientierung einer k -Mannigfaltigkeit** M ist eine Vorschrift, die jedem Punkt $p \in M$ eine Orientierung des Tangentialraums $T_p M$ zuordnet derart, daß es um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte $\varphi : W \rightarrow M$ von M gibt mit der Eigenschaft, daß für $w \in W$ die Isomorphismen $d_w \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(w)} M$ entweder alle orientierungserhaltend oder alle orientierungsumkehrend sind.

Beispiel 9.3.4 (Orientierungen einer 0-Mannigfaltigkeit). Die Menge aller Orientierungen einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit M ist in Bijektion zur Menge aller Abbildungen $\varepsilon : M \rightarrow \{+1, -1\}$ mittels der Vorschrift, die jeder Orientierung und jedem Punkt $p \in M$ das Vorzeichen der angeordneten Basis \emptyset des Tangentialraums $T_p M$ in Bezug auf unsere Orientierung zuordnet.

9.3.5. Sei X ein endlichdimensionaler reeller Raum. Ein Punkt p einer k -Fastfaltung $M \subset X$ heiße **regulär**, wenn es eine offene Umgebung $U \ni X$ von p gibt derart, daß $U \cap M$ eine k -Mannigfaltigkeit ist. Die regulären Punkte einer k -Fastfaltung M bilden offensichtlich eine k -Mannigfaltigkeit. Wir notieren sie

$$M_{\text{reg}}$$

Definition 9.3.6. Unter einer **Orientierung einer Fastfaltung** verstehen wir eine Orientierung der Mannigfaltigkeit ihrer regulären Punkte. Unter einer **orientierten Fastfaltung** verstehen wir ein Paar bestehend aus einer Fastfaltung M und einer Orientierung von M .

9.3.7. Ich notiere orientierte Fastfaltigkeiten M oft mit einem Pfeil als

$$\vec{M}$$

Das ist aber nicht allgemein üblich. Eine Fastfaltung, die mindestens eine Orientierung zuläßt, heißt **orientierbar**. Das „Möbiusband“, das in der schmutzigen Wirklichkeit entsteht, wenn man einen Papierstreifen einmal verdrillt zu einem Ring verklebt, ist ein Beispiel für eine nicht orientierbare 2-Fastfaltung in \mathbb{R}^3 .

9.3.8 (**Inkonsistenzen der Notation**). Den Pfeil über einem Symbol benutze ich auch als Notation für den Richtungsraum eines affinen Raums. Was im Einzelfall gemeint ist, muß der Leser aus dem Kontext erschließen.

Definition 9.3.9. Wir sagen, eine Integrationskarte (Q, φ) einer orientierten Fastfaltung M **habe die Orientierung** ε für $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, wenn für jeden Punkt $w \in Q^\circ$ das Bild der Standardbasis mit ihrer Standardanordnung unter dem Isomorphismus $d_w \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(w)} M_{\text{reg}}$ die Orientierung ε hat.

9.3.10. Integrationskarten einer orientierten Fastfaltung, deren Definitionsbereich nicht zusammenhängend ist, haben im allgemeinen keine Orientierung. Eine Integrationskarte der Orientierung $+1$ nennen wir **orientierungsverträglich**.

Übungen

Übung 9.3.11. Jede orientierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit M besitzt genau zwei Orientierungen. Hinweis: Gegeben zwei Orientierungen ist die Menge aller Punkte p , an denen sie dieselbe Orientierung von $T_p M$ liefern, ebenso offen wie die Menge aller Punkte p , an denen sie verschiedene Orientierungen von $T_p M$ liefern. Nun verwende man 8.5.21.

9.4 Integration von Differentialformen

Definition 9.4.1. Gegeben eine Fastfaltung M in einem endlichdimensionalen reellen Raum X und $k \geq 0$ bezeichne $\mathcal{C}_1\Omega^k(M) = \mathcal{C}_1\Omega_{\subset X}^k(M)$ den reellen Vektorraum aller stetigen relativen k -Formen auf M mit kompaktem Träger.

Vorschau 9.4.2. Schon bei der folgenden Definition der Integration einer Differentialform über eine Mannigfaltigkeit kommt es eigentlich nur darauf an, welche Werte unsere Form an jeder Stelle auf Tupeln von Tangentialvektoren an unsere Mannigfaltigkeit am entsprechenden Punkt annimmt. In der Differentialgeometrie wird eine Differentialform auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit sogar definiert als eine Vorschrift, die jedem Punkt unserer Mannigfaltigkeit eine alternierende Multilinearform auf seinem Tangentialraum zuordnet. So weit will ich aber hier nicht gehen, da für diese Art von Formen schon die bloße Definition der Stetigkeit die Entwicklung zusätzlicher Begrifflichkeiten notwendig macht.

Satz 9.4.3 (Integration von Differentialformen). *Gegeben eine orientierte k -Fastfaltung M in einem endlichdimensionalen reellen Raum gibt es genau eine Linearform $\int : \mathcal{C}_1\Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß für jede Integrationskarte $\varphi : Q \rightarrow M$ der Orientierung ε und jede kompakt getragene k -Form ω mit Träger im Bild dieser Karte $\text{supp } \omega \subset \varphi(Q)$ gilt*

$$\int_{\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_Q (\varphi^* \omega)(e_1, \dots, e_k) d^k x$$

9.4.4. Für die Form $\varphi^* \omega = \eta = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ ist $(\varphi^* \omega)(e_1, \dots, e_k) = \eta(e_1, \dots, e_k)$ per definitionem genau die Funktion f . Das Integral auf der rechten Seite ist hier als Quaderintegral im Sinne von 3.1.4 zu verstehen, beziehungsweise als die Summe endlich vieler solcher Quaderintegrale, wenn der Definitionsbereich unserer Integrationskarte aus mehreren Quadern bestehen sollte. Ist unsere Fastfaltung M bereits selbst ein kompakter Quader mit nichtleerem Inneren $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k$ und $\eta = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ eine stetige Differentialform auf Q und geben wir Q die von der Standardorientierung des \mathbb{R}^k induzierte Orientierung, so können wir die Identität als Integrationskarte nehmen und unsere Definitionen liefern

$$\int_{\vec{Q}} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_Q f(x) d^k x = \int_{a_k}^{b_k} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

Gegeben $\varphi : Q \rightarrow M$ eine Integrationskarte der Orientierung ε einer orientierten Fastfaltung \vec{M} und eine stetige p -Form auf M mit Träger in $\varphi(Q)$ und \vec{Q} der Definitionsbereich unserer Integrationskarte mit seiner Standardorientierung gilt also insbesondere

$$\int_{\vec{M}} \omega = \varepsilon \int_{\vec{Q}} \varphi^* \omega$$

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Sei $\omega \in \mathcal{C}_1^k \Omega^k(M)$ gegeben. Wir finden eine endliche Überdeckung von $\text{supp } \omega$ durch die Inneren von Bildern von Integrationskarten $\text{Inn}_M(\varphi_i(Q_i))$ der Orientierungen ε_i und nach 5.2.14 eine an diese Überdeckung angepaßte Teilung der Eins, also stetige Funktionen $\alpha_i \in \mathcal{C}_1(M, \mathbb{R})$ mit Träger $\text{supp } \alpha_i \subset \varphi_i(Q_i)$ und $\sum_i \alpha_i(x) = 1$ für alle $x \in \text{supp } \omega$. Dann haben wir $\omega = \sum_i \alpha_i \omega$. Wenn also überhaupt eine lineare Abbildung mit den geforderten Eigenschaften existiert, so muß gelten

$$\int_{\vec{M}} \omega = \sum_i \int_{\vec{M}} \alpha_i \omega = \sum_i \varepsilon_i \int_{Q_i} (\varphi_i^*(\alpha_i \omega))(e_1, \dots, e_k) d^k x$$

Das ganze Problem ist zu zeigen, daß die rechte Seite nicht von den Integrationskarten und der Teilung der Eins abhängt. Das geht wie bei unserer Diskussion 5.5.10 der Integration von Funktionen mit kompaktem Träger über Fastfaltigkeiten 5.5.10 in \mathbb{R}^n . Genau wie dort zieht man sich darauf zurück, für je zwei Integrationskarten (Q, φ) und (P, ψ) der Orientierungen ε und η und für ω mit Träger $\text{supp } \omega \subset \varphi(Q) \cap \psi(P)$ die Gleichheit

$$\varepsilon \int_Q (\varphi^* \omega)(e_1, \dots, e_k) = \eta \int_P (\psi^* \omega)(e_1, \dots, e_k)$$

zu zeigen. Wie dort findet man Zerlegungen $Q = A \sqcup S \sqcup U$ und $P = B \sqcup T \sqcup V$ mit $A, U \Subset Q$ und $B, V \Subset P$ und Nullmengen S, T derart, daß unsere Gleichheit die Gleichheit von Integralen stetiger Funktionen $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ behauptet mit $g|_A = 0$ und $h|_B = 0$, für die es einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $\kappa : U \cap Q^\circ \xrightarrow{\sim} V \cap P^\circ$ gibt mit

$$\varepsilon g = \eta (h \circ \kappa) |\det d\kappa|$$

Die Herleitung dieser Formel besprechen wir gleich noch genauer. Von dort ausgehend kommt man dann genau wie in 5.5.10 zum Ziel, entweder ganz bequem mit Lebesgue'scher Integrationstheorie oder sozusagen zu Fuß mit etwas mehr Aufwand. Besprechen wir also den Kartenwechsel κ genauer. Per definitionem induzieren unsere Integrationskarten φ, ψ Bijektionen

$$U \cap Q^\circ \xrightarrow{\sim} \varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ) \xleftarrow{\sim} V \cap P^\circ$$

und beide sind Karten der Mannigfaltigkeit $\varphi(Q^\circ) \cap \psi(P^\circ)$. Der Kartenwechsel ist nach 4.4.13 ein Diffeomorphismus $\kappa := \psi^{-1} \circ \varphi$ mit $\psi \circ \kappa = \varphi$. Nach 9.2.12 folgt $\kappa^* \psi^* \omega = \varphi^* \omega$. Für $g := (\varphi^* \omega)(e_1, \dots, e_k)$ gilt per definitionem $\varphi^* \omega = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Für $h := (\psi^* \omega)(e_1, \dots, e_k)$ gilt ebenso $\psi^* \omega = h dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Mit der Formel 9.2.16 für den Rückzug von Volumenformen im letzten Schritt folgt

nun

$$\begin{aligned} g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k &= \kappa^*(h dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) \\ &= (h \circ \kappa) \kappa^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) \\ &= (h \circ \kappa) \det(d\kappa) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \end{aligned}$$

alias $g = (h \circ \kappa) \det(d\kappa)$. Die Verträglichkeiten der jeweiligen Orientierungen mit den Karten zeigen aber $\varepsilon \det d\kappa = \eta |\det d\kappa|$ und wir erhalten wie behauptet $\varepsilon g = \eta (h \circ \kappa) |\det d\kappa|$. \square

9.4.5 (Riemannsummen für Differentialformen). Um die Integration von Differentialformen anschaulich zu machen, erkläre ich ihre Interpretation durch Riemannsummen. Sei dazu $Q := [a, b] \times [c, d]$ ein kompaktes Rechteck und $\varphi : Q \rightarrow X$ eine Integrationskarte in einen endlichdimensionalen reellen Raum und $\omega : \varphi(Q) \rightarrow \text{Alt}^2(\vec{X})$ eine stetige 2-Form auf $\varphi(Q)$. Wir betrachten für $r \geq 1$ die äquidistanten Unterteilungen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ sowie $c = c_0 < c_1 < \dots < c_r = d$ der Kanten von Q und bezeichnen mit $q_{i,j} = (a_i, c_j)$ die Gitterpunkte im so gegebenen Raster auf Q . Bezeichne weiter $p_{i,j} = \varphi(q_{i,j})$ die Bilder dieser Gitterpunkte unter φ . Damit erklären wir die r -te **Riemannsumme** $S_\varphi^r(\omega)$ durch die Formel

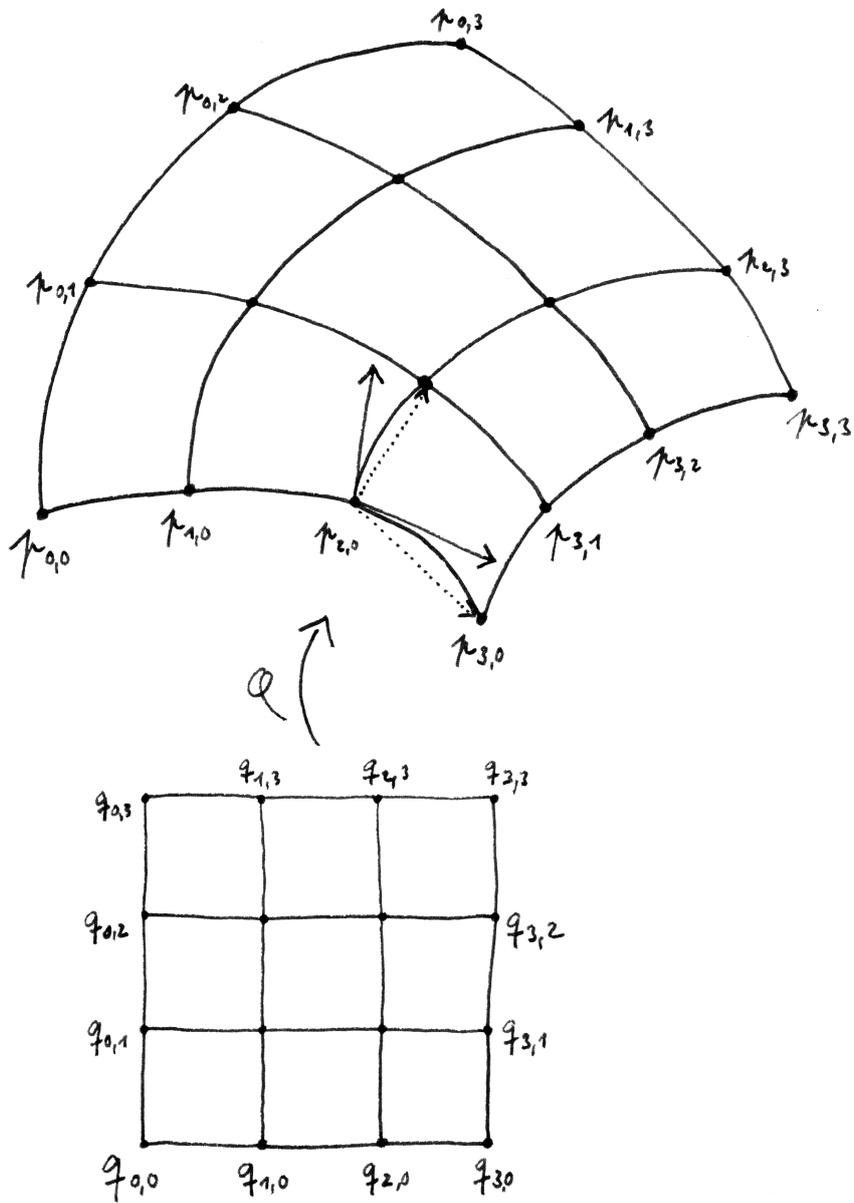
$$S_\varphi^r(\omega) = \sum_{i,j=0}^{r-1} \omega_{p_{i,j}}(p_{i+1,j} - p_{i,j}, p_{i,j+1} - p_{i,j})$$

Wir können nun das Integral von ω über $\varphi(Q)$ mit der Orientierung, für die φ eine orientierte Integrationskarte ist, anschaulich verstehen als den Grenzwert

$$\int_{\varphi(Q)} \omega = \lim_{r \rightarrow \infty} S_\varphi^r(\omega)$$

Den Beweis dieser Tatsache entlang der Grundlinie des Beweises von 5.3.7 überlassen wir dem Leser zur Übung.

9.4.6 (Sinnhaftigkeit der Integration alternierender Formen). Unter der Voraussetzung einer auf einem Quadrat definierten Integrationskarte, in Formeln $b - a = d - c$, betrachten wir nun die Spiegelung τ an der Hauptdiagonalen und die neue Integrationskarte $\varphi \circ \tau$. Sie ist negativ orientiert und ihre Riemannsummen sind dieselben wie die Riemannsummen von eben, wenn man nur in jedem Summanden den ersten und den zweiten Eintrag der bilinearen Abbildung ω vertauscht und das von der negativen Orientierung der Integrationskarte herrührende Vorzeichen berücksichtigt. Ist also ω alternierend, so liefert unsere neue Integrationskarte dieselben Riemannsummen und dasselbe Integral. Das soll die in unserem Satz enthaltene Aussage veranschaulichen, daß das Integral einer alternierenden Form unabhängig ist von den zur Berechnung gewählten Integrationskarten.



Die gepunkteten Pfeile stellen die Vektoren $p_{3,0} - p_{2,0}$ und $p_{2,1} - p_{2,0}$ dar, der Wert von $\omega_{p_{2,0}}$ auf diesem Paar von Vektoren, genommen in einer durch die Orientierung gegebenen Reihenfolge, geht in die Riemannsumme S_φ^3 ein.

Beispiel 9.4.7 (Integral über eine Hemisphäre). Wir berechnen das Integral der 2-Form $x^2 dx \wedge dy$ über die obere Hemisphäre $H := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ mit der Orientierung, für die die beiden ersten Vektoren e_1, e_2 der Standardbasis des \mathbb{R}^3 in dieser Reihenfolge eine orientierte Basis des Tangentialraums am Pol $T_{(0,0,1)}H$ bilden. Wir betrachten das Rechteck $R := [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2$ und die orientierte Integrationskarte $\phi : R \rightarrow H$ gegeben durch die Formeln $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos \vartheta, \cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta)$, anschaulich gesprochen eine „liegende Version“ unserer Kugelkoordinaten aus 4.2.3, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\bar{H}} x^2 dx \wedge dy &= \int_{\bar{R}} \cos^2 \vartheta d(\cos \vartheta) \wedge d(\cos \varphi \sin \vartheta) \\ &= \int_{\bar{R}} \cos^2 \vartheta (-\sin \vartheta d\vartheta) \wedge (\cos \varphi \cos \vartheta d\vartheta - \sin \varphi \sin \vartheta d\varphi) \\ &= \int_{\bar{R}} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta \wedge d\varphi \\ &= \int_R \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2(2\vartheta) d\vartheta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{2} - \frac{\cos 4\vartheta}{2} d\vartheta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Hier ist der erste Schritt 9.4.4 mitsamt dem Vertauschen vom Zurückholen mit Dachprodukt und Differential 8.2.14, der Zweite die Formel 8.1.13 für das Differential einer Funktion, der Dritte beruht auf dem Alternieren und der Bilinearität des Dachprodukts, und der Vierte auf 9.4.3.

9.4.8. Die Integrale von Differentialformen über orientierte Fastfaltigkeiten der Dimensionen 0 oder 1 sowie der Kodimensionen 0 oder 1 in einem \mathbb{R}^n trifft man oft in anderen Gestalten an, die den Formalismus der Differentialformen vermeiden. Besonders wichtig sind in diesem Zusammenhang die Fälle mit $n \leq 3$.

Beispiel 9.4.9 (Summation als Differentialformenintegral). Im Fall einer null-dimensionalen Fastfaltigkeit M alias diskreten Teilmenge ist eine Nullform eine Funktion und eine Nullform mit kompaktem Träger eine Funktion, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschiedene Werte annimmt. Unser Integral ist dann die Summe der Funktionswerte multipliziert mit den durch die auf M gewählte Orientierung ε bestimmten Vorzeichen ε_p , in Formeln

$$\int_{\bar{M}} f = \sum_{p \in M} \varepsilon_p f(p)$$

Beispiel 9.4.10 (Funktionenintegral als Differentialformenintegral). Für eine stetige n -Form $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ mit kompaktem Träger auf einer n -Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit der von der Standardorientierung des \mathbb{R}^n induzierten Orientierung liefern unsere Definitionen

$$\int_{\bar{M}} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_M f(x) d^k x$$

Das Integral der Funktion f rechts ist dabei im Sinne von 5.5.10 oder für hinreichend vorgebildete Leser auch als das Lebesgue-Integral der integrierbaren Funktion f über die meßbare Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ zu verstehen. Ein typisches Beispiel für eine 3-Fastfaltung in \mathbb{R}^3 wäre etwa eine massive Halbkugel $M \subset \mathbb{R}^3$.

Beispiel 9.4.11 (Wegintegral als Differentialformenintegral). Gegeben eine orientierte 1-Fastfaltung M und eine surjektive orientierungsverträgliche Integrationskarte $\varphi : [a, b] \rightarrow M$ fällt das Integral einer 1-Form ω über M zusammen mit dem Wegintegral der 1-Form ω über den Weg φ , denn beide fallen zusammen mit dem Integral der zurückgeholtten 1-Form $\varphi^*\omega$ über die in der offensichtlichen Weise orientierte Fastfaltung $[a, b]$, in Formeln

$$\int_{\vec{M}} \omega = \int_a^b \varphi^* \omega = \int_{\varphi} \omega$$

Ist speziell unsere Fastfaltung in den \mathbb{R}^n eingebettet, so hat unsere 1-Form ω die Gestalt $\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$ und unser Wegintegral wird von Anwendern meist geschrieben als das Wegintegral des Vektorfelds $v = \text{can}_s^{-1}(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_n)^\top$ längs φ , in Formeln

$$\int_{\vec{M}} \omega = \int_{\varphi} \omega = \int_a^b \langle v, d\varphi \rangle = \int_a^b v \cdot d\varphi$$

Vorschau 9.4.12. Die Interpretation der Integration von Differentialformen über orientierte Hyperflächen in \mathbb{R}^{n+1} als „Fluß“ benötigt von den hier explizit behandelten Fällen den größten begrifflichen Aufwand und wird uns bis zum Ende dieses Abschnitts beschäftigen.

Definition 9.4.13. Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, so gibt es zu jedem Punkt $p \in M$ genau zwei Vektoren der Länge Eins in \mathbb{R}^{n+1} , die auf dem Tangentialraum $T_p M$ senkrecht stehen. Ist M darüber hinaus orientiert, so hat genau ein Vektor N_p von diesen beiden die Eigenschaft, daß für jede angeordnete Basis (v_1, \dots, v_n) von $T_p M$ der Orientierung ε die Standardorientierung der angeordneten Basis (N_p, v_1, \dots, v_n) des \mathbb{R}^{n+1} auch ε ist. Wir erhalten so eine stetige Abbildung, das **orientierte Normalenfeld**

$$\begin{aligned} N : M &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ p &\mapsto N_p \end{aligned}$$

9.4.14. Wir indizieren nun die Koordinaten auf dem \mathbb{R}^{n+1} etwas unüblich als x_0, x_1, \dots, x_n und ordnen jedem Vektor $F \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine alternierende Multilinearform $\omega_F \in \text{Alt}^n(\mathbb{R}^{n+1})$ zu durch die Vorschrift

$$\omega_F(v_1, \dots, v_n) := \det(F|v_1| \dots |v_n)$$

Rechts ist hier die Matrix mit den entsprechenden Spaltenvektoren zu verstehen. In derselben Weise ordnen wir auch jedem Vektorfeld F auf \mathbb{R}^{n+1} eine n -Form ω_F zu und erkennen durch das Auswerten auf Tupeln der Standardbasis, daß sie geschrieben werden kann in der Gestalt

$$\omega_F = \sum_{i=0}^n (-1)^i F_i \, dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Wir nennen ω_F die **zu unserem Vektorfeld gehörige n -Form**. Im \mathbb{R}^3 entspricht speziell einem Vektorfeld $F = (F_x, F_y, F_z)$ die 2-Form

$$\omega_F = F_x \, dy \wedge dz + F_y \, dz \wedge dx + F_z \, dx \wedge dy$$

Die unteren Indizes dürfen dabei nicht als partielle Ableitungen mißverstanden werden, sondern meinen vielmehr die Komponenten unseres Vektorfelds, die wir auch F_1, F_2, F_3 oder in unserer aktuellen Indizierung F_0, F_1, F_2 hätten notieren können. Im \mathbb{R}^2 hatten wir ω_F bereits in 8.4.14 kennengelernt.

Proposition 9.4.15 (Fluß als Differentialformenintegral). *Seien $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine orientierte Hyperfläche, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein stetiges relatives Vektorfeld auf M mit kompaktem Träger und N das orientierte Normalenfeld auf M . So gilt für die zu unserem Vektorfeld F gehörige n -Form ω_F die Identität*

$$\int_{\vec{M}} \omega_F = \int_M \langle F, N \rangle = \int_M F \cdot N$$

9.4.16. Die Mitte und die rechte Seite unterscheiden sich hier nur in der Notation für das Skalarprodukt und sind als Flächenintegrale im Sinne von 5.3.1 zu verstehen. Die rechte Seite heißt der **Fluß des Vektorfelds F durch die orientierte Hyperfläche M** . Dies Oberflächenintegral mag der Anschauung besser zugänglich sein als unser Integral über eine Differentialform. Für das explizite Rechnen ist die Darstellung als Integral einer Differentialform im allgemeinen günstiger.

Beispiel 9.4.17 (Integration einer Flußdichte). Ist X ein dreidimensionaler orientierter reeller affiner Raum und $M \subset X$ eine zweidimensionale orientierte Mannigfaltigkeit alias Fläche und ω die 2-Form der Flußdichte eines bewegten Gases wie in 9.2.4, so beschreibt das Integral von ω über M die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall in einer durch die Orientierung bestimmten Richtung durch unsere Fläche M hindurchtritt. Gas, das in der Gegenrichtung durch unsere Fläche tritt, schlägt dabei negativ zu Buche.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es Karte $\varphi : W \rightarrow M$ der Orientierung ε gibt mit $(\text{supp } F) \cap M \subset \varphi(W)$. Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir unser Vektorfeld F in der Form $p \mapsto F_p$, wobei

der Index unglücklicherweise eine völlig andere Bedeutung hat als in 9.4.14. Wir zerlegen nun unser Vektorfeld F an jedem Punkt $p \in M$ in einen orthogonalen und einen tangentialen Anteil als $F_p = \langle F_p, N_p \rangle N_p + R_p$ mit $R_p \in T_p M$ und finden für alle $x \in W$

$$\begin{aligned} (\varphi^* \omega)_x(e_1, \dots, e_n) &= \omega_{\varphi(x)}(d_x \varphi(e_1), \dots, d_x \varphi(e_n)) \\ &= \det(F_{\varphi(x)} | [d_x \varphi]) \\ &= \langle F_{\varphi(x)}, N_{\varphi(x)} \rangle \det(N_{\varphi(x)} | [d_x \varphi]) \\ &= \langle F_{\varphi(x)}, N_{\varphi(x)} \rangle \operatorname{vol}(d_x \varphi) \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile ist die quadratische Matrix gemeint, die aus der Jacobi-Matrix $[d_x \varphi]$ entsteht durch Anfügen des Vektors $F_{\varphi(x)}$ als erste Spalte. Für die dritte Gleichheit verwenden wir unsere Zerlegung $F_p = \langle F_p, N_p \rangle N_p + R_p$ mit $R_p \in T_p M = \operatorname{im}(d_x \varphi)$ und daß eine quadratische Matrix mit linear abhängigen Spalten die Determinante Null hat. Für die vierte Gleichheit verwenden wir unsere erste Formel aus 5.3.5 für Gram'sche Determinanten. Die Gleichheit der beiden Integrale folgt nun aus den Definitionen. \square

9.4.18 (Flüsse durch Fastfaltigkeiten). Im Fall einer orientierten n -Fastfaltigkeit im \mathbb{R}^{n+1} wie etwa die Oberfläche eines Würfels in \mathbb{R}^3 ist der orientierte Normalenvektor nicht mehr in allen Punkten sinnvoll definiert, aber das Differentialformenintegral ist immer noch sinnvoll erklärt.

Beispiel 9.4.19 (Fluß durch eine Hemisphäre). Anschaulich kann man unser Integral aus 9.4.7 also auch als den Fluß durch die obere Hemisphäre des senkrechten Vektorfelds $x^2 e_3$ verstehen. In der Notation von dort hätten wir etwa

$$\int_{\bar{H}} x^2 dx \wedge dy = \int_H x^2 e_3 \cdot N$$

Hier meint N das „nach außen weisende Normalenfeld“, das in unserem Fall auch das „orientierte Normalenfeld“ nach 9.4.13 ist. Zur Probe rechne ich hier die rechte Seite auch noch direkt aus. Auf der Einheitssphäre stimmen ja der Ortsvektor und der nach außen weisende Normalenvektor überein, so daß der Rückzug der Funktion $x^2 e_3 \cdot N$ bezüglich unserer Karte $\phi : R \rightarrow H$ die Funktion $\cos^2 \vartheta \sin \varphi \sin \vartheta$ ist. Um das Flächenintegral rechts zu bestimmen, gilt es die Gram'sche Matrix zu berechnen. In unserem Fall haben wir

$$d\phi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi \cos \vartheta & -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

und die Matrix der Skalarprodukte der Spaltenvektoren ergibt sich zu

$$(d\phi)^\top d\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

und die Wurzel aus deren Determinante zu $\sin \vartheta$, so daß wir bei demselben Doppelintegral über $\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi$ landen wie in 9.4.7.

Übungen

Übung 9.4.20. Berechnen Sie das Integral der 2-Form $xdy \wedge dz + ydx \wedge dz$ über den Zylinder $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$ mit einer Orientierung ihrer Wahl.

Übung 9.4.21. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfelds $F : (x, y, z) \mapsto (x, 0, 0)$ durch die Einheitskugel, die Sie dazu mit einer Orientierung ihrer Wahl versehen mögen.

Übung 9.4.22 (Verwandtschaftsverträglichkeit des Integrals). Seien zwei Tripel $M \subset A \subset X$ und $N \subset B \subset Y$ gegeben bestehend aus endlichdimensionalen reellen Räumen X, Y und halboffenen Teilmengen A, B und in diesen halboffenen Teilmengen enthaltenen k -Fastfaltungen M, N . Sei $\phi : A \rightarrow B$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung, die einen Homöomorphismus $M \xrightarrow{\sim} N$ induziert sowie Isomorphismen $T_p M \xrightarrow{\sim} T_{\phi(p)} N$. Seien M und N darunter mit verträglichen Orientierungen versehen. So gilt für jede stetige k -Form ω auf B , deren Träger N in einem Kompaktum trifft, die Identität

$$\int_{\vec{M}} \phi^* \omega = \int_{\vec{N}} \omega$$

Übung 9.4.23 (Fluß durch einen ebenen Weg und Wegintegral). Berechnen Sie den Fluß des radialen Vektorfelds $v : (x, y) \mapsto (x, y)$ durch den im Gegenuhrzeigersinn orientierten Einheitskreis und ebenso das Wegintegral desselben Vektorfelds längs derselben orientierten 1-Mannigfaltigkeit. Was sind die zugehörigen Integrale von Differentialformen?

Ergänzende Übung 9.4.24 (Integral eines äußeren Produkts). Seien $M \subset X$ und $N \subset Y$ jeweils eine Fastfaltung in einem endlichdimensionalen reellen Raum. So gilt $(M \times N)_{\text{reg}} = M_{\text{reg}} \times N_{\text{reg}}$ und gegeben je eine Orientierung von M und von N erhalten wir die **Produktorientierung** auf $M \times N$ durch die Vorschrift, daß wir gegeben reguläre Punkte $p \in M$ und $q \in N$ jeweils diejenige Orientierung auf $T_{(p,q)}(M \times N)_{\text{reg}}$ auszeichnen, die unter dem Isomorphismus $T_{(p,q)}(M \times N)_{\text{reg}} \xrightarrow{\sim} T_p M_{\text{reg}} \times T_q N_{\text{reg}}$ aus 4.2.25 der Produktorientierung nach [LA1] 6.5.17 entsprechen. Sind ω und η jeweils stetige Differentialformen mit kompaktem Träger auf M und N vom Grad der Dimension, so gilt für die Integrale in Bezug auf die jeweiligen Orientierungen

$$\int_{M \times N} \omega \boxtimes \eta = \left(\int_M \omega \right) \left(\int_N \eta \right)$$

9.5 Äußere Ableitung von Differentialformen

9.5.1. Gegeben ein Vektorraum V definieren wir für alle $k \geq 0$ eine lineare Abbildung $\text{alt} : \text{Hom}(V, \text{Alt}^k V) \rightarrow \text{Alt}^{k+1} V$ durch die Vorschrift

$$(\text{alt } f)(v_0, v_1, \dots, v_k) := \sum_{i=0}^k (-1)^i f(v_i)(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k)$$

Hier soll die „Tarnkappe“ über v_i wie üblich bedeuten, daß dieser Eintrag beim entsprechenden Summanden auszulassen ist. Wir nennen unsere Abbildung den **Alternator**.

Beispiel 9.5.2. Gegeben ein Vektorraum V und $\lambda \in V^*$ und $\omega \in \text{Alt}^k V$ bezeichne $\lambda \otimes \omega$ die Abbildung $V \rightarrow \text{Alt}^k V$ gegeben durch $v \mapsto \lambda(v)\omega$. So finden wir

$$\text{alt}(\lambda \otimes \omega) = \lambda \wedge \omega$$

In der Tat besteht die Menge $\mathcal{S}_{1,k}$ der Shuffles, die bei der Definition des Dachprodukts auf der rechten Seite vorkommen, genau aus denjenigen Permutationen, die „das erste Element und irgendwo dazwischenschieben“.

9.5.3. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ halboffen. Eine Differentialform $\omega : A \rightarrow \text{Alt}^k \vec{X}$ heißt **differenzierbar**, wenn sie als Abbildung von der halboffenen Teilmenge A des endlichdimensionalen reellen Raums X in den endlichdimensionalen reellen Vektorraum $\text{Alt}^k \vec{X}$ differenzierbar ist im Sinne von 2.3.1. Sie heißt **stetig differenzierbar**, wenn sie stetig differenzierbar ist im Sinne von 2.6.10, wenn also ihr Differential auch stetig ist als Abbildung $A \rightarrow \text{Hom}(\vec{X}, \text{Alt}^k \vec{X})$ gegeben durch $x \mapsto d_x \omega$.

Definition 9.5.4. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ halboffen. Gegeben eine differenzierbare k -Form $\omega : A \rightarrow \text{Alt}^k \vec{X}$ erklären wir eine $(k+1)$ -Form

$$d\omega : A \rightarrow \text{Alt}^{k+1} \vec{X}$$

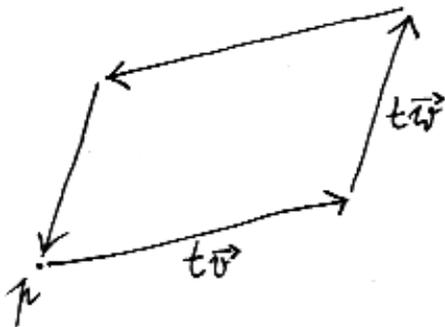
durch die Vorschrift $(d\omega)_x := \text{alt}(d_x \omega)$ für $d_x \omega : \vec{X} \rightarrow \text{Alt}^k \vec{X}$ das Differential im Sinne von 2.3.1 unserer Form $\omega : A \rightarrow \text{Alt}^k \vec{X}$ an einer Stelle $x \in A$. Wir nennen $d\omega$ die **äußere Ableitung von ω** . Den Unterschied zwischen Differential $d\omega$ und äußerer Ableitung $d\omega$ bringen wir nur durch die Wahl der Schriftart zum Ausdruck.

Beispiel 9.5.5. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $A \subset X$ halboffen. Gegeben eine differenzierbare Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ und $\omega_0 \in \text{Alt}^k \vec{X}$ finden wir $d_x(f\omega_0) = (d_x f) \otimes \omega_0$ für alle $x \in A$ und nach 9.5.2 folglich

$$d(f\omega_0) = df \wedge \omega_0$$

Insbesondere haben wir etwa $d(x^2 y dy \wedge dz) = 2xy dx \wedge dy \wedge dz$.

9.5.6. Eine stetig differenzierbare Differentialform, deren äußere Ableitung verschwindet, heißt **geschlossen**. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum ist ein stetig differenzierbares Kovektorfeld $\omega : X \ni U \rightarrow \vec{X}^*$ geschlossen im hier erklärten Sinne genau dann, wenn ω geschlossen ist im Sinne von 8.8.1, wenn also nach 8.8.8 das Wegintegral von ω über jeden geschlossenen in U zusammenziehbaren Integrationsweg verschwindet.



Der Weg $\gamma(p, t\vec{v}, t\vec{w})$ aus Übung 8.8.19. Mit $t \rightarrow 0$ wird er natürlich immer kleiner.

9.5.7 (**Anschauung für die äußere Ableitung**). Um uns die äußere Ableitung $d\omega$ zu veranschaulichen, erinnern wir zunächst an den Fall einer Nullform alias Funktion, die wir dann statt ω lieber f nennen. Deren äußere Ableitung $(df)_x$ ist schlicht das Differential $d_x f$ bei x und kann dadurch beschrieben werden, daß es jedem Richtungsvektor $\vec{v} \in \vec{X}$ die Zahl

$$(df)_x(\vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + t\vec{v}) - f(x))$$

zuordnet. Im Fall einer Einsform alias eines Kovektorfelds ω kann seine äußere Ableitung $(d\omega)_x$ bei x analog dadurch beschrieben werden, daß sie jedem geordneten Paar von Richtungsvektoren $(\vec{v}, \vec{w}) \in \vec{X}^2$ die Zahl

$$(d\omega)_x(\vec{v}, \vec{w}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_{\gamma(x, t\vec{v}, t\vec{w})} \omega$$

zuordnet mit der Notation $\gamma(x, t\vec{v}, t\vec{w})$ für den Weg, der einmal das Parallelogramm mit einer Ecke x und Kantenvektoren $t\vec{v}$ und $t\vec{w}$ umläuft, und zwar stückweise linear erst von x nach $x + t\vec{v}$, dann weiter nach $x + t\vec{v} + t\vec{w}$, von da nach $x + t\vec{w}$, und dann wieder zurück nach x . Möglicherweise haben Sie das bereits als Übung 8.8.19 gezeigt. Im allgemeinen Fall einer k -Form ω schließlich haben wir

$$(d\omega)_x(\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{k+1}} \int_{F(x, t\vec{v}_0, \dots, t\vec{v}_k)} \omega$$

mit F zumindest für $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k$ linear unabhängig der in geeigneter Weise orientierte Oberfläche eines Parallelepipeds mit Ecke x und Kantenvektoren $t\vec{v}_i$, über die wir dann unsere k -Form integrieren. Das wird recht direkt aus dem Satz von Stokes mit Ecken 9.7.19 folgen, wie sie als Übung 9.7.30 werden ausarbeiten dürfen.

9.5.8. Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ **glatt** oder **beliebig differenzierbar** oder auch eine \mathcal{C}^∞ -**Abbildung**, wenn zu allen Komponenten f_μ von f für $1 \leq \mu \leq m$ alle gemischten höheren partiellen Ableitungen, in der Multiindexschreibweise aus 3.2.3 also alle $\partial^\alpha f_\mu$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{N}^n$, auf ganz U existieren. Existieren sie bis zum Totalgrad $|\alpha| \leq k$ und sind stetig, so spricht man von einer \mathcal{C}^k -**Abbildung**. Das \mathcal{C} steht hier wie bisher für „continuous“ alias stetig.

9.5.9 (**Räume multilinearer Abbildungen**). Gegeben Vektorräume V, W und $k \geq 0$ bilden wir den Vektorraum

$$\text{Mult}^k(V, W)$$

aller multilinearen Abbildungen des Produkts von k Kopien von V nach W . Im Fall $k = 0$ verstehen wir $\text{Mult}^0(V, W) = W$. Man bemerke die Isomorphismen $\text{mult} : \text{Hom}(V, \text{Mult}^k(V, W)) \xrightarrow{\sim} \text{Mult}^{k+1}(V, W)$ gegeben durch

$$\text{mult}(f)(v_0, v_1, \dots, v_k) := (f(v_0))(v_1, \dots, v_k)$$

9.5.10 (**Höhere Ableitungen ohne Koordinaten**). Gegeben X, Y endlichdimensionale reelle Räume und $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge und $f : A \rightarrow Y$ eine Abbildung setzen wir $d^{(0)}f := f$ und $d^{(1)}f := df : x \mapsto d_x f$ und erklären induktiv für $k \geq 2$ die k -**te Ableitung**

$$d^{(k)}f : A \rightarrow \text{Mult}^k(\vec{X}, \vec{Y})$$

durch $x \mapsto d_x^{(k)}f := \text{mult}(d_x(d^{(k-1)}f))$, falls die $(k-1)$ -te Ableitung existiert und differenzierbar ist auf A . Existieren alle Ableitungen von f bis zur Ordnung k und sind stetig, so nennen wir f **von der Klasse \mathcal{C}^k** oder auch eine \mathcal{C}^k -**Abbildung**. Zum Beispiel bedeutet \mathcal{C}^1 stetig differenzierbar und \mathcal{C}^0 stetig. Ist f von der Klasse \mathcal{C}^k für alle k , so heißt die Abbildung f **glatt** oder **beliebig differenzierbar** oder **von der Klasse \mathcal{C}^∞** oder eine \mathcal{C}^∞ -**Abbildung**. Im Fall $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$ erhalten wir den in 9.5.8 besprochenen Begriff einer \mathcal{C}^k -Abbildung zurück. Der Leser mag zur Übung zeigen, daß jede Verknüpfung von \mathcal{C}^k -Abbildungen wieder eine \mathcal{C}^k -Abbildung ist.

Satz 9.5.11 (Rechnen mit der äußeren Ableitung). Sei $A \subset X$ eine halboffene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Raums.

1. Die Zuordnung $\omega \mapsto d\omega$ vom Vektorraum der differenzierbaren k -Formen auf A zum Vektorraum der $(k + 1)$ -Formen auf A ist linear;
2. Für differenzierbare Nullformen alias Funktionen f gilt $df = d f$;
3. Das Dachprodukt differenzierbarer Differentialformen ω und η auf A ist differenzierbar und für seine äußere Ableitung gilt die **Leibniz-Regel**

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d\eta$$

4. Gegeben eine \mathcal{C}^2 -Abbildung $\phi : A \rightarrow B$ in eine halboffene Teilmenge B eines weiteren endlichdimensionalen reellen Raums Y und eine differenzierbare Differentialform η auf B haben wir die **Verwandtschaftsverträglichkeit der äußeren Ableitung**

$$d(\phi^* \eta) = \phi^*(d\eta)$$

5. Ist die Differentialform ω auf A stetig differenzierbar und ist $d\omega$ auch stetig differenzierbar, so gilt

$$d(d\omega) = 0$$

9.5.12. Diese Formeln zusammen mit der graduierten Kommutativität 9.1.12 des Dachprodukts $\omega \wedge \eta = (-1)^{|\omega||\eta|} \eta \wedge \omega$ und mit unserer Regel

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

für das Differential einer differenzierbaren Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen oder allgemeiner halboffenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ aus 8.1.15 beziehungsweise 8.1.17 machen das Rechnen mit Differentialformen außerordentlich bequem. Der Formalismus der Differentialformen geht auf Élie Cartan's Arbeiten zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts zurück. Die Verträglichkeit der äußeren Ableitung mit Verwandtschaft macht die Umrechnung zwischen verschiedenen Koordinatensystemen derart einfach, daß es auch bei anderen Umrechnungen oft der bequemste Weg ist, sie auf diesen Formalismus zurückzuführen. Als Beispiel bespreche ich die Umrechnung des Laplace-Operators auf krummlinige Koordinaten in 9.8.10 folgende.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind offensichtlich. Wir führen den Beweis der restlichen Aussagen in mehreren Schritten.

Leibnizregel. Wir können ω und η schreiben als Summen von Formen der Gestalt

$f\omega_\circ, g\eta_\circ$ mit ω_\circ, η_\circ konstant und f, g differenzierbaren Funktionen. Es reicht also, die Behauptung für $\omega = f\omega_\circ$ und $\eta = g\eta_\circ$ zu prüfen. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg\omega_\circ \wedge \eta_\circ) \quad \text{mit Einsetzen,} \\ &= d(fg) \wedge \omega_\circ \wedge \eta_\circ \quad \text{nach Beispiel 9.5.5,} \\ &= (gdf + f dg) \wedge \omega_\circ \wedge \eta_\circ \quad \text{nach der Produktregel 8.1.13,} \\ &= df \wedge \omega_\circ \wedge g\eta_\circ + (-1)^{|\omega|} f\omega_\circ \wedge dg \wedge \eta_\circ \quad \text{nach 9.1.12,} \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d\eta \quad \text{nach Beispiel 9.5.5.} \end{aligned}$$

So haben wir die Leibnizregel für Differentialformen zurückgeführt auf den Fall 8.1.13 von Nullformen alias Funktionen und den Fall 9.5.5 des Produkts einer Nullform alias Funktion mit einer konstanten Form.

$dd = 0$ im Fall $A \subset X = \mathbb{R}^n$. Für eine stetig differenzierbare Nullform alias Funktion $\omega = f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge eines \mathbb{R}^n erhalten wir ganz explizit $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Wenn f sogar zweimal stetig differenzierbar ist, finden wir weiter

$$ddf = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i = 0$$

Hierbei haben wir die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen 3.1.12 verwendet, die wiederum aus unserer Annahme der Stetigkeit der zweiten Ableitungen folgt. Für eine stetig differenzierbare k -Form ω auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n , sagen wir $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$, mit $d\omega$ stetig differenzierbar erhalten wir damit sofort $d(d\omega) = \sum d(df_I) \wedge dx_I = 0$. Für eine zweimal stetig differenzierbare k -Form ω auf einer halboffenen Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ folgt unsere Behauptung dann aus der Stetigkeit von $d(d\omega)$.

Verwandtschaftsverträglichkeit für ϕ affin. Gilt $d\phi^* = \phi^*d$ für ω und η , so nach der Produktregel auch für $\omega \wedge \eta$. Es reicht also, unsere Formel für Funktionen alias Nullformen und für konstante 1-Formen zu zeigen. Der Fall von Funktionen ist 8.2.14. Für eine konstante 1-Form ω_\circ und ϕ affin ist andererseits auch $\phi^*\omega_\circ$ eine konstante 1-Form, mithin gilt wie gewünscht $d(\phi^*\omega_\circ) = 0 = \phi^*(d\omega_\circ)$.

$dd = 0$ im Allgemeinen. Ist $\phi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} X$ ein Isomorphismus von affinen Räumen, so folgt $\phi^*(dd\omega) = dd(\phi^*\omega) = 0$ und mithin $dd\omega = 0$.

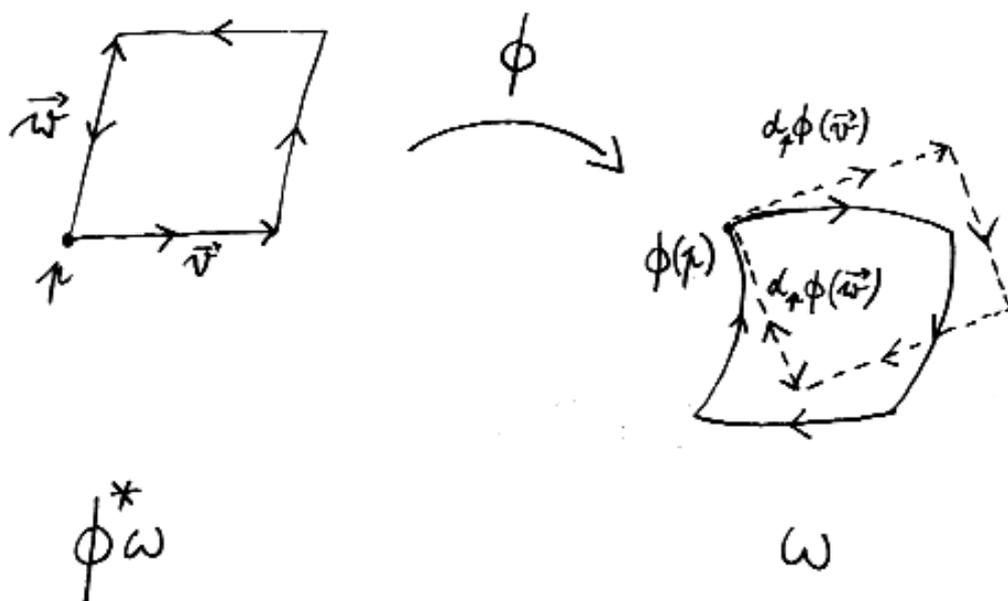
Verwandtschaftsverträglichkeit im Allgemeinen. Gilt $d\phi^* = \phi^*d$ für ω und η , so nach der Produktregel auch für $\omega \wedge \eta$. Es reicht also, unsere Formel für Funktionen alias Nullformen und für konstante 1-Formen zu zeigen. Der Fall von Funktionen ist 8.2.14. Für eine konstante 1-Form ω_\circ haben wir wiederum $\omega_\circ = df$ für eine geeignete Funktion f , genauer für jede affine Abbildung $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit linearem Anteil ω_\circ . Damit ergibt sich für ϕ beliebig unmittelbar $d\phi^*\omega_\circ = d\phi^*df =$

$dd\phi^*f = 0 = \phi^*0 = \phi^*d\omega_\circ$, wo wir im mittleren Schritt verwenden, daß uns die Regel $\phi^*df = d\phi^*f$ für differenzierbare Funktionen f ja bereits aus 8.2.14 zur Verfügung steht. \square

9.5.13 (Unterschiede zum Kalkül mit beliebigen Multilinearformen). Man beachte den dramatischen Unterschied zu unseren Ableitungen ?? von nicht notwendig alternierenden Multilinearformen, die wir dort sogar im vektorwertigen Fall betrachtet hatten. Die Definition dort war fast dieselbe, bis auf das Detail, daß wir dort beliebige Multilinearformen betrachtet hatten und folgerichtig nach dem Ableiten auch nicht den alternierenden Anteil genommen hatten. Dennoch sind alle drei Aussagen des vorhergehenden Satzes in dieser analogen Situation falsch. Etwas vage gesprochen folgen unsere Aussagen eben gerade aus den Zusammenspiel zwischen dem Kommutieren der partiellen Ableitungen und dem Antikommutieren des Dachprodukts.

9.5.14 (Diskussion der Eigenschaften der äußeren Ableitung). Unsere Regel 9.5.11.4 können wir auch $\phi : \eta \rightsquigarrow \omega \Rightarrow \phi : d\eta \rightsquigarrow d\omega$ schreiben. Sie besagt also in Worten, daß die äußere Ableitung mit Verwandtschaft verträglich ist. Der Leser sei ermutigt, sich das im Lichte unserer Anschauung 9.5.7 auch bildlich klarzumachen. Die Regel $dd\omega = 0$ ist zumindest für Nullformen im Lichte unserer Anschauung 9.5.7 leicht einzusehen, da das Integral des Differentials einer Funktion über jeden geschlossenen Integrationsweg verschwindet. Für Kovektorfelder sollte die Identität $dd\omega = 0$ aus dem Stokes'schen Satz 9.7.2 heraus klar werden: Er besagt, daß das Integral von $d\omega$ über eine Fläche unseres Parallelepeds auch als Integral von ω über dessen Rand geschrieben werden kann, und die Summe aller Randintegrale über die sechs Flächen unseres Parallelepeds ist offensichtlich wieder Null.

9.5.15. In nebenstehendem Bild wage ich den Versuch einer anschaulichen Interpretation der Verträglichkeit zwischen der äußeren Ableitung und dem Zurückholen von Kovektorfeldern. Gegeben ist ein Kovektorfeld ω rechts und ein Punkt p mit zwei Richtungsvektoren \vec{v}, \vec{w} links. Das Wegintegral von $\phi^*\omega$ über den kleinen Parallelogrammweg links approximiert $(d(\phi^*\omega))_p(\vec{v}, \vec{w})$. Es stimmt nach 8.4.9.2 überein mit dem Wegintegral des Kovektorfelds ω über seinen Bildweg rechts, eingezeichnet als durchgezogener Rundweg aus vier krummen Stücken. Dahingegen approximiert das Wegintegral über den kleinen gestrichelten Parallelogrammweg rechts $(d\omega)_{\phi(p)}(d_p\phi(\vec{v}), d_p\phi(\vec{w}))$. Die Anschauung soll uns nun sagen, daß im Grenzwert $t \rightarrow 0$ wie in 9.5.7 die entsprechenden beiden Wegintegrale rechts nach Teilen durch t^2 gegen denselben Wert streben. In der Tat werden ja nicht nur die beiden Rundwegsintegrale klein von zweiter Ordnung, sondern die beiden Wege werden sich bei $t \rightarrow 0$ auch sehr ähnlich, und das sorgt dafür, daß die Differenz ihrer Rundwegsintegrale für $t \rightarrow 0$ sogar von dritter Ordnung verschwindet.



Versuch einer anschaulichen Interpretation der Verträglichkeit zwischen der äußeren Ableitung und dem Zurückholen von Kovektorfeldern.

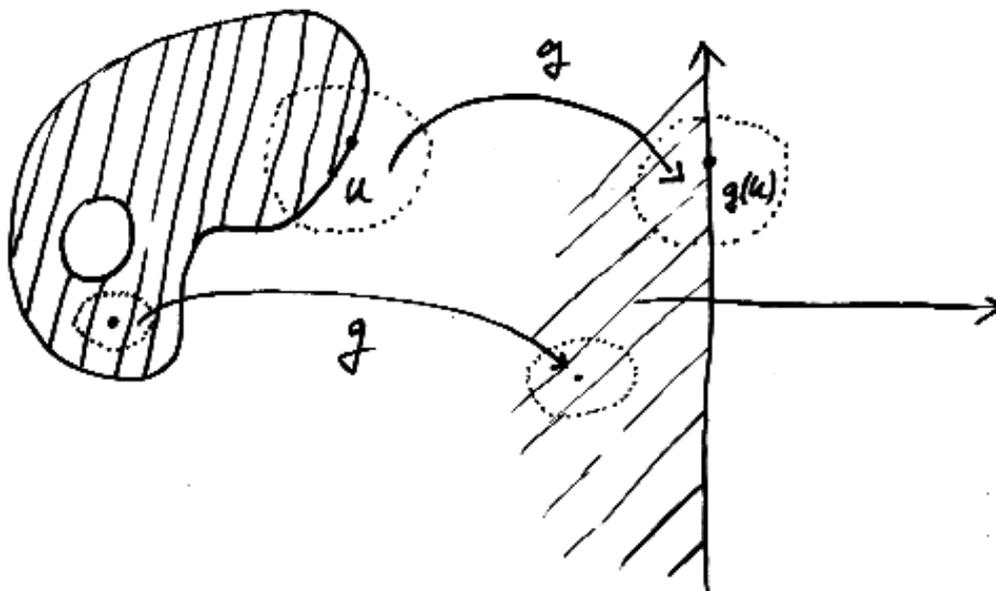
Übungen

Übung 9.5.16. Prüfen Sie für beliebige glatte Funktionen $f, a, b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi(a, b) = (a(x, y), b(x, y))$ die Verwandtschaftsverträglichkeit der äußeren Ableitung $d\varphi^*(f(x, y) dx) = \varphi^*d(f(x, y) dx)$.

Übung 9.5.17. Prüfen Sie für die Differentialform $x^2 dx \wedge dy - 4 e^y dx \wedge dz$, daß erst die äußere Ableitung bilden und dann auf Kugelkoordinaten übergehen dasselbe Resultat liefert wie erst auf Kugelkoordinaten übergehen und dann die äußere Ableitung bilden.

9.6 Randfaltungen

Definition 9.6.1. Seien X ein reeller Raum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X = n$ und $k \geq 1$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt eine **k -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit** oder kurz **k -Randfaltung in X** , wenn es um jeden Punkt $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem (U, g) von X gibt mit



Eine zweidimensionale berandete Untermannigfaltigkeit der Papierebene mit angepaßten lokalen Koordinatensystemen um zwei ausgewählte Punkte.

$$U \cap M = \{q \in U \mid g_1(q) \leq 0, g_{k+1}(q) = \dots = g_n(q) = 0\}$$

Wir nennen dann (U, g) ein **an die Randfaltung M angepaßtes lokales Koordinatensystem von X** .

9.6.2. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und eine k -Randfaltigkeit $M \subset X$ erzeugt ihr Tangentialkegel in einem Punkt $p \in M$ offensichtlich einen k -dimensionalen Untervektorraum von \vec{X} . Er heißt der **Tangentialraum an M in p** und wird wie bei Mannigfaltigkeiten notiert als

$$T_p M := \langle K_p M \rangle$$

Definition 9.6.3. Sei X ein reeller Raum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X = n$. Unter einer **Randkarte** einer k -Randfaltigkeit $M \subset X$ verstehe ich ein Paar (W, φ) bestehend aus einer offenen Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1}$ und einer injektiven Abbildung

$$\varphi : W \hookrightarrow M$$

derart, daß es um jeden Punkt $p \in \varphi(W)$ ein an die Randfaltigkeit M angepaßtes lokales Koordinatensystem (U, g) von X gibt mit $U \cap M \subset \varphi(W)$ und $\varphi(g_1(q), \dots, g_k(q)) = q \forall q \in U \cap M$.

9.6.4. Insbesondere induziert für jede Randkarte (W, φ) einer k -Randfaltigkeit $M \subset X$ und alle $p \in W$ das Differential einen Isomorphismus

$$d_p \varphi : \mathbb{R}^k \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(p)} M$$

Sind $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (W_β, φ_β) zwei Randkarten einer Mannigfaltigkeit M , so setzen wir $W_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(W_\beta))$ und nennen die Abbildung

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : W_{\alpha\beta} \rightarrow W_{\beta\alpha}$$

den **Kartenwechsel** zwischen unseren beiden Karten. Wie in 4.4.12 zeigt man, daß auch jeder Kartenwechsel von Randkarten stetig differenzierbar ist.

Beispiel 9.6.5 (Randkarte zu angepaßtem lokalem Koordinatensystem). Gegeben ein an eine Randfaltigkeit $M \subset X$ angepaßtes lokales Koordinatensystem $g : X \supseteq U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$ liefert seine Umkehrabbildung $g^{-1} : \mathbb{R}^n \supseteq V \xrightarrow{\sim} U \subseteq X$ eine Randkarte (W, φ) von M , wenn wir die durch das Anfügen von Nullen gegebene Abbildung $i : \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten und auf $W := i^{-1}(V)$ die Abbildung $\varphi := g^{-1} \circ i : W \rightarrow M$ betrachten.

9.6.6. Jede Mannigfaltigkeit ist auch eine Randfaltigkeit. In diesem Fall ist eine Randkarte nach 4.4.9 dasselbe wie eine Karte, deren Definitionsbereich im offenen Halbraum aller Punkte von \mathbb{R}^k mit negativer erster Koordinate enthalten ist.

9.6.7. Eine berandete Untermannigfaltigkeit der Kodimension Null in einem endlichdimensionalen reellen Raum heißt auch eine **C^1 -berandete Teilmenge**. Unser Bild von eben stellt eine C^1 -berandete Teilmenge der Papierebene dar.

Beispiele 9.6.8. Alle mehrpunktigen Intervalle in \mathbb{R} sind \mathcal{C}^1 -berandete Teilmengen. Die abgeschlossene Vollkugel $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ist eine \mathcal{C}^1 -berandete Teilmenge des \mathbb{R}^3 .

Lemma 9.6.9. *Jede k -Randfaltung M ist eine k -Fastfaltung und für jede Randkarte $\varphi : W \hookrightarrow M$ von M gilt $M_{\text{reg}} \cap \varphi(W) = \varphi(W^\circ)$ für $W^\circ := \text{Inn}_{\mathbb{R}^k}(W)$.*

9.6.10. Insbesondere ist das Komplement $\partial M := M \setminus M_{\text{reg}}$ der Menge der **regulären Punkte** einer k -Randfaltung eine $(k - 1)$ -Mannigfaltigkeit. Wir nennen sie den **Rand von M** .

Beweis. Daß jede Randfaltung eine Fastfaltung ist, scheint mir offensichtlich. Für das weitere bemerken wir, daß gegeben zwei Randkarten (V, ψ) und (W, φ) einer Randfaltung mit $\varphi(W) = \psi(V)$ durch Anwenden des Umkehrsatzes 4.1.2 auf den Kartenwechsel $\kappa = \psi^{-1} \circ \varphi$ folgt $\kappa(W^\circ) \subset V^\circ$ und durch Anwenden auf den umgekehrten Kartenwechsel sogar $\kappa(W^\circ) = V^\circ$. Daß ∂M eine $(k - 1)$ -Mannigfaltigkeit ist, ergibt sich unmittelbar. \square

9.6.11 (**Diskussion der Notation**). Das Symbol ∂ ist ein griechisches d . Die Notation ∂M für den Rand ist wohl darauf zurückzuführen, daß sich das Bilden des Randes nach dem Satz von Stokes 9.7.2 als eine in gewisser Weise „duale Operation“ zum Differenzieren auffassen läßt und in jedem Falle dazu eng verwandt ist. Der eben erklärte Begriff des Randes ∂M fällt im Fall, daß gilt $n = k$ und daß außerdem M abgeschlossen ist im umgebenden affinen Raum, mit dem in der Topologie verwendeten Begriff von Rand 5.5.1 zusammen. Er ist jedoch im allgemeinen davon verschieden, obwohl man für beide Begriffe dieselbe Notation benutzt. Was im Einzelfall gemeint ist, gilt es aus dem Kontext zu erschließen.

Beispiele 9.6.12. Der Rand der Randfaltung $[a, b) \subset \mathbb{R}$ besteht aus dem Punkt a . Eine abgeschlossene Kreisscheibe in der Ebene ist auch als Teilmenge des Raums aufgefaßt eine zweidimensionale Randfaltung mit dem Einheitskreis als Rand.

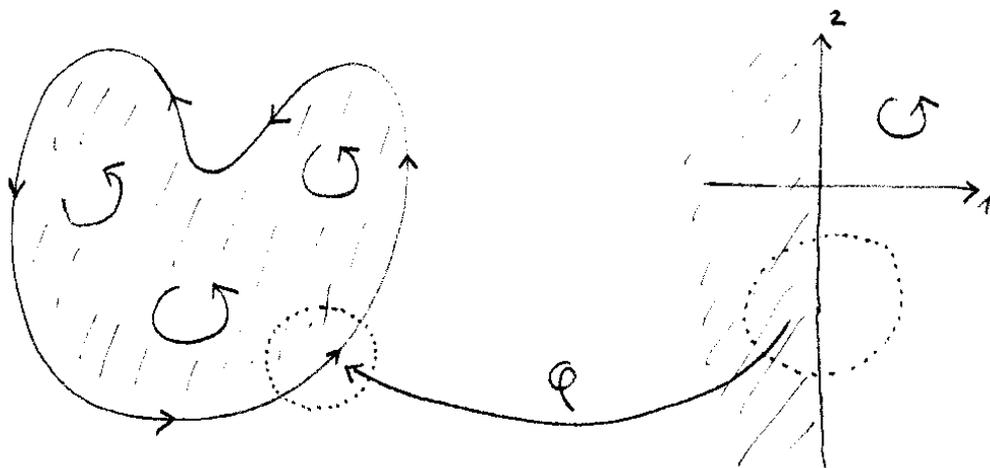
Definition 9.6.13. Gegeben eine Randkarte (W, φ) einer $(k + 1)$ -Randfaltung M erklären wir die **induzierte Karte $(\bar{W}, \bar{\varphi})$ des Randes ∂M** durch die Vorschrift

$$(\bar{W}, \bar{\varphi}) := (i^{-1}(W), \varphi \circ i)$$

mit $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$ der Einbettung $x \mapsto (0, x)$.

9.6.14. Unter einer **Orientierung** einer Randfaltung verstehen wir wie bei allgemeinen Fastfaltungen eine Orientierung ihres regulären Teils.

Lemma 9.6.15. *Gegeben eine orientierte $(k + 1)$ -Randfaltung M gibt es genau eine Orientierung ihres Randes ∂M derart, daß für jede Randkarte der Orientierung ε auch die induzierte Karte des Randes die Orientierung ε hat. Wir nennen sie die **induzierte Orientierung des Randes**.*



Eine orientierte berandete zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit der induzierten Orientierung auf ihrem Rand und einer Randkarte

Beweis. Seien $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (W_β, φ_β) zwei Randkarten von M . Der Kartenwechsel $\varphi_{\beta\alpha} : W_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} W_{\beta\alpha}$ induziert nach 9.6.9 eine Bijektion $W_{\alpha\beta} \cap (0 \times \mathbb{R}^k) \xrightarrow{\sim} W_{\beta\alpha} \cap (0 \times \mathbb{R}^k)$ und diese Bijektion kann durch den Kartenwechsel $\bar{\varphi}_{\beta\alpha}$ der auf dem Rand induzierten Karten beschrieben werden als $\varphi_{\beta\alpha}(0, x_2, \dots, x_k) = (0, \bar{\varphi}_{\beta\alpha}(x_2, \dots, x_k))$. Gegeben $y \in \bar{W}_{\alpha\beta}$ hat die Jacobimatrix $[d_{(0,y)}\varphi_{\beta\alpha}]$ des Kartenwechsels mithin die Gestalt

$$[d_{(0,y)}\varphi_{\beta\alpha}] = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial(\varphi_{\beta\alpha})_1}{\partial x_1}(0, y) & 0 \\ \hline * & [d_y\bar{\varphi}_{\beta\alpha}] \end{array} \right)$$

Des weiteren ist der Eintrag oben links nicht negativ, denn $(\varphi_{\beta\alpha})_1$ verschwindet auf allen $(0, y)$ und nimmt auf allen $(t, y) \in W_{\alpha\beta}$ mit $t < 0$ negative Werte an. Mithin hat in jedem Randpunkt die Funktionaldeterminante eines Kartenwechsels zweier Randkarten von M dasselbe Vorzeichen wie die Funktionaldeterminante des Kartenwechsels der auf dem Rand induzierten Karten. Dieses Vorzeichen ist jedoch eine stetige Funktion und muß deshalb auf den Punkten mit erster Koordinate Null dasselbe sein wie auf den Punkten mit negativer erster Koordinate. \square

Beispiel 9.6.16. Gegeben reelle Zahlen $a < b$ und $\varphi : [a, b] \hookrightarrow X$ eine stetig differenzierbare injektive Abbildung in einen endlichdimensionalen reellen Raum zeigt man unschwer, daß $M := \varphi([a, b])$ eine 1-Randfaltung ist und φ eine Integrationskarte von M und daß M genau eine Orientierung besitzt, für die diese Integrationskarte orientierungsverträglich ist. Dann besteht der Rand der Randfaltung M aus den beiden Punkten $\partial M = \{\varphi(a), \varphi(b)\}$ und die induzierte Orientierung gibt dem Ersten dieser Punkte ein negatives Vorzeichen und dem Zweiten ein positives. Im höherdimensionalen Fall bedeutet unsere Definition anschaulich, daß die orientierten Basen der Tangentialräume des Randes diejenigen angeordneten Basen sind, die orientierte Basen der Tangentialräume der Randfaltung liefern, wenn man noch einen Vektor davorschreibt, der tangential an die Randfaltung ist und an unserem Randpunkt „aus der Randfaltung heraus zeigt“. Ist speziell $M = \partial K$ der Rand einer glatt berandeten Teilmenge K mit der von einer Orientierung des umgebenden Raums induzierten Orientierung, so nennt man das orientierte Normalenfeld auch das **äußere Normalenfeld**, da dann anschaulich gesprochen N_p stets „aus K heraus zeigt“.

Übungen

Übung 9.6.17. Seien X und Y endlichdimensionale reelle Räume, $U \Subset X$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit überall surjektivem Differential. So ist für jede Randfaltung $C \subset Y$ ihr Urbild $M = f^{-1}(C)$ eine Randfaltung von X der Dimension $\dim X - \dim Y + \dim C$

mit Rand $\partial M = f^{-1}(\partial C)$. Man erkennt so zum Beispiel, daß alle Vollkugeln Randfaltungen sind. Hinweis: 4.2.20 und 4.2.23.

9.7 Integralsatz von Stokes

9.7.1. Bisher haben wir bei der Definition von Fastfaltungen, Randfaltungen und Mannigfaltigkeiten sowie ihren Koordinatensystemen, Karten und Randkarten alle beteiligten Abbildungen für gewöhnlich als stetig differenzierbar angenommen. Wenn wir stattdessen \mathcal{C}^l für $1 \leq l \leq \infty$ fordern wollen, schreiben wir das explizit dazu und sagen statt \mathcal{C}^∞ auch **glatt**. Den Fall $l = 0$ betrachten wir hier nicht, da dabei zusätzliche Schwierigkeiten auftreten und da dieser Fall für das folgende nicht relevant ist. Zur Illustration der im Fall $l = 0$ zu erwartenden Schwierigkeiten sei nur bemerkt, daß in diesem Fall bereits unser Beweis 9.6.9 für die Wohldefiniertheit des Randes einer Randfaltung versagt.

Satz 9.7.2 (Stokes'scher Integralsatz). *Seien M eine kompakte orientierte \mathcal{C}^2 -Randfaltung der Dimension $(k+1)$ in einem endlichdimensionalen reellen Raum und ω eine stetig differenzierbare k -Form auf einer halboffenen Teilmenge unseres Raums, die M umfaßt. So gilt mit der induzierten Orientierung des Randes ∂M auf der rechten Seite*

$$\int_{\vec{M}} d\omega = \int_{\partial \vec{M}} \omega$$

9.7.3 (**Verallgemeinerungen des Stokes'schen Integralsatzes**). Der Beweis wird zeigen, daß wir statt der Kompaktheit unserer Randfaltung M schwächer nur voraussetzen brauchen, daß der Träger der Differentialform unsere Mannigfaltigkeit in einem Kompaktum trifft, in Formeln $\text{supp } \omega \cap M$ kompakt. In 9.7.19 erklären wir eine Verallgemeinerung des Stokes'schen Integralsatzes von Randfaltungen auf „Eckfaltungen“, die für die im „wirklichen Leben“ auftretenden Situationen besonders relevant ist.

9.7.4. Konkrete Spezialfälle des vorhergehenden Satzes werden ab 9.7.22 diskutiert. Bereits hier sei angemerkt, daß für eine kompakte Mannigfaltigkeit alias eine kompakte Randfaltung mit leerem Rand das Integral auf der linken Seite verschwinden muß, in Formeln $\partial M = \emptyset \Rightarrow \int_{\vec{M}} d\omega = 0$.

Beweis. Gilt die Aussage für ω und ω' , so auch für $\omega + \omega'$. Wir können also nach der Beschreibung 5.1.5 der Kompaktheit und unseren Erkenntnissen 5.2.14 über glatte Teilungen der Eins ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß unsere Randfaltung M eine Randkarte (W, φ) einer Orientierung ε besitzt mit $(\text{supp } \omega \cap M) \subset \varphi(W)$. So gilt per definitionem die erste Gleichung in der Gleichungskette

$$\int_{\vec{M}} d\omega = \varepsilon \int_W \varphi^*(d\omega) = \varepsilon \int_W d(\varphi^*\omega)$$

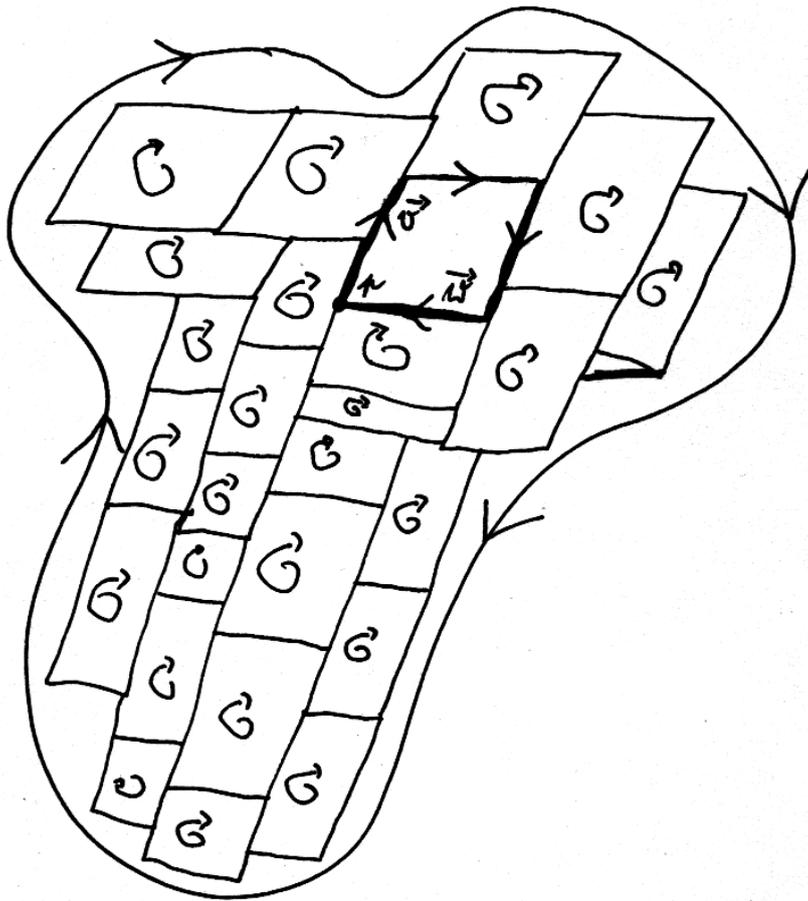


Illustration zum Stokes'schen Satz. Gegeben ein Kovektorfeld ω erinnern wir uns dazu daran, daß nach 9.5.7 seine äußere Ableitung $(d\omega)_p(\vec{v}, \vec{w})$ ausgewertet auf Richtungsvektoren \vec{v}, \vec{w} eine Approximation des Wegintegrals von ω über den Rundweg von p erst nach $p + \vec{v}$, dann weiter nach $p + \vec{v} + \vec{w}$, von dort nach $p + \vec{w}$ und zurück nach p ist. Es sollte nun anschaulich klar sein, daß die Summe über viele derartige kleine Rundwegsintegrale das Randintegral über den ganzen Bereich approximiert. Der Satz von Stokes formalisiert diese Anschauung.

Da nach 9.5.11.4 im Fall einer \mathcal{C}^2 -Abbildung die äußere Ableitung mit dem Zurückholen vertauscht, gilt unter unseren Annahmen auch die zweite Gleichung. Bezeichnet $(\bar{W}, \bar{\varphi})$ wie in 9.6.13 die induzierte Karte des Randes und $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$, $x \mapsto (0, x)$ die offensichtliche Einbettung, so gilt nach unseren Definitionen und wegen $\bar{\varphi} = \varphi \circ i$ und $\bar{W} = i^{-1}(W)$ auch

$$\int_{\partial \bar{M}} \omega = \varepsilon \int_{\bar{W}} \bar{\varphi}^* \omega = \varepsilon \int_{i^{-1}W} i^*(\varphi^* \omega)$$

Bezeichnen wir mit η die Fortsetzung durch Null von $\varphi^* \omega$ auf den ganzen Halbraum, so reduziert sich unser Satz so auf den Spezialfall, den wir im Anschluß als eigenständiges Lemma formulieren und beweisen. \square

Lemma 9.7.5. *Gegeben eine stetig differenzierbare k -Form η mit kompaktem Träger auf dem Halbraum $\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^k} i^* \eta = \int_{\mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k} d\eta$$

für $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \times \mathbb{R}^k$ die Einbettung $x \mapsto (0, x)$.

Beweis. Wir nennen unsere Koordinaten ausnahmsweise x_0, x_1, \dots, x_k und können schreiben

$$\eta = \sum_{\nu=0}^k \eta_\nu dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_\nu} \wedge \dots \wedge dx_k$$

für stetig differenzierbare Funktionen η_ν mit kompaktem Träger. Es ergibt sich $i^* \eta = (\eta_0 \circ i) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Die linke Seite ist also $\int_{\mathbb{R}^k} (\eta_0 \circ i) d^k x$. Auf der rechten Seite erhalten wir

$$d\eta = \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_\nu} dx_0 \wedge \dots \wedge dx_k$$

Für $\nu \neq 0$ verschwindet jedoch beim entsprechenden Summanden das ν -te partielle Integral, da die Stammfunktion η_ν kompakten Träger hat und von $-\infty$ bis ∞ integriert wird. Nur der erste Summand liefert folglich überhaupt einen Beitrag und dieser Beitrag ist

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \eta_0}{\partial x_0} \right) = \int_{\mathbb{R}^k} (\eta_0 \circ i) d^k x \quad \square$$

Vorschau 9.7.6 (Variante für abstrakte Randfaltungen). Später werden wir lernen, was eine „abstrakte Randfaltung“ sowie eine „Differentialform auf einer abstrakten Randfaltung“ sind und wie man solche Differentialformen ableitet und k -Formen über orientierte k -dimensionale abstrakte Randfaltungen integriert. In dieser Allgemeinheit gilt dann dieselbe Formel für eine beliebige stetig

differenzierbare k -Form ω mit kompaktem Träger auf einer beliebigen orientierten $(k + 1)$ -dimensionalen C^2 -Randfaltung M .

Beispiel 9.7.7 (Satz von Stokes im Fall einer Flußdichte). Seien X ein dreidimensionaler orientierter reeller affiner Raum und $K \subset X$ eine kompakte orientierte dreidimensionale C^2 -Randfaltung alias ein Körper wie etwa eine massive Kugel oder ein massiver Eisenring, den wir uns aber nur als wohlbestimmte Region in X denken, die durchaus von Gas durchströmt werden kann. Der Rand ∂K ist dann eine Fläche, etwa eine Kugelschale oder die Oberfläche unseres Rings. Sei nun ω die 2-Form der Flußdichte eines bewegten Gases wie in 9.2.4. Nach 9.4.17 beschreibt das Integral von ω über ∂K die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall in einer durch die Orientierung bestimmten Richtung durch unsere Fläche ∂K hindurchtritt. Nach 9.5.7 beschreibt die 3-Form $d\omega$ an jeder Stelle für jede angeordnete Basis aus drei kleinen Vektoren die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall aus dem entsprechenden kleinen Parallelepiped entweicht oder in dieses einströmt, je nach Vorzeichen. Nach 9.4.17 beschreibt das Integral über K dieser 3-Form die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall aus der Region K entweicht oder in diese einströmt, je nach Vorzeichen. Der Satz von Stokes besagt dann schlicht, daß diese Gesamtmasse dieselbe ist wie die Gesamtmasse an Gas, die im gegebenen Zeitintervall durch die Oberfläche ∂K hindurchtritt.

Beispiel 9.7.8 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Jedes mehrpunktige kompakte reelle Intervall $M = [a, b]$ ist eine eindimensionale glatte Randfaltung in \mathbb{R} und erbt von \mathbb{R} eine Orientierung. Sein Rand ist die nulldimensionale Mannigfaltigkeit $\partial M = \{a, b\}$ und die induzierte Orientierung darauf gibt dem Punkt a das Vorzeichen -1 und dem Punkt b das Vorzeichen $+1$. Eine stetig differenzierbare Nullform ω auf M ist eine stetig differenzierbare Funktion G und ihre äußere Ableitung ist das Kovektorfeld $d\omega = dG = G'(x) dx$. Wir erkennen so, daß unser Satz von Stokes 9.7.2 in diesem Fall zum Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung [AN1] 12.5.7.3 spezialisiert.

Beispiel 9.7.9 (Fluß durch eine Hemisphäre). Wir kommen nocheinmal auf unser Integral über die obere Hemisphäre H der 2-Form $x^2 dx \wedge dy$ aus 9.4.7 zurück, wobei unsere Orientierung der oberen Hemisphäre unter der Projektion auf die Ebene die übliche Orientierung des \mathbb{R}^2 entsprach. Nun haben wir das Glück, $x^2 dx \wedge dy = -d(x^2 y dx)$ schreiben zu können. Der Rand von \vec{H} ist dann der im Gegenuhrzeigersinn orientierte Einheitskreis in der xy -Ebene $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ und aus dem Satz von Stokes folgt

$$\int_{\vec{H}} x^2 dx \wedge dy = \int_{\vec{S}} -x^2 y dx$$

Zur Sicherheit machen wir noch die Probe und landen mit

$$\int_{\vec{S}} -x^2 y \, dx = \int_0^{2\pi} -\cos^2 \varphi \sin \varphi \, d(\cos \varphi) = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

im wesentlichen bei demselben Integral wie dem, das wir bereits in 9.4.7 berechnet hatten. Genauer wird der fehlende Faktor 2 von $\int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi$ in der Rechnung dort hier dadurch ausgeglichen, daß das Integral bis 2π läuft.

9.7.10 (Bedeutung des Formalismus der Differentialformen). Der hier vorgeführte Beweis des Stokes'schen Satzes ist sehr kurz. Das liegt daran, daß die hier gewählte Formulierung in der Sprache der Differentialformen so gut mit Koordinatenwechseln verträglich ist, daß wir uns beim Beweis sehr leicht auf einen einfachen Spezialfall zurückziehen können. In gewisser Weise haben wir also mit der Entwicklung der Sprache der Differentialformen die Hauptarbeit bereits geleistet. Als wesentliche nichttriviale Aussage möchte ich dabei insbesondere die Verträglichkeit der äußeren Ableitung mit C^2 -Koordinatenwechseln 9.5.11.4 hervorheben, die sich auch noch in vielen anderen Zusammenhängen als ein äußerst starkes Hilfsmittel erweisen wird.

Beispiel 9.7.11. Wir wiederholen unser Beispiel einer Flußdichte 9.7.7 und übertragen es in eine andere Formelwelt. Gegeben eine kompakte C^1 -berandete Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ im Sinne von 9.6.7 bezeichne $N : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äussere Normalenfeld. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ erklären wir seine sogenannte **Quelldichte** oder auch **Divergenz** durch die Vorschrift $\operatorname{div} F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$. Ist K sogar C^2 -berandet im Sinne von 9.7.1, so zeigen wir den **Gauß'schen Integralsatz**

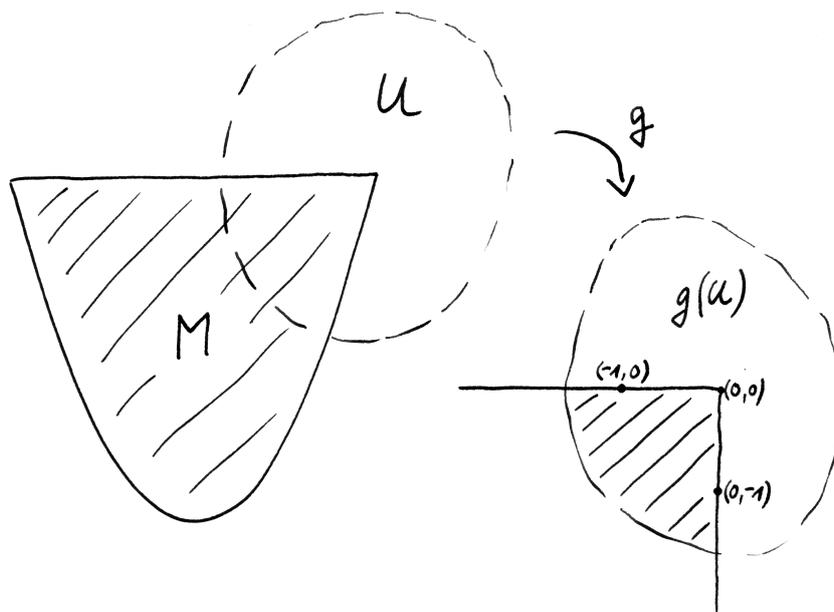
$$\int_K \operatorname{div} F = \int_{\partial K} F \cdot N$$

Bilden wir in der Tat zu F wie in 9.4.14 die zugehörige $(n-1)$ -Form $\omega = \omega_F$, so finden wir $d\omega = (\operatorname{div} F) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Mit unseren Übersetzungen 9.4.4 und 9.4.15 zeigt der Satz von Stokes 9.7.2 dann

$$\int_K \operatorname{div} F = \int_{\vec{K}} d\omega = \int_{\partial \vec{K}} \omega = \int_{\partial K} F \cdot N$$

In Worten ist also der Fluß eines Vektorfelds durch den Rand eines C^2 -berandeten Kompaktums im \mathbb{R}^n gleich dem Integral seiner Quelldichte über besagtes Kompaktum. Anschaulich mag man sich im Fall $n=2$ die Oberfläche K eines ebenen Moores denken, in dem Wasser nach oben dringt und über das Moor an den Rand des Moores fließt. Nehmen wir das Geschwindigkeitsfeld dieses Flusses als unser Vektorfeld, so wäre die Divergenz eben die Quelldichte in unserem Moor, das

Randintegral mißt die Wassermenge, die pro Zeiteinheit am Rand unseres Moores herausläuft, und unser Satz besagt, daß sie gleich der Wassermenge sein muß, die pro Zeiteinheit im Inneren emporquillt.



Eine kompakte 2-dimensionale Eckfältigkeit M der Papierebene mitsamt einer Eckenplättung in die dafür in geeigneter Weise mit \mathbb{R}^2 zu identifizierende Papierebene.

Definition 9.7.12. Seien X ein reeller affiner Raum endlicher Dimension n und $k \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $M \subset X$ heiße eine k -**Eckfältigkeit**, wenn für jeden Punkt $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem (U, g) von X existiert mit

$$U \cap M = \{q \in U \mid g_1(q) \leq 0, \dots, g_k(q) \leq 0, g_{k+1}(q) = \dots = g_n(q) = 0\}$$

Wir nennen dann (U, g) ein **an die Eckfältigkeit M angepaßtes lokales Koordinatensystem von X** .

9.7.13 (**Diskussion der Terminologie**). Den Begriff einer „Eckfältigkeit“ gibt es bisher in der Literatur noch nicht. Er ist das Ergebnis meiner Versuche, eine Begrifflichkeit zu entwickeln, in der der Stokes'sche Integralsatz ohne viel zusätzlichen Aufwand in einer für Anwendungen nützlichen Allgemeinheit präzise formuliert und bewiesen werden kann.

Beispiele 9.7.14. Eine nulldimensionale Eckfaltung ist dasselbe wie eine nulldimensionale Mannigfaltigkeit alias eine diskrete Teilmenge. Eine eindimensionale Eckfaltung ist dasselbe wie eine eindimensionale Randfaltung. Eine zweidimensionale Eckfaltung wäre zum Beispiel ein „abgeschlossenes Segment einer Kreisscheibe“. Eine dreidimensionale Eckfaltung im dreidimensionalen Raum ist etwa ein Würfel oder ein massiver Zylinder oder eine Vollkugel. Jede Mannigfaltigkeit ist auch eine Eckfaltung. Eine n -dimensionale Eckfaltung in einem n -dimensionalen Raum nenne ich auch eine **eckig berandete Teilmenge** und im C^l -Fall eine **C^l -eckig berandete Teilmenge**, die also salopp gesprochen „lokal um jeden Punkt mit einem C^l -Diffeomorphismus in eine offene Teilmenge einer Kopie der Standarddecke transformiert werden kann“.

Definition 9.7.15. Sei X ein reeller Raum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} X = n$. Unter einer **Eckenkarte** einer k -Eckfaltung $M \subset X$ verstehe ich ein Paar (W, φ) bestehend aus einer offenen Teilmenge $W \Subset (\mathbb{R}_{\leq 0})^k$ und einer injektiven Abbildung

$$\varphi : W \rightarrow M$$

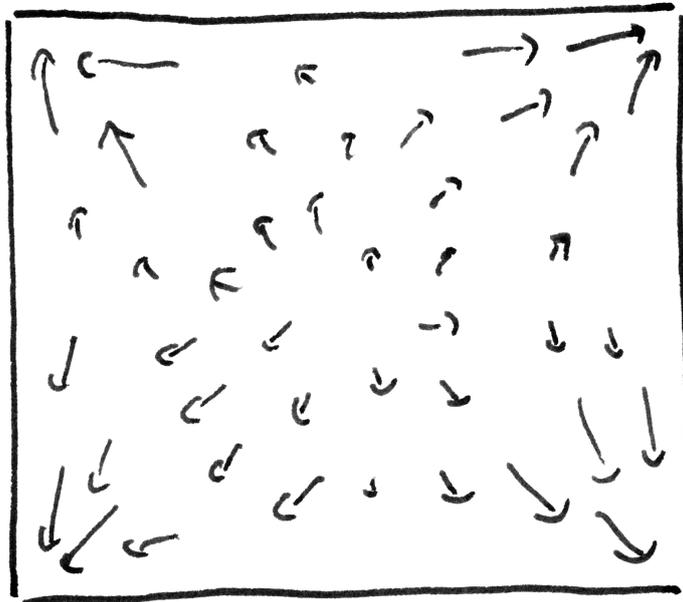
derart, daß es um jeden Punkt $p \in \varphi(W)$ ein an die Eckfaltung M angepaßtes lokales Koordinatensystem (U, g) von X gibt mit $U \cap M \subset \varphi(W)$ und $\varphi(g_1(q), \dots, g_k(q)) = q \forall q \in U \cap M$.

Lemma 9.7.16. Jede k -Eckfaltung M ist eine k -Fastfaltung und für jede Eckenkarte $\varphi : W \hookrightarrow M$ von M gilt $M_{\text{reg}} \cap \varphi(W) = \varphi(W^\circ)$.

9.7.17. Insbesondere ist das Komplement $\partial M := M \setminus M_{\text{reg}}$ der Menge der **regulären Punkte** eine $(k - 1)$ -Fastfaltung. Wir nennen sie den **Rand von M** . Weiter ist $M_{\text{reg}} \sqcup (\partial M)_{\text{reg}}$ eine k -Randfaltung.

Beweis. Dieser Beweis ist fast identisch zum Beweis der entsprechenden Aussage für Randfaltungen 9.6.9. Daß jede Eckfaltung eine Fastfaltung ist, scheint mir offensichtlich. Für das weitere bemerken wir, daß gegeben zwei Eckenkarten (V, ψ) und (W, φ) einer Eckfaltung mit $\varphi(W) = \psi(V)$ durch Anwenden des Umkehrsatzes 4.1.2 auf den Kartenwechsel $\kappa = \psi^{-1} \circ \varphi$ folgt $\kappa(W^\circ) \subset V^\circ$ und durch Anwenden auf den umgekehrten Kartenwechsel sogar $\kappa(W^\circ) = V^\circ$. Das Lemma folgt. \square

9.7.18. Unter einer **Orientierung** einer Eckfaltung M verstehen wir eine Orientierung als Fastfaltung alias eine Orientierung der Mannigfaltigkeit M_{reg} . Das ist auch dasselbe wie eine Orientierung der Randfaltung $M_{\text{reg}} \cup (\partial M)_{\text{reg}}$ und induziert damit nach 9.6.15 eine Orientierung der Mannigfaltigkeit $(\partial M)_{\text{reg}}$ alias eine Orientierung der Fastfaltung ∂M , die **induzierte Orientierung des Randes**.



Ein expandierendes Gas, das durch die Ecken entweicht, als Beispiel dafür, daß die Kompaktheitsbedingung beim Satz von Stokes notwendig ist.

Satz 9.7.19 (Stokes'scher Integralsatz mit Ecken). Seien M eine orientierte C^2 -Eckfaltung der Dimension $(k + 1)$ in einem endlichdimensionalen reellen Raum und ω eine stetig differenzierbare k -Form auf einer halboffenen Teilmenge unseres Raums, die M umfaßt und für die $(\text{supp } \omega) \cap M$ kompakt ist. Versehen wir den Rand ∂M von M mit der induzierten Orientierung, so gilt

$$\int_{\vec{M}} d\omega = \int_{\partial \vec{M}} \omega$$

Beweis. Mit denselben Tricks wie beim Beweis für Randfaltungen 9.7.2 ziehen wir uns auf den Fall $M = (\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ zurück. Wir müssen damit nur zeigen, daß für $i_\nu : (\mathbb{R}_{\leq 0})^k \rightarrow (\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}$ das Einfügen einer Null an der ν -ten Stelle und η eine stetig differenzierbare k -Form mit kompaktem Träger auf $(\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \int_{(\mathbb{R}_{\leq 0})^k} i_\nu^* \eta = \int_{(\mathbb{R}_{\leq 0})^{k+1}} d\eta$$

Das Nachrechnen dieser Verallgemeinerung von Lemma 9.7.5 bleibe dem Leser überlassen. \square

9.7.20 (**Bedeutung der Kompaktheitsannahmen**). Im allgemeinen gilt der Satz von Stokes keineswegs für nichtkompakte Randfaltungen, selbst wenn am Rand „nur ein Punkt fehlt und das die Kompaktheit zerstört“. Ist zum Beispiel Q ein Quadrat in der Ebene ohne die Ecken, so können wir auf einer offenen Menge, die unser eckenloses Quadrat umfaßt, ein Vektorfeld konstruieren, das den Fluß eines expandierenden Gases beschreibt, das „durch die Löcher in den Ecken entweicht“ aber dessen Fluß durch die Randkanten des Quadrats verschwindet. In dieser Allgemeinheit gälte der Satz von Stokes also nicht. Allerdings müßte unser Gas „mit unendlicher Geschwindigkeit durch die Ecken pfeifen“ und sein Geschwindigkeitsfeld könnte nicht stetig auf besagte Ecken fortgesetzt werden, weshalb auch die Voraussetzungen für unseren Satz von Stokes mit Ecken in diesem Fall nicht erfüllt wären. Es gibt noch sehr viel allgemeinere Versionen des Stokes'schen Satzes mit Ecken, vergleiche etwa [Kön97], mit denen sich zum Beispiel auch der Fluß durch die Oberfläche eines Ikosaeders oder einer Eiswaffel direkt diskutieren ließen. Der hier besprochene Fall scheint mir jedoch für die meisten Anwendungen ausreichend und hat den Vorteil, daß sowohl seine Formulierung als auch sein Beweis nur wenig begrifflichen Aufwand benötigen. Den Fall eines Ikosaeders kann man daraus im übrigen auch noch erhalten, etwa indem man besagten Ikosaeder in Dreieckspyramiden mit einer Ecke im Ursprung zerlegt.

9.7.21. Ich formuliere nun einige Spezialfälle des allgemeinen Stokes'schen Satzes 9.7.2 in klassischer Notation, um die Lektüre älterer Texte zu erleichtern. Ich

hoffe jedoch, daß sich der für explizite Rechnungen und theoretische Überlegungen gleichermaßen bestens geeignete Formalismus der Differentialformen mit der Zeit auch bei den Anwendern durchsetzen wird.

Beispiel 9.7.22 (Wegintegral über ein Gradientenfeld). Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine eindimensionale Randfaltung und $\varphi : [a, b] \xrightarrow{\sim} M$ eine surjektive Integrationskarte. So besitzt M genau eine Orientierung, für die φ eine orientierte Integrationskarte ist. Gegeben eine Nullform alias Funktion f auf einer halboffenen Menge $U \Subset \mathbb{R}^n$, die M umfaßt, haben wir $df = \text{can}_s(\text{grad } f)$ und der Satz von Stokes erhält nach 9.6.16 und 9.4.9 die Gestalt

$$\int_a^b \langle \text{grad } f, d\varphi \rangle = \int_{\varphi} df = \int_{\vec{M}} df = \int_{\partial \vec{M}} f = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

In dieser Situation erhalten wir also erst einmal nur spezielle Fälle unserer Erkenntnis $\int_{\varphi} df = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$, die wir bereits allgemeiner für beliebiges stetig differenzierbares $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gezeigt hatten. Wir erhalten die dortige Erkenntnis im allgemeinen, wenn wir mit der Randfaltung $\vec{I} := [a, b]$ mit ihrer offensichtlichen Orientierung und mit der Funktion $f \circ \varphi$ arbeiten. Dann ergibt sich

$$\int_{\varphi} df = \int_a^b \varphi^*(df) = \int_{\vec{I}} \varphi^*(df) = \int_{\vec{I}} d(f \circ \varphi) = \int_{\partial \vec{I}} f \circ \varphi = (f \circ \varphi)|_a^b$$

Beispiel 9.7.23 (Schwerpunkt und Auftrieb homogener Körper). Ein homogener, als da heißt überall gleich dichter schwerer Körper K wird an einem Seil ins Wasser gelassen. Wir wollen uns überlegen, daß auch im Wasser der Schwerpunkt unseres Körpers in der Vertikalen unter dem Aufhängepunkt bleibt. Für inhomogene Körper gilt das im allgemeinen keineswegs. Wir denken uns unseren Körper als kompakte glatt berandete Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Schwerpunkt auf der z -Achse, also $\int_K x = \int_K y = 0$. Die Wasseroberfläche möge die Ebene $z = 0$ sein. Der Wasserdruck steigt linear mit der Tiefe, auf ein Oberflächenelement der Fläche σ um $p \in \partial K$ wirkt also die Kraft $z(p)N_p\sigma$ mit N_p dem nach außen orientierten Normalenvektor bei p . Befindet sich der Aufhängepunkt etwa in der Höhe $h < 0$, so wird das Drehmoment um diesen Aufhängepunkt das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial K} z(p)(N_p \times (p + h e_3))$$

Die Komponenten dieses Vektors bei $p = (x, y, z)$ mit $N_p = (N_1, N_2, N_3)$ sind $z(N_2(z+h) - N_3y)$, $z(N_3x - N_1(z+h))$ und $z(N_1y - N_2x)$ und können auch dargestellt werden als die Skalarprodukte von N_p mit den Vektorfeldern $v_1(x, y, z) = (0, z^2 + hz, -zy)$, $v_2(x, y, z) = (-z^2 - hz, 0, zx)$ und $v_3(x, y, z) = (zy, -zx, 0)$.

Es gilt also $\int_{\partial K} (N \cdot v_i) \sigma = 0$ zu zeigen. Mit dem Satz von Gauß können wir diese Integrale verwandeln in die Integrale $\int_K \operatorname{div} v_i$ und wegen $\operatorname{div} v_1 = -y$, $\operatorname{div} v_2 = x$ und $\operatorname{div} v_3 = 0$ verschwinden sie in der Tat alle drei.

Beispiel 9.7.24 (Klassischer Satz von Stokes). Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierte berandete Fläche oder präziser \mathcal{C}^2 -Randfaltungigkeit der Dimension 2. Sei N ihr orientiertes Normalenfeld 9.4.13. Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$, die M umfaßt, und bezeichne $\eta = \operatorname{can}_s(F)$ die zugehörige 1-Form. So finden wir $d\eta = \omega_{\operatorname{rot} F}$ in der Notation von 9.4.14 für das durch die Vorschrift

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

gegebene Vektorfeld auf U . Dies Vektorfeld ist die Rotation unseres Vektorfelds F , wie wir sie in 8.8.12 eingeführt haben. Nehmen wir nun zusätzlich an, der Weg $\varphi : [a, b] \rightarrow \partial M$ sei eine positiv orientierte surjektive Integrationskarte des Randes ∂M der Randfaltungigkeit M . Unser allgemeiner Satz von Stokes 9.7.2 spezialisiert in dieser Situation zum **klassischen Satz von Stokes**

$$\int_M N \cdot (\operatorname{rot} F) = \int_{\vec{M}} d\eta = \int_{\partial \vec{M}} \eta = \int_a^b F \cdot d\varphi$$

Allgemeiner könnte eine surjektive orientierte Integrationskarte des Randes als Definitionsbereich auch eine endliche disjunkte Vereinigung von kompakten Intervallen haben und dann erhalten wir rechts die Summe über die entsprechenden Wegintegrale. In Worten ist also das Wegintegral eines Vektorfeldes über den Rand einer Fläche gleich dem Fluß der Rotation des Vektorfeldes durch besagte Fläche.

9.7.25. Bei Anwendern, die hauptsächlich im \mathbb{R}^3 arbeiten, ist eine andere symbolische Schreibweise für grad , rot und div sehr beliebt: Sie betrachten den sogenannten **Nabla-Operator** ∇ , den man sich denkt als den „Vektor von Symbolen“ $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, und schreiben

$\nabla f = \operatorname{grad} f$, zu verstehen als symbolisches Produkt des Nabla-Vektors mit einer skalaren Funktion;

$\nabla \cdot F = \operatorname{div} F$, zu verstehen als symbolisches Skalarprodukt des Nabla-Vektors mit einer vektorwertigen Funktion; das Skalarprodukt wird von diesen Anwendern meist $v \cdot w$ notiert statt wie bei uns $\langle v, w \rangle$;

$\nabla \times F = \operatorname{rot} F$, zu verstehen als symbolisches Vektorprodukt des Nabla-Vektors mit einer vektorwertigen Funktion, wo eben das Vektorprodukt $v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$ aus der Geometrie des Raums [LA2] 2.4.1 zugrundegelegt wird.

In dieser Notation wird dann unsere Formel $dd\omega = 0$ für ω eine Funktion beziehungsweise eine 1-Form auf dem \mathbb{R}^3 verstanden als formal-symbolische Konsequenz der Formeln $v \times v = 0$ beziehungsweise $v \cdot (v \times w) = 0$ aus der Geometrie des Raums.

Beispiel 9.7.26 (Green'sche Formel). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte \mathcal{C}^2 -eckig berandete Teilmenge, versehen mit der von der Standardorientierung des \mathbb{R}^2 herkommenden Orientierung. Sei $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine surjektive orientierte Integrationskarte ihres Randes mit Q einer Vereinigung der paarweise disjunkten Intervalle $[a_i, b_i]$ für $1 \leq i \leq n$. Anschaulich sind die $\varphi : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ Stücke eines „im Gegenuhrzeigersinn auf dem Rand umlaufenden geschlossenen Integrationswegs“. Gegeben ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v = (v_1, v_2)$ auf einer offenen Umgebung von G betrachten wir die 1-Form $\langle v, \cdot \rangle = \eta = v_1 dx_1 + v_2 dx_2$. Sie hat das Differential $d\eta = (\text{rot } v) dx_1 \wedge dx_2$ für

$$\text{rot } v = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

die in 8.8.12 erklärte skalare Rotation eines Vektorfelds in der Ebene. Der Satz von Stokes mit Ecken 9.7.19 spezialisiert dann zur **Green'schen Formel**

$$\int_G \text{rot } v = \int_{\vec{G}} d\eta = \int_{\partial \vec{G}} \eta = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} v \cdot d\varphi$$

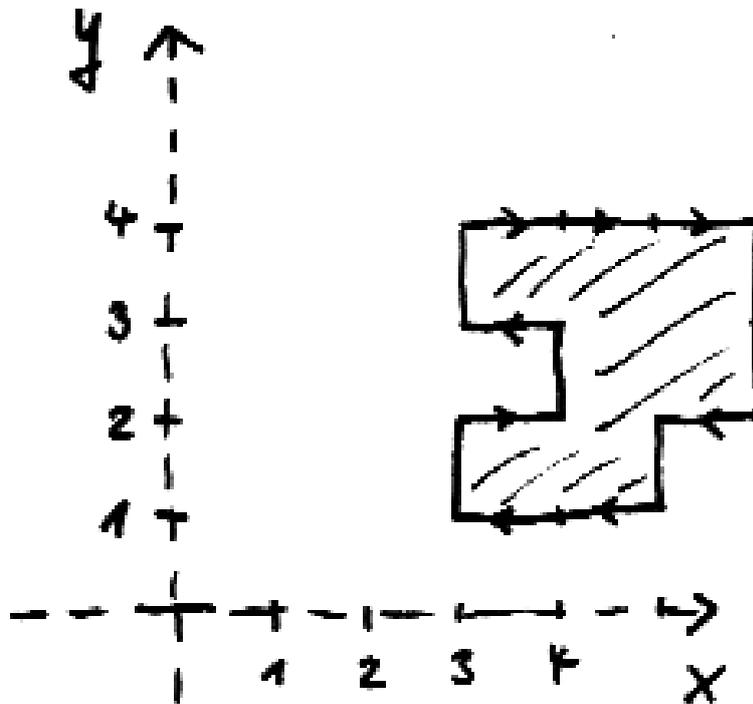
Diese Formel konnten Sie für G ein Rechteck bereits in 8.8.21 zur Übung prüfen.

Beispiel 9.7.27 (Fläche eines ebenen Gebiets). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ wie in 9.7.26 eine kompakte \mathcal{C}^2 -eckig berandete Teilmenge mit der von der Standardorientierung des \mathbb{R}^2 herkommenden Orientierung. Sei $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine surjektive orientierte Integrationskarte ihres Randes mit Q der Vereinigung der disjunkten Intervalle $[a_i, b_i]$ für $1 \leq i \leq n$ und mit den Komponenten $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Betrachten wir die 2-Form $\omega = x dy$ mit Differential $d\omega = dx \wedge dy$ und $\varphi^*\omega = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) dt$, so spezialisiert der allgemeine Satz von Stokes 9.7.2 zu einer Formel für die Fläche des Gebietes G , genauer zu der Regel

$$\int_G 1 = \int_{\vec{G}} dx \wedge dy = \int_{\partial \vec{G}} x \wedge dy = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \varphi_1(t)\varphi_2'(t) dt$$

Für achsenparallele Rechtecke prüft man das auch leicht ganz explizit nach.

9.7.28. Ich selber finde die alternative Interpretation dieser Formel mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes besonders anschaulich: Quillt in einem Moor überall gleichviel Wasser hoch, so können wir seine Fläche bestimmen, indem wir messen, wieviel Wasser in einem Graben um unser Moor abläuft. Wie genau das Wasser auf unserem Moor zum Randgraben läuft, ist dabei völlig unerheblich. Statt



Die Formel 9.7.27 für die Fläche eines ebenen Gebiets gilt nun natürlich ebenso für „Gebiete mit Ecken“. Diese Formel kann etwa angewandt werden, um ein GPS-Gerät so zu programmieren, daß es einem die Fläche des Gebiets berechnet, das man bei einem Rundweg umrundet hat. Im Spezialfall eines Gebiets, das von einem den Kanten eines Rechenpapiers folgenden Weg im Uhrzeigersinn umrundet wird, ergibt sich, wenn wir Stokes auf die Form $y dx$ anwenden, die Fläche als die Höhe des Schwerpunkts der Menge der horizontalen Kanten, wenn wir jede Kante nach rechts mit ihrer Höhe gewichten und jede Kante nach links mit dem Negativen ihrer Höhe. Für die Fläche des obigen Gebiets ergibt sich so

$$3 \times 4 + 2 - 2 \times 1 - 2 - 3 = 7$$

$\omega = x dy$ könnten wir also ein beliebiges ω mit $d\omega = dx \wedge dy$ nehmen und so weitere Formeln für die Fläche eines ebenen Gebiets erhalten.

9.7.29 (Alternativer Zugang zur Homotopieinvarianz bei Wegintegralen). Wir können nun auch einen besonders kurzen Beweis für die Homotopieinvarianz von Wegintegralen in geschlossenen Kovektorfeldern 8.8.8 geben für den Fall, daß wir zwei stetig differenzierbare Wege $\gamma, \psi : [0, 1] \rightarrow A$ betrachten und daß es dazwischen sogar eine zweimal stetig differenzierbare Homotopie $h : [0, 1]^2 \rightarrow A$ gibt. Wir nehmen genauer A offen in einem reellen Raum X an und $\omega : A \rightarrow \vec{X}^*$ ein stetig differenzierbares Kovektorfeld. Die Behauptung in 8.8.8 besagt ja gerade, daß aus $d\omega = 0$ folgt $\int_\gamma \omega = \int_\psi \omega$. Aber nun finden wir

$$\int_\gamma \omega - \int_\psi \omega = \int_{\partial([0,1]^2)} h^* \omega = \int_{[0,1]^2} d(h^* \omega) = \int_{[0,1]^2} h^*(d\omega) = 0$$

nach der Definition einer Homotopie, dem Satz von Stokes mit Ecken, der Verträglichkeit des Zurückholens von Formen mit dem äußeren Differential 9.5.11.4 und unserer Annahme $d\omega = 0$.

Übungen

Übung 9.7.30. Im Fall einer stetig differenzierbaren k -Form ω auf einer offenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums X zeige man für $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k \in \vec{X}$ linear unabhängig die Formel

$$(d\omega)_x(\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{k+1}} \int_{F(x, t\vec{v}_0, \dots, t\vec{v}_k)} \omega$$

mit $F(x, \vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k)$ der in geeigneter Weise orientierten Oberfläche eines Parallelepipedes mit Ecke x und Kantenvektoren \vec{v}_i , über die wir dann unsere k -Form integrieren. Hinweis: Satz von Stokes mit Ecken 9.7.19.

Übung 9.7.31. Man prüfe die Formel für die Fläche eines ebenen Gebiets im Fall eines achsenparallelen Rechtecks.

9.8 Der Hodge-Operator mit Anwendungen

Proposition 9.8.1 (Hodge-*-Operator). Gegeben ein endlichdimensionaler orientierter reeller Vektorraum V der Dimension n mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform t und $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p + q = n$ gibt es genau eine lineare Abbildung $* = *_t : \text{Alt}^p V \rightarrow \text{Alt}^q V$ mit

$$e_1^\top \wedge \dots \wedge e_p^\top \mapsto \varepsilon \eta_1 \dots \eta_p e_{p+1}^\top \wedge \dots \wedge e_n^\top$$

für jede angeordnete Orthogonalbasis e_1, \dots, e_n von V der Orientierung ε mit $\eta_i := t(e_i, e_i) = \pm 1 \forall i$.

9.8.2. Im Fall eines pseudo-euklidischen n -dimensionalen Vektorraums (V, S) mit vorgegebener Orientierung von S liefert dieselbe Konstruktion natürliche Isomorphismen

$$* : \text{Alt}^p(V) \otimes \mathbb{L}^{\otimes p} \xrightarrow{\sim} \text{or}_{\mathbb{R}}(V) \otimes \text{Alt}^q(V) \otimes \mathbb{L}^{\otimes q}$$

mit $*(v_1^\top \wedge \dots \wedge v_p^\top) \otimes \|v_1\| \otimes \dots \otimes \|v_p\| = \varepsilon \eta_1 \dots \eta_p \otimes (v_{p+1}^\top \wedge \dots \wedge v_n^\top) \otimes \|v_{p+1}\| \otimes \dots \otimes \|v_n\|$ für eine und jede angeordnete Basis v_1, \dots, v_n der Orientierung ε aus paarweise orthogonalen Vektoren mit η_i dem Vorzeichen von $t(v_i, v_i)$ für $t \in S_{>0}$. In diesem Fall gilt dann $*(\beta) = \eta_1 \dots \eta_n (-1)^{pq} \beta$.

Beweis. Ein möglicher Beweis besteht darin, das tapfer durchzurechnen. Dieser Zugang sei Ihnen zur Übung überlassen. Ein struktureller Beweis gelingt mit feineren Methoden der multilinearen Algebra und geht aus von einer gewissen Vertrautheit mit den äußeren Potenzen $\bigwedge^r V$ eines K -Vektorraums V nach [LA2] 8.5.14, mit ihrem Dachprodukt, mit der durch das Dachprodukt gegebenen nicht-ausgearteten Paarung $\bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \rightarrow \bigwedge^n V$ nach [LA2] 8.5.17 und mit den durch Zusammendachen und Einsetzen gegebenen Morphismen $\bigwedge^p(V^\top) \rightarrow \text{Alt}^r V \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^p(V))^\top$ nach [LA2] 8.5.9. Weiter erinnern wir die durch unsere Bilinearform t gegebene lineare Abbildung $\text{can}_t : V \rightarrow V^\top$ mit $e_i \mapsto \eta_i e_i^\top$ für eine Orthogonalbasis wie oben mit $t(e_i, e_i) = \varepsilon_i$. Schließlich erinnern wir das durch t und die Orientierung gegebene kanonische Element $\omega_t \in \bigwedge^n V$ maximalen Grades aus [LA2] 8.5.19, das bezüglich jeder Basis wie oben gegeben wird durch $\omega_t = \varepsilon e_1 \wedge \dots \wedge e_n$. Sie liefern Isomorphismen

$$\text{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p(V^\top) \xrightarrow{\sim} \bigwedge^p V \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\bigwedge^q V, \bigwedge^n V) \xrightarrow{\sim} (\bigwedge^q V)^\top \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^q V$$

und deren Verknüpfung hat die behauptete Eigenschaft. \square

9.8.3 (**Diskussion der Konventionen**). Die in der obigen Definition des Hodge-*-Operators 9.8.1 versteckten und in gewisser Weise willkürlichen Wahlen von Vorzeichen wurden so getroffen, daß im Fall eines Skalarproduktes t für alle α die n -Form $\alpha \wedge *\alpha$ auf verträglich orientierten angeordneten Basen nichtnegative Werte annimmt. Es wäre auch nicht besser oder schlechter, die Vorzeichen so zu wählen, daß das „umgekehrte Dach-Produkt“ in diesem Sinne „positiv definit“ wäre, aber auf eine Konvention muß man sich an dieser Stelle einigen.

Beispiel 9.8.4. Jedem Vektor $F \in \mathbb{R}^{n+1}$ hatten wir in 9.4.14 eine n -Form $\omega_F \in \text{Alt}^n(\mathbb{R}^{n+1})$ zugeordnet. Jedem Vektor v in einem endlichdimensionalen Skalarproduktraum (V, t) hatten wir in 8.1.16 den Kovektor $\text{can}_t(v) \in V^*$ zugeordnet. Im Fall (\mathbb{R}^{n+1}, s) des \mathbb{R}^{n+1} mit seinem Standardskalarprodukt und seiner Standardorientierung finden wir unmittelbar die Beziehung

$$\omega_F = *_s \text{can}_s(F)$$

Im Fall eines beliebigen endlichdimensionalen orientierten Skalarproduktraums nehmen wir diese Identität als Definition von ω_F .

Definition 9.8.5. Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ eines endlichdimensionalen reellen Raums X und eine Riemann'sche Metrik t auf U und ein differenzierbares Vektorfeld $v : U \rightarrow \vec{X}$ definieren wir die **Divergenz** unseres Vektorfelds als die Funktion

$$\operatorname{div}_t(v) = (*_t \circ d \circ *_t \circ \operatorname{can}_t)(v)$$

Obwohl der $*$ -Operator von einer zu wählenden Orientierung abhängt, ist die Divergenz wegen des doppelten Auftretens unseres $*$ -Operators davon unabhängig. Eine vielleicht noch natürlichere Beschreibung der Divergenz mithilfe der „Lie-Ableitung“ erklären wir in [?] ??.

Ergänzung 9.8.6. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist dieselbe in Bezug auf je zwei Riemann'sche Metriken, die durch Multiplikation mit einer positiven Konstanten auseinander hervorgehen.

Beispiel 9.8.7. Sei $X = \mathbb{R}^3$ mit der Standardorientierung und dem Standardskalarprodukt $t = s$ versehen. Gegeben ein differenzierbares Vektorfeld der Gestalt $v = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z$ mit differenzierbaren Funktionen $a, b, c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ finden wir die übliche Formel $\operatorname{div}(v) = a_x + b_y + c_z$, indem wir rechnen

$$\begin{aligned} v &= a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z \\ \operatorname{can}_s(v) &= adx + bdy + cdz \\ *_s(\operatorname{can}_s(v)) &= ady \wedge dz - bdx \wedge dz + cdx \wedge dy \\ d(*_s(\operatorname{can}_s(v))) &= a_x dx \wedge dy \wedge dz - b_y dy \wedge dx \wedge dz + c_z dz \wedge dx \wedge dy \\ *_s(d(*_s(\operatorname{can}_s(v)))) &= a_x + b_y + c_z \end{aligned}$$

Hier wäre es zwar in der Tat sehr viel einfacher gewesen, schlicht diese letzte Formel hinzuschreiben. Unsere neue Interpretation verträgt sich jedoch besser mit der Verwandtschaft, insbesondere da die äußere Ableitung d sich so gut mit Verwandtschaft verträgt, und ermöglicht so eine übersichtliche Darstellung in anderen orthogonalen Koordinaten. Um etwa die Divergenz in Polarkoordinaten zu bestimmen, erinnern wir uns daran, daß nach 8.3.11 unter der Polarkoordinatenabbildung P die Standardmetrik $s = dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2}$ auf der xy -Ebene verwandt ist zum 2-Tensor $g = dr^{\otimes 2} + r^2 d\vartheta^{\otimes 2}$. Damit rechnen wir dann vergleichsweise mühelos

$$\begin{aligned} v &= a\partial_r + b\partial_\vartheta \\ \operatorname{can}_g(v) &= adr + br^2 d\vartheta \\ *_g(\operatorname{can}_g(v)) &= ar d\vartheta - br dr \\ d(*_g(\operatorname{can}_g(v))) &= (a_r r + a) dr \wedge d\vartheta + b_\vartheta r dr \wedge d\vartheta \\ \operatorname{div}_g(v) = *_g(d(*_g(\operatorname{can}_g(v)))) &= a_r + b_\vartheta + r^{-1}a \end{aligned}$$

Definition 9.8.8. Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

und nennen Δ den **Laplaceoperator**.

9.8.9 (**Anschauung für den Laplaceoperator**). Der Wert $(\Delta f)(x)$ der durch Anwenden des Laplaceoperators Δ auf eine Funktion f entstehenden Funktion an einer Stelle x mißt die Abweichung des Funktionswerts bei x vom Durchschnitt der Funktionswerte in einer kleinen Umgebung von x . In einer Veränderlichen gilt zum Beispiel für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f''(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)}{2} - f(x) \right)$$

wie der Leser mithilfe der Taylorentwicklung leicht nachprüfen kann und vielleicht auch als Übung [AN1] 12.6.2.8 bereits geprüft hat. In mehreren Veränderlichen gilt in derselben Weise für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion mit der Notation e_i für die Vektoren der Standardbasis

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^n}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2^n} \left(\sum_{i=1}^n f(x + \varepsilon e_i) + f(x - \varepsilon e_i) \right) - f(x) \right)$$

9.8.10 (**Laplace-Operator in anderen Koordinaten**). Um den Laplaceoperator Δ in anderen Koordinaten auszudrücken, kann man von der Darstellung

$$\Delta f = *_s d *_s df$$

ausgehen, mit s der üblichen Riemann'schen Metrik auf \mathbb{R}^n und $*_s$ dem zu dieser Metrik und der Standardorientierung gehörenden Hodge-*-Operator. Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X und eine offene Teilmenge $V \subseteq X$ und ein differenzierbare Abbildung $\phi : V \rightarrow U$ mit bijektivem Differential an jeder Stelle und eine zur Standardmetrik ϕ -verwandte Riemann'sche Metrik t auf V haben wir dann die Verwandtschaft $\phi : *_t d *_t d(f \circ \phi) \rightsquigarrow *_s d *_s df = \Delta f$. Ist speziell etwa ϕ die Polarkoordinaten- oder die Kugelkoordinatenabbildung, so läßt sich das auch sehr konkret und explizit berechnen.

Beispiel 9.8.11 (Laplaceoperator in Polarkoordinaten). Wir berechnen den Laplaceoperator einer Funktion f in Polarkoordinaten und finden ähnlich wie in 9.8.7 der Reihe nach

$$\begin{aligned} df &= f_r dr + f_\vartheta d\vartheta \\ *_g(df) &= f_r r d\vartheta - r^{-1} f_\vartheta dr \\ d(*_g(df)) &= (f_{rr} r + f_r + r^{-1} f_{\vartheta\vartheta}) dr \wedge d\vartheta \\ *_g(d(*_g(df))) &= f_{rr} + r^{-1} f_r + r^{-2} f_{\vartheta\vartheta} \end{aligned}$$

Übungen

Übung 9.8.12. Gegeben ein endlichdimensionaler orientierter reeller Skalarproduktraum mit Skalarprodukt t finden wir für den Hodge-* t -Operator $*_t : \text{Alt}^p V \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^q V$ für alle $\lambda \in V^\top$ die Identität

$$* \circ (\lambda \wedge) \circ * = (-1)^{n-p+1} i_\lambda$$

für $\text{can}_t : v \mapsto \lambda$ mit den Einsetzungshomomorphismen i_λ aus [LA2] 8.5.21. Im allgemeinen finden wir dasselbe mit einem Vorzeichen, auf das es uns hier nicht ankommen soll.

Weiterführende Übung 9.8.13 (Anschauliche Bedeutung der Divergenz). Man zeige, daß die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfelds auf \mathbb{R}^n genau die „lokale Volumenänderung unter dem Fluß 6.6.1 des besagten Vektorfelds“ beschreibt, daß genauer für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger f gilt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int f \circ X^t = - \int f \operatorname{div} X$$

Hier ist zu beachten, daß auf jedem Kompaktum der Fluß für eine positive Zeitspanne existiert. Hinweis: Man schränke sich auf den Fall von glattem f ein, ziehe die zeitliche Ableitung unter das Integral und beachte, daß das Integral über ganz \mathbb{R}^n jeder partiellen Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion mit kompaktem Träger verschwindet.

Übung 9.8.14. Für r -Formen α auf einem orientierten n -dimensionalen Vektorraum mit nichtausgearteter symmetrischer Bilinearform t und $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ prüfe man die Formel $*_{\lambda t} \alpha = (\lambda^r / |\lambda|^{n/2}) *_t \alpha$. Insbesondere gilt für 2-Formen α auf einem vierdimensionalen Raum und $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ stets $*_{\lambda t} \alpha = *_t \alpha$.

Übung 9.8.15. Wir betrachten wieder Kugelkoordinaten wie in 4.2.3. Man zeige, daß für das zum Vektorfeld $a\partial_r + b\partial_\vartheta + c\partial_\varphi$ verwandte Feld auf dem xyz -Raum die Divergenz verwandt ist zur Funktion $a_r + b_\vartheta + c_\varphi + 2r^{-1}a + b \cot \vartheta$.

Übung 9.8.16 (Mehr Anschauung für den Laplaceoperator). Man zeige, daß der Laplaceoperator invariant ist unter Drehungen. Ist genauer $A \in O(n)$ eine orthogonale Matrix und bezeichnet $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die zugehörige lineare Abbildung, so zeige man für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel $\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$. Man folgere die Formel

$$(\Delta f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^n}{\varepsilon^2} \left(\frac{\int_{\|y-x\|=\varepsilon} f(y) \sigma\langle y \rangle}{\int_{\|y-x\|=\varepsilon} \sigma\langle y \rangle} - f(x) \right)$$

auf deren rechter Seite nach dem Faktor $2^n/\varepsilon^2$ bis auf ein Vorzeichen die Differenz zwischen dem Funktionswert $f(x)$ und dem Durchschnitt der Funktionswerte

auf einer Kugelschale mit Zentrum in x und Radius ε steht. Hinweis: Man mitte 9.8.9. Die Taylorentwicklung oben liefert in einer Veränderlichen sogar präziser die Darstellung

$$\frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)}{2} - f(x) \right) = (f''(\xi^+) + f''(\xi^-))/2$$

mit $\xi^+ \in (x, x + \varepsilon)$ und $\xi^- \in (x - \varepsilon, x)$.

Ergänzende Übung 9.8.17 (Drehinvariante Differentialoperatoren). Die polynomialen Funktionen $D \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ auf dem \mathbb{R}^n , die invariant sind unter allen Drehungen $A \in \text{SO}(n)$, sind genau alle Polynome im quadrierten Abstand vom Nullpunkt, in Formeln

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{\text{SO}(n)} = \mathbb{C}[(X_1^2 + \dots + X_n^2)]$$

Die Differentialoperatoren $D \in \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ mit konstanten Koeffizienten auf dem \mathbb{R}^n , die invariant sind unter allen Drehungen $A \in \text{SO}(n)$, sind genau alle Polynome im Laplace-Operator, in Formeln

$$\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n]^{\text{SO}(n)} = \mathbb{C}[\Delta]$$

Übung 9.8.18 (Laplaceoperator in Kugelkoordinaten). Man zeige, daß der Laplaceoperator einer Funktion f in den Kugelkoordinaten aus 4.2.3 gegeben wird durch die Formel

$$\Delta f = f_{rr} + 2r^{-1} f_r + r^{-2} f_{\vartheta\vartheta} + r^{-2} f_{\vartheta} \cot \vartheta + (r \sin \vartheta)^{-2} f_{\varphi\varphi}$$

Hinweis: Statt das direkt zu rechnen, kann man auch von 8.3.15 und 9.8.15 ausgehen.

Ergänzende Übung 9.8.19 (Die Maxwell'schen Gleichungen). Wir bezeichnen die Koordinaten des \mathbb{R}^4 mit x, y, z, t und betrachten auf dem \mathbb{R}^4 oder allgemeiner einer halboffenen Teilmenge desselben eine glatte 2-Form

$$F = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt \\ + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy$$

So ist die Gleichung $dF = 0$ äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$\text{div } B = 0 \quad \text{und} \quad \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

für $\text{rot } E$ der Rotation wie in 8.8.12 und $\text{div } B$ der Divergenz alias der Summe der partiellen Ableitungen nach x, y und z wie in 9.7.11. Leser mit physikalischer

Vorbildung erkennen die beiden ersten Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum. Betrachten wir zusätzlich die sogenannte „Lorentzmetrik“

$$l := dx^{\otimes 2} + dy^{\otimes 2} + dz^{\otimes 2} - c^2 dt^{\otimes 2}$$

mit einer reellen Konstante $c \neq 0$, so ist die Gleichung $d(*_l F) = 0$ äquivalent zu den beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum

$$\operatorname{div} E = 0 \quad \text{und} \quad c^2 \operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t}$$

Der Formalismus der Verwandtschaft von Differentialformen sagt uns dann, in welcher Weise ein elektromagnetisches Feld F in andere Koordinaten umgeschrieben werden muß, und daß die Maxwell'schen Gleichungen in diesem Sinne nicht von der Wahl der Koordinaten abhängen.

Ergänzung 9.8.20 (Lichtwellen). Fassen wir die Raumzeit in der in [LA2] 4.7.5 erklärten Weise auf als einen pseudo-euklidischen Raum X von Typ $(3, 1)$, so ist ein elektromagnetisches Feld eine glatte Zweiform $F : X \rightarrow \operatorname{Alt}^2(\vec{X})$ und die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum bedeuten die Bedingungen

$$dF = d(*F) = 0$$

Wir denken uns nun allgemeiner einen endlichdimensionalen Raum X mit einer symmetrischen nichtausgearteten Bilinearform l auf \vec{X} und interessieren uns für komplexe p -Formen $F : X \rightarrow \operatorname{Alt}^p(\vec{X}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ mit $dF = 0$ und $d(*_l F) = 0$. Speziell untersuchen wir Lösungen der Gestalt

$$F(p + \vec{v}) = \exp(i\lambda(\vec{v}))A$$

mit $A \in \operatorname{Alt}^p(\vec{X})_{\mathbb{C}}$. Für die Funktion $\vec{X} \rightarrow \mathbb{C}$, $\vec{v} \mapsto \exp(i\lambda(\vec{v}))$ finden wir als Differential $d \exp(i\lambda(\vec{v})) = \exp(i\lambda(\vec{v}))i\lambda$ und unsere Gleichungen $dF = 0$ und $d(*_l F) = 0$ für $F(p + \vec{v}) = \exp(i\lambda(\vec{v}))A$ erweisen sich als äquivalent zu $\lambda \wedge A = 0$ sowie $\lambda \wedge (*_l A) = 0$. Bezeichne l auch die auf \vec{X}^* induzierte Bilinearform. Im Fall $l(\lambda, \lambda) \neq 0$ könnten wir λ zu einer orthogonalen Basis von \vec{X}^* ergänzen. Indem wir dann A in der zugehörigen Basis der äußeren Potenz schreiben, folgt sofort $A = 0$. Aus $A \neq 0$ folgt mithin

$$l(\lambda, \lambda) = 0$$

Im Fall $\lambda = 0$ erhalten wir so die konstanten Lösungen $F = A$ für A beliebig. Gilt dahingegen $\lambda \in \vec{X}^* \setminus \{0\}$, so bedeutet unsere Erkenntnis $l(\lambda, \lambda) = 0$ im Fall der Maxwell'schen Gleichungen, daß sich „Lichtwellen mit Lichtgeschwindigkeit

ausbreiten“. Jetzt konzentrieren wir uns auf den Fall der Raumzeit. Unter der Annahme $\lambda \neq 0$ folgt aus $\lambda \wedge A = 0$ sofort $A = \lambda \wedge \mu$. Außerdem ist $\lambda \wedge (*A) = 0$ mit 9.8.12 gleichbedeutend zu $i_{l(\lambda, \cdot)}(A) = 0$ und wegen $l(\lambda, \lambda) = 0$ weiter zu $l(\lambda, \mu) = 0$. Mögliche Lösungen der Gleichungen $\lambda \wedge A = 0 = \lambda \wedge (*A)$ für $A \in \text{Alt}^2(\vec{X})$ sind also alle

$$A = \lambda \wedge \mu$$

mit $l(\lambda, \mu) = 0$, wobei μ und $\mu + b\lambda$ für alle $b \in \mathbb{R}$ dieselbe Lösung A liefern. Zeichnen wir nun eine Zeitachse aus, also eine Gerade $\vec{T} \subset \vec{X}$, auf der l negativ definit ist, und setzen $\vec{R} := T^\perp$ und zerlegen $\vec{X} = \vec{T} \oplus \vec{R}$ und zerlegen $\lambda = \tau + \eta$ entsprechend, so kann jede Lösung eindeutig in der Form $A = \lambda \wedge \mu$ geschrieben werden mit $\mu \in \vec{R} \cap \eta^\perp$. Anschaulich gesprochen ist \vec{R} der dreidimensionale Raum der räumlichen Richtungsvektoren in Bezug auf unsere ausgezeichnete Zeitachse, der räumliche Richtungsvektor η kodiert Richtung und Frequenz unserer Lichtwelle und $\vec{R} \cap \eta^\perp$ ist der zweidimensionale Raum der räumlichen auf der Lichtrichtung η senkrechten Richtungsvektoren. Jede komplexe Lösung für $A \in \text{Alt}^2(\vec{X})_{\mathbb{C}}$ hat dann entsprechend die Gestalt $A = \lambda \wedge \mu$ mit $\mu \in (R \cap \eta^\perp)_{\mathbb{C}}$ und wir erhalten auch einen Isomorphismus zwischen $(R \cap \eta^\perp)_{\mathbb{C}}$ und dem Raum der reellen Lösungen der Gestalt $F(p + \vec{v}) = \exp(i\lambda(\vec{v}))A^+ + \exp(-i\lambda(\vec{v}))A^-$ durch die Vorschrift

$$\mu \mapsto \text{Re}(\exp(i\lambda(\vec{v}))\lambda \wedge \mu)$$

In der physikalischen Terminologie kodiert unser Kovektor λ die „Ausbreitungsrichtung und Frequenz“ unserer Lichtwelle und $\mu \in (R \cap \eta^\perp)_{\mathbb{C}}$ ihre „Stärke und Polarisierung“. Schreiben wir $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ mit $\mu_1, \mu_2 \in (R \cap \eta^\perp)$, so erkennen wir unschwer, daß wir $\alpha \in S^1$ finden können mit $\alpha\mu = \mu'_1 + i\mu'_2$ und $\mu'_1 \perp \mu'_2$. Der allgemeine Fall heißt der Fall **elliptischer Polarisierung**. Im Fall $\mu_1 \perp \mu_2$ und $\|\mu_1\| = \|\mu_2\|$ spricht man von **zirkularer Polarisierung** und im Fall von linear abhängigen μ_1, μ_2 von **linearer Polarisierung**.

Ergänzung 9.8.21. Auf einem Raum V einer geraden Dimension $2n$ mit nicht-ausgearteter symmetrischer Bilinearform l hängt nach 9.8.2 sogar $*_l : \text{Alt}^n V \rightarrow \text{Alt}^n V \otimes_{\text{or}_{\mathbb{R}}} V$ nur von der durch l repräsentierten pseudo-euklidischen Struktur ab. Das zeigt die „konforme Invarianz“ der Maxwell'schen Gleichungen.

10 Erste Schritte in klassischer Mechanik

10.1 Newton'sche Bewegungsgleichungen

10.1.1. Wie in [LA1] 6.5.11 fixieren wir einen eindimensionalen orientierten reellen affinen Raum

$$\mathbb{T}$$

und nennen ihn die **Zeit**. Die Elemente seines Richtungsraums nennen wir **Zeitspannen**. Die **Sekunde** unserer schmutzigen Anschauung entspricht einer positiven Zeitspanne $s \in \vec{\mathbb{T}}_{>0}$. Weiter fixieren wir einen dreidimensionalen euklidischen affinen Raum

$$\mathbb{E}$$

im Sinne von [LA2] 3.1.1 und nennen ihn den **Anschauungsraum**. Ich erinnere daran, daß wir in [LA2] 3.1.1 einen euklidischen Raum eingeführt hatten als einen reellen affinen Raum mit einer euklidischen Struktur auf seinem Richtungsraum und daß wir so eine euklidische Struktur hinwiederum erklärt hatten als eine Ursprungsgerade im Raum der Bilinearformen, die mindestens ein Skalarprodukt enthält. Wir hatten in [LA2] 3.3.7 eine Bijektion zwischen derartigen euklidischen Strukturen und möglichen Wahlen sogenannter „Bewegungsgruppen“ konstruiert, die hier nicht wiederholt werden soll. Wie in [LA2] 3.1.13 konstruieren wir zu unserem euklidischen Raum \mathbb{E} einen orientierten eindimensionalen reellen Vektorraum, seine **Längengerade** $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\mathbb{E})$, und erinnern aus [LA2] 8.4.6 das **konkrete Skalarprodukt**

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_k = \langle \cdot, \cdot \rangle : \vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes 2}$$

mit Werten in der **Gerade der Flächeneinheiten** $\mathbb{L}^{\otimes 2}$. Das **Meter** $m \in \mathbb{L}_{>0}$ ist ein positives Element der schmutzigen Längengerade. Das konkrete Skalarprodukt auf dem Richtungsraum des schmutzigen Anschauungsraums nimmt also Werte in einem eindimensionalen reellen Vektorraum an, für den das Quadratmeter $m^2 := m^{\otimes 2} := m \otimes m$ eine Basis ist. Des weiteren haben wir in [LA2] 3.1.13 auch eine Abbildung

$$\| \cdot \| : \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{L}_{\geq 0}$$

namens **Längenabbildung** eingeführt, die mit dem konkreten Skalarprodukt geschrieben werden kann als $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

10.1.2. Um die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu formulieren wählen wir zusätzlich einen eindimensionalen orientierten reellen Vektorraum

$$\mathbb{M}$$

und nennen dessen nichtnegative Elemente **Massen**. Ein schmutziges positives Element von \mathbb{M} ist beispielsweise das in der französischen Revolution gewählte **Gramm** $g \in \mathbb{M}_{>0}$, das dadurch bestimmt wird, daß 1000 g in etwa die Masse eines Wasserwürfels der Kantenlänge 0,1 m ist. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen beschreiben die Bewegung eines Körpers oder Teilchens in Abhängigkeit von seiner Masse. Diese Masse kann etwa bestimmt werden durch das Aufwiegen mit Wasser und Bestimmung des benötigten Wasservolumens oder, wenn man es genauer braucht, durch den Vergleich mit der Masse eines im „Bureau international des poids et mesures“ in Sèvres bei Paris seit 1889 sorgsam gehüteten Zylinders aus einer Platin-Iridium-Legierung, des **Urkilogramms**.

10.1.3. Gegeben ein bewegtes Teilchen im Sinne der Newton'schen Mechanik alias eine glatte Abbildung von der Zeit \mathbb{T} in den Anschauungsraum

$$\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$$

ist ihr Differential 2.3.1 eine Abbildung $\dot{\gamma} : t \mapsto d_t \gamma, \mathbb{T} \rightarrow \text{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}})$. Unter unserer Identifikation $\text{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{\mathbb{E}}) \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ aus [LA2] 8.1.21 wird es zu einer Abbildung

$$\dot{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$$

Man nennt $\dot{\gamma}(t)$ die **Geschwindigkeit** oder präziser **vektorielle Geschwindigkeit** unseres Teilchens zum Zeitpunkt t . Das geometrische Skalarprodukt auf $\vec{\mathbb{E}}$ liefert offensichtlich auf $\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ eine Bilinearform mit Werten in $(\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$. Der zugehörige Absolutbetrag des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\gamma}(t) \in \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ heißt die **absolute Geschwindigkeit**

$$\|\dot{\gamma}(t)\| := \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} \in (\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)_{\geq 0}$$

unseres Teilchens zum Zeitpunkt t .

10.1.4 (**Notation für Einheiten**). Um unserer Notation der Einheiten die Schwere zu nehmen, vereinbaren wir für unsere eindimensionalen Vektorräume von Einheiten die Notation als Erzeugnis eines üblichen Erzeugers in Erzeugerklammern, also etwa

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{T}} &= \langle s \rangle && \text{mit } s \text{ für „Sekunde“,} \\ \mathbb{L} &= \langle m \rangle && \text{mit } m \text{ für „Meter“ oder} \\ \mathbb{M} &= \langle g \rangle && \text{mit } g \text{ für „Gramm“.} \end{aligned}$$

Weiter notieren wir bei unseren eindimensionalen Räumen die duale Basis des Dualraums statt v^\top meist v^{-1} oder $1/v$, so daß wir den Dualraum $\vec{\mathbb{T}}^*$ des Raums der Zeitspannen $\vec{\mathbb{T}}^* = \langle 1/s \rangle$ oder $\vec{\mathbb{T}}^* = \langle s^{-1} \rangle$ schreiben können. Schließlich lassen wir in diesem Zusammenhang die \otimes -Zeichen meist weg und schreiben für ganze Zahlen $r \in \mathbb{Z}$ kürzer v^r für unser Element $v^{\otimes r} \in V^{\otimes r}$ aus [LA2] 8.1.14. So wird

$\langle m^2 \rangle = \mathbb{L}^{\otimes 2}$ eine Notation für den eindimensionalen orientierten reellen Vektorraum der Flächeneinheiten. In derselben Weise schreiben wir m/s für den Vektor $m \otimes s^{\otimes (-1)} \in \mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ und notieren diesen Raum $\mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* = \mathbb{L}\langle 1/s \rangle = \langle m/s \rangle$. Seine nichtnegativen Elemente heißen **Geschwindigkeiten** oder ausführlicher **absolute Geschwindigkeiten**.

10.1.5 (Zeitliche Ableitungen). Allgemeiner erklären wir für einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum X und eine glatte Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \supset I \rightarrow X$ von einem Zeitintervall I nach X und $t_0 \in I$ ganz allgemein

$$\dot{\gamma}(t_0) = d_{t_0}\gamma = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

Hier ist die Mitte ein Element von $\text{Hom}(\vec{\mathbb{T}}, \vec{X})$, das wir mittels des Standardisomorphismus als Element von $\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* = \vec{X}\langle 1/s \rangle$ auffassen. Ebenso ist der Limes in diesem Raum zu verstehen und der Quotient formal als Tensorprodukt mit dem zum Richtungsvektor $t - t_0$ dualen Frequenzvektor. Die zeitliche Ableitung eines größeren Ausdrucks γ notieren wir $\dot{\gamma}(t) = d_t\gamma$ oder $\dot{\gamma}(t_0) = d_{t_0}\gamma(t)$ oder etwas verschludert $\dot{\gamma}(t) = d_t\gamma(t)$, weil sich bei größeren Ausdrücken die Funktion schlecht ohne Variable notieren läßt. Ist $\varphi : X \rightarrow Y$ eine affine Abbildung in einen weiteren endlichdimensionalen affinen Raum Y , so finden wir

$$d_t(\varphi \circ \gamma) = \vec{\varphi}\langle 1/s \rangle \circ \dot{\gamma}$$

mit der abkürzenden Notation $\vec{\varphi}\langle 1/s \rangle : \vec{X}\langle 1/s \rangle \rightarrow \vec{Y}\langle 1/s \rangle$ für die vom linearen Anteil $\vec{\varphi} : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ von φ induzierte Abbildung. Ist X bereits selbst ein Vektorraum, so verschlucken wir den Isomorphismus $\text{trans} : X \xrightarrow{\sim} \vec{X}$ meist in der Notation und schreiben $\dot{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow X$ für die Abbildung, die genau genommen $\text{trans}^{-1} \circ \dot{\gamma}$ notiert werden müßte. Analog ginge es für Abbildungen von einem beliebigen eindimensionalen reellen affinen Raum, aber die Notation mit einem hochgestellten Punkt und der Buchstabe t sind in der Physik a priori für zeitliche Ableitungen und Zeiten reserviert.

10.1.6 (Produktregel für zeitliche Ableitungen). Sind $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow V$ und $\alpha : \mathbb{T} \rightarrow W$ differenzierbare Abbildungen in endlichdimensionale reelle Vektorräume und $b : V \times W \rightarrow U$ eine bilineare Abbildung in einen weiteren endlichdimensionalen reellen Vektorraum, so wird die zeitliche Ableitung von $t \mapsto b(\gamma(t), \alpha(t))$ gegeben durch

$$d_t b(\gamma(t), \alpha(t)) = b(\dot{\gamma}(t), \alpha(t)) + b(\gamma(t), \dot{\alpha}(t))$$

Das folgt aus dem Zusammenwirken der Formel für das Differential bilinearier Abbildungen 2.6.5, der Komponentenregel 2.6.1 und der Kettenregel. Genau genommen meint b rechts dabei die von b induzierten Abbildungen $b : V\langle 1/s \rangle \times W \rightarrow U\langle 1/s \rangle$ beziehungsweise $b : V \times W\langle 1/s \rangle \rightarrow U\langle 1/s \rangle$.

10.1.7. Gegeben $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ zweimal differenzierbar notiert man das Differential der vektoriellen Geschwindigkeit $\dot{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s \rangle$ kurz

$$\ddot{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s^2 \rangle$$

Wir denken uns γ als die mathematische Beschreibung eines bewegten Teilchens und nennen $\ddot{\gamma}(t)$ die **Beschleunigung** oder genauer **vektorielle Beschleunigung** unseres Teilchens zum Zeitpunkt t . Mit der **absoluten Beschleunigung** meinen wir dahingegen analog wie im Fall von Geschwindigkeiten den Betrag $\|\ddot{\gamma}(t)\| \in \langle m/s^2 \rangle$ der vektoriellen Beschleunigung.

10.1.8. Unter einem **Kraftfeld** versteht man eine Abbildung

$$F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}\langle g/s^2 \rangle$$

Hier verstehen wir im Sinne unserer neuen Notation $\langle g/s^2 \rangle = \mathbb{M} \otimes (\vec{\mathbb{T}}^*)^{\otimes 2}$. Der Buchstabe F erinnert an englisch **force**. Unter der **Newton'schen Bewegungsgleichung** für die Bewegung eines Teilchens positiver Masse $m \in \mathbb{M}_{>0}$ in einem Kraftfeld F versteht man die Forderung „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ und in Formeln ausgedrückt die Gleichheit

$$F \circ \gamma = m\ddot{\gamma}$$

von Abbildungen $\mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}\langle g/s^2 \rangle$, der die Bewegung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ unseres Teilchens gehorchen soll.

10.1.9 (**Zeitabhängiges Kraftfeld**). Wenn die Kraft zusätzlich von der Zeit abhängt, in Formeln also durch eine Abbildung $F : \mathbb{E} \times \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}\langle g/s^2 \rangle$ gegeben wird, so lautet die **Newton'schen Bewegungsgleichung** allgemeiner

$$F(\gamma(t), t) = m\ddot{\gamma}(t)$$

10.1.10. Unter einem **Gravitationsfeld** versteht man eine Abbildung

$$G : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s^2 \rangle$$

Die von einem derartigen Feld auf ein Teilchen positiver Masse $m \in \mathbb{M}_{>0}$ ausgeübte Kraft F wird per definitionem gegeben durch die Vorschrift

$$F = mG$$

Die Bewegungsgleichung für die Bewegung $\mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s^2 \rangle$ eines Teilchens positiver Masse in einem Gravitationsfeld G lautet folglich

$$G \circ \gamma = \ddot{\gamma}$$

Ergänzung 10.1.11. A priori könnte man auch eine konsistente Theorie formulieren, die zwei Arten von Massen postuliert, als da heißt zwei orientierte eindimensionale reelle Vektorräume \mathbb{M}_{sch} und \mathbb{M}_{tr} , und in der jedem Teilchen zwei Arten von Masse zugeordnet würden, seine **schwere Masse** $m_{\text{sch}} \in \mathbb{M}_{\text{sch}}$ und seine **träge Masse** $m_{\text{tr}} \in \mathbb{M}_{\text{tr}}$. Ein Kraftfeld hätte per definitionem Werte in $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/s^2 \rangle \otimes \mathbb{M}_{\text{tr}}$ und die Bewegungsgleichung in besagtem Kraftfeld hätte die Gestalt

$$m_{\text{tr}}\ddot{\gamma} = F \circ \gamma$$

Dahingegen würde ein Gravitationsfeld Werte in $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/s^2 \rangle \otimes \mathbb{M}_{\text{tr}} \otimes \mathbb{M}_{\text{sch}}^*$ annehmen und die jeweils auf unser Teilchen wirkende Kraft wäre durch die Multiplikation des Gravitationsfelds mit seiner schweren Masse m_{sch} zu berechnen. Mit der Waage mäße man also die schwere Masse und durch die Beobachtung etwa von Stößen mit einem „Referenzteilchen“ und Ausnützen der im folgenden noch zu besprechenden „Impulserhaltung“ die träge Masse. Ein durch viele Experimente bestätigtes Prinzip der klassischen Mechanik ist die **Gleichheit von träger und schwerer Masse**, so daß wir stets $m_{\text{sch}} = m_{\text{tr}}$ annehmen und ohne nähere Spezifikation schlicht von der **Masse** eines Teilchens reden werden.

10.1.12. Das Gravitationsfeld an der Erdoberfläche kann lokal recht gut approximiert werden durch ein konstantes Feld \vec{g} mit $\vec{g} \sim (9,8)\vec{m}/s^2$, wobei $\vec{m} \in \vec{\mathbb{E}}$ denjenigen einen Meter langen Vektor bezeichnet, der an der gegebenen Stelle in Richtung des Erdmittelpunktes zeigt. Man schreibt auch $\|\vec{g}\| := g \sim (9,8)m/s^2$ für den Betrag dieses konstanten Feldes und nennt diese absolute Beschleunigung die **Erdbeschleunigung**. Ob der Buchstabe g das Gramm oder die Erdbeschleunigung meint, muß aus dem Kontext erschlossen werden.

Beispiel 10.1.13 (**Flugbahn eines geworfenen Massenpunktes**). Für die Bewegung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ eines nur der Gravitationskraft ausgesetzten Massepunktes an der Erdoberfläche, etwa einer Kanonenkugel oder eines Schneeballs, muß nach dem Vorhergehenden die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt die Erdbeschleunigung sein, in Formeln

$$\ddot{\gamma}(t) = \vec{g}$$

Um die Lösungen zu finden, betrachten wir erst einmal ohne Einheiten einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und einen ausgezeichneten Vektor $v \in V$ und eine zweimal differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow V$ mit $f''(x) = v$ für alle x . Durch zweifaches vektorwertiges Integrieren finden wir unschwer, daß alle Lösungen die Gestalt $f(x) = x^2v/2 + xw + u$ für $w, u \in V$ haben. Das legt es nahe, einen Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{T}$ fest zu wählen und es mit dem Ansatz

$$\gamma(t) = (t - t_0)^2\vec{g}/2 + (t - t_0)\vec{v}_0 + p_0$$

für $\vec{v}_0 \in \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s \rangle$ und $p_0 \in \mathbb{E}$ zu versuchen. Das erweist sich in der Tat als eine Lösung. Genau genommen ist $\otimes : \vec{\mathbb{T}} \times \vec{\mathbb{T}} \rightarrow \vec{\mathbb{T}}^{\otimes 2}$ eine bilineare Abbildung und die

Abbildung $\alpha : t \mapsto t - t_0$ hat konstant die Ableitung $\dot{\alpha} = 1 \in \vec{\mathbb{T}}\langle 1/s \rangle$ und mit der Produktregel 10.1.6 für die zeitliche Ableitung erhalten wir $\dot{\gamma}(t) = (t - t_0)\vec{g} + \vec{v}_0$ und $\ddot{\gamma}(t) = \vec{g}$ wie gewünscht. Daß das auch die einzigen Lösungen sind, folgt unschwer daraus, daß es im von Einheiten befreiten Fall gilt. Durch Einsetzen finden wir, daß $p_0 = \gamma(t_0)$ der Ort zum Zeitpunkt t_0 ist und $\vec{v}_0 = \dot{\gamma}(t_0)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 .

Beispiel 10.1.14 (Flugbahn eines geworfenen Massenpunktes, Variante). Für die Bewegung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ eines nur der Gravitationskraft ausgesetzten Massepunktes an der Erdoberfläche, etwa einer Kanonenkugel oder eines Schneeballs, muß nach dem Vorhergehenden die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt die Erdbeschleunigung sein, in Formeln

$$\ddot{\gamma}(t) = \vec{g}$$

für alle Zeiten $t \in I$. Um das zu konkretisieren bezeichne $\tau : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}$ die Identifikation der reellen Zahlengeraden mit der Zeitachse mittels der Abbildungsvorschrift $\tau : x \mapsto t_0 + xs$ für einen beliebig gewählten Startzeitpunkt t_0 und unsere Zeiteinheit Sekunde $s \in \vec{\mathbb{T}}$. Dann werden die Ableitungen der Verknüpfung $\gamma \circ \tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$, $x \mapsto \gamma(t_0 + xs)$ nach der Kettenregel gegeben durch $d_x(\gamma \circ \tau) = d_{\tau(x)}\gamma \circ d_x\tau$ und Anwenden auf $\vec{1}$ liefert

$$(\gamma \circ \tau)'(x) = (d_{\tau(x)}\gamma)(s) = (\dot{\gamma} \circ \tau)(x) \otimes s$$

als Gleichung in $\vec{\mathbb{E}}$ mit $(\otimes s) : \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s \rangle \rightarrow \vec{\mathbb{E}}$ dem offensichtlichen Isomorphismus. Nochmaliges Anwenden derselben Rechnung liefert

$$(\gamma \circ \tau)''(x) = (\dot{\gamma} \circ \tau)'(x) \otimes s = (\ddot{\gamma} \circ \tau)(x) \otimes s^2$$

So erhalten wir für die Bewegung unseres Teilchens in unserer von Einheiten befreiten Zeitkoordinate x die Bewegungsgleichung

$$(\gamma \circ \tau)''(x) = s^2 \vec{g}$$

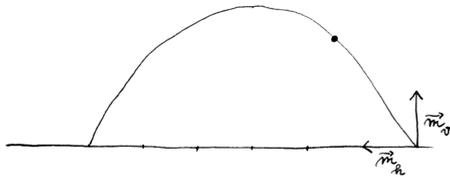
Deren allgemeine Lösung ergibt sich durch direktes Integrieren zu

$$\gamma(xs + t_0) = (\gamma \circ \tau)(x) = (x^2/2)s^2 \vec{g} + x\vec{a}_0 + p_0$$

mit $\vec{a}_0 \in \vec{\mathbb{E}}$ einem festen Richtungsvektor und $p_0 \in \mathbb{E}$ einem festen Ort. Das gelingt dem pedantischen Mathematiker, weil wir es hier mit einer Abbildung von \mathbb{R} in einen endlichdimensionalen reellen affinen Raum zu tun haben. Durch Einsetzen von $t := xs \in \vec{\mathbb{T}}$ erhalten wir schließlich

$$\gamma(t + t_0) = (t^2/2)\vec{g} + t\vec{v}_0 + p_0 \sim (4,9)t^2(\vec{m}/s^2) + t\vec{v}_0 + p_0$$

mit $\vec{v}_0 = \vec{a}_0/s$ der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{T}$ und $p_0 \in \mathbb{E}$ dem Ort zum Zeitpunkt t_0 .



Die Flugbahn einer Kanonenkugel ist bei Vernachlässigung des Luftwiderstands eine Parabel. Die Bezeichnung „Parabel“ kommt vom griechischen Wort für „Werfen“.

Beispiel 10.1.15 (Reichweite eines Geschützes). Wollen wir wissen, in welcher Entfernung eine an einer Stelle $p_0 \in \mathbb{E}$ unter einem gegebenen Winkel ϑ gegen die Horizontale mit einer gegebenen Mündungsgeschwindigkeit $v_0 \in \langle \text{m/s} \rangle$ abgeschossene Kugel einschlägt, so betrachten wir einen vertikalen einen Meter langen Vektor $\vec{m}_v = -\vec{m}$ und einen horizontalen einen Meter langen Vektor in Richtung der Mündung \vec{m}_h und finden für die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = a\vec{m}_v/s + b\vec{m}_h/s$ die Bahnkurve

$$\gamma(t + t_0) = -(4,9)t^2 \vec{m}_v/s^2 + ta \vec{m}_v/s + tb \vec{m}_h/s + p_0$$

Hier bezeichnet t anders als zuvor keine Zeit, sondern eine Zeitspanne $t \in \overline{\mathbb{T}}$. Die Zeitspanne, nach der die Kugel wieder den Boden erreicht, ist folglich die Lösung der Gleichung $(-4,9)t^2/s^2 + ta/s = 0$ alias $t = (a/(4,9))s$. Der Einschlagsort ist mithin

$$p_0 + \frac{ab}{4,9}\vec{m}_h$$

Mündungsgeschwindigkeit v_0 und Abschlußwinkel ϑ berechnen sich aus a und b mittels $v_0 = (\sqrt{a^2 + b^2})\text{m/s}$ und $\tan \vartheta = a/b$. Wir finden aber auch umgekehrt für $v_0 = c(\text{m/s})$ die Identitäten $\sin \vartheta = a/c$ und $\cos \vartheta = b/c$ alias $a = c \sin \vartheta$ und $b = c \cos \vartheta$. Der Abschlußwinkel, unter dem die Kugel am weitesten kommt, ist das Maximum von $(\cos \vartheta \sin \vartheta)$ für $\vartheta \in [0, \pi/2]$ alias das Maximum von $\frac{1}{2} \sin 2\vartheta$. Der optimale Abschlußwinkel ist also $\pi/4 = 45^\circ$, und die Kugel schlägt dann bei einer Mündungsgeschwindigkeit von $v_0 = c(\text{m/s})$ in einer Entfernung von $(c/(9,8))$ m ein.

10.2 Potential und Energieerhaltung

10.2.1. Unter einem **Potential** eines Kraftfelds $F : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{E}}\langle \text{g/s}^2 \rangle$ versteht man eine differenzierbare Abbildung $V : \mathbb{E} \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$ mit

$$-\text{grad}_k V = F$$

Hier verwenden wir eine in offensichtlicher Weise auf Fälle mit Einheiten erweiterte Variante der Notation aus 2.3.9 für den Gradienten in Bezug auf ein Skalarprodukt und die Notation k für das konkrete Skalarprodukt. Ausgeschrieben

bedeutet unsere Bedingung $-\text{grad}_k V = F$ damit

$$-(d_x V)(v) = \langle F(x), v \rangle_k \quad \forall x \in \mathbb{E}, v \in \vec{\mathbb{E}}$$

Wenn das Kraftfeld von der Zeit abhängt, verstehen wir unter einem Potential analog eine Funktion, die von Ort und Zeit abhängt und die entsprechende Eigenschaft hat. In Formeln schreiben wir sie aus zu

$$-(d_{(x,t)} V)(v, 0) = \langle F(x, t), v \rangle_k \quad \forall x \in \mathbb{E}, t \in \mathbb{T}, v \in \vec{\mathbb{E}}$$

Als formelhafte Beschreibung für das Differential „nur in Bezug auf den Ort“ links nehme ich das volle Differential, werte es aber nur auf Richtungsvektoren mit verschwindender Zeitkomponente $(v, 0)$ aus.

Satz 10.2.2 (Energieerhaltung). *Für die Bewegung γ eines Massepunktes positiver Masse m in einem Kraftfeld mit zeitunabhängigem Potential V erhalten wir eine Invariante der Bewegung alias eine von der Zeit t unabhängige Konstante durch den Ausdruck*

$$V(\gamma(t)) + \frac{m}{2} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

10.2.3. Der erste Summand heißt die **potentielle Energie** und der zweite Summand die **kinetische Energie**. Unser Satz ist ein Spezialfall des allgemeinen physikalischen Prinzips der „Energieerhaltung“.

Beweis. Ableiten nach t liefert mit der Produktregel 2.6.5 für die zeitliche Ableitung und der Kettenregel

$$\begin{aligned} d_t \left(\frac{m}{2} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + V(\gamma(t)) \right) &= m \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + (d_{\gamma(t)} V)(\dot{\gamma}(t)) \\ &= \langle m \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle - \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

10.3 Planetenbewegung

10.3.1 (**Heuristische Vorüberlegung**). Stellen wir uns einmal vor, wir wären Newton. Kepler hat bereits aus den akribischen Beobachtungen von Tycho Brahe herausdestilliert, daß die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne kreisen, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht. Wir gehen von der zumindest nicht unvernünftigen Annahme aus, daß die von der Sonne ausgehende Gravitationskraft mit wachsendem Abstand schwächer wird in derselben Weise, wie sich ein Gas verdünnen würde, das von der Sonne ausgeschwitzt wird und sich, indem es nach allen Seiten mit konstanter Geschwindigkeit von der Sonne wegströmt, in den unendlichen Weiten des Weltraums verteilt. Dann ist klar, daß durch jede in der Sonne zentrierte Kugelschale in einer festen Zeitspanne dieselbe

Gasmenge strömen muß. Da aber die Oberfläche einer Kugelschale vom Radius r ein festes Vielfaches r^2 ist, muß unser Gas in einem Abstand r von der Sonne eine zu $1/r^2$ proportionale Dichte haben. Durch derartige Überlegungen motiviert machen wir für das Gravitationsfeld G der Sonne den Ansatz

$$G(x) = c \cdot \frac{S - x}{\|S - x\|^3}$$

für $S \in \mathbb{E}$ den Ort der Sonne, den wir uns fest denken, und $c \in \langle \text{m}^3/\text{s}^2 \rangle$ eine Konstante. Ist M die Masse unseres Planeten, so ist MG das zu unserer Bewegung gehörige Kraftfeld und dieselbe Rechnung wie in 8.1.19 liefert uns für dieses Feld das Potential

$$V(x) = -\frac{Mc}{\|S - x\|}$$

Nun setzen wir die Bewegung unseres Planeten an als

$$\gamma(t) = S + \vec{\gamma}(t)$$

für $\vec{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}$. Da ein **Zentralfeld** vorliegt, die auf unseren Planeten wirkende Kraft zeigt nämlich stets in Richtung der Sonne, ist auch das mit Einheiten, genauer als Element von $\vec{\mathbb{E}} \otimes \mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* \otimes \text{or}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathbb{E}})$ verstandene und in [LA2] 8.4.9 konstruierte Kreuzprodukt

$$L := \vec{\gamma}(t) \times \dot{\vec{\gamma}}(t)$$

eine Invariante der Bewegung. In der Tat ergibt sich seine zeitliche Ableitung nach der Produktregel 2.6.5 für die zeitliche Ableitung zu

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) \times \dot{\vec{\gamma}}(t) + \vec{\gamma}(t) \times \ddot{\vec{\gamma}}(t) = 0$$

Das Verschwinden rührt genauer daher, daß wir jeweils ein Kreuzprodukt von linear abhängigen Vektoren bilden. Multiplizieren wir diese Invariante L noch mit der Masse des Planeten, so erhalten wir den sogenannten **Drehimpuls** des Planeten um die Sonne. Ist dieser Drehimpuls Null, so liegt eine Lösung vor, bei der unser Planet auf geradem Wege in die Sonne stürzt oder sich umgekehrt längs eines Sonnenstrahls von der Sonne entfernt. Ist der Drehimpuls nicht Null, was wir von nun an annehmen wollen, so muß unser Planet in derjenigen Ebene durch die Sonne bleiben, auf der sein Drehimpuls senkrecht steht, und kann nie in die Sonne stürzen. Wir wählen in dieser Ebene nun ein Orthogonalsystem \vec{e}_1, \vec{e}_2 bestehend aus zwei Vektoren gleicher Länge $l = \|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\|$, gehen zu Polarkoordinaten über und betrachten genauer die Abbildung

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} &\rightarrow \vec{\mathbb{E}} \\ (r, \varphi) &\mapsto r((\cos \varphi)\vec{e}_1 + (\sin \varphi)\vec{e}_2) \end{aligned}$$

Da wir bereits wissen, daß die Bewegung in einer Ebene bleiben muß und nicht durch die Sonne führt, können wir $\vec{\gamma}(t) = P(r(t), \varphi(t))$ ansetzen, zumindest für t aus einem kleinen Zeitintervall. Wir erhalten

$$\dot{\vec{\gamma}} = \dot{r}((\cos \varphi)\vec{e}_1 + (\sin \varphi)\vec{e}_2) + r\dot{\varphi}(-(\sin \varphi)\vec{e}_1 + (\cos \varphi)\vec{e}_2)$$

und insbesondere

$$\langle \dot{\vec{\gamma}}, \dot{\vec{\gamma}} \rangle = l^2(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2)$$

Energieerhaltung 10.2.2 liefert damit, daß die Gesamtenergie

$$\frac{M}{2}l^2(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - \frac{Mc}{rl} = E$$

eine Konstante der Bewegung ist. Dasselbe gilt für die Länge unseres Kreuzprodukts alias den Drehimpuls und damit für

$$r^2\dot{\varphi} = D$$

Insbesondere gilt unter unseren Annahmen stets $\dot{\varphi} \neq 0$. Wir wollen nun zeigen, daß diese beiden Gleichungen bereits implizieren, daß unsere Bewegung auf einem Kegelschnitt mit der Sonne in einem Brennpunkt geschehen muß. Die Kunst besteht dabei darin, in einem ersten Schritt die vollständige Berechnung der Bewegung zu vermeiden, die auf ziemlich komplizierte Ausdrücke führt. Vielmehr interessieren wir uns vorerst nur für die Form der Bahnkurve. Der zeitliche Ablauf, in dem sie durchlaufen wird, folgt dann ohne weitere physikalische Schwierigkeiten aus dem Energieerhaltungssatz, aber die Berechnung der dabei entstehenden Integrale wollen wir eben vermeiden. Dazu bilden wir aus den beiden vorhergehenden Gleichungen, die die Energieerhaltung und die Drehimpulserhaltung in Polarkoordinaten ausdrücken, eine einzige Gleichung, in der die zeitlichen Ableitungen unserer neuen Koordinaten nur in der Kombination $\dot{r}/\dot{\varphi}$ vorkommen: Dieser Quotient ist nämlich von der Parametrisierung der Bahnkurve durch die Zeit unabhängig. Teilen wir etwa das Quadrat der zweiten Gleichung aus der ersten Gleichung weg, so ergibt sich mit

$$\frac{Ml^2}{2r^4} \left(\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \right)^2 + \frac{Ml^2}{2r^2} - \frac{Mc}{rlD^2} = \frac{E}{D^2}$$

eine Gleichung der gewünschten Form. Da nun gilt $\dot{\varphi} \neq 0$, können wir den Radius als Funktion des Winkels schreiben, $r = r(\varphi)$. Da auch der Radius bei Lösungen mit von Null verschiedenem Drehimpuls nie Null wird, können wir weiter auch den inversen Radius als Funktion des Winkels schreiben und setzen $u(\varphi) := 1/r(\varphi)$. Für die Ableitung u' von u nach dem Winkel erhalten wir dann

$$u' = -r'/r^2 = -\dot{r}/\dot{\varphi}r^2$$

und unsere Differentialgleichung erhält die Gestalt

$$(u')^2 + u^2 + Au = B$$

mit $A = 2c/D^2l^3$ und $B = 2E/Ml^2D^2$. Ableiten nach φ liefert unmittelbar

$$2u'u'' + 2uu' + Au' = 0$$

Alle Lösungen müssen auf dem Teil ihres Definitionsbereichs, auf dem die Ableitung u' nicht verschwindet, demnach auch der Differentialgleichung

$$2u'' + 2u = -A$$

gehörchen. Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Eine Basis des Lösungsraums der zugehörigen homogenen Gleichung bilden $u_1(\vartheta) = \sin \vartheta$ und $u_2(\vartheta) = \cos \vartheta$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist etwa $u_s(\vartheta) = -A/2$. Die allgemeine Lösung ist also $u(\vartheta) = b \cos(\vartheta - \vartheta_0) - A/2$ für Konstanten b, ϑ_0 . Indem wir das in unsere ursprüngliche Differentialgleichung einsetzen, erhalten wir $b^2 - A^2/4 = B$ alias $b = \sqrt[4]{B + A^2/4}$. Damit ist unser Problem gelöst. Wir prüfen nun nur noch, daß die Lösungen Kegelschnitte sein müssen.

10.3.2 (Ellipsen sind Planetenbahnen). Es gilt, eine Ellipse mit einem Brennpunkt im Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten zu schreiben. Nach der Diskussion in [LA2] 2.6.40 lautet die entsprechende Gleichung

$$c = r + \sqrt{(r \cos \varphi - a)^2 + r^2 \sin^2 \varphi}$$

für $(a, 0)$ den zweiten Brennpunkt und $((a + c)/2, 0)$ den Schnittpunkt unserer Ellipse mit der positiven x -Achse. Wir subtrahieren r auf beiden Seiten und quadrieren zu

$$r^2 - 2ar \cos \varphi + a^2 = r^2 - 2cr + c^2$$

Elementare Umformungen liefern

$$r = \frac{c^2 - a^2}{2c - 2a \cos \varphi}$$

Durch Ändern der Parameter zu $\beta := a/c$ und $\alpha := (c^2 - a^2)/2c$ landen wir bei der Gleichung

$$r = \frac{\alpha}{1 - \beta \cos \varphi}$$

Um unsere obige Gleichung zu prüfen, dürfen wir die Durchlaufgeschwindigkeit beliebig wählen, so etwa auch $\varphi(t) = t$. Damit erhalten wir $\dot{\varphi} = 1$ und

$$\dot{r} = \frac{-\alpha\beta \sin t}{(1 - \beta \cos t)^2} = \frac{-\beta \sin t}{\alpha} r^2$$

und Einsetzen in unsere obige Gleichung liefert

$$\frac{Ml^2}{2\alpha^2}\beta^2 \sin^2 t + \frac{Ml^2}{2\alpha^2}(1 - 2\beta \cos t + \beta^2 \cos^2 t) - \frac{Mc}{\alpha l D^2}(1 - \beta \cos t) = \frac{E}{D^2}$$

Hier ist aber in der Tat die linke Seite unabhängig von t falls gilt

$$\frac{Ml^2}{\alpha^2} = \frac{Mc}{\alpha l D^2}$$

alias $\alpha = l^3 D^2 / c$. Wir sehen so, daß in der Tat unsere Ellipsen mögliche Lösungskurven sein müssen.

Ergänzung 10.3.3. Daß die Lösungskurven Kegelschnitte sein müssen, kann man alternativ auch unschwer einsehen, indem man nachrechnet, daß der sogenannte **Runge-Lenz-Vektor**

$$\frac{1}{c} \dot{\vec{\gamma}} \times L + \frac{\vec{\gamma}}{\|\vec{\gamma}\|}$$

mit L wie in 10.3.1 der Drehimpuls geteilt durch die Masse des Planeten und c einer die Stärke des Gravitationsfelds beschreibenden Konstanten eine Invariante der Bewegung sein muß. Man beachte $L \in \mathbb{E}\langle \text{m/s} \rangle \otimes_{\text{or}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{E})$, also $\dot{\vec{\gamma}} \times L \in \mathbb{E}\langle \text{m}^2/\text{s}^2 \rangle$. Wegen $c \in \langle \text{m}^3/\text{s}^2 \rangle$ gehören damit beide Summanden zum Raum $\mathbb{E}\langle 1/\text{m} \rangle$. Dieser Zugang gefällt mir weniger, da man den Runge-Lenz-Vektor dabei „vom Himmel fallen läßt“.

10.4 Systeme mit Zwangsbedingungen

Beispiel 10.4.1 (Ein Massepunkt mit einer Zwangsbedingung). Wir untersuchen nun das Verhalten eines einzigen Massepunktes alias Teilchens, dessen Bewegung auf eine Fläche im Raum eingeschränkt ist. Als physikalisches Modell mag man an ein nasses Stück Seife denken, das in der Schwerelosigkeit und ohne Reibung im leeren Tank einer Raumfähre herumrutscht, in den es ein übermütiger Astronaut mit Schwung hat hineingleiten lassen. Wir modellieren diesen Tank als eine 2-Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}$ im Anschauungsraum, die wir der Einfachheit halber *glatt* annehmen. Zu jedem Zeitpunkt übt unsere Fläche eine Kraft auf unser Teilchen aus, deren Richtung, das jedenfalls deklarieren wir als „physikalisch sinnvoll“, senkrecht zur Fläche steht an der Stelle, an der sich unser Teilchen jeweils befindet, und deren Größe gerade so bemessen ist, daß sie das Teilchen auf der Fläche hält. Die Bewegung wird unter dieser Annahme beschrieben durch eine glatte Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow M$ mit der Eigenschaft

$$\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{T}$. Die zweifache Ableitung ist hierbei für diejenige Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ zu verstehen, die aus γ durch das Nachschalten der Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{E}$ entsteht. Formal betrachtet liegt $\ddot{\gamma}(t)$ zwar in $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/s^2 \rangle$ und unsere Tangentialräume aus 10.6.4 sind für alle Punkte $p \in M$ Untervektorräume $T_p M \subset \vec{\mathbb{E}}$, aber die Bedingung des Senkrechtstehens ist dennoch sinnvoll. Für Leser, die die entsprechende mathematische Terminologie kennen, kann das formuliert werden als die Aussage, daß sich unser Teilchen mit konstanter absoluter Geschwindigkeit längs einer Geodäte von M bewegt. Bewegt sich unser Teilchen zusätzlich in einem Kraftfeld $F : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}}\langle g/s^2 \rangle$ und hat die Masse m , so lauten die Bewegungsgleichungen analog

$$(m\ddot{\gamma}(t) - F(\gamma(t))) \perp T_{\gamma(t)}M$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{T}$. Bevor wir Lösungswege diskutieren, besprechen wir erst einmal ein etwas komplizierteres System.

Beispiel 10.4.2 (Eine Hantel in der Schwerelosigkeit). Denken wir uns zwei durch einen starren masselosen Stab positiver Länge $l \in \mathbb{L}_{>0}$ verbundene Punkte der Massen $m_1, m_2 \in \mathbb{M}_{>0}$. Dieses System beschreibt eine unausgewogene Hantel, die in der Schwerelosigkeit durch das Weltall torkelt. Die Bewegung unserer Hantel wird beschrieben durch zwei Abbildungen $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\| = l$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{T}$, also durch eine Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow M$ der Zeitachse \mathbb{T} in die 5-Mannigfaltigkeit

$$M := \{(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in \mathbb{E}^2 \mid \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\| = l\} \subset \mathbb{E}^2$$

Hier und im folgenden gilt es zu beachten, daß Einträge in Tupeln keineswegs immer reelle Zahlen zu sein brauchen. So meinen im vorhergehenden etwa \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 Punkte des Anschauungsraums \mathbb{E} und können ihrerseits durch die Wahl eines Koordinatensystems mit Elementen des \mathbb{R}^3 identifiziert werden, so daß man unser Paar $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ nach der Wahl geeigneter Koordinaten auch mit einem Sextupel von reellen Zahlen identifizieren könnte. Im folgenden notieren wir Punkte von \mathbb{E} und Richtungsvektoren aus $\vec{\mathbb{E}}$ oder Elemente von $\vec{\mathbb{E}} \otimes L$ für eindimensionales L meist als fette Buchstaben. Nach dem Newton'schen Prinzip „actio est reactio“ gilt

$$\vec{\mathbf{Z}}_1 = -\vec{\mathbf{Z}}_2$$

für die vom Stab auf die jeweiligen Massepunkte ausgeübten „Zwangskräfte“ $\vec{\mathbf{Z}}_1$ und $\vec{\mathbf{Z}}_2$. Des weiteren deklarieren wir die Annahme als „physikalisch sinnvoll“, daß diese Zwangskräfte stets in Richtung unseres Stabes wirken. Das ist bei einer echten Hantel durchaus anders, aber wir denken uns ja einen masselosen Stab und Punktmassen an beiden Enden, die insbesondere kein Drehmoment haben können.

Zusammengefaßt und in Formeln geschrieben nehmen wir also an, daß gilt

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{Z}}_1(t) &= a(t)(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)) \\ \vec{\mathbf{Z}}_2(t) &= a(t)(\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t))\end{aligned}$$

für unbekanntes $a : \mathbb{T} \rightarrow \langle g/s^2 \rangle$. Damit erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1(t) &= a(t)(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2(t) &= a(t)(\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t))\end{aligned}$$

für $\gamma = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) : \mathbb{T} \rightarrow M$. Nun betrachten wir auf $\vec{\mathbb{E}}^2$ das $\langle m^2 \rangle$ -wertige **Summenskalarprodukt** gegeben durch

$$\langle (\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2), (\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2) \rangle_{k \times k} := \langle \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{w}}_1 \rangle_k + \langle \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{w}}_2 \rangle_k$$

Per definitionem ist M Niveaufäche der Funktion $f : (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \mapsto \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|^2$. Das Differential dieser Abbildung bei $p := (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ ergibt sich mit der Produktregel 2.6.5 zu

$$d_p f : (\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2) \mapsto 2\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle_k$$

Der Kern dieser Abbildung ist der Tangentialraum $T_p M$. Wir erkennen, daß für alle $p = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in M$ das Paar aus dem Verbindungsvektor und seinem Negativen $(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \in \vec{\mathbb{E}}^2$ für das Summenskalarprodukt auf $T_p M$ senkrecht steht, denn $d_p f$ ist das Doppelte des Bildens des Summenskalarprodukts mit diesem Vektor

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), (\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2) \rangle_{k \times k} &= \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \vec{\mathbf{v}}_1 \rangle_k + \langle \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle_k \\ &= \langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle_k\end{aligned}$$

Unsere Bewegungsgleichungen bedeuten also $(m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1(t), m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2(t)) \perp_{k \times k} T_{\gamma(t)} M$ in Bezug auf das Summenskalarprodukt. Definieren wir nun zusätzlich auf $\vec{\mathbb{E}}^2$ das **massebehaftete Skalarprodukt**

$$\langle , \rangle_g : \vec{\mathbb{E}}^2 \times \vec{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \langle gm^2 \rangle$$

durch $\langle (\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2), (\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2) \rangle_g := m_1 \langle \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{w}}_1 \rangle + m_2 \langle \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{w}}_2 \rangle$, so können unsere Bewegungsgleichungen umgeschrieben werden zur Bedingung

$$\ddot{\gamma}(t) \perp_g T_{\gamma(t)} M$$

des Senkrechtstehens in Bezug auf das massebehaftete Skalarprodukt. Für Leser, die die entsprechende mathematische Terminologie kennen, sind die möglichen Bewegungen also genau mit konstanter absoluter Geschwindigkeit durchlaufene

Geodäten auf M in Bezug auf unser massebehaftetes Skalarprodukt. Wirken zusätzlich noch externe Kräfte, sind etwa unsere Massepunkte elektrisch geladen und bewegt sich unsere Hantel in einem Raum mit einem elektrischen Feld und einem Gravitationsfeld, und beschreiben etwa $\vec{F}_1, \vec{F}_2 : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \langle \text{g/s}^2 \rangle$ die auf die jeweiligen Massepunkte wirkenden externen Kräfte, so bilden wir die **massebereinigte externe Gesamtkraft**

$$\tilde{F} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \vec{\mathbb{E}}^2 \langle 1/\text{s}^2 \rangle$$

durch die Vorschrift $\tilde{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) := (\vec{F}_1(\mathbf{r}_1)/m_1, \vec{F}_2(\mathbf{r}_2)/m_2)$ und unsere Bewegungsgleichungen an $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow M$ erhalten allgemeiner die Gestalt der Orthogonalitätsbedingungen

$$(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))) \perp_{\text{g}} T_{\gamma(t)}M$$

10.4.3 (Allgemeine Systeme mit Zwangsbedingungen). Nun betrachten wir allgemein den Fall eines Systems von Massepunkten positiver Massen m_1, \dots, m_Λ , deren Bewegung in der Weise eingeschränkt sei, daß die Zusammenfassung ihrer Orte $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_\Lambda) \in \mathbb{E}^\Lambda$ sich stets auf einer fest vorgegebenen **glatten Mannigfaltigkeit** $M \subset \mathbb{E}^\Lambda$ befindet. Wir nennen das Datum $(m_1, \dots, m_\Lambda, M)$ ein **mechanisches System** und M seinen **Konfigurationsraum**. Man mag hier an unsere Hantel aus Beispiel 10.4.2 denken, an unser Seifenstück im Tank aus Beispiel 10.4.1, an ein Doppelpendel und noch an vieles andere. Auch dieser Allgemeinheit betrachten wir das **massebehaftete Skalarprodukt** $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{g}} : \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \rightarrow \langle \text{gm}^2 \rangle$ gegeben durch

$$\langle (\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_\Lambda), (\vec{\mathbf{w}}_1, \dots, \vec{\mathbf{w}}_\Lambda) \rangle_{\text{g}} := m_1 \langle \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{w}}_1 \rangle + \dots + m_\Lambda \langle \vec{\mathbf{v}}_\Lambda, \vec{\mathbf{w}}_\Lambda \rangle$$

Im folgenden soll erklärt werden, wie man durch physikalische Überlegungen für die Bewegung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow M$ unseres Systems auf die Orthogonalitätsbedingungen

$$(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))) \perp_{\text{g}} T_{\gamma(t)}M$$

geführt wird, für $\tilde{F} := (\vec{F}_1/m_1, \dots, \vec{F}_\Lambda/m_\Lambda)$ die **massebereinigte externe Gesamtkraft** und \perp_{g} das Senkrechtstehen bezüglich des massebehafteten Skalarprodukts. Wesentlich ist dabei zusätzlich zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen das sogenannte **d'Alembert'sche Prinzip**, nach dem „die Zwangskräfte unter infinitesimalen Verrückungen keine Arbeit verrichten“. Wird genauer im Verlauf der Bewegung an einer Stelle $p \in M$ auf unser System die Zwangskraft $Z := (\vec{Z}_1, \dots, \vec{Z}_\Lambda) \in \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \langle \text{g/s}^2 \rangle$ ausgeübt und ist $\varphi : (-a, a) \rightarrow M$ ein glatter Weg in M mit $\varphi(0) = p$, dann soll, so kann man dies Prinzip in Formeln ausdrücken, für das Summenskalarprodukt, das wir der Einfachheit halber auch k notieren statt feiner $k \times \dots \times k$ wie im Fall $|\Lambda| = 2$ der Hantel, stets gelten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \langle Z, \varphi'(\zeta) \rangle_k d\zeta = 0$$

Das bedeutet $\langle Z, \varphi'(0) \rangle_k = 0$ und damit $Z \perp_k T_p M$ für das Summenskalarprodukt auf \mathbb{E}^Λ . Für $\tilde{Z} := (\tilde{Z}_1/m_1, \dots, \tilde{Z}_\Lambda/m_\Lambda)$ die **massebereinigte Zwangskraft** haben wir dann $\tilde{Z} \perp_g T_p M$ in Bezug auf das massebehaftete Skalarprodukt. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen liefern $\ddot{\gamma}(t) = \tilde{F}(\gamma(t)) + \tilde{Z}(\gamma(t))$ und wir erhalten so wie behauptet für unser System mit Zwangsbedingungen die **Orthogonalitätsbedingung**

$$(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))) \perp_g T_{\gamma(t)} M$$

10.4.4 (Kräfte in Abhängigkeit vom Ort aller Teilchen und von der Zeit). Unsere Argumentation behält ihre Gültigkeit, wenn die auf ein Teilchen wirkende externe Kraft von den Orten der anderen Teilchen abhängt, die sich etwa anziehen oder abstoßen mögen, so daß \tilde{F} eine Abbildung $\tilde{F} : M \rightarrow \mathbb{E}^\Lambda \langle 1/s^2 \rangle$ wird. Unsere Argumentation behält auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn die Kräfte zusätzlich von der Zeit abhängen, in Formeln $\tilde{F} : M \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}^\Lambda \langle 1/s^2 \rangle$. Alles bleibt wie gehabt, nur müssen wir statt $\tilde{F}(\gamma(t))$ eben $\tilde{F}(\gamma(t), t)$ schreiben und die Bewegungsgleichungen werden zur **Orthogonalitätsbedingung**

$$(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t), t)) \perp_g T_{\gamma(t)} M$$

Beispiele 10.4.5 (Beispiele für das d'Alembert'sche Prinzip). Das Vorhergehende gilt nur für Systeme ohne Reibung. Im Fall unserer Seife im Tank besagt das d'Alembert'sche Prinzip, daß Zwangskräfte ausschließlich senkrecht zur Innenfläche des Tanks an der Stelle, an der sich unser Seifenstück gerade befindet, ausgeübt werden. Im Fall unserer Hantel besagt das d'Alembert'sche Prinzip, daß Zwangskräfte ausschließlich in Richtung des Stabes ausgeübt werden und dem Prinzip „actio est reactio“ gehorchen. Im Fall dreier schwerer Perlen, die auf einem masselos gedachten Seilring aufgefädelt sind, liefert das d'Alembert'sche Prinzip bei genauerer Betrachtung, daß sich (1) die Zwangskräfte auf jede Perle als Summe zweier Kräfte in den beiden Richtungen, in denen das Seil sie verläßt, schreiben lassen, und daß (2) alle diese Kräfte betragsmäßig gleich groß sind, daß also anschaulich gesprochen die Seilspannung konstant ist. All das wirkt physikalisch vernünftig, und es erweist sich, daß die so erhaltenen Bewegungsgleichungen auch in guter Übereinstimmung zum Experiment stehen.

10.5 Prinzip der stationären Wirkung

Lemma 10.5.1 (Prinzip der kleinsten Wirkung für einen Massepunkt). Gegeben ein Massepunkt positiver Masse $m > 0$ in einem glatten Kraftfeld F mit Potential V ist ein glattes $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen, wenn unter allen glatten Wegen $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\alpha(a) = \gamma(a)$ und $\alpha(b) = \gamma(b)$

das Integral

$$\int_a^b \frac{m}{2} \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle - V(\alpha(t), t) dt$$

für den Weg $\alpha = \gamma$ kleinstmöglich ist.

10.5.2. Die Bedingung in diesem Lemma ist nur hinreichend. Ihre Verfeinerung zu einer notwendigen und hinreichenden Bedingung diskutieren wir im Anschluß.

10.5.3. Das Integral im Lemma heißt die **Wirkung** längs der Bewegung α und wir $S(\alpha)$ notiert. Der Lemma selber drückt das **Prinzip der kleinsten Wirkung** aus. Wenn keine Kräfte wirken, in Formeln $V = 0$, und wir Anfangs- gleich Endpunkt $\gamma(a) = \gamma(b)$ annehmen, dann ist die Wirkung kleinstmöglich für den konstanten Weg. Wir behaupten nicht, daß es überhaupt eine Bewegung mit kleinstmöglicher Wirkung geben muß, noch daß es höchstens eine Bewegung mit kleinstmöglicher Wirkung geben darf, noch daß solche Bewegungen die einzig möglichen Lösungen der Bewegungsgleichungen sind. Wir diskutieren das gleich noch ausführlicher.

Beweis. Sei $\varepsilon : [a, b] \rightarrow \vec{\mathbb{E}}$ glatt mit $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 0$. Ist die Wirkung für γ kleinstmöglich, so muß die Abbildung $s \mapsto S(\gamma(t) + s\varepsilon(t))$ bei $s = 0$ ein Minimum annehmen. Auch wenn noch andere Variablen präsent sind, berechnen wir die Wirkung, diese Konvention sei hier vereinbart, stets nach der mit t bezeichneten Variablen. Nach 3.1.15 gelingt das Vertauschen von Ableitung nach s und Integral nach t und wir finden insbesondere, daß $s \mapsto S(\gamma(t) + s\varepsilon(t))$ differenzierbar ist nach s und daß seine Ableitung bei $s = 0$ verschwinden muß, in Formeln

$$0 = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} S(\alpha(t, s)) = \int_a^b (d_{(\gamma(t), t)} V)(\varepsilon(t), 0) - m \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\varepsilon}(t) \rangle dt$$

Nun gilt $(d_{(\gamma(t), t)} V)(\varepsilon(t), 0) = -\langle F(\gamma(t), t), \varepsilon(t) \rangle$ nach der Definition des Potentials. Andererseits finden wir aufgrund der Randbedingungen $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 0$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$0 = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \varepsilon(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \ddot{\gamma}(t), \varepsilon(t) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\varepsilon}(t) \rangle dt$$

So können wir unsere erste Gleichung umschreiben zu

$$0 = \int_a^b \langle -F(\gamma(t), t) + m\ddot{\gamma}(t), \varepsilon(t) \rangle dt$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß das nur gelten kann für alle hier erlaubten ε , wenn gilt $-F(\gamma(t), t) + m\ddot{\gamma}(t) = 0$ für alle $t \in [a, b]$. \square

Lemma 10.5.4 (Prinzip der stationären Wirkung für einen Massepunkt). Gegeben ein Massepunkt positiver Masse $m > 0$ in einem glatten Kraftfeld F mit Potential V ist ein glattes $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen genau dann, wenn für alle glatten Abbildungen $\alpha : [a, b] \times (-\eta, \eta) \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\alpha(t, 0) = \gamma(t) \forall t$ und $\alpha(a, s), \alpha(b, s)$ unabhängig von $s \in (-\eta, \eta)$ gilt

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b \frac{m}{2} \langle \dot{\alpha}(t, s), \dot{\alpha}(t, s) \rangle - V(\alpha(t, s), t) dt$$

10.5.5. Man bemerke, daß die hier gegebene Bedingung notwendig und hinreichend ist. Die Bedingung selber kann man salopp gesprochen so verstehen, daß die Lösungen der Bewegungsgleichungen die stationären Punkte der Wirkung sind, wenn wir sie auf den Raum aller Wege mit festem Startpunkt und festem Endpunkt zu fest vorgegebenen Zeiten einschränken.

Beweis. Wir können die Ableitung unter das Integral ziehen und so unsere Gleichung mit dem unteren Index s für die partielle Ableitung nach s umschreiben zu

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b (d_{(\gamma(t), t)} V)(\alpha_s(t, 0), 0) - m \langle \dot{\alpha}(t, 0), \dot{\alpha}_s(t, 0) \rangle dt$$

Ähnlich wie zuvor finden wir $(d_{(\gamma(t), t)} V)(\alpha_s(t, 0), 0) = -\langle F(\gamma(t), t), \alpha_s(t, 0) \rangle$. Andererseits finden wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$0 = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \alpha_s(t, 0) \rangle dt = \int_a^b \langle \ddot{\gamma}(t), \alpha_s(t, 0) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\alpha}_s(t, 0) \rangle dt$$

Insgesamt können wir so unsere Gleichung im Satz umschreiben zur Gleichung

$$0 = \int_a^b \langle -F(\gamma(t), t) + m\ddot{\gamma}(t), \alpha_s(t, 0) \rangle dt$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß das für alle erlaubten α genau dann gilt, wenn die Bewegungsgleichung $-F(\gamma(t), t) + m\ddot{\gamma}(t) = 0$ erfüllt ist für alle $t \in [a, b]$. \square

Proposition 10.5.6 (Stationäre Wirkung für Vielteilchensysteme). Gegeben Teilchen positiver Massen m_1, \dots, m_Λ in einem glatten Potential V ist eine glatte Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^\Lambda$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen genau dann, wenn für alle glatten Abbildungen $\alpha : [a, b] \times (-\eta, \eta) \rightarrow \mathbb{E}^\Lambda$ mit $\alpha(t, 0) = \gamma(t) \forall t$ und $\alpha(a, s), \alpha(b, s)$ unabhängig von $s \in (-\eta, \eta)$ gilt

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b L(\alpha(t, s), \dot{\alpha}(t, s), t) dt$$

für die Lagrangefunktion $L(p, v, t) := \langle v, v \rangle_g / 2 - V(p, t)$ unseres Systems.

Beweis. Das geht ganz ähnlich wie im Fall eines einzigen freien Massepunktes. Wir können die Ableitung unter das Integral ziehen und so unsere Gleichung mit dem unteren Index s für die partielle Ableitung nach s umschreiben zu

$$0 = \int_a^b \langle \dot{\alpha}(t, 0), \dot{\alpha}_s(t, 0) \rangle_g - (d_{(\gamma(t), t)} V)(\alpha_s(t, 0), 0) dt$$

Ähnlich wie zuvor finden wir $(d_{(\gamma(t), t)} V)(\alpha_s(t, 0), 0) = -\langle \tilde{F}(\gamma(t), t), \alpha_s(t, 0) \rangle_g$. Andererseits finden wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$0 = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \alpha_s(t, 0) \rangle_g dt = \int_a^b \langle \ddot{\gamma}(t), \alpha_s(t, 0) \rangle_g + \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\alpha}_s(t, 0) \rangle_g dt$$

Insgesamt können wir so unsere Gleichung im Satz umschreiben zur Gleichung

$$0 = \int_a^b \langle -F(\gamma(t), t) + m\ddot{\gamma}(t), \alpha_s(t, 0) \rangle dt$$

Es ist nun leicht zu sehen, daß das für alle erlaubten α genau dann gilt, wenn die Bewegungsgleichung $-F(\gamma(t), t) + m\ddot{\gamma}(t) = 0$ erfüllt ist für alle $t \in [a, b]$. \square

10.5.7. Unter einem **mechanischen System mit Potential** $(m_1, \dots, m_\Lambda, M, V)$ verstehen wir eine Vorgabe von positiven Massen $m_1, \dots, m_\Lambda \in \mathbb{M}_{>0}$ sowie einer glatten Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^\Lambda$ und einer energiewertigen glatten Funktion $V : \mathbb{E}^\Lambda \times \mathbb{T} \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$.

Satz 10.5.8 (Stationäre Wirkung mit Zwangsbedingungen). *Gegeben ein mechanisches System mit Potential $(m_1, \dots, m_\Lambda, M, V)$ erfüllt eine glatte Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ die Orthogonalitätsbedingung 10.4.4 genau dann, wenn für alle glatten Abbildungen $\alpha : [a, b] \times (-\eta, \eta) \rightarrow M$ mit $\alpha(t, 0) = \gamma(t) \forall t$ und $\alpha(a, s), \alpha(b, s)$ unabhängig von $s \in (-\eta, \eta)$ gilt*

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b L(\alpha(t, s), \dot{\alpha}(t, s), t) dt$$

Beweis. Das geht ganz ähnlich wie im Fall ohne Zwangsbedingungen 10.5.6. Wir können die Ableitung unter das Integral ziehen und so unsere Gleichung mit dem unteren Index s für die partielle Ableitung nach s umschreiben zu

$$0 = \int_a^b \langle \dot{\alpha}(t, 0), \dot{\alpha}_s(t, 0) \rangle_g - (d_{(\gamma(t), t)} V)(\alpha_s(t, 0), 0) dt$$

Wie zuvor finden wir $(d_{(\gamma(t),t)}V)(\alpha_s(t,0),0) = -\langle \tilde{F}(\gamma(t),t), \alpha_s(t,0) \rangle_g$. Andererseits finden wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$0 = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \alpha_s(t,0) \rangle_g dt = \int_a^b \langle \ddot{\gamma}(t), \alpha_s(t,0) \rangle_g + \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\alpha}_s(t,0) \rangle_g dt$$

Insgesamt können wir so unsere Gleichung im Satz umschreiben zur Gleichung

$$0 = \int_a^b \langle -\tilde{F}(\gamma(t),t) + \ddot{\gamma}(t), \alpha_s(t,0) \rangle_g dt$$

Nun ist $\alpha_s(t,0)$ für alle t ein Element des Tangentialraums $T_{\gamma(t)}M$ und in angepaßten Koordinaten ist leicht zu sehen, daß unser Integral genau dann für alle erlaubten α verschwindet, wenn die in 10.4.4 aus physikalischen Prinzipien hergeleitete Orthogonalitätsbedingung $(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t),t)) \perp_g T_{\gamma(t)}M$ erfüllt ist für alle $t \in [a, b]$. \square

10.6 Euler-Lagrange-Gleichungen

10.6.1. Unsere Bewegungsgleichung 10.1.10 wird in der Terminologie aus 6.1.1 folgende ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit der einzigen Besonderheit, daß es zusätzlich mit Einheiten versehen ist und daß wir durch \mathbb{T} parametrisierte Lösungen suchen. Die allgemeine Theorie 6.1.3 legt uns die Reduktion auf ein System von doppelt so vielen Gleichungen erster Ordnung nahe. In unserem konkreten Fall betrachten wir dazu den sogenannten **Phasenraum**, genauer den **Geschwindigkeitsphasenraum** $\mathbb{E} \times \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s \rangle$ aller Paare (r, v) bestehend aus einem Ort $r \in \mathbb{E}$ und einer Geschwindigkeit $v \in \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s \rangle$. Jede glatte Abbildung $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E}$ liefert uns eine glatte Abbildung in den Phasenraum, den zugehörigen **Phasenweg**

$$\tilde{\gamma} := (\gamma, \dot{\gamma}) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E} \times \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s \rangle$$

Mit dieser Notation erfüllt γ genau dann die Newton'schen Bewegungsgleichungen $m\ddot{\gamma}(t) = F(\gamma(t), t)$, wenn $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$ eine Lösung ist für das System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}}_1(t) &= \tilde{\gamma}_2(t) \\ \dot{\tilde{\gamma}}_2(t) &= \frac{1}{m} F(\tilde{\gamma}_1(t), t) \end{aligned}$$

10.6.2. Gegeben ein endlichdimensionaler affiner Raum X verstehen wir unter einem **Geschwindigkeitsfeld auf X** eine Abbildung $A : X \rightarrow \vec{X}\langle 1/s \rangle$ und unter einem **zeitabhängigen Geschwindigkeitsfeld auf X** eine Abbildung

$$A : X \times \mathbb{T} \rightarrow \vec{X}\langle 1/s \rangle$$

Flußwege derartiger Geschwindigkeitsfelder A erklären wir als Abbildungen auf mehrpunktigen Zeitintervallen $\psi : \mathbb{T} \supset I \rightarrow X$ mit

$$\dot{\psi}(t) = A(\psi(t), t)$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf 6.2.1 gibt es für jedes glatte Geschwindigkeitsfeld A und beliebig vorgegebene $x_0 \in X$ und $t_0 \in \mathbb{T}$ genau einen maximalen Flußweg ψ mit $t_0 \in I$ mit $\psi(t_0) = x_0$ und dieser Flußweg ist nach 6.6.2 glatt.

10.6.3. Für jedes glatte zeitabhängige Kraftfeld F gibt es nach dem Satz von Picard-Lindelöf 6.2.1 insbesondere zu jedem Punkt (x_0, v_0) des Phasenraums und jedem Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{T}$ genau einen maximalen bei t_0 definierten Flußweg

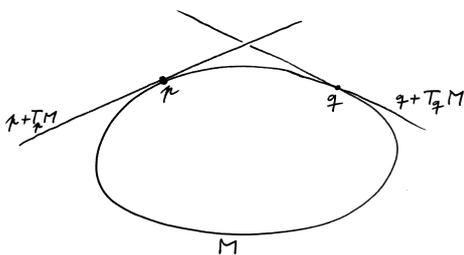
$$\psi : \mathbb{T} \supset I \rightarrow \mathbb{E} \times \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s \rangle$$

mit $\psi(t_0) = (x_0, v_0)$ alias genau eine maximale Lösung $\gamma : \mathbb{T} \supset I \rightarrow \mathbb{E}$ der ursprünglichen Bewegungsgleichung mit vorgegebenem Ort $x_0 = \gamma(t_0)$ und vorgegebener Geschwindigkeit $v_0 = \dot{\gamma}(t_0)$ zum vorgegebenen Zeitpunkt t_0 . Außerdem sind unter unseren Annahmen auch ψ und γ glatt.

10.6.4. Seien X ein endlichdimensionaler Raum und $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit. In 4.2.9 hatten wir zu jedem Punkt $p \in M$ seinen Tangentialraum $T_p M \subset \vec{X}$ erklärt als die Menge aller möglichen Geschwindigkeitsvektoren bei p von solchen Wegen durch den Punkt p , die ganz in M verlaufen. Wir erklären nun das **Tangentialbündel von M** als die Vereinigung

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \subset M \times \vec{X}$$

Die Komposition $\pi : TM \rightarrow M$ der Einbettung nach $M \times \vec{X}$ mit der Projektion auf M heißt die **Bündelprojektion**.



Tangentialbündel einer Kreislinie.

Ich habe die beiden Geraden als nichtschneidend gemalt, um anzudeuten, daß diese Überschneidungen von uns bei der Definition des Tangentialbündels wegdefiniert werden.

10.6.5 (**Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit**). Gegeben X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist ihr Tangentialbündel

$$TM \subset X \times \vec{X}$$

eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $2(\dim M)$. Gegeben eine glatte Karte $\varphi : \mathbb{R}^n \supset W \rightarrow M$ von M ist des weiteren $\hat{\varphi} : W \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ gegeben für $(x, y) \in W \times \mathbb{R}^n$ durch

$$\hat{\varphi} : (x, y) \mapsto (\varphi(x), (d_x\varphi)(y))$$

eine glatte Karte des Tangentialbündels TM . Der Beweis bleibe dem Leser zur Übung überlassen.

10.6.6 (Kategorie der abstrakten Mannigfaltigkeiten). Um die Darstellung der Theorie transparent zu halten, stütze ich mich nun auf Konstruktionen aus der Differentialgeometrie, vergleiche etwa [ML] 28.3.2.7. Man erklärt dort abstrakte Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen von abstrakten Mannigfaltigkeiten und zeigt, daß die Identität auf jeder Mannigfaltigkeit glatt ist und daß die Verknüpfung glatter Abbildungen von Mannigfaltigkeiten auch selbst wieder glatt ist. Teil des Datums einer Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorffraum und glatte Abbildungen sind spezielle stetige Abbildungen. Weiter wird dort erklärt, inwiefern manche Teilmengen $Y \subset X$ einer Mannigfaltigkeit, die **Untermannigfaltigkeiten**, selbst wieder mit der **induzierten Struktur** einer Mannigfaltigkeit versehen werden können und daß das insbesondere für alle offenen Teilmengen $Y \subseteq X$ gelingt und daß die Einbettung $i : Y \hookrightarrow X$ stets glatt ist. Schließlich wird die Beziehung zur Begrifflichkeit der eingebetteten Mannigfaltigkeiten aus [AN2] 4.2.6 diskutiert. Man beginnt damit, daß man jeden endlichdimensionalen reellen Raum mit der seiner **natürlichen Struktur** als Mannigfaltigkeit versieht und zeigt, daß in diesem Fall die Untermannigfaltigkeiten unsere eingebetteten Mannigfaltigkeiten aus [AN2] 4.2.6 sind und genau genommen unsere glatten eingebetteten Mannigfaltigkeiten aus [AN2] 9.7.1. Weiter zeigt man, daß die Morphismen von abstrakten Mannigfaltigkeiten zwischen offenen Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume genau unsere glatten Abbildungen aus [AN2] 9.7.1 sind und daß jede Karte $\varphi : \mathbb{R}^k \supset W \rightarrow M$ im Sinne von 4.4.2 ein Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten $W \xrightarrow{\sim} \varphi(W)$ ist. Analog geht es für Randfaltigkeiten und Eckfaltigkeiten.

10.6.7 (Tangentialbündel abstrakter Mannigfaltigkeiten). Weiter konstruiert man für jede Mannigfaltigkeit M ihr Tangentialbündel TM . Das ist ein glattes Vektorbündel auf M , aber für uns hier nur eine weitere glatte Mannigfaltigkeit mit einer glatten Abbildung $\pi_M : TM \rightarrow M$, der **Fußpunktprojektion**. Zusätzlich konstruiert man für jede glatte Abbildung von Mannigfaltigkeiten $\varphi : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung $d\varphi : TM \rightarrow TN$ und zeigt die Funktorialität $d\psi \circ d\varphi = d(\psi \circ \varphi)$ sowie $d(\text{id}_M) = \text{id}_{TM}$ und die Verträglichkeit mit der Fußpunktprojektion $\varphi \circ \pi_M = \pi_N \circ d\varphi$. Ist $\varphi : M \rightarrow N$ die Einbettung einer offenen Teilmenge $M = U \subseteq N$, so faktorisiert $d\varphi$ über einen Isomorphismus

von Mannigfaltigkeiten $d\varphi : TU \xrightarrow{\sim} \pi_N^{-1}(U) \circlearrowleft TN$. Schließlich wird die Beziehung zur Begrifflichkeit der eingebetteten Mannigfaltigkeiten hergestellt. Man gibt dazu für jede Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums $M \subset X$ einen Isomorphismus

$$\text{nat}_M : T^c M \xrightarrow{\sim} TM$$

an, der veträglich ist mit den Fußpunktprojektionen und derart, daß die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} T^c W & \xrightarrow{d^c \varphi} & T^c M \\ \wr \downarrow \text{nat}_W & & \wr \downarrow \text{nat}_M \\ TW & \xrightarrow{d\varphi} & TM \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T^c M & \longrightarrow & T^c X \\ \wr \downarrow \text{nat}_M & & \wr \downarrow \text{nat}_X \\ TM & \xrightarrow{di} & TX \end{array}$$

kommutieren, das linke für $\varphi : \mathbb{R}^k \circlearrowleft W \rightarrow M$ eine Karte und in der oberen Horizontale $d^c \varphi : T^c W = W \times \vec{\mathbb{R}}^k \rightarrow T^c M$ gegeben durch $(d^c \varphi)(x, \vec{v}) \mapsto (\varphi(x), (d_x \varphi)(\vec{v}))$, das zweite mit der durch unsere Konstruktionen gegebenen Einbettung $T^c M \subset X \times \vec{X} = T^c X$. Analog geht es für Randfaltungen und Eckfaltungen.

10.6.8 (Notationsfragen). Es ist üblich, die Isomorphismen nat_M nicht zu notieren und schlicht keinen Unterschied zu machen zwischen $T^c M$ und TM . Nach und nach werden wir das auch mehr und mehr so halten. Wir verwenden wie in 8.1.21 die Notation $\partial_i := \text{trans}(e_i) \in \vec{\mathbb{R}}^n$ für die Bilder der Vektoren der Standardbasis von \mathbb{R}^n . Im Fall $n = 1$ schreiben wir $\partial = \partial_1$.

10.6.9. Gegeben ein mehrpunktiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$ betrachten wir den Weg $\tau = \tau_I : I \rightarrow TI$ gegeben durch $\tau : t \mapsto (t, \partial)$ oder ganz genau $t \mapsto \text{nat}_I(t, \partial)$ mit $(t, \partial) \in T^c I = I \times \vec{\mathbb{R}}$. Gegeben ein glatter Weg $\gamma : I \rightarrow M$ in einer Mannigfaltigkeit erklären wir dann seinen **Tangentialweg** als den Weg

$$\tilde{\gamma} := d\gamma \circ \tau : I \rightarrow TM$$

in das Tangentialbündel. Der Tangentialweg des Identitätswegs $\gamma = \text{id} : I \rightarrow I$ ist τ . Ist witer $M \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums, so finden wir

$$\tilde{\gamma} = \text{nat}_M \circ (\gamma, \gamma')$$

10.6.10. Gegeben ein Mannigfaltigkeit M betrachten wir im physikalischen Kontext vorzugsweise eine mit Einheiten versehene Variante

$$\underline{TM} := TM\langle 1/s \rangle$$

des Tangentialbündels, den **Phasenraum** oder **Geschwindigkeitsphasenraum** unserer Mannigfaltigkeit. Formal mag man ihn definieren als das Tensorprodukt den Tangentialbündels von M mit dem eindimensionalen reellen Vektorraum der dualen Zeitspannen $\langle 1/s \rangle$, und für diese Konstruktion müssen wir $\mathbb{T}M$ mit seiner Struktur eines Vektorbündels kennen und nicht nur als Mannigfaltigkeit. Im eingebetteten Fall $M \subset X$ können wir auch den eingebetteten Geschwindigkeitsphasenraum erklären als die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}^c M \subset X \times \vec{X} \langle 1/s \rangle$ gegeben als die Vereinigung

$$\mathbb{T}^c M := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \langle 1/s \rangle$$

Analog wie im einheitenfreien Fall induziert jede glatte Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung $d\varphi : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}N$ und die Konstruktionen liefern im Fall eingebetteter Mannigfaltigkeiten Isomorphismen $\text{nat}_M : \mathbb{T}^c M \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}M$ und es gelten analoge Funktorialitäten und Verträglichkeiten wie zuvor. Gegeben ein mehrpunktiges Zeitintervall $I \subset \mathbb{T}$ schließlich erklären wir $\tau : I \rightarrow \mathbb{T}I$ durch $t \mapsto (t, 1)$ mit $1 \in \vec{\mathbb{T}} \langle 1/s \rangle = \langle s/s \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ dem Element, das unter unseren verschiedenen Identifikationen der $1 \in \mathbb{R}$ entspricht, und genauer der Verknüpfung mit nat_I der durch diese Vorschrift gegebenen Abbildung $I \rightarrow \mathbb{T}^c I$. Gegeben ein glatter Weg $\gamma : \mathbb{T} \supset I \rightarrow M$ auf einem mehrpunktigen Zeitintervall bilden wir dann als mit Einheiten versehenes Analogon des Tangentialwegs den zugehörigen **Phasenweg** im Phasenraum $\tilde{\gamma} := d\gamma \circ \tau : I \rightarrow \mathbb{T}M$. Im Fall einer eingebetteten Mannigfaltigkeit M finden wir analog wie zuvor

$$\tilde{\gamma} = \text{nat}_M \circ (\gamma, \dot{\gamma})$$

Definition 10.6.11. Gegeben eine glatte Funktion $L : \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit nennen wir einen glatten Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ **stationär für L** , wenn für alle glatten Abbildungen $\alpha : [a, b] \times (-\eta, \eta) \rightarrow M$ mit $\alpha(t, 0) = \gamma(t) \forall t$ und $\alpha(a, s), \alpha(b, s)$ unabhängig von $s \in (-\eta, \eta)$ gilt

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b L(\tilde{\alpha}(t, s)) dt$$

Hier ist der Tangentialweg $\tilde{\alpha}(t, s)$ von $t \mapsto \alpha(t, s)$ jeweils für festes s in Bezug auf die Variable t zu bilden.

10.6.12. Analog geht es im Fall $L : \mathbb{T}M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer zeitabhängigen Lagrangefunktion. Ich werde mich aber auf die Argumentation im zeitunabhängigen Fall konzentrieren und nachher nur kurz ergänzen, daß es im zeitabhängigen Fall genauso geht.

10.6.13 (**Äquivalenz von Orthogonalität und stationärer Wirkung**). Satz 10.5.8 über stationäre Wirkung mit Zwangsbedingungen besagt in dieser Terminologie

und mit den entsprechenden Einheiten garniert, daß gegeben ein mechanisches System mit Potential genau die für die Lagrangefunktion „kinetische minus potentielle Energie“ stationären glatten Wege $\gamma : \mathbb{T} \supset [a, b] \rightarrow M$ die Orthogonalitätsbedingung 10.4.3 beziehungsweise im zeitabhängigen Fall 10.4.4 erfüllen, die wir als die physikalisch sinnvolle Bewegungsgleichung erkannt haben.

10.6.14 (Bilder stationärer Wege unter Isomorphismen). Gegeben ein Isomorphismus von glatten Mannigfaltigkeiten $\varphi : N \xrightarrow{\sim} M$ und eine glatte Funktion $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ und eine glatte Abbildung $\kappa : [a, b] \rightarrow N$ ist κ stationär für $\hat{L} := L \circ d\varphi$ genau dann, wenn $\gamma := \varphi \circ \kappa$ stationär ist für L . In der Tat finden wir für die Phasenwege $\tilde{\gamma} = d\gamma \circ \tau = d\varphi \circ d\kappa \circ \tau = d\varphi \circ \tilde{\kappa}$ und folglich

$$\int_a^b L \circ \tilde{\gamma} = \int_a^b L \circ (d\varphi \circ \tilde{\kappa}) = \int_a^b (L \circ d\varphi) \circ \tilde{\kappa} = \int_a^b \hat{L} \circ \tilde{\kappa}$$

Dasselbe gilt für Familien von Wegen und das zeigt dann die Behauptung.

Satz 10.6.15 (Euler-Lagrange-Gleichungen). Gegeben $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine glatte Funktion $L : W \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein glatter Weg $\kappa : [a, b] \rightarrow W$ stationär für L genau dann, wenn gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i} \circ (\kappa, \kappa') \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \circ (\kappa, \kappa') \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

10.6.16. Genau genommen hatten wir stationäre Wege in die Mannigfaltigkeit W nur in Bezug auf eine Abbildung $L : TW \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Uns stehen jedoch Isomorphismen $\text{nat}_W : W \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} TW$ und $\text{trans} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ gegeben durch $(y_1, \dots, y_n) \mapsto y_1 \partial_1 + \dots + y_n \partial_n$ zur Verfügung, mit deren Hilfe wir unser L übersetzen und unter denen der Tangentialweg $\tilde{\kappa}$ dem Weg (κ, κ') in $W \times \mathbb{R}^n$ entspricht.

Beweis. Wir betrachten wir eine beliebige glatte Funktion $\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 0$ und wählen einen Index i und betrachten $\rho(t, s) := \kappa(t) + s\varepsilon(t)\partial_i$. Stationär zu sein impliziert insbesondere

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b L(\rho(t, s), \rho_t(t, s)) dt$$

Durch Vertauschen von Ableitung und Integral ergibt sich

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \right) \varepsilon(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \right) \varepsilon'(t) dt$$

Wir erinnern unseren alten Trick und bemerken

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \cdot \varepsilon(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \right) \varepsilon(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \right) \varepsilon'(t) dt \end{aligned}$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Produktregel. Indem wir diese Identität oben verwenden, um den Term mit ε' loszuwerden, erhalten wir

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \right) \right) \cdot \varepsilon(t) dt$$

für alle erlaubten Funktionen ε wie zuvor. Für unseren Koordinatenweg folgt un schwer die **Euler-Lagrange-Gleichung**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}(\kappa(t), \kappa'(t))$$

Nun nehmen wir umgekehrt an, daß die Euler-Lagrange-Gleichungen gelten für $1 \leq i \leq n$. Es gilt zu zeigen

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b L(\rho(t, s), \rho_t(t, s)) dt$$

für alle glatten $\rho : [a, b] \times (-\eta, \eta) \rightarrow W$ mit $\rho(t, 0) = \kappa(t)$ und $\rho(a, s), \rho(b, s)$ unabhängig von s . Weil der untere Index für partielle Ableitungen gebraucht wird, notieren wir ρ^i, κ^i die i -te Komponente von ρ beziehungsweise κ . Indem wir die Ableitung unter das Integral ziehen, können wir das umformen zur Gleichung

$$0 = \int_a^b \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \cdot \rho_s^i(t, 0) + \frac{\partial L}{\partial y_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \cdot \rho_{ts}^i(t, 0) dt$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Produktregel gilt nun

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \cdot \rho_s^i(t, 0) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \right) \cdot \rho_s^i(t, 0) + \left(\frac{\partial L}{\partial y_i}(\kappa(t), \kappa'(t)) \right) \cdot \rho_{st}^i(t, 0) dt \end{aligned}$$

Damit können wir die gesuchte Identität weiter umformen zur Gleichung

$$0 = \int_a^b \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \circ (\kappa, \kappa') \right) \cdot \rho_s^i(t, 0) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i} \circ (\kappa, \kappa') \right) \cdot \rho_s^i(t, 0) dt$$

In dieser Form folgt sie aber direkt aus den Euler-Lagrange-Gleichungen. \square

Korollar 10.6.17 (Bewegungsgleichungen in Koordinaten). Sei M der Konfigurationsraum eines mechanischen Systems mit Potential und $L : \mathbb{T}M \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$ seine Lagrangefunktion. Sei weiter $\varphi : \mathbb{R}^n \circlearrowright W \rightarrow M$ eine bijektive Karte von M .

Gegeben ein glatter Koordinatenweg $\kappa : \mathbb{T} \supset I \rightarrow W$ erfüllt $\varphi \circ \kappa$ die Orthogonalitätsbedingungen 10.4.3 genau dann, wenn κ die **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial y_i} \circ (\kappa, \dot{\kappa}) \right) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial x_i} \circ (\kappa, \dot{\kappa}) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

erfüllt für $\hat{L} := L \circ \underline{d}\varphi : W \times \mathbb{R}^n \langle 1/s \rangle \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$ die **Lagrangefunktion in Koordinaten**.

10.6.18. In der physikalischen Literatur schreibt man meist \dot{x}_i statt y_i . Das ist praktisch für konkrete Rechnungen, aber schien mir weniger geschickt für die abstrakte Argumentation.

10.6.19. Genau genommen hatten wir stationäre zeitparamerisierte Wege in die Mannigfaltigkeit W nur in Bezug auf eine Abbildung $L : \mathbb{T}W \rightarrow \mathbb{R}$ oder allgemeiner mit Werten in einem eindimensionalen reellen Vektorraum definiert. Uns stehen jedoch Isomorphismen $\text{nat}_W : W \times \vec{\mathbb{R}}^n \langle 1/s \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}W$ und $\text{trans} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{R}}^n$ gegeben durch $(y_1, \dots, y_n) \mapsto y_1 \partial_1 + \dots + y_n \partial_n$ zur Verfügung, mit deren Hilfe wir unser L übersetzen und unter denen der Phasenweg $\tilde{\kappa}$ dem Weg $(\kappa, \dot{\kappa})$ in $W \times \mathbb{R}^n \langle 1/s \rangle$ entspricht. Die y_i haben insbesondere Werte in $\langle 1/s \rangle$ und das partielle Ableiten danach ändert die Einheit des Wertebereichs um den Faktor $\langle s \rangle$.

Beweis. Nach 10.6.13 erfüllt der Weg $\varphi \circ \kappa$ die Orthogonalitätsbedingungen genau dann, wenn er stationär ist für die Lagrangefunktion L . Nach 10.6.14 entsprechend mit Einheiten garniert ist $\varphi \circ \kappa$ stationär für L genau dann, wenn der Koordinatenweg κ stationär ist für die Lagrangefunktion in Koordinaten $\hat{L} := L \circ \underline{d}\varphi$. Nach 10.6.15 entsprechend mit Einheiten garniert κ stationär \hat{L} genau dann, wenn die im Korollar ausgeschriebenen Euler-Lagrange-Gleichungen gelten. \square

10.6.20 (**Bewegungsgleichungen in Koordinaten, zeitabhängige Variante**). Ist im Korollar das Potential zusätzlich eine Funktion der Zeit, so funktioniert alles genauso, man muß nur den zusätzlichen Parameter in der ganzen Argumentation ergänzen und erhält zum Schluß die Euler-Lagrange-Gleichungen in der Gestalt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial y_i} (\kappa(t), \dot{\kappa}(t), t) \right) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial x_i} (\kappa(t), \dot{\kappa}(t), t) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

10.7 Euler-Lagrange-Gleichungen direkt

10.7.1. In diesem Abschnitt werden die Euler-Lagrange-Gleichungen ohne den Umweg über das Prinzip der stationären Wirkung direkt aus den Orthogonalitätsbedingungen hergeleitet.

10.7.2 (**Motivation**). Die Bewegungsgleichungen in Gestalt der Orthogonalitätsbedingung 10.4.4, die wir in 10.4.3 aus dem Newton'schen Prinzip „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ zusammen mit dem Prinzip „Zwangskräfte verrichten unter infinitesimalen Verrückungen keine Arbeit“ von d'Alembert hergeleitet haben, wird nun in Koordinaten ausgeschrieben. So ergeben sich die „Euler-Gleichungen“ und die „Euler-Lagrange-Gleichungen“. Dafür führen wir das „Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit“ und als mit Einheiten versehene Variante den „Geschwindigkeitsphasenraum eines mechanischen Systems“ ein.

10.7.3 (**Bewegungsgleichungen in lokalen Koordinaten**). Wir betrachten wie in 10.4.3 den Fall eines mechanischen Systems von Λ Massepunkten der Massen m_1, \dots, m_Λ , deren Bewegung in der Weise durch Zwangsbedingungen eingeschränkt sei, daß die Zusammenfassung ihrer Orte $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_\Lambda) \in \mathbb{E}^\Lambda$ sich stets auf einer fest vorgegebenen glatten Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^\Lambda$ befindet, dem Konfigurationsraum unseres mechanischen Systems. In diesem Fall betrachten wir vorzugsweise eine mit Einheiten versehene Variante

$$\underline{T}M := TM\langle 1/s \rangle$$

des Tangentialbündels, den **Phasenraum** oder **Geschwindigkeitsphasenraum** unseres Systems. Formal erklären wir ihn als eine Untermannigfaltigkeit $\underline{T}M \subset X \times \vec{X}\langle 1/s \rangle$ für $X = \mathbb{E}^\Lambda$, eben die Vereinigung der $T_p M\langle 1/s \rangle$.

10.7.4. Die **kinetische Energie** unseres mechanischen Systems $(m_1, \dots, m_\Lambda, M)$ sei die Abbildung $K : \mathbb{E}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda\langle 1/s \rangle \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$ gegeben durch

$$(\mathbf{r}_\nu, \vec{\mathbf{v}}_\nu)_{\nu=1}^\Lambda \mapsto \sum_{\nu=1}^\Lambda m_\nu \langle \vec{\mathbf{v}}_\nu, \vec{\mathbf{v}}_\nu \rangle / 2$$

Für $\vec{\mathbf{F}}_\nu : \mathbb{E}^\Lambda \rightarrow \vec{\mathbb{E}}\langle \text{g}/\text{s}^2 \rangle$ zusätzlich gegebene auf den jeweiligen Massepunkt wirkende aber möglicherweise von den Orten aller Teilchen abhängige **externe Kräfte** erklären wir nun die i -te **generalisierte Kraft** in Bezug auf unser Koordinatensystem von M durch

$$Q_i := \sum_{\nu=1}^\Lambda \left\langle \vec{\mathbf{F}}_\nu \circ \mathbf{r}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_i} \right\rangle$$

Unsere generalisierten Kräfte sind also Funktionen $Q_i : M \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$. Durch Vorschalten der Bündelprojektion können und werden wir sie als Funktionen auf dem Phasenraum auffassen.

10.7.5. Seien $(m_1, \dots, m_\Lambda, M)$ ein mechanisches System und $\varphi : \mathbb{R}^n \supset W \xrightarrow{\sim} M$ eine bijektive Karte seines Konfigurationsraums. Die Koordinaten auf $W \subset \mathbb{R}^n$

notieren wir (x_1, \dots, x_n) . Wir interpretieren im folgenden Abbildungen von M wohin auch immer oft vermittelt φ als Abbildungen von W wohin auch immer durch Vorschalten von φ , schreiben das φ aber meist nicht explizit dazu. Wir schreiben insbesondere neu $\mathbf{r}_\nu := \mathbf{r}_\nu \circ \varphi : W \rightarrow \mathbb{E}$. Die Bewegung unseres Systems in Koordinaten notieren wir

$$\kappa := \varphi^{-1} \circ \gamma : \mathbb{T} \supset I \rightarrow W$$

und nennen diese Abbildung den **Koordinatenweg**. Wir haben also $\gamma = \varphi \circ \kappa$. Unsere Karte φ von M induziert eine mit Einheiten versehene Karte

$$\psi : W \times \mathbb{R}^n \langle 1/s \rangle \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{T}}M$$

des Phasenraums. Deren Koordinaten notieren wir $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ mit der Besonderheit, daß die hinteren Koordinaten y_i als Werte statt reelle Zahlen vielmehr duale Zeitspannen alias Frequenzen annehmen. In der physikalischen Literatur schreibt man statt y_i meist \dot{x}_i , aber wir erlauben uns bepunktete Symbole innerhalb der mathematischen Argumentation nur für echte zeitliche Ableitungen. Per definitionem ist $\psi(x, y)$ das Tupel von Vektoren und Richtungsvektoren $((\mathbf{r}_\nu), (\vec{\mathbf{v}}_\nu))$ gegeben durch $\mathbf{r}_\nu(x, y) = \mathbf{r}_\nu(x)$ sowie

$$\vec{\mathbf{v}}_\nu(x, y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}(x) y_j$$

In derselben Weise wie zuvor fassen wir alle Abbildungen von $\underline{\mathbb{T}}M$ wohin auch immer durch Vorschalten von ψ als Abbildungen von $W \times \mathbb{R}^n$ wohin auch immer auf. Weiter meinen bepunktete Symbole stets die Ableitung nach der Zeit, insbesondere also $\dot{\mathbf{r}}_\nu = d_t(\mathbf{r}_\nu \circ \kappa)$ und $\dot{x}_i = d_t(x_i \circ \kappa)$.

10.7.6. Die **kinetische Energie** unseres mechanischen Systems $(m_1, \dots, m_\Lambda, M)$ sei die Abbildung $K : \mathbb{E}^\Lambda \times \mathbb{E}^\Lambda \langle 1/s \rangle \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$ gegeben durch

$$(\mathbf{r}_\nu, \vec{\mathbf{v}}_\nu)_{\nu=1}^\Lambda \mapsto \sum_{\nu=1}^\Lambda m_\nu \langle \vec{\mathbf{v}}_\nu, \vec{\mathbf{v}}_\nu \rangle / 2$$

Satz 10.7.7 (Euler-Gleichungen). Gegeben eine bijektive Karte des Konfigurationsraums eines *mechanischen Systems* und $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ die zugehörigen natürlichen Koordinaten auf dem Phasenraum erfüllt ein glatter Weg $\gamma : \mathbb{T} \supset I \rightarrow M$ die Orthogonalitätsbedingung 10.4.4 genau dann, wenn für den zugehörigen Koordinatenweg κ gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial y_i} \circ (\kappa, \dot{\kappa}) \right) - \frac{\partial K}{\partial x_i} \circ (\kappa, \dot{\kappa}) - Q_i \circ \kappa = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

mit K der kinetischen Energie und Q_i den generalisierten Kräften.

Beweis. Das ist ein Ausschreiben in Koordinaten mit den zu Beginn dieses Abschnitts eingeführten Notationen. Für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen unserer Teilchen ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_\nu &= \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_n} \dot{x}_n \\ \ddot{\mathbf{r}}_\nu &= \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j \partial x_k} \dot{x}_j \dot{x}_k + \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j} \ddot{x}_j\end{aligned}$$

Die griechischen Indizes zeigen hierbei an, daß diese Gleichungen in \mathbb{E} beziehungsweise $\mathbb{E}\langle 1/s \rangle$ beziehungsweise $\mathbb{E}\langle 1/s^2 \rangle$ oder genauer als Gleichungen von Abbildungen von $I \subset \mathbb{T}$ in besagte Räume zu verstehen sind. Da weiter für $x \in W$ der Tangentialraum $T_{\varphi(x)}M$ nach 10.6.4 von den ausgewertet bei x zu verstehenden Vektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}_\Lambda}{\partial x_l} \right) \in \mathbb{E}^\Lambda$$

für $1 \leq l \leq n$ aufgespannt wird, ist unsere Orthogonalitätsbedingung für das massebehaftete Skalarprodukt $(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))) \perp_g T_{\gamma(t)}M$ gleichbedeutend dazu, daß für alle l die Summe

$$\sum_{\nu,j,k} m_\nu \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \dot{x}_j \dot{x}_k + \sum_{\nu,j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \ddot{x}_j - \sum_\nu \left\langle \vec{\mathbf{F}}_\nu \circ \mathbf{r}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle$$

verschwindet. Wir nennen diese Verschwindungsbedingung im folgenden die **l -te Bewegungsgleichung**. Die Einschränkung der kinetischen Energie K auf den Phasenraum des Systems mit Zwangsbedingungen hat in Koordinaten die Gestalt

$$K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{\nu,j,k} \frac{m_\nu}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_k} \right\rangle y_j y_k$$

Für ihre partielle Ableitung mit Einheiten im Sinne von 2.4.10 folgt

$$\frac{\partial K}{\partial y_l} = \sum_{\nu,j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle y_j$$

und weiter

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial y_l} \circ (\kappa, \dot{\kappa}) \right) &= \sum_{\nu,i,j,k} m_\nu \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \dot{x}_k \dot{x}_j \\ &\quad + \sum_{\nu,i,j,k} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l \partial x_k} \right\rangle \dot{x}_k \dot{x}_j \\ &\quad + \sum_{\nu,j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \ddot{x}_j\end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme der l -ten Bewegungsgleichung von oben können demnach dargestellt werden in der Form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial y_l} \circ (\kappa, \dot{\kappa}) \right) - \frac{\partial K}{\partial x_l} \circ (\kappa, \dot{\kappa})$$

Der letzte Term ist gerade die generalisierte Kraft und der Satz folgt. \square

10.7.8 (Euler-Lagrange-Gleichungen bei Kräften mit Potential). Wir erinnern die generalisierten Kräfte

$$Q_i := \sum_{\nu=1}^{\Lambda} \left\langle \vec{\mathbf{F}}_{\nu} \circ \mathbf{r}_{\nu}, \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial x_i} \right\rangle$$

Ist jeweils $V_{\nu} : \mathbb{E} \rightarrow \langle \text{gm/s}^2 \rangle$ ein Potential von $\vec{\mathbf{F}}_{\nu}$, in Formeln

$$(d_p V_{\nu})(\vec{\mathbf{v}}) = -\langle \vec{\mathbf{F}}_{\nu}(p), \vec{\mathbf{v}} \rangle$$

für alle Punkte $p \in \mathbb{E}$ und Richtungsvektoren $\vec{\mathbf{v}} \in \vec{\mathbb{E}}$, so folgt für das Gesamtpotential als Funktion der Koordinaten $V := \sum_{\nu} V_{\nu} \circ \mathbf{r}_{\nu}$ die Identität

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) &= (d_x V)(\vec{\mathbf{e}}_i) \\ &= \sum_{\nu} (d_{\mathbf{r}_{\nu}(x)} V_{\nu})((d_x \mathbf{r}_{\nu})(\vec{\mathbf{e}}_i)) \\ &= \sum_{\nu} (d_{\mathbf{r}_{\nu}(x)} V_{\nu}) \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial x_i} \right) \\ &= -\sum_{\nu} \left\langle \vec{\mathbf{F}}_{\nu} \circ \mathbf{r}_{\nu}, \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= -Q_i \end{aligned}$$

Bilden wir also die **Lagrangefunktion**

$$L := V - K$$

als Differenz zwischen der potentiellen und der kinetischen Energie unseres Systems, so erfüllt für eine mögliche Bewegung $\gamma : \mathbb{T} \supset I \rightarrow M$ die zugehörige Abbildung κ in den Koordinatenbereich die **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_l} \circ (\kappa, \dot{\kappa}) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_l} \right) \circ (\kappa, \dot{\kappa}) = 0 \quad \text{für } 1 \leq l \leq n.$$

Beispiel 10.7.9 (Bewegung einer Töpferscheibe nach Euler-Lagrange). Wir betrachten eine Töpferscheibe mit Zentrum $\mathbf{p} \in \mathbb{E}$. Wir denken sie uns zusammengesetzt aus Massepunkten der Massen m_1, \dots, m_{Λ} die zu einem gegebenen Zeitpunkt an den Stellen $\mathbf{p} - \nu \in \mathbb{E}$ sitzen. Der Konfigurationsraum M ist eine

Kreislinie. Damit wir unseren Formalismus anwenden können, gehen wir zu einer offenen Teilmenge von M über, indem wir einen Punkt daraus weglassen, und dann ist der Drehwinkel im Bogenmaß von diesem Punkt aus die lokale Koordinate (x_1) zu einer Karte mit Definitionsbereich das offene Intervall $W = (0, 2\pi)$. Wir schreiben sie in diesem Fall lieber ϑ statt x_1 und schreiben ebenso die Geschwindigkeitskoordinate des Phasenraums der physikalischen Konvention folgend $\dot{\vartheta}$ statt y_1 wie in der mathematischen Argumentation. Wir denken uns unsere Scheibe waagrecht, so daß das Potential V unabhängig ist von ϑ und die generalisierte Kraft identisch verschwindet. Die kinetische Energie $K(\dot{\vartheta})$ ergibt sich zu

$$K(\dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \dot{\vartheta}^2 \|\mathbf{p}_{\nu} - \mathbf{p}\|^2 m_{\nu} = J \dot{\vartheta}^2 / 2$$

für $J := \sum_{\nu} \|\mathbf{p}_{\nu} - \mathbf{p}\|^2 m_{\nu} \in \langle \text{gm}^2 \rangle$ das **Trägheitsmoment** unserer Töpferscheibe. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für κ spezialisieren zu $\frac{d}{dt}(J\dot{\kappa}) = 0$ alias $\dot{\kappa}$ konstant alias $\kappa : \mathbb{T} \supset I \rightarrow (0, 2\pi)$ von konstanter Steigung. Unsere Töpferscheibe dreht sich folglich ohne Einwirkung äußerer Kräfte mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

Beispiel 10.7.10 (Kleine Schwingungen). Seien (x_1, \dots, x_n) Koordinaten auf dem Konfigurationsraum M eines **mechanischen Systems** mit Potential V und seien weiter (x_i, y_i) die zugehörigen natürlichen Koordinaten auf dem Phasenraum $\underline{T}M$. Ist $(x_i = 0)$ eine kritische Stelle der Potentialfunktion, so kann V dort bis auf eine für unsere Gleichungen unerhebliche additive Konstante nach der Taylorformel 3.2.5 lokal bis zu dritter Ordnung approximiert werden durch eine quadratische Form

$$V = \sum a_{ij} x_i x_j$$

und wir dürfen dabei die Matrix (a_{ij}) symmetrisch annehmen. Unsere Koordinaten x_i sind reellwertig, die Koeffizienten unserer quadratischen Form haben folglich die Einheit einer Energie $a_{ij} \in \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$. Die zugehörigen y_i ordnen einem Geschwindigkeitsvektor $\partial_j \otimes \langle 1/\text{s} \rangle$ den Wert $\delta_{ij} \langle 1/\text{s} \rangle$ zu. Weiter kann die Lagrange-funktion L nach unseren Überlegungen im Beweis von 11.1.7 bis auf dieselbe für unsere Gleichungen unerhebliche additive Konstante lokal um $(x_i = y_i = 0)$ bis zu dritter Ordnung approximiert werden durch eine quadratische Form

$$L = \sum a_{ij} x_i x_j - \sum b_{ij} y_i y_j$$

und wir dürfen dabei die Matrix (b_{ij}) mit Einträgen $b_{ij} \in \langle \text{gm}^2 \rangle$ symmetrisch und positiv definit annehmen. Für das approximierende System, dessen Langrange-funktion nun wirklich genau diese Differenz von quadratischen Formen ist, findet man nach dem Satz über Hauptachsentransformationen [LA2] 4.2.7 einen linearen Koordinatenwechsel derart, daß in den neuen Koordinaten die Matrix

$A := (a_{ij})$ Diagonalgestalt hat, in Formeln $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$, und daß $B := (b_{ij})$ ein Vielfaches des Einheitsmatrix wird, etwa $B = \text{diag}(c/2, \dots, c/2)$ mit $c \in \langle \text{gm}^2 \rangle$. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten dann in diesen Koordinaten

$$\ddot{\gamma}_l = -(\lambda_l/c)\gamma_l \quad \text{für } 1 \leq l \leq n.$$

Ist unsere kritische Stelle des Potentials ein lokales Minimum und ist die Hesse-Matrix dort nicht ausgeartet, so ist auch A positiv definit und alle $\lambda_l/c \in \langle 1/\text{s}^2 \rangle$ sind positiv und die l -te Koordinate unserer Bewegung ist eine Schwingung mit der Periode $2\pi/\sqrt{\lambda_l/c}$, genauer $\gamma_l(t) = C \sin(t\sqrt{\lambda_l/c} + \phi)$ für frei wählbare reelle Zahlen C, ϕ . Die zugehörigen Frequenzen $(1/2\pi)\sqrt{\lambda_l/c}$ heißen die **Eigenfrequenzen** unseres Systems. Wir diskutieren hier nicht, wie gut die Lösungen des approximierenden Systems die Lösungen des ursprünglichen Systems approximieren. Mithilfe unserer Aussagen über differentielle Ungleichungen 6.2.10 kann man hier aber durchaus recht gute Abschätzungen erhalten.

10.8 Hamilton-Gleichungen

10.8.1 (**Motivation**). Der „Hamilton-Formalismus“ schreibt unsere Orthogonalitätsbedingungen

$$(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))) \perp_g T_{\gamma(t)}M$$

aus 10.4.4 um zu einem System von $2\dim M$ Differentialgleichungen erster Ordnung, im Gegensatz zu den $\dim M$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach Euler-Lagrange. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall eines freien Punktteilchens. Anschließend diskutieren wir den Fall eines Systems mit Zwangsbedingungen. Eine besonders elegante Form nimmt der Hamilton-Formalismus in den sogenannten „kanonischen Koordinaten“ an, wie in den darauffolgenden Abschnitten ausgeführt wird.

10.8.2. Wir betrachten einen Massepunkt positiver Masse $m > 0$, der sich im Raum \mathbb{E} in einem Kraftfeld F mit Potential V bewegt, und betrachten auf dem Phasenraum die Funktion der totalen Energie

$$H : \mathbb{E} \times \vec{\mathbb{E}}\langle 1/\text{s} \rangle \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$$

gegeben durch $H(p, v) := V(p) + m\langle v, v \rangle/2$. Sie heißt die **Hamilton-Funktion** unseres Systems. Weiter betrachten wir auf dem Richtungsraum $\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}}\langle 1/\text{s} \rangle$ des Phasenraums die $\langle \text{gm}^2/\text{s} \rangle$ -wertige symplektische Form

$$\omega((v_1, v_2), (w_1, w_2)) := m\langle v_1, w_2 \rangle - m\langle v_2, w_1 \rangle$$

Satz 10.8.3 (Hamilton-Formalismus für Punktteilchen). Gegeben ein Punktteilchen positiver Masse $m > 0$ in einem Kraftfeld F mit Potential V ist γ genau dann eine Lösung der Bewegungsgleichungen, wenn $(\gamma, \dot{\gamma})$ ein Flußweg des symplektischen Gradienten $\text{grad}_\omega H$ der Hamiltonfunktion ist.

Beweis. Es gilt zu zeigen $(\text{grad}_\omega H)(p, v) = (v, \frac{1}{m}F(p))$. Gleichbedeutend gilt es zu zeigen

$$(d_{(p,v)}H)(w_1, w_2) = \omega\left(\left(v, \frac{1}{m}F(p)\right), (w_1, w_2)\right)$$

für alle (w_1, w_2) . Nun haben wir $H(p, v) = V(p) + K(v)$ mit $K(v) := m\langle v, v \rangle/2$. Für den zweiten Summanden erhalten wir $(d_v K)(w) = m\langle v, w \rangle$ nach unseren allgemeinen Erkenntnissen für das Differential bilinearer Abbildungen 2.6.5, die Komponentenregel 2.6.1 und die Kettenregel. So finden wir

$$(d_{(p,v)}H)(w_1, w_2) = m\langle v, w_2 \rangle - \langle F(p), w_1 \rangle$$

und wie gewünscht genau den Wert der symplektischen Form. \square

10.8.4. Wir erinnern aus 10.4.3 unsere allgemeinen mechanischen Systeme mit Zwangsbedingungen und Potential $(m_1, \dots, m_\Lambda, M, V)$ und vereinbaren die Abkürzung $X := \mathbb{E}^\Lambda$. Der Konfigurationsraum ist damit eine glatte Untermannigfaltigkeit $M \subset X$ und der Richtungsraum \vec{X} ist mit dem massebehafteten Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ mit Werten in $\langle \text{gm}^2 \rangle$ versehen. Wir betrachten auf $X \times \vec{X} \langle 1/\text{s} \rangle$ die Funktion der **kinetischen Energie**

$$K(p, v) := \langle v, v \rangle_g / 2$$

Die Summe von kinetischer und potentieller Energie $H := V + K$ heißt die **Hamiltonfunktion**

$$H : X \times \vec{X} \langle 1/\text{s} \rangle \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$$

Wie im Fall eines Punktteilchens ohne Zwangsbedingungen 10.8.3 betrachten wir auf $\vec{X} \times \vec{X} \langle 1/\text{s} \rangle$ die symplektische Form $\omega = \omega_g$ mit Werten in $\langle \text{gm}^2 \rangle$ gegeben durch

$$\omega\left((v_1, v_2), (w_1, w_2)\right) := \langle v_1, w_2 \rangle_g - \langle v_2, w_1 \rangle_g$$

Satz 10.8.5 (Hamilton-Formalismus). Gegeben (M, V) ein mechanisches System mit Potential erfüllt eine Bewegung $\gamma : \mathbb{T} \supset I \rightarrow M$ die Orthogonalitätsbedingung 10.4.4 genau dann, wenn ihr Phasenweg $(\gamma, \dot{\gamma})$ ein Flußweg des symplektischen Gradienten $\text{grad}_\omega H$ der Hamiltonfunktion $H : \mathbb{T}M \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$ ist.

10.8.6. Der **symplektische Gradient** bezeichnet hier das Geschwindigkeitsfeld auf dem Phasenraum $\mathbb{T}M$, das jedem Punkt $(p, u) \in \mathbb{T}M$ denjenigen Vektor

$(\text{grad}_\omega H)(p, u) \in \mathbb{T}_{(p,u)}(\mathbb{T}M)$ zuordnet, der charakterisiert wird durch die Eigenschaft

$$\omega((\text{grad}_\omega H)(p, u), \vec{w}) = (d_{(p,u)}H)(\vec{w}) \quad \forall \vec{w} \in \mathbb{T}_{(p,u)}(\mathbb{T}M)$$

für die mittels der Einbettung $\mathbb{T}_{(p,u)}(\mathbb{T}M) \hookrightarrow \vec{X}\langle 1/s \rangle \times \vec{X}\langle 1/s^2 \rangle$ eingeschränkte und mit zusätzlichen Einheiten versehene symplektische Form $\omega = \omega_g$. Wir schreiben im folgenden nur für eine von Einheiten befreite Variante dieses Satzes in 10.8.10 den Beweis aus und beginnen mit Vorarbeiten.

10.8.7 (Tangentialbündel). Gegeben $M \subset X$ eine glatte Untermannigfaltigkeit eines endlichdimensionalen Raums erinnern wir aus 10.6.4 ihr Tangentialbündel, eine Untermannigfaltigkeit $TM \subset X \times \vec{X}$. Im folgenden verwenden wir oft und ohne Notation den offensichtlichen Isomorphismus $\text{Richt}(X \times \vec{X}) \xrightarrow{\sim} \vec{X} \times \vec{X}$. Mit seiner Hilfe fassen wir die Tangentialräume des Tangentialbündels an einer Stelle $(p, u) \in TM$ auf als Untervektorräume

$$\mathbb{T}_{(p,u)}(TM) \subset \vec{X} \times \vec{X}$$

10.8.8 (Tangentialräume des Tangentialbündels). Ich erinnere daran, daß eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen ein Datum $U \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$ ist aus drei Vektorräumen U, V, W und zwei linearen Abbildungen, deren erste injektiv ist, deren zweite surjektiv ist und so, daß das Bild der ersten der Kern der zweiten ist. Die kurze exakte Sequenz

$$\vec{X} \hookrightarrow \vec{X} \times \vec{X} \twoheadrightarrow \vec{X}$$

mit $w \mapsto (0, w)$ und $(v, w) \mapsto v$ als Abbildungen induziert nun für jeden Punkt des Tangentialbündels $(p, u) \in TM$ eine kurze exakte Sequenz

$$\mathbb{T}_p M \hookrightarrow \mathbb{T}_{(p,u)}(TM) \twoheadrightarrow \mathbb{T}_p M$$

für den Tangentialraum des Tangentialbündels bei (p, u) . In der Tat ist offensichtlich die erste Abbildung eine Injektion und die Verknüpfung Null und die Zweite ist eine Surjektion, was man durch Vorschalten einer Standardkarte leicht sieht. Aus Dimensionsgründen müssen dann in der Tat in der Mitte Kern und Bild übereinstimmen. Nun sei ein Vektorraumkomplement B_p von $\mathbb{T}_p M$ in \vec{X} gegeben, in Formeln fordern wir also

$$\vec{X} = B_p \oplus \mathbb{T}_p M$$

Für alle $v \in \mathbb{T}_p M$ muß es dann genau ein $b = b_{(p,u)}(v) \in B_p$ geben mit $(v, b) \in \mathbb{T}_{(p,u)}(TM)$. Hier ist $b_{(p,u)} : \mathbb{T}_p M \rightarrow B_p$ sogar eine lineare Abbildung.

Beispiel 10.8.9. Mir fällt es schwer, eine Anschauung für die eben entwickelte lineare Algebra zu geben, aber probieren wir es einmal mit der kurzen exakten Sequenz $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2$ der Injektion der vertikalen Achse in den Raum gefolgt von der orthogonalen Projektion auf die Ebene. Das könnte eine kurze exakte Sequenz von Teilräumen $0 \hookrightarrow G \twoheadrightarrow \bar{G}$ enthalten für G eine Ursprungsgerade im Raum, die verschieden ist von der vertikalen Koordinatenachse. Dann ist G sogar der Graph einer Abbildung $b : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ und B wäre die ganze vertikale Achse. Stellen wir uns, um in die vierte Dimension zu kommen, das ganze noch konstant in der Zeit vor, so hätten wir eine kurze exakte Sequenz

$$\mathbb{R} \times \vec{T} \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \times \vec{T} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2$$

und eine kurze exakte Sequenz von Teilräumen $\vec{T} \hookrightarrow G \times \vec{T} \twoheadrightarrow \bar{G}$. Hier könnten wir nun auch verschiedene Wahlen für B treffen, etwa Punkte der Vertikale zur Zeit Null oder alle Punkte, deren Zeit und Höhe übereinstimmen, und so verschiedene Abbildungen b erhalten.

10.8.10 (Herleitung des Hamilton-Formalismus). Wir zeigen nun Satz 10.8.5. Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $M \subset X$ eine glatte Untermannigfaltigkeit und $s = \langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf \vec{X} . Wir betrachten als unsere von Einheiten befreite Version der kinetischen Energie die Funktion

$$K : X \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben durch $K(p, u) := \langle u, u \rangle / 2$. Unsere symplektische Form $\omega = \omega_s$ auf $\vec{X} \times \vec{X}$ gegeben durch $\omega((v_1, v_2)(w_1, w_2)) := \langle v_1, w_2 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle$ induziert eine symplektische Form auf allen Tangentialräumen des Tangentialbündels TM , als da heißt auf allen $T_{(p,u)}(TM)$ für $(p, u) \in TM$. Wir berechnen nun den symplektischen Gradienten $\text{grad}_\omega K$ der Einschränkung von K auf TM . Wir machen den Ansatz

$$(\text{grad}_\omega K)(p, u) = (v_1, b(v_1) + v_2)$$

mit $v_1, v_2 \in T_p M$ und $b = b_{(p,u)} : T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$ wie in der Diskussion des Tangentialraums des Tangentialbündels in 10.8.8, spezialisiert zum Fall $B_p := (T_p M)^\perp$ des orthogonalen Komplements in Bezug auf unser Skalarprodukt. Wie im Fall 10.8.3 eines freien Teilchens finden wir $(d_{(p,u)} K)(w_1, w_2) = \langle u, w_2 \rangle$ für alle $(w_1, w_2) \in \vec{X} \times \vec{X}$. Unser symplektischer Gradient $(v_1, b(v_1) + v_2)$ wird also charakterisiert durch die Bedingung

$$\omega((v_1, b(v_1) + v_2), (w_1, b(w_1) + w_2)) = \langle u, b(w_1) + w_2 \rangle$$

für alle $w_1, w_2 \in T_p M$. Nun nimmt b nur Bilder im orthogonalen Komplement von $T_p M$ an. Wir können das mithin umschreiben zur Charakterisierung

$$\langle v_1, w_2 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = \langle u, w_2 \rangle$$

für alle $w_1, w_2 \in T_p M$ mit der offensichtlichen Lösung $v_1 = u$ und $v_2 = 0$ und erhalten

$$(\text{grad}_\omega K)(p, u) = (u, b(u))$$

Ist andererseits eine glatte Funktion $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und erklären wir $\tilde{F} : X \rightarrow \tilde{X}$ als das Negative ihres s -Gradienten $\tilde{F} := -\text{grad}_s V$, so erhalten wir genauso aber einfacher

$$(\text{grad}_\omega V)(p, u) = (0, \tilde{F}(p))$$

Erklären wir nun unsere von Einheiten befreite Hamiltonfunktion als $H := V + K$, so haben die Flußwege des symplektischen Gradienten $\text{grad}_\omega H$ der Hamiltonfunktion auf $TM \subset X \times \tilde{X}$ die Gestalt $t \mapsto (\gamma(t), \alpha(t))$ mit $\gamma'(t) = \alpha(t)$ und $\alpha'(t) - \tilde{F}(\gamma(t)) \perp T_{\gamma(t)} M$ für alle t alias

$$\gamma''(t) - \tilde{F}(\gamma(t)) \perp T_{\gamma(t)} M$$

Daß umgekehrt für alle glatten Wege γ in M mit $\gamma''(t) - \tilde{F}(\gamma(t)) \perp T_{\gamma(t)} M \forall t$ auch (γ, γ') ein Flußweg des symplektischen Gradienten der Hamiltonfunktion ist, folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf über die Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen. Grob gesprochen können wir annehmen, daß M von einer einzigen Karte $\varphi : \mathbb{R}^n \supset W \xrightarrow{\sim} M$ überdeckt wird. Setzen wir dann $\tilde{\gamma} := \varphi^{-1} \circ \gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow W$, so können wir unsere Orthogonalitätsbedingung umschreiben zu einer Differentialgleichung für $\tilde{\gamma}$ der Gestalt $\tilde{\gamma}''(t) = A(t, \tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}'(t))$ für glattes A und so ein Gleichungssystem hat für vorgegebene Anfangswerte stets eine eindeutig bestimmte maximale Lösung nach 6.4.9.

10.9 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Definition 10.9.1. Eine p -Form ω auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Vorschrift, die jedem Punkt $x \in M$ eine alternierende p -Multilinearform

$$\omega_x \in \text{Alt}^p(T_x M)$$

auf dem Tangentialraum bei x zuordnet. Wollen wir p nicht spezifizieren, so reden wir von einer **Differentialform auf M** . Eine 1-Form heißt auch ein **Kovektorfeld**.

10.9.2. Die p -Formen auf M bilden unter der punktweisen Addition und Multiplikation mit Skalaren einen reellen Vektorraum. Im Fall $p = 0$ erhalten wir so den Vektorraum $\text{Ens}(M, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktionen auf M . Wir werden gleich diskutieren, wie man die Bedingungen Stetigkeit und Glattheit, die unsere Formen erst zu einem nützlichen Werkzeug machen, in diesem Kontext einführen kann. Wir werden unter einer **Differentialform** im weiteren Verlauf meist eine „glatte“ Differentialform verstehen und die Formen von eben „nicht notwendig stetige Formen“ nennen, wenn wir sie einmal verwenden sollten.

Definition 10.9.3. Gegeben eine glatte Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ und eine Differentialform η auf N erklären wir wie in 9.2.8 die **zurückgeholte Differentialform** $\phi^*\eta$ auf M durch die Vorschrift

$$(\phi^*\eta)_x := (d_x\phi)^\top(\eta_{\phi(x)})$$

Hier bezeichnet $(d_x\phi)^\top : \text{Alt}^p(\mathbb{T}_{\phi(x)}N) \rightarrow \text{Alt}^p(\mathbb{T}_xM)$ die durch Vorschalten des Differential $d_x\phi : \mathbb{T}_xM \rightarrow \mathbb{T}_{\phi(x)}N$ von ϕ an der Stelle $x \in M$ induzierte Abbildung. Alternativ schreiben wir $\phi : \omega \rightsquigarrow \eta$ statt $\omega = \phi^*\eta$ und sagen, die beiden Differentialformen seien **verwandt unter** ϕ .

10.9.4. Das Zurückholen ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung. Die in 9.2.12 besprochenen Rechenregeln $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$ und $\text{id}^* = \text{id}$ gelten offensichtlich auch in diesem allgemeineren Kontext.

10.9.5. Wir erklären für Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten das Dachprodukt genau wie in 9.2.5 als punktweises Dachprodukt. Es ist aus denselben Gründen assoziativ und \mathbb{R} -bilinear und graduiert kommutativ. Weiter vertauschen Rückzug und Dachprodukt.

Definition 10.9.6. Eine Differentialform ω auf einer Mannigfaltigkeit M heißt **glatt**, wenn es um jeden Punkt $x \in M$ eine glatte Karte $\varphi : \mathbb{R}^n \ni W \rightarrow M$ gibt derart, daß $\varphi^*\omega$ eine glatte Differentialform auf W ist im Sinne von 9.2.1, also durch eine glatte Abbildung $W \rightarrow \text{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ gegeben wird.

10.9.7 (**Stabilitäten glatter Differentialformen**). Offensichtlich macht der Rückzug unter glatten Abbildungen glatte Differentialformen zu glatten Differentialformen. Offensichtlich macht das Dachprodukt aus glatten Formen glatte Formen. Offensichtlich bilden die glatten p -Formen einen Untervektorraum im Raum aller p -Formen.

10.9.8 (**Terminologisches**). Von nun an werden wir fast ausschließlich mit glatten Formen arbeiten und das meist nicht mehr explizit dazusagen.

Proposition 10.9.9 (Cartan'sche äußere Ableitung). Gegeben eine p -Form ω auf einer Mannigfaltigkeit M gibt es genau eine $(p+1)$ -Form $d\omega$ auf M derart, daß für jede glatte Karte $\varphi : \mathbb{R}^n \ni W \rightarrow M$ von M gilt

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$$

Beweis. Unsere Vorschrift legt $d\omega$ auf dem Bild jeder Karte eindeutig fest. Es gilt nur zu zeigen, daß diese Festlegungen auch zusammenpassen, daß also gegeben $\psi : \mathbb{R}^n \ni V \rightarrow M$ eine weitere Karte, der Einfachheit halber mit demselben Bild, es ein- und dieselbe $(p+1)$ -Form η auf $\varphi(W) = \psi(V)$ ist, für die

gilt $\varphi : d(\varphi^*\omega) \rightsquigarrow \eta$ und $\psi : d(\psi^*\omega) \rightsquigarrow \eta$. Bezeichnet jedoch $\beta : W \rightarrow V$ den Basiswechsel, so haben wir sicher $\beta : \varphi^*\omega \rightsquigarrow \psi^*\omega$. Daraus folgt aber $\beta : d(\varphi^*\omega) \rightsquigarrow d(\psi^*\omega)$ nach der Verwandtschaftsverträglichkeit der äußeren Ableitung 9.5.11 und damit folgt aus $\psi : d(\psi^*\omega) \rightsquigarrow \eta$ bereits $\varphi : d(\varphi^*\omega) \rightsquigarrow \eta$. \square

10.9.10 (Rechenregeln für die äußere Ableitung). Die in 9.5.11 diskutierten Rechenregeln für die äußere Ableitung übertragen sich unmittelbar auf den Fall der Mannigfaltigkeiten, wobei noch einmal daran erinnert sei, daß wir unsere Formen dabei als glatt annehmen. Gegeben eine glatte Abbildung von Mannigfaltigkeiten $\varphi : M \rightarrow N$ und eine Form η auf N haben wir insbesondere die Verwandtschaftsverträglichkeit der äußeren Ableitung $\varphi^*(d\eta) = d(\varphi^*\eta)$, für ein Dachprodukt von Formen auf einer Mannigfaltigkeit gilt die Leibnizregel

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d\eta$$

und schließlich gilt stets $dd\omega = 0$. Ich hoffe, daß der Leser im folgenden lernen wird, die große Eleganz und Mühelosigkeit des Rechnens mit Differentialformen wertzuschätzen.

10.10 Das Kotangentenbündel

10.10.1. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Wir definieren ihr **Kotangentenbündel** erst einmal nur als die Menge

$$T^*M := \bigsqcup_{x \in M} \{x\} \times T_x^*M$$

alias die disjunkte Vereinigung der Dualräume aller ihrer Tangentialräume. Zusammen mit dieser Menge erklären wir eine Abbildung $\pi_M : T^*M \rightarrow M$, die **Fußpunktprojektion**.

10.10.2. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Im Fall einer in einen endlichdimensionalen affinen Raum eingebetteten Mannigfaltigkeit $M \subset X$ mag man eine **riemannsche Metrik auf M** erklären als eine Abbildung g , die jedem Punkt $x \in M$ ein Skalarprodukt g_x auf dem Tangentialraum $T_x M$ zuordnet so, daß es eine glatte Abbildung $G : M \rightarrow \text{Bil}(\vec{X})$ gibt, die alle dieses Skalarprodukte induziert. Für den allgemeinen Fall abstrakter Mannigfaltigkeiten überlassen wir die präzise Fassung der Glattheitsbedingung der Differentialgeometrie.

10.10.3 (**Das Kotangentenbündel als Mannigfaltigkeit**). Auf dem Kotangentenbündel einer Mannigfaltigkeit M gibt es genau eine Struktur einer Mannigfaltigkeit derart, daß für jede glatte riemannsche Metrik g auf M die durch die jeweiligen lokalen Skalarprodukte gegebenen Isomorphismen $T_x M \xrightarrow{\sim} T_x^*M$ in ihrer Gesamtheit einen Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten $TM \xrightarrow{\sim} T^*M$ bilden. Der Beweis bleibe dem Leser überlassen.

10.10.4 (**Das Kotangentenbündel als Mannigfaltigkeit, Variante**). Gegeben eine offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ erhalten wir eine Bijektion

$$W \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} T^*W$$

durch die Abbildung $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \mapsto (q_1, \dots, q_n, p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n)$. Auf der rechten Seite meinen wir dabei die Kovektorfelder dq_i aus 8.1.15. Auf dem Kotangentenbündel einer Mannigfaltigkeit M gibt es nun genau eine Struktur einer Mannigfaltigkeit derart, daß für jede glatte Karte $\varphi : \mathbb{R}^n \supseteq W \rightarrow M$ die Komposition

$$W \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} T^*W \rightarrow T^*M$$

der oben erklärten Abbildung mit der offensichtlichen Abbildung eine Karte von T^*M ist. Der Beweis bleibe dem Leser ebenso überlassen wie der Nachweis, daß wir so dieselbe Struktur als Mannigfaltigkeit erhalten wie bei der vorhergehenden Konstruktion.

10.10.5. Gegeben eine Mannigfaltigkeit M konstruieren wir auf ihrem Kotangentenbündel T^*M das **kanonische Kovektorfeld** $\vartheta = \vartheta_M$ durch die Vorschrift, daß gegeben $x \in M$ und $\eta \in T_x^*M$ und der entsprechende Punkt des Kotangentenbündels $(x, \eta) \in T^*M$ die lineare Abbildung $\vartheta_{(x, \eta)} : T_{(x, \eta)}(T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sein möge durch

$$\vartheta_{(x, \eta)} := \eta \circ d_{(x, \eta)}\pi_M$$

Hier meint $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ die Fußpunktprojektion des Kotangentenbündels und $d_{(x, \eta)}\pi_M : T_{(x, \eta)}(T^*M) \rightarrow T_xM$ ihr Differential an der Stelle (x, η) . Als nächstes zeigen wir, daß das kanonische Kovektorfeld glatt ist.

10.10.6 (**Kanonisches Kovektorfeld in Koordinaten**). Um zu prüfen, daß das kanonische Kovektorfeld glatt ist, schreiben wir es in Koordinaten. Betrachten wir genauer eine glatte Karte $\varphi : \mathbb{R}^n \supseteq W$ wie in 10.10.4, so führt die dort gegebene Karte $W \times \mathbb{R}^n \rightarrow T^*M$ des Kotangentenbündels zu einem lokalen Koordinatensystem $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ des Kotangentenbündels und die zugehörigen Tangentialvektoren $\partial/\partial q_i$ und $\partial/\partial p_i$ bilden folglich an jeder Stelle (x, η) mit $x \in \varphi(W)$ eine Basis des Tangentialraums $T_{(x, \eta)}(T^*M)$ des Kotangentenbündels. Unter dem Differential der Fußpunktprojektion werden die Vektorfelder $\partial/\partial q_i$ auf die Vektorfelder $\partial/\partial q_i$ abgebildet, zu verstehen in Bezug auf das durch die Karte $\varphi : \mathbb{R}^n \supseteq W \rightarrow M$ gegebene lokale Koordinatensystem (q_1, \dots, q_n) von M , und die $\partial/\partial p_i$ gehen nach Null. Für die Verknüpfung $\eta \circ d_{(x, \eta)}\pi_M$ mit $x = \varphi(q_1, \dots, q_n)$ und $\eta = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ ergibt sich also

$$\eta \circ d_{(x, \eta)}\pi_M : \partial/\partial q_i \mapsto p_i \quad \text{und} \quad \partial/\partial p_i \mapsto 0.$$

Das aber bedeutet genau

$$\vartheta_M = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$$

im hier betrachteten lokalen Koordinatensystem von T^*M . So sehen wir, daß das kanonische Kovektorfeld jeder Mannigfaltigkeit glatt ist.

10.10.7 (Rechtfertigung der Terminologie). Die Definition zeigt, daß gegeben eine offene Einbettung von Mannigfaltigkeiten $\varphi : W \hookrightarrow M$ und die zugehörige offene Einbettung auf den Kotangentialbündeln $\psi : T^*W \hookrightarrow T^*M$ die zugehörigen kanonischen Kovektorfelder verwandt sind, in Formeln $\psi : \vartheta_W \rightsquigarrow \vartheta_M$. Das rechtfertigt die Bezeichnung als „kanonisches Kovektorfeld“.

10.10.8. Gegeben eine Mannigfaltigkeit M ist die äußere Ableitung jeder glatten Einsform eine glatte Zweiform mit verschwindender äußerer Ableitung. Eine **symplektische Struktur** auf einer Mannigfaltigkeit erklärt man als eine geschlossene Zweiform, die auf jedem Tangentialraum eine nichtausgeartete alternierende Bilinearform induziert. Das Negative der äußeren Ableitung des kanonischen Kovektorfelds ϑ_M auf dem Kotangentialbündel ist eine symplektische Struktur auf dem Kotangentialbündel T^*M , die **kanonische symplektische Struktur**

$$\omega_M := -d\vartheta_M$$

Nach der Beschreibung des kanonischen Kovektorfelds 10.10.6 in lokalen Koordinaten finden wir in lokalen Koordinaten die Beschreibung

$$\omega_M = -d\vartheta_M = dq_1 \wedge dp_1 + \dots + dq_n \wedge dp_n$$

Das hinwiederum ist offensichtlich eine nichtausgeartete Bilinearform auf jedem Tangentialraum des Kotangentialbündels und rechtfertigt die Bezeichnung von ω_M als symplektische Struktur.

10.10.9 (Abstrakter Hamiltonformalismus). Ein Paar (P, ω) aus einer Mannigfaltigkeit P mit einer symplektischen Struktur ω heißt eine **symplektische Mannigfaltigkeit**. Gegeben eine glatte Funktion $H : P \rightarrow \mathbb{R}$ mag man ihren symplektischen Gradienten

$$\text{grad}_\omega H$$

betrachten und dessen Flußkurven untersuchen. Gegeben ein lokales Koordinatensystem $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ von P mit der Eigenschaft

$$\omega = dq_1 \wedge dp_1 + \dots + dq_n \wedge dp_n$$

finden wir $dH = (\partial H/\partial q_1)dq_1 \dots + (\partial H/\partial p_n)dp_n$ und für den symplektischen Gradienten ergibt sich $\text{grad}_\omega H = -(\partial H/\partial q_1)(\partial/\partial p_1) \dots + (\partial H/\partial p_n)(\partial/\partial q_n)$ und für die Koordinaten der Flußkurven ergeben sich die **Hamilton'schen Gleichungen**

$$\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i \quad \dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$$

Vorschau 10.10.10 (Abstrakter Hamiltonformalismus und Mechanik). Im folgenden Abschnitt zeigen wir, wie sich die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems mit Potential (M, V) diesem Formalismus unterordnen, für $P := T^*M$ das Kotangentialbündel des Konfigurationsraums mit seiner kanonischen symplektischen Struktur 10.10.8 und einer Hamiltonfunktion $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, in der „die ganze Physik unseres Systems zusammengefaßt wird“.

10.11 Hamilton-Formalismus und Kotangentialbündel

Satz 10.11.1 (Geometrie der Hamilton'schen Gleichungen). *Seien (M, V) ein mechanisches System mit Potential, (T^*M, ω) das Kotangentialbündel des Konfigurationsraums mit seiner kanonischen symplektischen Struktur und*

$$H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$$

*die Funktion, die unter dem durch das massebehaftete Skalarprodukt gegebenen Isomorphismus $\hat{g} : TM \xrightarrow{\sim} T^*M$ verwandt ist zur Summe $K + V$ von kinetischer und potentieller Energie. So sind die Phasenwege in TM der Lösungen der Orthogonalitätsbedingungen i -verwandt zu den Flußkurven in T^*M des symplektischen Gradienten $\text{grad}_\omega H$ der Hamiltonfunktion.*

10.11.2. Man nennt in diesem Kontext T^*M den **Impulsphasenraum** unseres mechanischen Systems und $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ die **Hamiltonfunktion**.

Beweis. Wir wissen aus 10.8.5, hier einheitenfrei geschrieben, daß eine Bewegung $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ genau dann die Orthogonalitätsbedingung 10.4.4 erfüllt, wenn ihr Phasenweg $(\gamma, \dot{\gamma})$ ein Flußweg des symplektischen Gradienten $\text{grad}_\omega H$ der Summe von kinetischer und potentieller Energie $\bar{H} := K + V : TM \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Im folgenden und insbesondere in 10.11.5 zeigen wir, daß unter dem durch das massebehaftete Skalarprodukt gegebenen Isomorphismus $\hat{g} : TM \xrightarrow{\sim} T^*M$ die symplektische Form ω aus 10.8.5 verwandt ist zur kanonischen symplektischen Form auf dem Kotangentialbündel T^*M . Das zeigt dann auch bereits den Satz. □

10.11.3 (**Skalarproduktform und ihre äußere Ableitung**). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X mit einem Skalarprodukt s auf seinem Richtungsraum \vec{X} erklären wir auf dem Tangentialbündel $TX = X \times \vec{X}$ das Kovektorfeld θ gegeben durch

$$\theta_{(x, \vec{v})}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) := s(\vec{w}_1, \vec{v})$$

und nennen diese Einsform die **Skalarproduktform**. Wir berechnen ihre äußere Ableitung $d\theta$ und finden zunächst für das Differential der affinen Abbildung

$\theta : X \times \vec{X} \rightarrow (\vec{X} \times \vec{X})^*$ an jeder Stelle (x, \vec{v}) den Richtungsanteil unserer affinen Abbildung $d\theta : (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \mapsto ((\vec{w}_1, \vec{w}_2) \mapsto s(\vec{w}_1, \vec{v}_2))$. Die äußere Ableitung entsteht daraus per definitionem 9.5.4 durch Schiefsymmetrisieren und wir erhalten als äußere Ableitung die konstante Zweiform

$$d\theta : ((\vec{v}_1, \vec{v}_2), (\vec{w}_1, \vec{w}_2)) \mapsto s(\vec{w}_1, \vec{v}_2) - s(\vec{w}_2, \vec{v}_1)$$

Das ist im Fall des massebehafteten Skalarprodukts gerade das Negative unserer symplektischen Form ω_s aus 10.8.4, in Formeln $\omega_s = -d\theta$.

10.11.4 (Einschränken auf Untermannigfaltigkeiten). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller Raum X mit einem Skalarprodukt s auf seinem Richtungsraum \vec{X} und eine eingebettete Mannigfaltigkeit $M \subset X$ betrachten wir das Tangentialbündel $TM \subset X \times \vec{X}$. Die Skalarproduktform θ aus 10.11.3 schränkt ein zu einer Einsform θ auf dem Tangentialbündel, die wir weiter die **Skalarproduktform** nennen. Da die äußere Ableitung verwandtschaftsverträglich ist, ist die Einschränkung der äußeren Ableitung die äußere Ableitung der Einschränkung. Wir finden für diese Zweiform auf dem Tangentialbündel $d\theta$ also auch $\omega_s = -d\theta$.

10.11.5 (Verwandte im Kotangentialbündel). Gegeben seien weiter ein endlichdimensionaler reeller Raum X mit einem Skalarprodukt s auf seinem Richtungsraum \vec{X} und eine eingebettete Mannigfaltigkeit $M \subset X$. Wir betrachten das Kotangentialbündel T^*M und den durch unser Skalarprodukt gegebenen Isomorphismus

$$\hat{s} : TM \xrightarrow{\sim} T^*M$$

mit $\hat{s} : T_x M \xrightarrow{\sim} T_x^* M$ erklärt durch $(\hat{s}(\vec{v}))(\vec{w}) := s(\vec{v}, \vec{w})$. Er ist verträglich mit den jeweiligen Fußpunktprojektionen. Die Skalarproduktform ist darunter per definitionem verwandt zum kanonischen Kovektorfeld 10.10.5 auf dem Kotangentialbündel $\hat{s} : \theta \rightsquigarrow \vartheta$. Dann müssen auch die äußeren Ableitungen unserer Einsformen verwandt sein $\hat{s} : d\theta \rightsquigarrow d\vartheta$ und ihre Negativen desgleichen. Also haben wir

$$\hat{s} : \omega_s \rightsquigarrow \omega$$

10.12 Lie-Ableitung

10.12.1. Dieser Abschnitt ist kopiert aus [?] ??. Ich muß mich etwas auf Differentialgeometrie stützen und benötige insbesondere den Begriff der Lie-Ableitung.

Definition 10.12.2 (Lie-Ableitung). Gegeben ein glattes Vektorfeld ξ auf einer glatten Mannigfaltigkeit X und ein glattes Feld T , genauer ein glattes natürliches Feld im Sinne von [?] ??, das also durch Anwenden eines glatten Gruppoidfunktors aus dem Tangentialbündel hervorgeht, erklären wir ein Feld derselben Art, seine **Lie-Ableitung**

$$\mathcal{L}_\xi T$$

Man bezeichne dazu für $x \in X$ und kleine $s \in \mathbb{R}$ mit $\xi^s(x) \in X$ den Punkt, bei dem der Punkt x landet, wenn er sich für die Zeit s mit dem Fluß des Vektorfelds ξ treiben läßt. Dann sind die ξ^s für kleine s Diffeomorphismen einer festen offenen Umgebung U von $p \in X$ mit offenen Teilmengen $\xi^s(U) \subseteq X$. Bezeichne $T^{[s;\xi]} = T^{[s]}$ das Feld auf U , das unter ξ^s zum ursprünglichen Feld T auf $\xi^s(U)$ verwandt ist, in Formeln

$$\xi^s : T^{[s]} \rightsquigarrow T$$

Die $T^{[s]}$ bilden dann ein von s abhängiges Feld auf U und wir definieren

$$(\mathcal{L}_\xi T)_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(T^{[s]})_p - T_p}{s}$$

Nun muß noch gezeigt werden, daß diese Grenzwerte existieren und daß $\mathcal{L}_\xi T$ wieder ein glattes Feld ist. Das überlassen wir dem Leser und leiten nur unter der Annahme der Existenz explizite Formeln her. Mit etwas mehr Sorgfalt kann man zusammen mit den expliziten Formeln aber auch unschwer die Existenz der fraglichen Grenzwerte zeigen.

Ergänzung 10.12.3 (Felder mit verschwindender Lie-Ableitung). Seien ξ ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit X und T ein glattes Feld auf X . Ist $\mathcal{L}_\xi T$ das Nullfeld, so folgt $\xi^s : T \rightsquigarrow T$ für alle $U \subseteq X$ und $s \in \mathbb{R}$ derart, daß der Fluß $\xi^s(x)$ definiert ist für alle $x \in U$. In Worten ist demnach ein Feld mit invarianter Lie-Ableitung nach einem vorgegebenen Vektorfeld „invariant unter dem Fluß von besagtem Vektorfeld“. In der Tat hat dann die Abbildung $s \mapsto (T^{[s]})_p$ an jeder Stelle ihres Definitionsintervalls die Ableitung Null, denn wir haben für kleines $h \neq 0$ sicher

$$d\xi^s : \frac{1}{h} ((T^{[s+h]})_p - (T^{[s]})_p) \mapsto \frac{1}{h} ((T^{[h]})_q - T_q)$$

mit $q = \xi^s(p)$, und für $h \rightarrow 0$ strebt die rechte Seite nach unseren Annahmen gegen Null.

Beispiel 10.12.4. Gegeben eine **Riemann'sche Mannigfaltigkeit** alias eine glatte Mannigfaltigkeit X mit einem ausgezeichneten glatten symmetrischen Tensorfeld $g \in \text{Sym}^2(TX)$, das an jeder Stelle ein Skalarprodukt ist, versteht man unter einem **Killing-Feld** ein glattes Vektorfeld ξ auf X mit $\mathcal{L}_\xi g = 0$. In anderen Worten ist also ein Killing-Feld ein Vektorfeld ξ , dessen Fluß Isometrien $\xi^s : U \xrightarrow{\sim} \xi^s(U)$ liefert, wo immer er definiert ist.

Beispiel 10.12.5 (Divergenz und Lie-Ableitung). Jeder Riemann'schen Mannigfaltigkeit X kann man ihre natürliche Dichte ω zuordnen, einen ausgezeichneten glatten Schnitt des Dichtebündels. Gegeben ein glattes Vektorfeld ξ auf X kann die **Divergenz** $\text{div } \xi$ beschrieben werden als die eindeutig definierte Funktion mit

$$\mathcal{L}_\xi \omega = (\text{div } \xi)\omega$$

Beispiel 10.12.6 (Lie-Ableitung von Funktionen). Im Fall eines skalaren Feldes T alias einer glatten Funktion f haben wir offensichtlich

$$\mathcal{L}_\xi f = \xi f$$

In Worten ist die Lie-Ableitung einer Funktion also schlicht die Funktion, die daraus durch das Anwenden des fraglichen Vektorfelds entsteht.

10.12.7 (Lie-Ableitung versus kovariante Ableitung). Die Lie-Ableitung einer Funktion an einer gegebenen Stelle hängt nur vom Wert des ableitenden Vektorfelds an besagter Stelle ab. Das ist bei der Lie-Ableitung allgemeiner Felder nicht mehr richtig: Die Lie-Ableitung eines Feldes an einer gegebenen Stelle wird im allgemeinen von den Werten des ableitenden Vektorfelds in einer Umgebung der fraglichen Stelle abhängen und keineswegs nur von seinem Wert an besagter Stelle. Das ist ein fundamentaler Unterschied zur kovarianten Ableitung ??, die auch in Richtung isolierter Tangentialvektoren wohldefiniert ist und beim Ableiten nach Vektorfeldern ξ der Identität $\nabla_{f\xi} = f\nabla_\xi$ gehorcht. Dahingegen haben wir für die Lie-Ableitung im allgemeinen $\mathcal{L}_{f\xi} \neq f\mathcal{L}_\xi$.

10.12.8 (Lie-Ableitung und äußere Ableitung). Die Lie-Ableitung des Differential einer Funktion ist das Differential ihrer Lie-Ableitung, in Formeln

$$\mathcal{L}_\xi(df) = d(\mathcal{L}_\xi f)$$

Um das einzusehen, gehen wir von der Erkenntnis aus, daß die Verwandtschaft $\xi^t : f^{[t]} \rightsquigarrow f$ auch eine Verwandtschaft $\xi^t : d(f^{[t]}) \rightsquigarrow df$ alias die Gleichheit $d(f^{[t]}) = (df)^{[t]}$ induziert. Nun würden wir gerne rechnen

$$\mathcal{L}_\xi(df) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(df)^{[t]} - df}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(f^{[t]}) - df}{t} = d\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{[t]} - f}{t}\right) = d(\mathcal{L}_\xi f)$$

Das ist zwar in dieser Form noch problematisch, aber wählen wir lokale Koordinaten x_1, \dots, x_n und betrachten die Funktion $(x, t) \mapsto f^{[t]}(x)$ auf $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, so ist auch diese Funktion glatt und wir erhalten $\mathcal{L}_\xi(df) = \partial_t \sum_i \partial_i f^{[t]}(x) dx_i$ sowie $d(\mathcal{L}_\xi f) = \sum_i \partial_i \partial_t f^{[t]}(x) dx_i$ mit der Notation ∂_i für die partielle Ableitung nach x_i und ∂_t für das Auswerten bei $t = 0$ der partiellen Ableitung nach t und die Behauptung folgt aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. In derselben Weise zeigt man für Differentialformen beliebigen Grades, daß die Lie-Ableitung auch mit der äußeren Ableitung vertauscht, in Formeln

$$\mathcal{L}_\xi(d\omega) = d(\mathcal{L}_\xi \omega)$$

Noch allgemeiner folgt in derselben Weise, daß die Lie-Ableitung vertauscht mit beliebigen „verwandtschaftsverträglichen Differentialoperatoren“ zwischen glatten Schnitten natürlicher Bündel. Unter einem „Differentialoperator“ verstehen

wir dabei eine Abbildung zwischen den Räumen glatter Schnitte, die in lokalen Koordinaten und bezüglich Bündelkarten durch Polynome in den partiellen Ableitungen mit glatten Funktionen als Koeffizienten gegeben werden kann.

Beispiel 10.12.9. Für die Lie-Ableitung des Tensorprodukts irgendwelcher natürlichen Felder S, T gilt offensichtlich die **Leibniz-Regel**

$$\mathcal{L}_\xi(S \otimes T) = (\mathcal{L}_\xi S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_\xi T)$$

Speziell gilt die **Leibniz-Regel** $\mathcal{L}_\xi(fT) = (\xi f)T + f(\mathcal{L}_\xi T)$ für jede glatte Funktion f und jedes glatte natürliche Feld T .

Beispiel 10.12.10 (Lie-Ableitung von Vektorfeldern). Sei M eine Mannigfaltigkeit. Das Auswerten von Kovektoren auf Vektoren liefert einen natürlichen Bündelhomomorphismus $T^*M \otimes TM \rightarrow \mathbb{R} \times M$ alias einen verwandtschaftsverträglichen Differentialoperator vom Grad Null zwischen den zugehörigen Räumen glatter Schnitte. Gegeben ein Kovektorfeld ω und Vektorfelder ξ, ζ finden wir damit nach dem Vorhergehenden die Identität

$$\mathcal{L}_\xi \langle \omega, \zeta \rangle = \langle \mathcal{L}_\xi \omega, \zeta \rangle + \langle \omega, \mathcal{L}_\xi \zeta \rangle$$

Wenden wir das speziell auf $\omega = df$ an und beachten $\langle df, \zeta \rangle = \zeta f$ sowie $\mathcal{L}_\xi(df) = d(\mathcal{L}_\xi f)$, so folgt $\xi(\zeta f) = \zeta(\xi f) + (\mathcal{L}_\xi \zeta)f$ alias $\mathcal{L}_\xi \zeta = [\xi, \zeta]$.

Ergänzung 10.12.11. Mit 10.12.3 können wir nun auch eine weitere Herleitung von Proposition [ML] 28.3.7.10 über kommutierende Vektorfelder geben: Kommutieren zwei Vektorfelder, so verschwindet ja nach 10.12.6 die Lie-Ableitung des Ersten nach dem Zweiten, also ist nach 10.12.3 das Erste invariant unter dem Fluß des Zweiten, und dann muß natürlich auch der Fluß des Ersten mit dem Fluß des Zweiten kommutieren.

10.12.12 (**Kontraktion von Differentialformen**). Sei V ein Vektorraum über einem Körper. Gegeben eine alternierende $(k+1)$ -Multilinearform $\omega \in \text{Alt}^{k+1}(V)$ und $v \in V$ definiert man wie in [LA2] 8.5.21 eine alternierende k -Multilinearform $i_v \omega \in \text{Alt}^k(V)$ durch die Vorschrift

$$i_v \omega(v_1, \dots, v_k) := \omega(v, v_1, \dots, v_k)$$

Der Buchstabe i steht wohl für „insertion“. Offensichtlich gilt $i_v i_w = -i_w i_v$. Unsere Definition [AN2] 9.1.9 des Dachprodukts liefert weiter unmittelbar

$$i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v \omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge (i_v \eta)$$

Gegeben ein Vektorfeld ξ und eine $(k+1)$ -Form ω erklärt man entsprechend die k -Form $i_\xi \omega$.

10.12.13 (**Lie-Ableitung von Differentialformen**). Für die Lie-Ableitung von Differentialformen gilt die **Cartan-Formel**

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi \circ d + d \circ i_\xi$$

In der Tat prüft man ohne Schwierigkeiten, daß beide Seiten Operatoren D mit der Eigenschaft $D(\omega \wedge \eta) = (D\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (D\eta)$ sind. Es reicht damit aus, unsere Formel für Funktionen und ihre Differentiale zu zeigen. Im Fall einer Funktion f liefern jedoch nach 10.12.6 die Formeln auf beiden Seiten ξf , und im Fall ihres Differentials df liefern nach 10.12.8 die Formeln auf beiden Seiten $d(\xi f)$. Damit ist auch unsere allgemeine Formel hergeleitet.

Lemma 10.12.14 (Äußere Ableitung ohne Koordinaten). *Gegeben eine glatte p -Form ω auf einer Mannigfaltigkeit M und glatte Vektorfelder X_0, \dots, X_p gilt*

$$\begin{aligned} (d\omega)(X_0, \dots, X_p) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j X_j \omega(X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \end{aligned}$$

Beweis. Man prüft, daß die rechte Seite $C^\infty(M)$ -multilinear ist als Funktion der Vektorfelder X_i . Mit dieser Erkenntnis kann man sich auf den Fall der Standardfelder eines Koordinatensystems zurückziehen. In diesem Fall aber sieht man die behauptete Formel leicht ein. \square

10.13 Symplektische Geometrie

10.13.1 (**Invarianz der symplektischen Form unter Hamilton'schen Flüssen**). Wir erinnern aus 10.12.13 die Cartanformel

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi \circ d + d \circ i_\xi$$

für die Lie-Ableitung von Differentialformen mit i_ξ dem Einsetzen eines Vektorfelds an erster Stelle. Sind wir auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (X, ω) , so gilt nach Annahme $d\omega = 0$ und somit $\mathcal{L}_\xi \omega = d(i_\xi \omega)$. Ist zusätzlich $\xi = \text{grad}_\omega f$ der symplektische Gradient einer Funktion f , so gilt per definitionem $i_\xi \omega = df$ und folglich

$$\mathcal{L}_\xi \omega = d(df) = 0$$

Das zeigt hinwiederum mit 10.12.3 die Verwandtschaft $\xi^s : \omega \rightsquigarrow \omega$ oder genauer $\xi^s : \omega|_U \rightsquigarrow \omega|_{\xi^s(U)}$ unter der Annahme, daß der Fluß von ξ auf $U \times [0, s]$ definiert ist. Wir nennen ein Vektorfeld auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit,

das der symplektische Gradient einer glatten Funktion ist, ein **Hamilton'sches Vektorfeld** und den zugehörigen Fluß einen **Hamilton'schen Fluß**. Ist unsere symplektische Mannigfaltigkeit X kompakt, so sind alle Flüsse von glatten Vektorfeldern ξ global definiert auf ganz $\mathbb{R} \times X$ und die Flüsse hamiltonscher Vektorfelder $\xi = \text{grad}_\omega f$ bestehen aus Automorphismen $\xi^s : (X, \omega) \xrightarrow{\sim} (X, \omega)$ unserer symplektischen Mannigfaltigkeit, womit gemeint ist, daß sie auch die symplektische Struktur erhalten.

10.13.2. Gegeben glatte Funktionen f, g auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (X, ω) erklären wir ihre **Poisson-Klammer** durch die Vorschrift

$$\{f, g\} := \omega(\text{grad}_\omega f, \text{grad}_\omega g)$$

Für $\xi := \text{grad}_\omega f$ und $\zeta := \text{grad}_\omega g$ finden wir $\{f, g\} := i_\zeta i_\xi \omega = i_\zeta df = \zeta f$. Ist speziell $g = H$ die Hamiltonfunktion eines mechanischen Systems, so sind die Phasenwege $\tilde{\gamma}$ seiner Bewegungen die Flußlinien von $\zeta = \text{grad}_\omega H$ und für die die Poissonklammer gilt

$$\{f, H\}(\tilde{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt} f(\tilde{\gamma}(t))$$

Insbesondere bedeutet das Verschwinden der Poissonklammer $\{f, H\} = 0$, daß die Funktion f konstant ist auf den Phasenwegen alias eine **Bewegungskonstante**. Ein erstes Beispiel für eine Bewegungskonstante ist H selber.

10.13.3. In lokalen Koordinaten (q_1, \dots, p_n) mit $\omega = dq_1 \wedge dp_1 + \dots + dq_n \wedge dp_n$ finden wir

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Lemma 10.13.4 (Poissonklammer als Lieklammer). *Gegeben eine symplektische Mannigfaltigkeit (X, ω) bilden die glatten Funktionen auf X unter der Poissonklammer eine reelle Liealgebra.*

Beweis. Wir können die Aussage auch mühelos in Koordinaten prüfen. Das bleibe dem Leser überlassen. Ich will nun argumentieren, warum sie anschaulich sinnvoll ist. □

Beweisskizze. Es ist klar, daß die Poissonklammer \mathbb{R} -bilinear ist. Es ist klar, daß gilt $\{f, f\} = 0$ für alle f . Es bleibt, die Jacobi-Identität

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \quad \forall f, g, h$$

zu zeigen. Gleichbedeutend ist $\{\{f, g\}, h\} = \{\{f, h\}, g\} + \{f, \{g, h\}\}$. Für $\eta := \text{grad}_\omega h$ gilt es also zu zeigen

$$\eta\{f, g\} = \{\eta f, g\} + \{f, \eta g\}$$

Nehmen wir nun der Einfachheit der Notation halber an, daß η einen globalen Fluß $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$, $(s, x) \mapsto \eta^s(x)$ hat. Da alle η^s nach 10.13.1 Automorphismen der symplektischen Mannigfaltigkeit (X, ω) sind, gilt für die mit dem Fluß zurückgezogenen Funktionen $f^{[s]} := f \circ \eta^s$ die Verträglichkeit mit dem Bilden der Poissonklammer $\{f, g\}^{[s]} = \{f^{[s]}, g^{[s]}\}$. Die Poissonklammer ist aber eine stetige bilineare Abbildung in Bezug auf eine geeignete Norm auf $C^\infty(X; \mathbb{R})$, die „Fréchet-Norm“. Andererseits ist $\mathbb{R} \rightarrow C^\infty(X; \mathbb{R})$ gegeben durch $s \mapsto f^{[s]}$ für diese Norm glatt mit Ableitung ηf bei $s = 0$. Die Behauptung folgt so aus der Kettenregel und der Regel für das Ableiten stetiger bilinearer Abbildungen. \square

10.14 Hamilton'sche Gleichungen ÄLTER

10.14.1. Von ihrer Struktur her sind die Euler-Lagrange-Gleichungen 11.1.8 ein System impliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Bewegung γ unseres Systems. Um sie zu einem System expliziter Differentialgleichungen erster Ordnung umzuschreiben, führen wir die sogenannten **kanonischen Impulse** ein durch die Vorschrift

$$p_i := \frac{\partial K}{\partial y_i} = -\frac{\partial L}{\partial y_i}$$

Die kanonischen Impulse sind Funktionen auf dem Phasenraum $TM\langle 1/s \rangle$, genauer Funktionen mit Werten in $\langle \text{gm}^2/s \rangle$. Zusammen mit den Ortskoordinaten bilden sie ein weiteres Koordinatensystem $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ mit Einheiten auf dem Phasenraum $TM\langle 1/s \rangle$. Um das zu sehen, erinnern wir unsere Formel

$$\frac{\partial K}{\partial y_l} = \sum_{\nu, j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle y_j$$

aus der Herleitung der Euler-Gleichungen 11.1.7. Sie besagt, daß unter einer Abbildung $M \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} M \times \mathbb{R}^n$ der Gestalt $(x, y) \mapsto (x, (A(x))y)$ mit glattem $A : M \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ die n hinteren Koordinatenfunktionen zu den kanonischen Impulsen zurückgezogen werden. Bei der Diskussion abstrakter Mannigfaltigkeiten in [ML] 28.5.11 werden wir sehen, daß unserer kanonischen Impulse geometrisch als „natürliche Koordinaten des Kotangentenbündels“ verstanden werden können, aber dazu muß erst einmal der Formalismus der abstrakten Mannigfaltigkeiten entwickelt werden.

10.14.2 (**Herleitung der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen**). Die kinetische Energie als Funktion auf dem Phasenraum läßt sich mithilfe unserer neuen Funktionen p_i darstellen als

$$K = \frac{1}{2} \sum_i p_i y_i$$

Wir finden so für ihre partielle Ableitung nach x_l im System der Koordinaten $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ die Darstellung

$$\frac{\partial K}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x_l} y_i$$

Nun kommen wir zur Euler-Lagrange-Gleichung zurück. Betrachten wir für die Bewegung $\gamma : I \rightarrow M$ unseres Systems den zugehörigen Weg $\psi = (\gamma, \dot{\gamma}) : I \rightarrow TM \langle 1/s \rangle$ im Phasenraum und kürzen wieder $p_i \circ \psi = p_i$ ab, so liest sich die l -te Euler-Lagrange-Gleichung als

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial L}{\partial x_l}$$

Hier ist die partielle Ableitung rechts noch im natürlichen Koordinatensystem des Tangentialbündels $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ zu verstehen. Jetzt gehen wir zum neuen Koordinatensystem $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ des Phasenraums über mit $q_i := x_i$ und p_i unseren kanonischen Impulsen. Obwohl die ersten n Koordinaten in diesen beiden Koordinatensystemen übereinstimmen, sind die partiellen Ableitungen einer Funktion auch nach diesen ersten Koordinaten im allgemeinen verschieden, da sie ja von der Gesamtheit der Koordinaten abhängen. Das ist auch der Grund, aus dem wir von nun an für ein- und dieselbe Funktion die beiden Notationen $x_i = q_i$ verwenden: Bei $\partial/\partial q_i$ meinen wir von nun an partielles Ableiten im Koordinatensystem $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, bei $\partial/\partial x_i$ dahingegen partielles Ableiten im Koordinatensystem $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. In diesen Notationen finden wir dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_l} &= \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_l} \frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{\partial L}{\partial x_l} - \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_l} p_i \\ \frac{\partial K}{\partial q_l} &= \frac{1}{2} \sum_i p_i \frac{\partial y_i}{\partial q_l} \end{aligned}$$

Für $H := L + 2K = V + K$ die totale Energie, auch genannt die **Hamilton-Funktion**, ergibt sich so $\frac{\partial H}{\partial q_l} = \frac{\partial L}{\partial x_l}$. Damit können wir unsere l -te Bewegungsgleichung auch schreiben als

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$$

Andererseits gilt unter der Annahme, daß das Potential V nicht von den Geschwindigkeiten y_i abhängt, die Identität

$$\frac{\partial H}{\partial p_l} = \frac{\partial V}{\partial p_l} + \frac{\partial K}{\partial p_l} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial p_l} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2} y_l + \frac{1}{2} \sum_i p_i \frac{\partial y_i}{\partial p_l}$$

Da $x_i = q_i$ nicht von den Impulsen abhängt, verschwindet rechts der erste Summand. Der letzte Summand schließlich darf faserweise berechnet werden und auf jeder Faser bestehen lineare Beziehungen $y_i = \sum_j \alpha_{ij} p_j$ mit konstanten $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$. Die explizite Beschreibung dieser linearen Beziehungen zu Beginn von 10.14.1 zeigt darüber hinaus $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. So erkennen wir schließlich $\frac{\partial H}{\partial p_l} = y_l$, und da wir ja nur Wege im Phasenraum der Gestalt $\psi = (\gamma, \dot{\gamma})$ betrachten, folgt als weitere Bewegungsgleichung

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}$$

Zusammenfassend erfüllt unsere Bewegung, aufgefaßt als Abbildung in den Phasenraum und ausgedrückt in beliebigen Ortskoordinaten $q_i = x_i$ zusammen mit den zugehörigen kanonischen Impulskoordinaten p_i , also die **Hamilton'schen Gleichungen**

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad \text{und} \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \quad \text{für } 1 \leq l \leq n.$$

Beispiel 10.14.3 (Bewegung einer Töpferscheibe nach Hamilton). Wir betrachten eine Töpferscheibe mit Zentrum in $\mathbf{p} \in \mathbb{E}$. Wir denken sie uns zusammengesetzt aus Massepunkten $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ der Massen m_1, \dots, m_N . Der Konfigurationsraum M ist eine Kreislinie. Als lokale Koordinate wählen wir den Drehwinkel im Bogenmaß $x_1 = x$, wobei wir den Nullwinkel willkürlich festlegen. Wie in 10.7.9 ist die kinetische Energie $K(y) = Jy^2/2$ und unsere Impulskoordinate zur Ortskoordinate $q = x$ wird $p = Jy$. Sie heißt in dieser Situation der **Drehimpuls**. Die Hamiltonfunktion ist $H(q, p) = p^2/2J$ und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen spezialisieren zu den Gleichungen

$$\dot{q} = p/J \quad \text{und} \quad \dot{p} = 0.$$

Also ist der Drehimpuls p konstant und die zeitliche Ableitung \dot{q} von q ist auch konstant und unsere Töpferscheibe dreht sich ohne Einwirkung äußerer Kräfte mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bis in alle Ewigkeit.

10.15 Geometrie der Hamilton'schen Gleichungen

10.15.1 (**Motivation**). Die Bedingung des Senkrechtstehens in den Bewegungsgleichungen, die wir in 10.4.3 hergeleitet haben, eignet sich nicht für explizite Rechnungen. Im sogenannten „Hamilton'schen Formalismus“ werden unsere Bewegungsgleichungen

$$(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))) \perp_{\mathfrak{g}} T_{\gamma(t)}M$$

aus 10.4.4 für ein System mit Zwangsbedingungen umgeschrieben zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Das braucht jedoch einige Vorbereitungen. Wir beginnen mit dem Fall eines Systems ohne Zwangsbedingungen, in dem das Umschreiben zu einem System erster Ordnung noch keinerlei Schwierigkeiten aufwirft, behandeln es aber in einer Weise, die sich gut auf den Fall eines Systems mit Zwangsbedingungen verallgemeinern läßt.

10.15.2 (Symplektischer Gradient im Fall affiner Räume). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum P und auf seinem Richtungsraum eine symplektische Form $\omega : \vec{P} \times \vec{P} \rightarrow \mathbb{R}$ erklären wir in Spezialisierung von 8.3.8 für jede differenzierbare Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ ihren **symplektischen Gradienten** als das Vektorfeld $\text{grad}_\omega f$, dessen Wert an einer Stelle $p \in P$ gegeben wird durch die Bedingung, daß für alle Vektoren $v \in \vec{P}$ gilt

$$\omega((\text{grad}_\omega f)(x), v) = (D_v f)(p)$$

mit $(D_v f)(p) = (d_p f)(v)$ der Richtungsableitung von f in Richtung v an der Stelle p . Mit unserer Identifikation $\text{can}_\omega : \vec{P} \rightarrow \vec{P}^*$ durch $u \mapsto \omega(u, \cdot)$ haben wir also $(\text{grad}_\omega f)(p) = \text{can}_\omega^{-1}(d_p f)$.

10.15.3 (Bewegung ohne Zwangsbedingung als Flußwegprojektion). Nun betrachten wir ein System von Λ Massepunkten der Massen m_1, \dots, m_Λ im Anschauungsraum \mathbb{E} . Das massebehaftete Skalarprodukt aus 10.4.3 induziert einen Isomorphismus $\kappa : \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^{*\Lambda} \langle \text{gm}^2 \rangle$. Wir betrachten den Isomorphismus

$$\iota := \text{id} \oplus \kappa : \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \oplus \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \langle 1/s \rangle \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \oplus \vec{\mathbb{E}}^{*\Lambda} \langle \text{gm}^2/s \rangle$$

Unter diesem Isomorphismus entspricht die **kanonische $\langle \text{gm}^2/s \rangle$ -wertige symplektische Form** ω auf dem Wertebereich gegeben durch $\omega((v, \phi), (w, \psi)) := \psi(v) - \phi(w)$ einer $\langle \text{gm}^2/s \rangle$ -wertigen symplektischen Form η auf dem Definitionsbereich, die gegeben wird durch die Formel

$$\eta((v_1, v_2), (w_1, w_2)) := \langle w_2, v_1 \rangle_g - \langle v_2, w_1 \rangle_g$$

Erklären wir den **Geschwindigkeitsphasenraum** oder kurz **Phasenraum**

$$P := \mathbb{E}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \langle 1/s \rangle$$

als den Raum aller möglichen Orte und Geschwindigkeiten der Teilchen unseres Systems, so ist η eine symplektische Form auf seinem Richtungsraum \vec{P} . Die Funktion der **kinetischen Energie** $K : P \rightarrow \langle \text{gm}^2/s^2 \rangle$, gegeben in Formeln durch $K : (x, v) \mapsto \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_g$, hat nun das Differential $(d_{(x,v)} K) : (w_1, w_2) \mapsto \langle w_2, v \rangle_g$ für $w_1 \in \vec{\mathbb{E}}^\Lambda$ und $w_2 \in \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \langle 1/s \rangle$ und hat folglich als symplektischen Gradienten das **Geschwindigkeitsfeld** mit den Werten

$$(\text{grad}_\eta K)(x, v) = (v, 0)$$

Dahingegen hat die Funktion $V : P \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$ der **potentiellen Energie** das Differential $(d_{(x,v)}V) : (w_1, w_2) \mapsto -\langle \tilde{F}(x), w_1 \rangle_{\mathfrak{g}}$ für $\tilde{F}(x)$ die Zusammenfassung der massebereinigten externen Kräfte, gewissermaßen per definitionem, und hat folglich als symplektischen Gradienten das **Geschwindigkeitsfeld**

$$(\text{grad}_{\eta} V)(x, v) = (0, \tilde{F}(x))$$

Für die **Gesamtenergie** $E : P \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$ gegeben durch $E := K + V$ wird der symplektische Gradient $\text{grad}_{\eta} E$ mithin gegeben durch das **Geschwindigkeitsfeld**

$$(\text{grad}_{\eta} E)(x, v) = (v, \tilde{F}(x))$$

Die Flußwege $\alpha : I \rightarrow P$, $t \mapsto (\gamma(t), \rho(t))$ des symplektischen Gradienten der Gesamtenergie auf dem Phasenraum für $I \subset \mathbb{T}$ ein mehrpunktiges Zeitintervall sind genau die differenzierbaren Abbildungen mit $\dot{\gamma}(t) = \rho(t)$ und $\dot{\rho}(t) = \tilde{F}(\gamma(t))$ alias $\ddot{\gamma}(t) = \tilde{F}(\gamma(t))$ für alle Zeiten $t \in I$ alias die Abbildungen $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ für γ eine Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichungen ohne Zwangsbedingungen. Speziell sind im Fall $\Lambda = 1$ der Bewegung eines Teilchens der Masse $m_1 = m$ die Projektionen unserer Flußwege α auf ihren Ortsanteil genau die Lösungen der Newton'schen Bewegungsgleichung

$$\ddot{\gamma}(t) = \tilde{F}(\gamma(t)) = \frac{F(\gamma(t))}{m}$$

aus 10.1.8 und auch allgemeiner sind die Lösungen der Bewegungsgleichungen genau die Projektionen der Flußwege des symplektischen Gradienten der Gesamtenergie auf dem Phasenraum. Im folgenden werden wir sehen, wie sich diese Beschreibung auf den Fall eines Systems mit Zwangsbedingungen verallgemeinern läßt.

Proposition 10.15.4 (Bewegung als Projektion von Flußwegen). *Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und s ein Skalarprodukt auf \vec{X} . Seien $\eta = \eta_s$ die symplektische Form auf $\vec{X} \times \vec{X}$ gegeben durch*

$$\eta((v_1, v_2), (w_1, w_2)) := s(v_1, w_2) - s(v_2, w_1)$$

und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall. So ist $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow X$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\gamma''(t) = -(\text{grad}_s V)(\gamma(t))$$

genau dann, wenn γ die Projektion auf X eines Flußwegs des symplektischen Gradienten $\text{grad}_{\eta} E$ ist für $E : X \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $E(x, v) := V(x) + s(v, v)/2$.

10.15.5. Wir verwenden hier implizit die offensichtliche Identifikation zwischen $\vec{X} \times \vec{X}$ und dem Richtungsraum von $X \times \vec{X}$.

10.15.6. Als Beispiel mag man sich $X = \mathbb{E}^\Lambda$ und $s = \langle \cdot, \cdot \rangle_g$ und V unsere Potentialfunktion denken, letztere zur Vereinfachung befreit von ihren Einheiten. Physikalisch ist $X \times \vec{X}$ der Geschwindigkeitsphasenraum und unsere Proposition bringt zum Ausdruck, daß die Lösungen der Bewegungsgleichungen als die Fußpunktprojektionen der Flußwege des symplektischen Gradienten der Gesamtenergie auf dem Phasenraum beschrieben werden können.

10.15.7. Unser Skalarprodukt induziert einen Isomorphismus $\text{can}_s : \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{X}^*$ und dann auch einen Isomorphismus $\text{id} \times \text{can}_s : \vec{X} \times \vec{X} \xrightarrow{\sim} \vec{X} \times \vec{X}^*$. Unsere symplektische Form η_s entspricht unter letzterem Isomorphismus der kanonischen symplektischen Form auf $\vec{X} \times \vec{X}^*$ gegeben durch die Formel $\omega((v, \phi), (w, \psi)) := \psi(v) - \phi(w)$.

Beweis. Für $(x, v) \in X \times \vec{X}$ und $(w_1, w_2) \in \vec{X} \times \vec{X}$ und $V : X \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $V(x, v) := V(x)$ finden wir

$$\begin{aligned} (d_{(x,v)}V)(w_1, w_2) &= (d_x V)(w_1) \\ &= s((\text{grad}_s V)(x), w_1) \\ &= \eta((0, -(\text{grad}_s V)(x)), (w_1, w_2)) \end{aligned}$$

und somit $(\text{grad}_\eta V)(x, v) = (0, -(\text{grad}_s V)(x))$. Für $K : X \times \vec{X} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $K(x, v) := s(v, v)/2$ finden wir andererseits

$$\begin{aligned} (d_{(x,v)}K)(w_1, w_2) &= s(v, w_2) \\ &= \eta((v, 0), (w_1, w_2)) \end{aligned}$$

und so $(\text{grad}_\eta K)(x, v) = (v, 0)$. Für $E = V + K$ haben wir mithin

$$(\text{grad}_\eta E)(x, v) = (v, -(\text{grad}_s V)(x))$$

Die Flußwege $\alpha : I \rightarrow X \times \vec{X}, t \mapsto (\gamma(t), \rho(t))$ dieses Vektorfelds sind demnach genau die differenzierbaren Abbildungen $\alpha = (\gamma, \rho)$, für deren Komponenten gilt $\gamma'(t) = \rho(t)$ und $\rho'(t) = -(\text{grad}_s V)(\gamma(t))$, und entsprechen unter $\gamma \mapsto (\gamma, \gamma')$ eineindeutig den zweimal differenzierbaren Abbildungen $\gamma : I \rightarrow X$ mit

$$\gamma''(t) = -(\text{grad}_s V)(\gamma(t)) \quad \square$$

10.15.8. Um Zwangsbedingungen in den obigen Formalismus einzubauen, und das ist unser eigentliches Ziel, muß ich einige Grundbegriffe aus der Differentialgeometrie erklären. Hier bespreche ich sie nur ad hoc und sozusagen zu Fuß für eingebettete Mannigfaltigkeiten. Den vollen Formalismus können Sie in der Differentialgeometrie kennenlernen.

10.15.9 (Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten und ihre Flußwege). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum Y und eine glatte Mannigfaltigkeit $N \subset Y$ erinnere ich an ihr Tangentialbündel $TN \subset Y \times \vec{Y}$, das wir in 11.1.3 als eine glatte Mannigfaltigkeit in $Y \times \vec{Y}$ erklärt hatten. Ein **Vektorfeld auf N** ist definiert als ein Schnitt A der Bündelprojektion $\pi : TN \twoheadrightarrow N$, also eine Abbildung $A : N \rightarrow TN$ mit $\pi \circ A = \text{id}_N$, die mithin jedem Punkt $q \in N$ einen Tangentialvektor $A_q \in T_qN$ an N bei q zuordnet. Ein **Flußweg** eines Vektorfelds A ist eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow N$ von einem mehrpunktigen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach N mit $\gamma'(t) = A_{\gamma(t)}$ für alle $t \in I$. Mit differenzierbar ist hier gemeint, daß die durch Nachschalten der Einbettung $N \hookrightarrow Y$ entstehende Abbildung $\gamma : I \rightarrow Y$ differenzierbar sein soll im bereits in ?? definierten Sinne.

10.15.10 (Symplektische Gradienten auf Mannigfaltigkeiten). Gegeben ein endlichdimensionaler reeller affiner Raum Y und eine glatte Mannigfaltigkeit $N \subset Y$ versteht man unter einem **kovarianten 2-Tensor ω auf N** eine Zuordnung ω , die jedem Punkt $q \in N$ eine Bilinearform ω_q auf seinem Tangentialraum T_qN zuordnet. Sind alle diese Bilinearformen nichtausgeartet, so heißt unser 2-Tensor **nichtausgeartet**. Ist $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und ω ein nichtausgearteter 2-Tensor auf N , so erklären ein Vektorfeld

$$\text{grad}_\omega f$$

auf N , den **ω -Gradienten von f** , dessen Wert bei $q \in N$ gegeben wird durch die Formel $\omega_q((\text{grad}_\omega f)(q), v) = D_v(f) \forall v \in T_qN$. Für Leser, die bereits das Differential glatter Funktionen auf Mannigfaltigkeiten kennen, sei bemerkt, daß die Richtungsableitung $D_v(f)$ von f bei q in Richtung v mit dem Differential von f bei q verknüpft ist durch die Beziehung $D_v(f) = (d_q f)(v)$. Ist speziell ω eine punktweise symplektische Form, so nennen wir unseren ω -Gradienten auch den **symplektischen Gradienten**.

Satz 10.15.11 (Bewegung unter Zwang als Projektion von Flußwegen). Seien X ein endlichdimensionaler reeller Raum, $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, s ein Skalarprodukt auf \vec{X} und $M \subset X$ eine glatte Mannigfaltigkeit. So gilt:

1. Die Restriktion der symplektischen Form $\eta = \eta_s$ aus 10.15.4 von $\vec{X} \times \vec{X}$ auf die Tangentialräume $T_{(x,v)}(TM)$ des Tangentialbündels $TM \subset X \times \vec{X}$ induziert einen nichtausgearteten punktweise symplektischen kovarianten 2-Tensor $\bar{\eta}$ auf dem Tangentialbündel;
2. Für $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ die Gesamtenergie wie in 10.15.4 sind die Flußwege $\alpha : I \rightarrow TM$ ihres symplektischen Gradienten $\text{grad}_{\bar{\eta}} E$ auf TM genau alle Abbildungen der Gestalt $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ für $\gamma : I \rightarrow M$ ein glatter Weg mit

$$(\gamma''(t) + (\text{grad}_s V)(\gamma(t))) \perp_s T_{\gamma(t)}M \quad \forall t \in I$$

10.15.12. Nennen wir $P := TM$ den **Phasenraum** unseres Systems mit Zwangsbedingungen, so sind damit die Lösungskurven der Bewegungsgleichungen wieder die Projektionen der Flußwege des symplektischen Gradienten $\text{grad}_{\bar{\eta}} E$ der Gesamtenergie $E : P \rightarrow \mathbb{R}$. Die physikalische Interpretation erhält man wie in 10.15.4, indem man den Raum $X = \mathbb{E}^\Lambda$ aller möglichen Ortsbestimmungen von Λ Massepunkten betrachtet und $M \subset X$ die Mannigfaltigkeit aller auch noch mit den Zwangsbedingungen verträglichen Ortsbestimmungen und $s = \langle \cdot, \cdot \rangle_g$ das massebehaftete Skalarprodukt auf \vec{X} aus 10.4.3 und V das Potential.

Vorschau 10.15.13. Verwendet man die durch das Skalarprodukt gegebene Identifikation $TM \xrightarrow{\sim} T^*M$ des Tangentialbündels von M mit dem sogenannten „Kotangentialbündel“ von M , so entspricht unser $\bar{\eta}$ quasi per definitionem der sogenannten „kanonischen symplektischen Form auf dem Kotangentialbündel“ und unsere Funktion E entspricht der sogenannten „Hamiltonfunktion“ H und unsere Bewegungsgleichungen nehmen in sogenannten „kanonischen Koordinaten“ die besonders transparente Form

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

an. Um das alles zu verstehen, müssen Sie jedoch zunächst mehr Differentialgeometrie lernen. Ich bespreche es in [ML] 28.5.11.

Beweis. Zunächst erhalten wir für $(x, v) \in TM$ eine natürliche kurze exakte Sequenz als obere Horizontale eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} T_v(T_x M) & \hookrightarrow & T_{(x,v)}(TM) & \twoheadrightarrow & T_x M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \vec{X} & \xrightarrow{\text{in}_2} & \vec{X} \times \vec{X} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \vec{X} \end{array}$$

mit dem Differential der Bündelprojektion $TM \twoheadrightarrow M$ als zweiter horizontaler Abbildung und dem Differential der Einbettung der Faser $T_x M \hookrightarrow TM$ als erster horizontaler Abbildung und den von $M \hookrightarrow X$ und $TM \hookrightarrow X \times \vec{X}$ induzierten Vertikalen. Gegeben $(v_1, v_2) \in T_{(x,v)}(TM)$ folgt aus

$$\bar{\eta}((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = 0 \quad \forall (w_1, w_2) \in T_{(x,v)}(TM)$$

erst $s(v_1, w_2) = 0 \quad \forall w_2 \in T_x M$ und so $v_1 = 0$ und dann wegen der Surjektivität des Differentials der Bündelprojektion oben rechts leicht auch $v_2 = 0$. Das zeigt den ersten Teil. Nun erinnern wir aus 10.15.3 unsere Formel für den symplektischen Gradienten der Gesamtenergie $(\text{grad}_{\bar{\eta}} E)(x, v) = (v, -(\text{grad}_s V)(x))$. Aus $\text{pr}_1((\text{grad}_{\bar{\eta}} E)(x, v)) \in T_x M$ folgt nun leicht $\text{pr}_1((\text{grad}_{\bar{\eta}} E)(x, v)) = v$ und dann ebenso leicht

$$(\text{grad}_{\bar{\eta}} E)(x, v) = (v, -(\text{grad}_s V)(x) + w)$$

mit $w = w(x, v) \in (T_x M)^{\perp_s}$, das dabei so zu wählen ist, daß unser Paar auch tatsächlich zu $T_{(x,v)}(TM)$ gehört. So sehen wir, daß wir die Flußwege $\alpha : I \rightarrow TM$ von $\text{grad}_{\bar{\eta}} E$ genau die glatten Wege sind, die in Komponenten als

$$\alpha(t) = (\gamma(t), \rho(t))$$

mit $\gamma : I \rightarrow X$ und $\rho : I \rightarrow \vec{X}$ zerlegt die Bedingungen $\gamma(t) \in M$ und $\gamma'(t) = \rho(t)$ und

$$(\rho'(t) + (\text{grad}_s V)(\gamma(t))) \perp_s T_{\gamma(t)} M \quad \forall t \in I$$

erfüllen. Der Satz folgt unmittelbar. \square

10.15.14 (Bewegungen unter Zwang und Einheiten). Ich erkläre nun noch, wie das Ganze zu variieren ist, wenn man mit Einheiten arbeiten will. Dazu betrachten wir ein mechanisches System von Λ Massepunkten der Massen m_1, \dots, m_Λ , deren Bewegung in der Weise eingeschränkt sei, daß die Zusammenfassung ihrer Orte $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_\Lambda) \in \mathbb{E}^\Lambda$ sich stets auf einer fest vorgegebenen glatten Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^\Lambda$ befindet, dem **Konfigurationsraum** unseres Systems. Insoweit könnten wir einfach unseren Satz 10.15.11 auf $X = \mathbb{E}^\Lambda$ spezialisieren. Jetzt gilt es aber, mit dem massebehafteten Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_g : \vec{X} \times \vec{X} \rightarrow \langle \text{gm}^2 \rangle$$

aus 10.4.3 zu arbeiten und mit dem **Geschwindigkeitsbündel**

$$TM\langle 1/s \rangle := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times (T_p M)\langle 1/s \rangle \subset X \times \vec{X}\langle 1/s \rangle$$

Wir nennen es den **Geschwindigkeitsphasenraum** oder kurz **Phasenraum**. Unser $\bar{\eta}$ wird ein nichtausgearteter $\langle \text{gm}^2/s \rangle$ -wertiger 2-Tensor auf dem Phasenraum $TM\langle 1/s \rangle$ und die Gesamtenergie eine glatte Abbildung

$$E : TM\langle 1/s \rangle \rightarrow \langle \text{gm}^2/s^2 \rangle$$

und deren symplektischer Gradient $\text{grad}_{\bar{\eta}} E$ ein Geschwindigkeitsfeld auf dem Phasenraum $TM\langle 1/s \rangle$. Die nun auf mehrgpunktigen Zeitintervallen $I \subset \mathbb{T}$ erklärten Flußwege $\alpha : I \rightarrow TM\langle 1/s \rangle$ unseres symplektischen Gradienten sind dann genau alle Paare $\alpha = (\gamma, \dot{\gamma})$ mit γ einer Lösung der Bewegungsgleichungen

$$(\ddot{\gamma}(t) - \tilde{F}(\gamma(t))) \perp_g T_{\gamma(t)} M$$

aus 10.4.4 für \tilde{F} die Zusammenfassung der massebereinigten externen Kräfte.

11 Ältere Entwürfe und Versuche

11.1 Euler-Lagrange-Gleichungen ALT

11.1.1 (**Motivation**). Die Bewegungsgleichungen in Gestalt der Orthogonalitätsbedingung 10.4.4, die wir in 10.4.3 aus dem Newton'schen Prinzip „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ zusammen mit dem Prinzip „Zwangskräfte verrichten unter infinitesimalen Verrückungen keine Arbeit“ von d'Alembert hergeleitet haben, wird nun in Koordinaten ausgeschrieben. So ergeben sich die „Euler-Gleichungen“ und die „Euler-Lagrange-Gleichungen“. Dafür führen wir das „Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit“ alias den „Geschwindigkeitsphasenraum eines mechanischen Systems“ ein.

11.1.2. Seien X ein endlichdimensionaler Raum und $M \subset X$ eine Mannigfaltigkeit. In 4.2.9 hatten wir zu jedem Punkt $p \in M$ seinen Tangentialraum $T_p M \subset \vec{X}$ erklärt als die Menge aller möglichen Geschwindigkeitsvektoren bei p von Wegen durch den Punkt p , die ganz in M verlaufen. Wir erklären nun das **Tangentialbündel von M** als

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \subset M \times \vec{X}$$

Die Komposition $\pi : TM \rightarrow M$ der Einbettung nach $M \times \vec{X}$ mit der Projektion auf M heißt die **Bündelprojektion**.

11.1.3 (**Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit**). Gegeben X ein endlichdimensionaler reeller Raum und $M \subset X$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist ihr Tangentialbündel

$$TM \subset X \times \vec{X}$$

eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $2(\dim M)$. Gegeben eine glatte Karte $\varphi : \mathbb{R}^n \supset W \rightarrow M$ von M ist des weiteren $d\varphi : W \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ gegeben für $(x, y) \in W \times \mathbb{R}^n$ durch

$$d\varphi : (x, y) \mapsto (\varphi(x), (d_x \varphi)(y))$$

eine glatte Karte des Tangentialbündels TM . Der Beweis bleibe dem Leser zur Übung überlassen. Das zu dieser Karte gehörige Koordinatensystem

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

des Tangentialbündels TM nennen wir das **natürliche Koordinatensystem des Tangentialbündels** zum vorgegebenen Koordinatensystem (x_1, \dots, x_n) alias zur vorgegebenen Karte φ unserer Mannigfaltigkeit.

11.1.4 (**Bewegungsgleichungen in lokalen Koordinaten**). Wir betrachten wie in 10.4.3 den Fall eines mechanischen Systems von Λ Massepunkten der Massen m_1, \dots, m_Λ , deren Bewegung in der Weise durch Zwangsbedingungen eingeschränkt sei, daß die Zusammenfassung ihrer Orte $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_\Lambda) \in \mathbb{E}^\Lambda$ sich stets auf einer fest vorgegebenen glatten Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^\Lambda$ befindet, dem Konfigurationsraum unseres mechanischen Systems. In diesem Fall betrachten wir vorzugsweise eine mit Einheiten versehene Variante

$$\underline{T}M := TM\langle 1/s \rangle$$

des Tangentialbündels, den **Phasenraum** oder **Geschwindigkeitsphasenraum** unseres Systems. Formal erklären wir ihn als eine Untermannigfaltigkeit $\underline{T}M \subset X \times \vec{X}\langle 1/s \rangle$ für $X = \mathbb{E}^\Lambda$, eben die Vereinigung der $T_p M\langle 1/s \rangle$.

11.1.5. Seien $(m_1, \dots, m_\Lambda, M)$ ein mechanisches System und $\varphi : \mathbb{R}^n \circlearrowleft W \hookrightarrow M$ eine Karte seines Konfigurationsraums, die wir der Einfachheit der Notation halber bijektiv annehmen, also $\varphi : W \xrightarrow{\sim} M$. Die zugehörigen Koordinaten notieren wir (x_1, \dots, x_n) . Gegeben $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion schreiben wir $f(x_1, \dots, x_n)$ als Abkürzung für $f(\varphi(x_1, \dots, x_n))$. Ist f glatt, so schreiben wir weiter $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ als Abkürzung für

$$\left(\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i} \right) \circ \varphi^{-1} : M \rightarrow \mathbb{R}$$

Analoge Abkürzungen verwenden wir für Funktionen mit allgemeineren Wertebereichen. Wir notieren etwa $\mathbf{r}_\nu : M \rightarrow \mathbb{E}$ den Ort des ν -ten Teilchens und haben also $\varphi(x) = (\mathbf{r}_1(\varphi(x)), \dots, \mathbf{r}_\Lambda(\varphi(x)))$ für $x = (x_1, \dots, x_n) \in W$ oder verkürzt geschrieben $\varphi(x) = (\mathbf{r}_1(x), \dots, \mathbf{r}_\Lambda(x))$. Wir erweitern das zugehörige Koordinatensystem (x_1, \dots, x_n) von M wie im einheitenfreien Fall durch die Abbildungen

$$y_i := y_i \otimes \text{id} : \underline{T}M \rightarrow \langle 1/s \rangle$$

zum **natürlichen Koordinatensystem** $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ des Phasenraums mit der Besonderheit, daß die Koordinaten y_i als Werte statt reelle Zahlen vielmehr duale Zeitspannen alias Frequenzen annehmen. In der physikalischen Literatur schreibt man statt y_i meist \dot{x}_i . Die zu diesem natürlichen Koordinatensystem gehörige Karte

$$\psi : W \times \mathbb{R}^n\langle 1/s \rangle \rightarrow \underline{T}M$$

bildet (x, y) ab auf das Tupel der Orte $\mathbf{r}_\nu(x, y) = \mathbf{r}_\nu(x)$ und Geschwindigkeiten

$$\vec{\mathbf{v}}_\nu(x, y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}(x) y_j$$

11.1.6. Die **kinetische Energie** unseres mechanischen Systems $(m_1, \dots, m_\Lambda, M)$ sei die Abbildung $K : \mathbb{E}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda \langle 1/s \rangle \rightarrow \langle \text{gm}^2/s^2 \rangle$ gegeben durch

$$(\mathbf{r}_\nu, \vec{\mathbf{v}}_\nu)_{\nu=1}^\Lambda \mapsto \sum_{\nu=1}^\Lambda m_\nu \langle \vec{\mathbf{v}}_\nu, \vec{\mathbf{v}}_\nu \rangle / 2$$

Für $\vec{\mathbf{F}}_\nu : \mathbb{E} \rightarrow \vec{\mathbb{E}} \langle \text{g}/s^2 \rangle$ zusätzlich gegebene am jeweiligen Ort auf den jeweiligen Massepunkt wirkende **externe Kräfte** erklären wir nun die i -te **generalisierte Kraft** in Bezug auf unser Koordinatensystem von M durch

$$Q_i := \sum_{\nu=1}^\Lambda \left\langle \vec{\mathbf{F}}_\nu \circ \mathbf{r}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_i} \right\rangle$$

Unsere generalisierten Kräfte sind also Funktionen $Q_i : M \rightarrow \langle \text{gm}^2/s^2 \rangle$. Durch Vorschalten der Bündelprojektion können und werden wir sie als Funktionen auf dem Phasenraum auffassen.

Satz 11.1.7 (Euler-Gleichungen). *Seien (x_1, \dots, x_n) Koordinaten auf dem Konfigurationsraum M eines mechanischen Systems und $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ die zugehörigen natürlichen Koordinaten auf dem Phasenraum $\mathbb{T}M$. Genau dann erfüllt ein glatter Weg $\gamma : \mathbb{T} \supset I \rightarrow M$ die Orthogonalitätsbedingung 10.4.4, wenn für die zugehörige Abbildung $(\gamma, \dot{\gamma}) : \mathbb{T} \supset I \rightarrow \mathbb{T}M$ in den Geschwindigkeitsphasenraum gilt*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial y_i} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) \right) - \frac{\partial K}{\partial x_i} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) - Q_i \circ \gamma = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

mit K der kinetischen Energie und Q_i den generalisierten Kräften.

Beweis. Das ist ein Ausschreiben in Koordinaten. Wir nehmen an, daß unsere Koordinaten zu einer bijektiven Karte $\varphi : \mathbb{R}^n \oplus W \xrightarrow{\sim} M$ gehören alias eine Bijektion $(x_1, \dots, x_n) : M \xrightarrow{\sim} W$ liefern. Oft kürzen wir für $\gamma : \mathbb{T} \supset I \rightarrow M$ auch $x_i \circ \gamma$ zu x_i ab und $\mathbf{r}_\nu \circ \gamma$ zu \mathbf{r}_ν für den Ort des Teilchens mit Index ν zum Zeitpunkt t , so daß wir etwa schreiben können

$$\mathbf{r}_\nu(t) = \mathbf{r}_\nu(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Indem wir auch t noch aus der Notation weglassen, ergeben sich für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen unserer Teilchen die Formeln

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_n} \dot{x}_n$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j \partial x_k} \dot{x}_j \dot{x}_k + \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j} \ddot{x}_j$$

Die griechischen Indizes zeigen hierbei an, daß diese Gleichungen in \mathbb{E} beziehungsweise $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/s \rangle$ beziehungsweise $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/s^2 \rangle$ oder genauer als Gleichungen von Abbildungen von einem mehrpunktigen Intervall der Zeitachse $I \subset \mathbb{T}$ in besagte Räume zu verstehen sind. Da weiter für $x \in W$ der Tangentialraum $T_{\varphi(x)}M$ an M bei $\varphi(x)$ nach 10.6.4 von den ausgewertet bei x zu verstehenden Vektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}_\Lambda}{\partial x_l} \right) \in \vec{\mathbb{E}}^\Lambda$$

für $1 \leq l \leq n$ aufgespannt wird, ist unsere Orthogonalitätsbedingung für das massebehaftete Skalarprodukt $(\ddot{\gamma}(t) - \ddot{F}(\gamma(t))) \perp_g T_{\gamma(t)}M$ gleichbedeutend dazu, daß für alle l die Summe

$$\sum_{\nu,j,k} m_\nu \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \dot{x}_j \dot{x}_k + \sum_{\nu,j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \ddot{x}_j - \sum_\nu \left\langle \vec{\mathbf{F}}_\nu \circ \mathbf{r}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle$$

verschwindet. Wir nennen die l -te dieser Verschwindungsbedingungen im folgenden die **l -te Bewegungsgleichung**. Jetzt erinnern wir den Geschwindigkeitsphasenraum $\mathbb{T}M \subset \mathbb{E}^\Lambda \times \vec{\mathbb{E}}^\Lambda\langle 1/s \rangle$. Der $\vec{\mathbf{v}}_\nu$ -Anteil eines Punktes, aufgefaßt als Abbildung $\vec{\mathbf{v}}_\nu : \mathbb{T}M \rightarrow \vec{\mathbb{E}}\langle 1/s \rangle$, wird in den natürlichen Koordinaten gegeben durch den Ausdruck

$$\vec{\mathbf{v}}_\nu(x, y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}(x) y_j$$

Dieser Ausdruck ist eine Geschwindigkeit alias ein Element von $\vec{\mathbb{E}}\langle 1/s \rangle$. Die Einschränkung unserer kinetischen Energie K auf den Phasenraum des Systems mit Zwangsbedingungen hat in diesen Koordinaten die Gestalt

$$K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{\nu,j,k} \frac{m_\nu}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_k} \right\rangle y_j y_k$$

Für die partielle Ableitung mit Einheiten im Sinne von 2.4.10 folgt sofort

$$\frac{\partial K}{\partial y_l} = \sum_{\nu,j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle y_j$$

Hier bestehen wir darauf, daß diese partiellen Ableitungen der kinetischen Energie $K : \mathbb{T}M \rightarrow \langle \text{gm}^2/\text{s}^2 \rangle$ in Bezug auf das natürliche lokale Koordinatensystem des Geschwindigkeitsphasenraums zu verstehen sind. Nun betrachten wir eine glatte

Kurve $\gamma : \mathbb{T} \supset I \rightarrow M$. Zusammen mit ihrem Differential $\dot{\gamma} = d\gamma$ liefert sie eine Abbildung $(\gamma, \dot{\gamma}) : \mathbb{T} \supset I \rightarrow \mathbb{T}M$. Interpretieren wir die y_i weiter als Koordinaten des Geschwindigkeitsphasenraums oder genauer als Abbildungen $y_i : \mathbb{T}M \rightarrow \langle 1/s \rangle$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial y_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) \right) &= \sum_{\nu, i, j, k} m_\nu \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \dot{x}_j \dot{x}_k \\ &+ \sum_{\nu, i, j, k} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l \partial x_k} \right\rangle \dot{x}_k \dot{x}_j \\ &+ \sum_{\nu, j} m_\nu \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial x_l} \right\rangle \ddot{x}_j \end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme unserer l -ten Bewegungsgleichung von oben können demnach dargestellt werden in der Form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial y_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) \right) - \frac{\partial K}{\partial x_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma})$$

Der letzte Term ist gerade unsere generalisierte Kraft und der Satz folgt. \square

11.1.8 (Euler-Lagrange-Gleichungen bei Kräften mit Potential). Bisher haben wir unsere Kräfte als mit Einheiten $\langle g/s^2 \rangle$ versehene Vektorfelder aufgefaßt. Benutzen wir nun die durch das konkrete Skalarprodukt $\vec{\mathbb{E}} \times \vec{\mathbb{E}} \rightarrow \langle m^2 \rangle$ gegebene Identifikation $\vec{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} \vec{\mathbb{E}}^* \langle m^2 \rangle$, um sie stattdessen als mit Einheiten in $\langle gm^2/s^2 \rangle$ versehene Kovektorfelder aufzufassen, und fassen die Gesamtheit F der Kräfte entsprechend als ein mit denselben Einheiten versehenes Kovektorfeld auf \mathbb{E}^Λ auf, also als Abbildung $F : \mathbb{E}^\Lambda \rightarrow (\vec{\mathbb{E}}^*)^\Lambda \langle gm^2/s^2 \rangle$, so hat das unter der Karte zurückgezogene Kovektorfeld die Gestalt

$$\varphi^* F = \sum_{l=1}^n Q_l dx_l$$

und unsere generalisierten Kräfte zeigen ihre eigentliche Bedeutung. Ist dann weiter $V : \mathbb{E}^\Lambda \rightarrow \langle gm^2/s^2 \rangle$ ein **Potential** für unsere Kraft F , in Formeln $F = -dV$, so folgt

$$\varphi^* F = -d(V \circ \varphi) = -\sum_{l=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_l} dx_l$$

Wesentlich ist hierbei die Erkenntnis 8.2.14, daß das Differential von Funktionen Verwandtschaft respektiert. Wir finden auf diese Weise mit den üblichen

Abkürzungen für die generalisierten Kräfte die Darstellung $Q_l = -\frac{\partial V}{\partial x_l}$, die wir uns als eine Identität von Funktionen auf M oder ebensogut auch auf U denken können. Fassen wir nun V durch Vorschalten der Bündelprojektion als Funktion auf dem Phasenraum $\mathbb{T}M$ auf, so verschwinden natürlich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial y_l}$ bezüglich unseres Systems $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ von natürlichen Koordinaten. Bilden wir also die **Lagrangefunktion**

$$L := V - K$$

als Differenz zwischen der potentiellen und der kinetischen Energie unseres Systems, so erfüllt für eine mögliche Bewegung $\gamma : I \rightarrow M$ die zugehörige Abbildung in den Phasenraum $(\gamma, \dot{\gamma}) : I \rightarrow \mathbb{T}M$ die sogenannten **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_l} \circ (\gamma, \dot{\gamma}) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_l} \right) \circ (\gamma, \dot{\gamma}) = 0 \quad \text{für } 1 \leq l \leq n.$$

12 Danksagung

Für Korrekturen und Verbesserungen danke ich Christina Pflanz, ...

13 Tagebuch Mathematische Physik WS 24/25

Es handelt sich um eine zweistündige Vorlesung, also 2×45 Minuten Vorlesung, ohne Übungen, möglicherweise mit einigen Seminarvorträgen.

- 15.10 Nach [AN2] 10.1 Anschauungsraum mit seinem geometrischen Skalarprodukt. Die Zeit als eindimensionaler affiner Raum. Mathematik des Rechnens mit Einheiten. Kraftfeld. Kraft ist Masse mal Beschleunigung. Gravitationsfeld. Wurfbahn einer Punktmasse. Nach [AN2] 10.2.2 Potential eines Kraftfelds und Energieerhaltung. Planetenbewegung weglassen, das kommt sicher in der Physik ziemlich ähnlich vor.
- 22.10 Systeme mit Zwangsbedingungen [AN2] 10.4.1 folgende. Herleitung und Motivation für die Bewegungsgleichungen in der Gestalt von Orthogonalitätsbedingungen 10.4.4. Tangentialbündel und seine natürlichen Koordinaten. Phasenraum.
- 29.10 Prinzip der kleinsten Wirkung und Euler-Gleichungen.
- 5.11 Tangentialräume der Tangentialbündels. Hamilton'scher Formalismus: Der Phasenweg der Bewegung ist Flußweg des symplektischen Gradienten der totalen Energie auf dem Phasenraum, auch im Fall von Zwangsbedingungen.
- 12.11 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten.
- 19.11 Hamilton'sche Gleichungen als Fluß des symplektischen Gradienten der Hamiltonfunktion auf dem Kotangentialbündel.

14 Tagebuch Analysis 2 SS 23

Es handelt sich um eine vierstündige Vorlesung zur Analysis 2, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 17.4 Metrische Räume und normierte Vektorräume, insbesondere Äquivalenz von Normen.
- 19.4 Topologische Räume und Grenzwerte.
- 24.4 Abgeschlossene Mengen. Vollständigkeit. Partielle Ableitungen und Gradient. Affine Räume.
- 26.4 Differential. Kettenregel in mehreren Veränderlichen noch ohne Beweis.
 - 3.5 Beweis der Kettenregel in mehreren Veränderlichen. Differenzierbarkeit bei Stetigkeit der partiellen Ableitungen 2.5.1. Integration über Quader 3.1. Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Nicht Vertauschbarkeit einer partiellen Ableitung mit dem Integral.
- 8.5 Taylorreihe und Rechnen mit Approximationen.
- 10.5 Maxima und Minima in mehreren Veränderlichen. Umkehrsatz formuliert. Banach'scher Fixpunktsatz bewiesen.
- 15.5 Umkehrsatz für stetige Abbildungen 4.1.12. Beweis des Umkehrsatzes für C^1 -Abbildungen. Mannigfaltigkeiten in reellen Räumen. Noch nicht Beweis für Mannigfaltigkeiten als Urbilder.
- 17.5 Beweis für Mannigfaltigkeiten als Urbilder. Tangentialraum. Implizite Funktionen geometrisch. Fassung in Koordinaten noch nicht bewiesen.
- 22.5 Implizite Funktionen in Koordinaten. Karten und Koordinatensysteme.
- 24.5 Lokale Extrema auf Mannigfaltigkeiten, ohne hinreichendes Kriterium. Transformationsformel angegeben, Beweis versprochen für nach der Pfingspause. Definition der Kompaktheit für topologische Räume, überdeckungskompakt ist gleichbedeutend zu folgenkompakt für metrische Räume.
- 5.6 Beweis Transformationsformel.
- 7.6 Jedes Kompaktum in einem Hausdorffraum ist abgeschlossen 5.1.9. Ausdehnen durch Null von Funktionen mit kompaktem Träger. Integration über Mannigfaltigkeiten.

- 12.6 Integrationskarten, Integration über Fastfaltigkeiten. Ich habe den Beweis des Satzes über die Integration über Fastfaltigkeiten nur kurz skizziert und insbesondere die Minkowskidimension und ihre Bedeutung darin nicht diskutiert. Ich habe stattdessen den Beweis des Satzes über die Integration über Mannigfaltigkeiten mit Sorgfalt zu Ende gebracht. Danach die Fläche der Einheitskreisscheibe und die Kugeloberfläche berechnet.
- 14.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen, Grundlagen. Bis zur Aussage des Satzes von Picard-Lindelöf 6.2.1 und dem Gegenbeispiel 6.2.3 gekommen.
- 19.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen, Beispiele. Differentielle Ungleichungen und Lemma von Gronwall. Vielleicht Integration vektorwertiger Funktionen.
- 21.6 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Gekommen bis zum Nachweis im lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz, daß $F - \text{id}$ kontrahierend ist.
- 26.6 Picard-Lindelöf fertig. Auch die Variante für lokal partiell lipschitzstetige zeitabhängige Felder besprochen. Zur Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert habe ich nur die Aussage 6.6.2 besprochen, aber den Beweis nicht gegeben.
- 28.6 Lineare Differentialgleichungen, homogener und inhomogener Fall. Skizze zum Beweis der Glattheit des Flusses.
- 3.7 Vektorfelder und Kovektorfelder, Verwandtschaften auch von Funktionen und Wegen. Verträglichkeiten der Verwandtschaft mit Produkten und Summen und Differential und Paaren von Vektorfeldern mit Kovektorfeldern. Eindeutige Rückwärtsverwandte von Kovektorfeldern und Funktionen. Noch Rückwärtsverwandte berechnen im Fall von Polarkoordinaten.
- 5.7 Rückwärtsverwandte berechnen an Beispielen. Wegintegrale.
- 10.7 Invarianz des Wegintegrals unter Umparametrisierung. Integration rationaler Funktionen über ebene Quadriken. Wegzusammenhang, Wegzusammenhangskomponenten. Funktionen mit Differential Null sind konstant auf Wegzusammenhangskomponenten.
- 12.7 Wegintegrale über geschlossene Wege verschwinden genau dann, wenn unser Kovektorfeld das Differential einer Funktion ist. Homotope und zusammenziehbare Wege. Geschlossene Kovektorfelder.
- 17.7 Wegintegrale über geschlossene Kovektorfelder, liefern dasselbe für homotope Wege, Umkehrung. Neuer Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra.

19.7 Grundlegendes zu Fourierreihen. Satz von Stone-Weierstraß angenommen, Konvergenz im quadratischen Mittel und gleichmäßige Konvergenz für stetig differenzierbare periodische Funktionen gefolgert.

15 Tagebuch Analysis 3 WS 23/24

Es handelt sich um eine vierstündige Vorlesung zur Analysis 3, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 17.10 Alternierende Formen und Dachprodukt [AN2] 9.1. Differentialformen höheren Grades definiert und anmoderiert.
- 19.10 Differentialformen höheren Grades [AN2] 9.2. Orientierung [AN2] 9.3. Beginn Integration von Differentialformen [AN2] 9.4.3.
- 24.10 Integration von Differentialformen [AN2] 9.4.3. Anschauung, Beispielrechnung, Beweis Eindeutigkeit, Beweisskizze Existenz. Noch nicht Fälle kleiner Dimension oder Kodimension.
- 26.10 Höhere Ableitungen ohne Koordinaten. Äußere Ableitung von Differentialformen.
- 31.10 Randfaltungen. Bei den Beweisen zu Randkarten skizzenhaft geblieben. Integralsatz von Stokes [AN2] 9.7.2. Satz von Gauß anmoderiert.
- 2.11 Integration [AN2] 9.4.8 von Differentialformen über Fastfaltungen kleiner Dimension oder Kodimension, insbesondere Fluß als Integral einer Differentialform [AN2] 9.4.12. Nochmal Gauß [AN2] 9.7.11. Green'sche Formel. Ursprüngliche Fassung des Satzes von Stokes. Fassung für Eckfaltungen. Homotopieinvarianz des Wegintegrals geschlossener Kovektorfelder.
- 7.11 Von nun an arbeiten wir mit dem Skriptum für Analysis 3. Mengenalgebren, σ -Algebren, Borelmengen, Meßräume, Maße. Charakterisierung des Lebesgue-Maßes. Unmöglichkeit eines translationsinvarianten Maßes auf der Potenzmenge der reellen Zahlengeraden, das dem Einheitsintervall das Maß Eins zuordnet. Also Abschnitt [AN3] 1.1 Maßräume und Maße. Noch nicht Erzeugung von Topologie.
- 9.11 Prämaße, Konstruktion des Prämaßes zum Lebesguemaß und zu Stieljes-Maßen auf der reellen Geraden. Maßfortsetzungssatz und Beschreibung der kanonischen Fortsetzung noch ohne Beweis. Also Beginn von Abschnitt [AN3] 1.2. Gekommen bis Konstruktion äußerer Maße [AN3] 1.2.20.
- 14.11 Weiter mit Ausdehnen von Prämaß zu äußerem Maß [AN3] 1.2.22 bis zum Ende von Abschnitt [AN3] 1.2.

- 16.11 Vervollständigung von Maßräumen. Beginn Meßbarkeit. Hole erzeugte Topologie nach! Summen und Produkte meßbarer Funktionen. Erste Aussage von [AN3] 1.4.30 noch bewiesen.
- 21.11 Punktweise Grenzwerte meßbarer Funktionen ab [AN3] 1.4.30. Definition des Integrals meßbarer nichtnegativer reeller Stufenfunktionen und des Integrals meßbarer Funktionen nach $[0, \infty]$. Satz über monotone Konvergenz. Additivität des Integrals mit Lemma [AN3] 1.5.15 und dessen Beweis.
- 23.11 Restriktion von Maßen [AN3] 1.1.41, Integrale über Restriktionen [AN3] 1.5.16. Integrierbare Funktionen, dominierte Konvergenz. Produktmaß [AN3] 1.7.1.
- 28.11 Integration auf Produkträumen: Positiver Fubini bis Integral als Fläche unter dem Graphen [AN3] 1.7.13 einschließlich.
- 30.11 Integration auf Produkträumen: Fubini. Dann Regularität von Borelmaßen. Insbesondere auch Beschreibung des von einem Mengensystem erzeugten Mengenrings nachholen. Beim Beweis der Regularität von Borelmaßen bis zum Punkt gekommen, daß jede Menge aus \mathcal{Q} Schnitt eine absteigenden Folge offener Mengen mit kompaktem Abschluß ist.
- 5.12 Regularität von Borelmaßen beenden. Transformationsformel. Bildmaß, Integral über Bildmaß. Produkt von Maß mit meßbarer nichtnegativer Funktion. Regularität von Borelmaßen auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Fläche unter der Glockenkurve. Flächenmaß noch ohne Beweis und Rückwärtskompatibilität zur Integration kompakt getragener stetiger Funktionen mit Beweis.
- 7.12 Flächenmaß Beweis. Rückwärtskompatibilität zum Lebesgue-Maß. Zwiebelformel, aber ohne die entscheidende Rechnung.
- 12.12 Integrierbarkeit und Integral vektorwertiger, insbesondere komplexwertiger Funktionen. Räume integrierbarer Funktionen, fast überall definierte Funktionen. Fourierreihe als Isomorphismus von Hilberträumen noch ohne Beweis. Raum der L^p -Funktionen. Noch nicht $p = \infty$ behandelt. Young'sche Ungleichung und andere fundamentale Ungleichung bewiesen.
- 14.12 Die $\|\cdot\|_p$ -Norm ist eine Norm. Die L^p -Räume sind vollständig. Beginn von Stone-Weierstraß [AN2] 7.2.7.
- 19.12 Ich werde vertreten: Hilberträume, Hilbertbasen nach [AN3] 2.4.1 folgende.

- 21.12 Approximationssatz von Stone-Weierstraß [AN2] 7.2.7 mit Beweis. Unterschiede zur Taylorentwicklung betonen, insbesondere Fragen der Eindeutigkeit und Beziehung zur Fourierreihe. Am Schluß Formulierung für Fouriergruppen als Skizze.
- 21.12 Ich meine, das war bewiesen: Die differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger auf einer offenen Teilmenge der \mathbb{R}^n liegen dicht in den L^p Funktionen für $p < \infty$. Konvergenz der Fourier-Reihe in $L^2([0, 2\pi])$.
- 9.1 Produkttopologie wiederholen. Fouriergruppen. Gruppenwege und Charaktere, insbesondere Charaktere der Kreisgruppe und der Zahlengerade. Definition, Existenz und Eindeutigkeit der Haarmaße auf Fouriergruppen bewiesen.
- 11.1 Die Charaktere bilden eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer kompakten Fouriergruppe für das normierte Haarmaß. Orthogonale Projektionen in Hilberträumen.
- 16.1 Ivan vertritt mich. Definition und erste Eigenschaften der Fouriertransformation nach [AN3] 3.1.
- 18.1 Ivan vertritt mich. Poisson-Formel [AN3] 3.3.2, Beziehung zur Fourierreihe [FT1] ??, Inversionsformel [AN3] 3.3.5, Fouriertransformation quadratintegrierbarer Funktionen [AN3] 3.3.7, Verträglichkeit der Fouriertransformation auf L^1 und L^2 nach [AN3] 3.3.9. Definition und Eigenschaften von L_S^{loc} fehlen noch.
- 23.1 Lokal integrierbare Funktionen [AN3] 3.3.11 bis Berechnung der Fouriertransformierten einer quadratintegrierbaren Funktion [AN3] 3.3.14. Dann Fouriertransformation ohne Koordinaten [AN3] 3.2.2. Charakterpaarung und Fouriertransformation komplexer Maße.
- 25.1 Gewöhnliche Fouriertransformation ist injektiv auf Maßen [AN3] 3.3.15. Abtastatz [AN3] 3.4.8. Vielleicht Beginn der Diskussion der Topologie der Charaktergruppe.
- 30.1 Topologie der Charaktergruppe. Natürlichkeit der Fouriertransformation. Beispiele.
- 1.2 Faltung von Maßen und Funktionen. Assoziativität. Verhalten unter Fouriertransformation.
- 6.2 Beweis zentraler Grenzwertsatz beendet. Als Ausblick Wellengleichungen in den Dimensionen Eins und Drei diskutiert.

8.2 Ausblick: Unitäre Darstellungen von $(\mathbb{R}, +)$, selbstadjungierte Operatoren und Fouriertransformation.

16 Die Vorlesung Analysis 3 im WS 15/16

Es handelte sich um eine vierstündige Vorlesung, also 4×45 Minuten Vorlesung, mit 2 Stunden Übungen.

- 20.10 Integrale stetiger Funktionen über kompakte Quader, auch mit Riemannsummen. Stetige Funktionen mit kompaktem Träger, deren Fortsetzung durch Null, deren Integral. Formulierung der Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Erste Beispiele.
- 22.10 Beweis der Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Motivation. Zerlegung der Eins.
- 27.10 Äquivalenz von je zwei Normen auf endlichdimensionalem reellen Vektorraum. Differential für Abbildungen einer halboffenen Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen affinen Raums in einen weiteren endlichdimensionalen reellen affinen Raum. Untermannigfaltigkeiten über Plättungen als Definition. Karten und Koordinatensysteme. Untermannigfaltigkeiten als Bilder noch ohne Beweis.
- 29.10 Untermannigfaltigkeiten als Bilder mit Beweis. Differenzierbarkeit der Kartenwechsel. Integration von Funktionen mit kompaktem Träger über in \mathbb{R}^n eingebettete Mannigfaltigkeiten. Approximation des Integrals durch Riemannsummen.
- 3.11 Fastfaltigkeiten, Integrationskarten, Integration über Fastfaltigkeiten, Oberfläche der Kugel.
- 5.11 Vektorfelder und Kovektorfelder, Schreibweise, Verwandtschaft, Zurückholen. Das Differential einer Funktion als Kovektorfeld. Zurückholen vertauscht mit dem Differential. Zurückholen in Koordinaten.
- 10.11 Wegintegral über Kovektorfeld und seine Eigenschaften. Beziehung zu Wegintegralen über Vektorfelder und Fluß durch eine Kurve. Am Schluß noch alternierende Multilinearformen. Satz über das Dachprodukt formuliert, aber noch nicht bewiesen. Satz über Basisformen noch nicht formuliert.
- 12.11 Dachprodukt, Formeln in der äußeren Algebra. Determinante und Rückzug, Satz über Basisformen. Felder von p -Formen, Rückzug von p -Formen, anschauliche Bedeutung.
- 17.11 Rückzug von Volumenformen und Determinante. Orientierung von Mannigfaltigkeiten und Fastfaltigkeiten. Integration von Formen über orientierte Fastfaltigkeiten. Beispiel der Hemisphäre. Noch nicht: Beschreibung durch

- Riemann-Summen, alternative Interpretation für Fastfaltigkeiten kleiner Dimension und kleiner Kodimension.
- 19.11 Beschreibung des Formen-Integrals durch Riemann-Summen, alternative Interpretation für Fastfaltigkeiten kleiner Dimension und kleiner Kodimension, insbesondere Fluß durch Hyperfläche. Äußere Ableitung und Formelsammlung dazu noch ohne Beweis. Interpretation von Divergenz und Rotation als äußere Ableitung.
- 24.11 Anschauliche Bedeutung der äußeren Ableitung. Beweis der Formeln der Formelsammlung. Randfaltigkeiten und Beweis des Stokes'schen Integralsatzes.
- 26.11 Stokes'scher Integralsatz für Eckfaltigkeiten. Beispiele. Green'sche Formel. Ableitung der klassischen Sätze von Gauß und Stokes und Wegintegral über ein Feld mit Potential. Abschluß des ersten Teils der Vorlesung.
- 1.12 Mengenalgebren, σ -Algebren, Borelmengen, Meßräume, Maße. Charakterisierung des Lebesgue-Maßes. Unmöglichkeit eines translationsinvarianten Maßes auf der Potenzmenge der reellen Zahlengeraden, das dem Einheitsintervall das Maß Eins zuordnet. Noch nicht dessen Regularität.
- 3.12 Regularität für die Anschauung, Beweis kommt viel später. Prämaße, Konstruktion des Prämaßes zum Lebesguemaß und zu Stieltjes-Maßen auf der reellen Geraden. Maßfortsetzungssatz und Beschreibung der kanonischen Fortsetzung noch ohne Beweis. Nächstes Mal mit der Definition eines äußeren Maßes beginnen.
- 8.12 Äußere Maße, Zerlegerlemma, Beweis des Maßfortsetzungssatzes von Caratheodory. Vervollständigung von Maßräumen. Stieltjes-Maße nicht behandelt.
- 10.12 Stieltjes-Maße. Meßbarkeit. Summen, Produkte und Grenzwerte meßbarer Funktionen. Definition des Integrals meßbarer nichtnegativer reeller Stufenfunktionen. Noch nicht dessen Linearität.
- 15.12 Integral meßbarer nichtnegativer Funktionen und Satz über monotone Konvergenz. Integrierbare Funktionen, deren Integral, Linearität des Integrals, Satz über dominierte Konvergenz.
- 17.12 Produktmaß, Sätze von Tonelli und Fubini. Noch nichts außer der reinen Theorie. Noch nicht Cavalieri, Beziehung zum Riemann-Integral.

- 22.12 Cavalieri, Beziehung zum Riemann-Integral, partielle Integration. Regularität von Borelmaßen auf dem \mathbb{R}^n , jedoch nicht auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen.
- 7.1 Transformationsformel. Bildmaß, Integral über Bildmaß. Produkt von Maß mit meßbarer nichtnegativer Funktion. Regularität von Borelmaßen auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n , jedoch nicht auf abzählbar basierten lokal kompakten Hausdorffräumen. Nützliche Nullmengen. Fläche unter der Glockenkurve. Nicht Flächenmaß von Fastfaltigkeiten, nur kurz mündlich was dazu gesagt.
- 12.1 Integrierbarkeit und Integral komplexwertiger Funktionen. Räume quadratintegrierbarer Funktionen und Fouriertransformation. Räume integrierbarer Funktionen, fast überall definierte Funktionen, Raum der L^p -Funktionen. Noch nicht $\| \cdot \|_p$ -Norm.
- 14.1 Die $\| \cdot \|_p$ -Norm ist eine Norm. Die L^p -Räume sind vollständig. Hilberträume, Hilbertbasen. Noch nicht der Satz über Hilbertbasen.
- 19.1 Satz über Hilbertbasen. Die differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger auf einer offenen Teilmenge der \mathbb{R}^n liegen dicht in den L^p Funktionen für $p < \infty$. Konvergenz der Fourier-Reihe in $L^2([0, 2\pi])$.
- 21.1 Einparameteruntergruppen der multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen. Charaktere der Kreisgruppe. Produkttopologie. Noch nicht topologische Gruppen.
- 26.1 Topologische Gruppen und ihre Charaktere. Charaktere von $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und von der Kreisgruppe. Fouriergruppen erklärt als topologische Gruppen, die isomorph sind zu endlichen Produkten der eben aufgezählten Beispiele. Definition, Existenz und Eindeutigkeit ihrer Haar-Maße bewiesen. Die Charaktere bilden eine Hilbertbasis des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf einer kompakten Fouriergruppe für das normierte Haarmaß.
- 28.1 Standardisierte Fouriertransformation. Formelsammlung. Die Fouriertransformation erhält den Schwarzraum. Fouriertransformierte integrierbarer Funktionen verschwinden im Unendlichen. Abstrakte Fouriertransformation eines Maßes und seine Beziehung zur standardisierten Fouriertransformation. Natürlichkeit, aber noch nicht Produktverträglichkeit.
- 2.2 Paarung, duale Paarung, exakte Paarung von Fouriergruppen. Zugehörige abstrakte Fouriertransformationen, Fourierreihe und Fouriertransformation

als Beispiele. Abstrakte Inversionsformel, konkrete Variante für \mathbb{R} , abstrakte und konkrete Poissonformel, Herleitung der Inversionsformel aus der Poissonformel (bis auf letzten Schliff).

- 4.2 Herleitung der Inversionsformel aus der Poissonformel. Interpretation der Poissonformel als Natürlichkeit. Fourierisomorphismus für quadratintegrierbare Funktionen. Gleichheit der verschiedenen Varianten der Fouriertransformation im Dualraum des Schwartzraums.
- 9.2 Falten von Maßen. Assoziativität. Verhalten unter Fouriertransformation. Beweis des zentralen Grenzwertsatzes begonnen. Gekommen bis zur punktweisen Konvergenz der charakteristischen Funktionen.
- 11.2 Beweis zentraler Grenzwertsatz beendet. Translationsinvariante abgeschlossene Teilräume des Raums der quadratintegrierbaren Funktionen auf der reellen Geraden.

Literatur

- [AL] Skriptum Algebra und Zahlentheorie. Wolfgang Soergel.
- [AN1] Skriptum Analysis 1. Wolfgang Soergel.
- [AN2] Skriptum Analysis 2. Wolfgang Soergel.
- [AN3] Skriptum Analysis 3. Wolfgang Soergel.
- [EL] Skriptum Elementargeometrie. Wolfgang Soergel.
- [FT1] Skriptum Funktionentheorie 1. Wolfgang Soergel.
- [GR] Skriptum Grundlagen. Wolfgang Soergel.
- [Kön97] Königsberger. *Analysis 1 und 2*. Springer, 1997.
- [LA1] Skriptum Lineare Algebra 1. Wolfgang Soergel.
- [LA2] Skriptum Lineare Algebra 2. Wolfgang Soergel.
- [ML] Skriptum Mannigfaltigkeiten und Liegruppen. Wolfgang Soergel.
- [MV00] Meyberg and Vachenauer. *Höhere Mathematik 2*. Springer, 2000.
- [TF] Skriptum Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie. Wolfgang Soergel.
- [TM] Skriptum Topologie und kompakte Gruppen. Wolfgang Soergel.
- [TS] Skriptum Singuläre Homologie. Wolfgang Soergel.
- [TSK] Skriptum Kategorielle Produktstrukturen. Wolfgang Soergel.

Indexvorwort

Hier werden die Konventionen zum Index erläutert. Kursive Einträge bedeuten, daß ich die fragliche Terminologie oder Notation in der Literatur gefunden habe, sie aber selbst nicht verwende. Bei den Symbolen habe ich versucht, sie am Anfang des Index mehr oder weniger sinnvoll gruppiert aufzulisten. Wenn sie von ihrer Gestalt her einem Buchstaben ähneln, wie etwa das \cup dem Buchstaben u oder das \subset dem c, so liste ich sie zusätzlich auch noch unter diesem Buchstaben auf. Griechische Buchstaben führe ich unter den ihnen am ehesten entsprechenden deutschen Buchstaben auf, etwa ζ unter z und ω unter o.

Index

- g_1 Linkseinsetzung von g , 194
- 0 neutrales Element für +
 - 0^d Null in \mathbb{R}^d , 88
- \rightsquigarrow verwandt
 - Differentialformen, 237
 - Funktionen, 184
 - Vektorfelder, 185
 - Wege, 184
 - Zweitensoren, 195
- $\langle \rangle$ Erzeugnis physikalischer Einheit, 286
- $|\omega|$ Grad der Form ω , 231
- $\dot{\gamma}$ physikalische Geschwindigkeit, 286
- X° Inneres von X , 119
- \simeq homotop, 214
- \otimes Tensorprodukt
 - von Linearformen, 193
- \wedge Dachprodukt, 230
 - äußeres Dachprodukt, 233
- \cap Schnitt
 - \bigcap von Mengenfamilie, 11
- \mathcal{A} abgeschlossen in
 - topologischem Raum, **18**
- \mathcal{O} offen in
 - topologischem Raum, **12**
- \cup Vereinigung
 - \bigcup von Mengenfamilie, 11
- \boxtimes äußeres Produkt
 - von Differentialformen, 233
- + Verschieben von Punkt um Richtungsvektor, 27
- abgeschlossen
 - topologisch, **18**
- Ableitung
 - höhere, koordinatenfrei, 253, 354
 - nach Vektorfeld, 182
 - partielle, 24
 - partielle, mit Einheiten, 41
 - Richtungs-, 29
- Abschluß, 19
- äquivalent
 - Normen, 9
- äußere Ableitung, 251
- äußeres Normalenfeld, 263
- affin
 - Abbildung, 28
 - Raum, 26
- Alembert'sches Prinzip, 299
- Algebra, 166
- alt Alternator, 228
- Alt alternierende Formen, 228
- Alternator, 251
- alternierende p -Form, 228
- analytisch
 - auf \mathbb{R}^n , 209
- Anfangswert
 - von Flußweg, 132, 133
- Anfangswertisomorphismus, 154, 156
- Anschauungsraum, **285**
- antisymmetrisch
 - Zweitensor, 197
- Arbeit gegen Kraftfeld, 206
- auswerten
 - Kovektorfeld auf Vektorfeld, 177
- $B(x; \varepsilon)$ Ball in metrischem Raum, 6
- Ball, 6
- Banach'scher Fixpunktsatz, 68
- Banachraum, 21
- berandet
 - Teilmenge, 260
- Beschleunigung, 288
 - absolute, 288
 - vektorielle, 288
- beschränkt

- Abbildung, 7
 - metrischer Raum, 7
- Betragsabstand, 5
- Bil Bilinearformen, 193
- Borromäische Ringe, 79
- Bündelprojektion, 305, 318
- $\mathcal{C}(X)$ stetige komplexwertige Funktionen auf X , 170
- \mathcal{C}^1 -Abbildung, 66
- \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus, 66
- \mathcal{C}^∞ -Abbildung
 - zwischen affinen Räumen, 253, 354
- \mathcal{C}^k -Abbildung
 - zwischen affinen Räumen, 253, 354
- \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus, 354
- $\mathcal{C}_!(X, \mathbb{R})$ stetige Funktionen mit kompaktem Träger, 102
- $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ stetige Funktionen mit kompaktem Träger, 102
- Cauchy-Folge
 - in metrischem Raum, 21
- df Differential von f , 180
- ∂T Rand von T , 119
- ∂_i Vektorfeld, 182
- ∂_x Vektorfeld, 182
- D_v konstantes Vektorfeld, 182
- $D_{\vec{v}}$ Richtungsableitung, 29
- Dachprodukt, 230
- Deformationstensor, 355
- dicht
 - Teilmenge, **167**
- Diffeomorphismus
 - \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus, 66
 - \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus, 354
- Differential, 29
 - von exp auf Matrizen, 55
 - von bilinearer Abbildung, 44
- differential equation
 - ordinary, 130
 - partial, 130
- Differentialform, 233
 - erster Ordnung, 177
 - relative, 233
- Differentialgleichung
 - gewöhnliche, 130
 - partielle, 130
- differenzierbar
 - auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 91
 - beliebig, 253
 - mehrere Veränderliche, 29
 - total, 29
- Differenzieren unter dem Integral, 53
- Dimension
 - eines affinen Raums, 27
 - von Mannigfaltigkeit, 77
- Dini, Satz von, 102
- directional derivative, 29
- diskret
 - Teilmenge von topologischem Raum, 209
- Divergenz, 268, 278
- Drehimpuls, 293, 329
- Dreiecksungleichung
 - bei metrischen Räumen, 5
- Dualraum, 175
- \mathbb{E} Anschauungsraum, 285
- Eckenkarte, 270
- Eckfaltigkeit, 268
- eckig berandet, 270
- Ehrenfest
 - Urnenmodell, 96
- Eigenfrequenzen, 317
- einfach
 - wegzusammenhängend, 215
- Einquetschen
 - Grenzwert durch, 17
- Eins-Element
 - einer Algebra, 166

Eins-Form, 177
 einsetzen
 Vektorfeld in Kovektorfeld, 177
 Einsform, 177
 Energie, 206
 kinetische, 330
 Erdbeschleunigung, 289
 Euler-Lagrange-Gleichungen, 316, 322
 explizit
 gewöhnliche Differentialgleichung,
 130
 Extrema
 in mehreren Veränderlichen, 60
 unter Nebenbedingungen, 92

 Fast-Mannigfaltigkeit, 120
 Fastfaltigkeit, 120
 Fixpunkt, 67
 Fläche, 78, 122, 125
 Flächenintegral, 113
 Fluß
 eines Vektorfelds durch eine Hy-
 perfläche, 248
 von Vektorfeld, 158
 Flußdichte, 234
 Flußweg, 132, 185, 332
 größter, 132
 maximaler, 132
 folgenkompakt, 99
 metrischer Raum, 20
 force, 288
 Form
 1-Form, 177
 Fourierreihe, 164
 Fréchet-differenzierbar, 29
 Fundamentalform, erste, 195
 Funktionaldeterminante, 106

 g Erdbeschleunigung, 289
 Gauß
 Integralsatz von, 268

 generalisierte Kraft, 312, 319, 350
 geschlossen
 Differentialform, 252
 Kovektorfeld, 216
 Geschwindigkeit
 absolute, 286
 vektorielle, 32, 286
 Geschwindigkeitsfeld, 304
 Geschwindigkeitsphasenraum, 304, 330,
 335
 unter Zwangsbedingungen, 308, 311,
 318
 glatt, 112, 263
 Abbildung
 koordinatenfrei, 253, 354
 Abbildung nach \mathbb{R}^m , 253
 gleichmäßig stetig
 metrische Räume, 22
 grad
 Gradient, 25
 $\text{grad}_\omega f$ symplektischer Gradient, 330
 grad_g Gradient zu Metrik g , 194
 Grad
 einer polynomialen Abbildung, 58
 eines Polynoms
 in mehreren Veränderlichen, 56
 Gradient, 25, 191
 symplektischer, 329
 Gram'sche Matrix, 114
 Gramm, 286
 Gravitationsfeld, 288
 Green'sche Formel, 275
 Grenzwert
 von Funktion, 16
 Gronwall
 Lemma von, 144

 Hess(f) Hesse-Matrix, 64
 Häufungspunkt
 von topologischem Raum, 15
 halboffen

in reellem affinen Raum, 35
 Hamilton'sche Gleichungen, 329
 Hamilton-Funktion, 323, 328
 Hausdorff-Raum, 15
 Hesse-Matrix, 64
 homöomorph, 87
 Homöomorphismus, 87
 homotop, 214
 mit festen Randpunkten, 214
 Wege, 214
 Homotopie
 von Wegen, 214
 Hyperfläche
 in affinem Raum, 78
 implizit
 gewöhnliche Differentialgleichung,
 130
 Impulse
 kanonische, 327
 indefinit, 63
 induzierte Metrik, 6
 induzierte Orientierung, 261
 induzierte Topologie, **13**
 $\text{Inn}_X(T)$ Inneres von T , 119
 Inneres, in topologischem Raum, 119
 Integral
 erstes, einer Differentialgleichung,
 134
 stetige reelle Funktion
 über kompakten Quader, 49
 stetige vektorwertige Funktion
 über kompaktes Intervall, 145
 Integralkurve, 133
 Integrationskarte, 119
 Integrationsweg, 211
 Inversion, 48
 isotop
 Verschlingungen, 78
 Jacobi-Matrix, 30
 Karte, 87
 auf dem Rand induzierte, 261
 Kartenwechsel, 90, 260
 Kettenregel
 in mehreren Veränderlichen, 39
 kinetische Energie, 292
 Knoten, 78
 Kodimension
 einer Untermannigfaltigkeit, 78
 kompakt
 metrischer Raum, 20
 topologischer Raum, 99
 Kompaktum, 20
 Komponente
 Wegzusammenhangskomponente,
 209
 Konfigurationsraum, 299, 335
 konform
 Abbildung, 48
 kontrahierend
 Abbildung metrischer Räume, 67
 kontravariant, 175
 Koordinaten, 74
 lokale, 89
 Koordinatensystem
 lokales
 angepaßt an Mannigfaltigkeit, 76
 lokales, 74
 kovariant, 177
 Kovektorfeld, 175
 relatives, **175**
 vektorwertiges, 205
 Kraftfeld, 288
 kritische Stelle, 61
 Kugel, 6
 Kugelkoordinaten, 74
 Kugelvolumen, 128
 Kurve
 in reellem Raum, 78
 \mathbb{L} Längengerade, 285

Lagrange'sche Multiplikatoren, 92
 Lagrangefunktion, 315, 322
 Laplaceoperator
 im \mathbb{R}^n , 279
 Leibniz-Regel
 für Differentialformen, 254
 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ Grenzwert von Folge
 in Hausdorffraum, 17
 $\lim_{x \rightarrow p}$ Grenzwert von Abbildung, 16
 Limes
 von Funktion, 16
 lineare Anteil, 28
 Linkseinssetzung
 einer Bilinearform, 194
 Lipschitz-Konstante, 67
 Lipschitz-stetig, 67
 lipschitzstetig
 lokal, 148
 partiell, 149
 Lösungsraum
 einer linearen Differentialgleichung
 allgemeiner Fall, 154
 lokales Koordinatensystem
 von Mannigfaltigkeit, 88

 m Meter, 285
 Mannigfaltigkeit
 berandete Untermannigfaltigkeit von
 affinem Raum, 258
 eingebettete, 75
 Untermannigfaltigkeit von affinem
 Raum, 78
 Mantelfläche, 128
 Markov-Kette, 96
 Markovkette, 96
 Masse, 286, 289
 schwere, 289
 träge, 289
 maximal
 Flußweg, 132
 Maximum
 isoliertes lokales, 61
 lokales, 61
 Maximumsnorm, 8
 mechanisches System, 299
 Meter, 285
 Metrik, 5
 zu Norm, 9
 metrischer Raum, 5
 Minimum
 isoliertes lokales, 61
 lokales, 61
 Mult^k multilineare Abbildungen, 253
 Multiindex, 56

 Nabla-Operator, 274
 natürliche Topologie
 auf endlichdimensionalem reellen
 Raum, 27
 negativ semidefinit, 63
 negativ definit, 63
 Newton'schen Bewegungsgleichung, 288
 nichtoffen
 Punkt, 15
 Norm
 auf abelscher Gruppe, 69
 auf reellem Vektorraum, 8
 Normalenfeld
 orientiertes, 247
 normiert
 Vektorraum, 8
 Weg, 213

 ω_F Differentialform zu Vektorfeld, 248
 ODE ordinary differential equation, 130
 offen
 in topologischem Raum, 12
 Kern, 119
 offene Überdeckung, 99
 Operatornorm, 10
 Ordnung
 einer gewöhnlichen Differentialgleichung, 130

- orientierbar
 - Fastfaltigkeit, 241
- orientiert
 - Fastfaltigkeit, 241
- Orientierung
 - von Fastfaltigkeit, 241
 - von Mannigfaltigkeit, 240
 - von Vektorraum, 240
- orientierungsverträglich, 241
- partiell
 - Ableitung, 24
 - Ableitung, mit Einheiten, 41
 - Ableitung, virtuelle, 35
 - differenzierbar, 24
- PDE partial differential equation, 130
- Periode, 164
- Pfaff'sche Form, 177
- Phasenraum, 304, 330, 333
 - Geschwindigkeitsphasenraum
 - unter Zwangsbedingungen, 308, 311, 318
- Polarisierung, 284
- Polarkoordinaten, 67
 - Gradient in, 193
- Polarkoordinatenabbildung, 33
- Polynom, 56
 - trigonometrisches, 170
- polynomial
 - Abbildung $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, 58
- positiv definit, 63
- positiv semidefinit, 63
- Potential, 322
 - eines Kraftfelds, 206
 - im Anschauungsraum, 291
- potentielle Energie, 292
- Produktmetrik, 6
- Quader, 49
- quadratische Form
 - reelle, 62
- quasikompakt, 99
- Quelldichte, 268
- Rand, 119
 - von Eckfaltigkeit, 270
 - von Randfaltigkeit, 260
- Randkarte, 258
- Raum
 - affiner, 26
- Rechteck, 50
- Rechtseinsetzung
 - einer Bilinearform, 194
- regulär
 - Abbildung $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, 58
 - Punkt von Fastfaltigkeit, 241
- Reskalierung
 - von Translationen, 27
- Richtungsableitung, 29
 - auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 91
- Richtungsraum, 27
- Richtungsvektor, 27
- Riemann
 - riemannsche Metrik, 193
- Riemannsumme
 - für Funktion auf Mannigfaltigkeit, 115
 - für Funktion auf Rechteck, 50
 - für Integral einer Volumenform, 244
 - für vektorwertige Funktion, 145
 - für Wegintegrale, 198
- Ringalgebra, 166
- Rotation, 218
 - skalare, 218
- Rotationskörper, 129
- Rückzug
 - von Funktionen, 187
 - von Kovektorfeld, 187
- Runge-Lenz-Vektor, 296
- S^n die n -Sphäre, 80

- \int_c^d Wegintegral, 203
- \int Wegintegral, 198
- schleifenfüllend, 215
- Schnitt
 - von Mengenfamilie, 11
- schwere Masse, 289
- Separation der Variablen, 140
- Shuffle, 230
- skalare Rotation
 - eines ebenen Vektorfeldes, 218
- Skalarprodukt
 - massebehaftetes, 298, 299
- Spurtopologie, **13**
- Stammfunktion, 148
- Standardmetrik
 - auf \mathbb{R}^n , 193
- stetig
 - für topologische Räume, **13**
- stetig differenzierbar
 - in mehreren Variablen, 46
- stimmen überein bis zur Ordnung, 58
- Stokes
 - Integralsatz von
 - allgemeiner, 264
 - klassischer, 274
 - mit Ecken, 271
- Stone-Weierstraß, 167
- Streßtensor, 356
- Summenregel, 44
- summierbar
 - Familie in normiertem Vektorraum, 165
- supp Träger, 102
- support, 102
- Supremumsnorm, 9
- symmetrisch
 - Zweitensor, 197
- symplektisch
 - Gradient, 329
- System von Teilmengen, 11
- \mathbb{T} Zeit, **285**
- TM , *siehe* Tangentialbündel, *siehe* Tangentialbündel
- $T_p^{\mathbb{C}}M$ Tangentialraum
 - im eingebetteten Fall, 78
- Tangentialbündel
 - im eingebetteten Fall, 305, 318
- Tangentialkegel, 76
- Tangentialraum, 76
- Tangentialvektor, 76
- Tangentialweg, 307
- Taylorentwicklung
 - in mehreren Veränderlichen, 55
- Teilsystem, 11
- Teilüberdeckung, 99
- Teilung der Eins, 112
- Tensor
 - Zweitensor, 193
- Tensorprodukt
 - von Linearformen, 193
- Topologie, **12**
 - induzierte, **13**
 - metrische, 12
 - natürliche, 12
 - auf $\bar{\mathbb{R}}^n$, 12
- topologischer Raum, **12**
- Totalgrad, 56
- träge Masse, 289
- Träger
 - einer Funktion, 102
- Trägheitsmoment, 316
- trans, 28
- Transformationsformel
 - bei kompaktem Träger, 104
- Translation
 - von affinem Raum, 27
- transponiert
 - Abbildung, 232
- trennt die Punkte, 166
- trigonometrisches Polynom, 170

- Überdeckung, 99
 - einer Teilmenge, 101
- überdeckungskompakt, 99
- Übergangswahrscheinlichkeit, 96
- Umgebung
 - ε -Umgebung, 6
 - in topologischem Raum, 12
- Umkehrsatz, 66
- Unteralgebra, 166
- Unterringalgebra, 166
- Urkilogramm, 286
- Urnenmodell, 96
- Variablentrennung, 140
- Variation der Konstanten, 156
- Vektorfeld
 - auf affinem Raum, 132
 - auf eingebetteter Mannigfaltigkeit, 332
 - relatives, **175**
- vektorwertig
 - Kovektorfeld, 205
- Vereinigung
 - von Mengenfamilie, 11
- Verschlingung, 78
- Vertauschen
 - von partiellen Ableitungen, 52
 - von partiellen Integrationen, 52
- verwandt
 - Differentialformen, 237
 - Funktionen, 184
 - Kovektorfelder, 185
 - Vektorfelder, 184
 - Wege, 184
 - Zweitensoren, 195
- $\text{vol}(v_1 | \dots | v_k)$ 114
- vollständig
 - metrischer Raum, 21
- Volumen, 114
- Weg, 197
 - geschlossener, 215
 - kompakter, 197
 - normierter, 197, 213
 - stückweise linearer, 207
 - zusammenziehbarer, 215
- Wegintegral, 198
 - für Kovektorfeld, 198
 - für Vektorfeld, 201
 - vektorwertiges, 205
- wegzusammenhängend
 - einfach, 215
- Wegzusammenhang, 207
- Wegzusammenhangskomponente, 209
- Weierstraß
 - Approximationssatz, 167
- Winkelfeld, 219
- Wirbeldichte, 218
- Wirkung, 301
- Zeit, 285
- Zeitspanne, 285
- Zentralfeld, 293
- Zirkulation, 202
- zusammenhängend
 - topologischer Raum, 209
 - wegweise, 207
- zusammenziehbar
 - geschlossener Weg, 215
- Zustand
 - bei Markovkette, 96